

MAT 5714 – FUNÇÕES ANALÍTICAS
IME-USP – 2015

LISTA DE PROBLEMAS

Notação: (1) Dado $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, denotamos por $\sqrt{x}$ o único real não-negativo tal que $(\sqrt{x})^2 = x$.

(2) Uma *raiz quadrada* de $z \in \mathbb{C}$, é um $w \in \mathbb{C}$ tais que $w^2 = z$.

(3) $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ é a fronteira de $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$.

1) Sejam p e q reais não-nulos tais que $(q/2)^2 + (p/3)^3 \geq 0$. Mostre que toda solução (possivelmente não pertencente a $\mathbb{R}$) de $x^3 + px + q = 0$ é da forma $x = u + v$, com

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad \text{e} \quad v = -\frac{p}{3u}.$$

2) Mostre que existem complexos u e v tais que $u^3 = 2 + 11i$, $v^3 = 2 - 11i$ e $u + v = 4$.

3) Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, com $b \neq 0$, mostre que as duas raízes quadradas de z são w e $(-w)$,

$$w = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \frac{b}{|b|} \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}.$$

4) Mostre que $\left| \frac{a - b}{1 - \bar{a}b} \right| < 1$ se $|a| < 1$ e $|b| < 1$.

5) (a) Mostre que, se $|z| = 1$, então $\frac{z+i}{iz+1} \in \mathbb{R}$. (b) Mostre que $\mathbb{R} \ni x \rightarrow \frac{x-i}{1-ix} \in \mathbb{C}$ é injetora e tem imagem contida em S^1 . Descreva a imagem dessa aplicação e encontre uma fórmula para sua inversa.

6) (a) Mostre que, se $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa, então $g : U \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$, também é holomorfa.

(b) Mostre que o valor absoluto de uma função holomorfa só pode ser constante se a própria função o for.

7) Os *números de Bernoulli* B_n são definidos pela série de potências $\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$.

(a) Mostre que

$$\frac{B_0}{n!0!} + \frac{B_1}{(n-1)!1!} + \cdots + \frac{B_{n-1}}{1!(n-1)!} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 0 & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

(b) Mostre que $B_n = 0$ se n for ímpar e maior do que 1.

(c) Calcule $B_0, B_1, B_2, B_4, B_6, B_8, B_{10}, B_{12}, B_{14}$.

8) Mostre que $\pi z \cot \pi z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} B_{2n} z^{2n}$.

9) Dadas seqüências de complexos $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ e $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ e inteiro positivo N , sejam

$$f_N(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n, \quad g_N(z) = \sum_{n=0}^N b_n z^n \quad \text{e} \quad (fg)_N(z) = \sum_{n=0}^N \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} z^n.$$

Mostre que vale a seguinte igualdade de polinômios:

$$f_N(z) \cdot g_N(z) = (fg)_N(z) + \sum_{n=N+1}^{2N} \left(\sum_{j=n-N}^N a_j b_{n-j} \right) z^n.$$

10) Seja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ uma série absolutamente convergente se $|z| \leq r$, seja $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$

uma série absolutamente convergente se $|z| \leq s$, e suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| s^n \leq r$. Seja $g = f \circ h$

a composição formal; isto é, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ e, para cada $N \geq 1$, $\sum_{n=0}^N c_n z^n$ é igual à soma dos

termos de grau menor ou igual a N de $\sum_{n=0}^N a_n \left(\sum_{k=1}^N b_k z^k \right)^n$. v

(a) Mostre que existem, para inteiros $n \geq 1$ e $1 \leq k \leq n$, polinômios homogêneos com coeficientes inteiros não-negativos $P_{n,k}$, de grau k e de n variáveis, tais que, para todo $n \geq 1$, temos

$$(1) \quad c_n = \sum_{k=1}^n a_k P_{n,k}(b_1, b_2, \dots, b_n).$$

(b) Mostre que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ é absolutamente convergente se $|z| \leq s$ e vale a desigualdade

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| |z|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| |z|^k \right)^n.$$

(c) Mostre que, se $p(z)$ é um polinômio, a composição formal $p \circ h$ satisfaz $(p \circ h)(z) = p(h(z))$ se $|z| \leq s$.

(d) Mostre que, se $|z| \leq s$ e $N \geq 1$, então $\left| g(z) - \sum_{n=0}^N a_n (h(z))^n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| |z|^k \right)^n$

(aqui, assim como no item (c), $h(z)$ denota o valor em z da função contínua definida em $\{z; |z| \leq s\}$ pela série h). **Sugestão:** Use que a composição formal de séries de potências satisfaz $f \circ h =$

$f_1 \circ h + f_2 \circ h$, se $f = f_1 + f_2$, para a decomposição de f como $f(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n$, aplique o item (c) para f_1 e o item (b) para f_2 .

11) Seja $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$, $|z| < 1$.

(a) Mostre que $\exp(f(z-1)) = z$, se $|z| < 1$. **Dica:** por que a igualdade é satisfeita quando z é real?

(b) Dado $z_0 \neq 0$, seja $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\exp(\alpha) = z_0$. Mostre que $\exp(f(\frac{z}{z_0} - 1) + \alpha) = z$, se $|z - z_0| < |z_0|$.

(c) Mostre que a derivada de $f(z-1)$ é igual a $1/z$.

11 $\frac{1}{2}$) (a) Encontre os termos de ordem menor ou igual a 3 da expansão em séries de potências

$$\frac{z-2}{(z+3)(z+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n.$$

(b) Encontre um $r > 0$ tal que a igualdade acima seja válida para todo z tal que $|z-1| < r$.

12) Mostre que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} (z/2)^{2n}$ satisfaz $z^2 J''(z) + z J'(z) + z^2 J(z) = 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

13) Sejam f e g analíticas em $z = 0$, $f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n$ e $g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} b_n z^n$. Mostre que, se $k \geq m > 0$, então existem e são iguais os limites $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{g(z)}$ e $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$.

14) Mostre que existe uma função analítica f , definida em um aberto A contendo 0, tal que $f(z)^2 = 1 - \cos z$ para todo $z \in A$.

15) Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e inteiro $n \geq 0$, define-se $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdots (\alpha-n+1)}{n!}$. Mostre que, para todo inteiro positivo k ,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/k}{n} z^n \right)^k = 1 + z,$$

para todo complexo z , $|z| < 1$.

Observação: Seria interessante demonstrar o que se pede por métodos algébrico-combinatórios, calculando explicitamente os coeficientes da k -ésima potência da série dada. O mais natural, entretanto, é combinar dois resultados analíticos: a estimativa para o erro da fórmula de Taylor para funções reais de uma variável real e o fato de que zeros de funções analíticas são isolados. Nessa direção, basta mostrar a convergência da série de Taylor de $f(x) = (1+x)^{1/n}$, por exemplo, no intervalo $[0, \frac{1}{2}]$. Pode ser útil a leitura do Teorema 2 e do Exemplo 4 de <http://www.ime.usp.br/~toscano/disc/calculo/taylor15.pdf>.

16) (a) Dados a e b reais positivos, mostre que existe uma série de potências φ , com raio de convergência positivo, tal que $b\varphi(z)^2 - (1 + az)\varphi(z) + z = 0$.

(b) Exiba explicitamente um $\delta > 0$, em termos de a e b , que seja menor do que o raio de convergência.

17) Determine se cada uma das funções abaixo é uma bijeção analítica com inversa analítica, quando restrita a um aberto suficientemente pequeno contendo o ponto dado.

(a) $f(z) = e^z$ em $z = 0$.

(b) $f(z) = \operatorname{sen}(z^2)$ em $z = 0$.

(c) $f(z) = (z - 1)/(z - 2)$ em $z = 1$.

(d) $f(z) = (\operatorname{sen} z)^2$ em $z = 0$.

(e) $f(z) = \cos z$ em $z = \pi$.

18) Seja $U \subset \mathbb{C}$ um aberto conexo e limitado. Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções contínuas no fecho de U e analíticas em U . Suponha que $\{f_n\}$ converge uniformemente na fronteira de U . Mostre que $\{f_n\}$ converge uniformemente em U .

19) Seja $U \subset \mathbb{C}$, aberto, conexo e limitado, seja f contínua no fecho de U e analítica em U . Mostre que, se $|f(z)|$ é constante na fronteira de U , então: ou f é constante, ou f se anula em pelo menos um ponto de U .

20) Seja f uma função analítica em $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ e contínua em $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$. Suponha que $f(e^{i\theta}) = 0$ para todo $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Mostre que $f(z) = 0$ para todo z , $|z| \leq 1$.

Dica: Considere $g(z) = f(z) \cdot f(-z) \cdot f(iz) \cdot f(-iz)$.

21) (a) Seja f uma série de potências formal $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ com $a_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$.

Mostre que, se h é uma série de potências com termo constante nulo e se a composição formal $f \circ h$ é constante (isto é, só seu termo constante é possivelmente não-nulo), então h é a série nula. **Sugestão:** Mostre que $P_{n,1}(b_1, b_2, \dots, b_n) = b_n$ em (1).

(b) Sejam $U \subseteq \mathbb{C}$ um aberto conexo, $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ analítica, $z_0 \in U$. Seja f uma função analítica definida em um aberto que contém $w_0 = h(z_0)$, $f^{(k)}(w_0) \neq 0$, para todo $k \geq 0$. Mostre que, se função composta $f \circ h$ for constante em uma vizinhança de z_0 , então h é constante.

Sugestão: Defina $\tilde{f}(z) = f(z + w_0)$, $\tilde{h}(z) = h(z + z_0) - w_0$ e use o item (a).

22)

(a) Mostre que a inversa local em torno de 0 de $f(z) = \frac{1}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$ é $f^{-1}(w) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{w^{2k+1}}{2k+1}$.

(b) Mostre que $\exp \left[2i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{2k+1} \right] = 1 + 2iz \sum_{k=0}^{\infty} (iz)^k$ se $|z| < 1$.

23) Seja C_R o círculo de raio R e centro em z_0 , orientado no sentido antihorário. Suponha que R é menor do que o raio de convergência da série $\sum_{k=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Dados também coeficientes

$a_{-m}, \dots, a_{-2}$ e a_{-1} , m um inteiro positivo, ache o valor da integral $\int_{C_R} \sum_{k=-m}^{\infty} a_n(z - z_0)^n dz$.

24) Seja $f(z) = \frac{z^2}{(z+2)(z-1)^2}$, $z \neq 1$ e $z \neq -2$. Calcule $\int_{|z-1|=1} f(z) dz$ e $\int_{|z+2|=1} f(z) dz$, orientando ambos os círculos no sentido antihorário.

Sugestão: Escreva f como séries de potências em torno dos centros dos círculos.

25) Dados $z_0 \in \mathbb{C}$ e $c > 0$, considere o segmento vertical parametrizado $\gamma(t) = z_0 + itc$, $-1 \leq t \leq 1$. Dado $x > 0$, sejam $\alpha = z_0 + x$ e $\beta = z_0 - x$. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{\gamma} \left(\frac{1}{z - \alpha} - \frac{1}{z - \beta} \right) dz$.

26) Dado $x > 0$, calcule $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \left(\frac{1}{t + ix} - \frac{1}{t - ix} \right) dt$.

27) Seja γ um caminho em $\mathbb{C}$, não-necessariamente fechado, e seja g uma função contínua definida em $\text{Im } \gamma$ (a imagem de γ). Mostre que a função f definida no aberto $\mathbb{C} \setminus \{\text{Im } \gamma\}$ por $f(z) = \int_{\gamma} \frac{g(w)}{w - z} dw$ é holomorfa e sua derivada satisfaz $f'(z) = \int_{\gamma} \frac{g(w)}{(w - z)^2} dw$.

Observação: O Problema 27 segue imediatamente do enunciado de um teorema mais geral demonstrado em sala, o Teorema III.7.7 do livro-texto, 4ª edição. Tentem provar esta afirmação mais simples usando diretamente a definição de derivada complexa, sem usar séries.

28) (a) Seja f uma função inteira satisfazendo $\sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|(1 + |z|)^{-k} < \infty$ para algum inteiro positivo k . Mostre que f é um polinômio de grau menor do que ou igual a k .

(b) Seja f uma função inteira satisfazendo $|f(z)| \leq (1 + |z|)^{3/2}$ para todo z . Mostre que f é um polinômio de grau menor do que ou igual a 1.

29) Seja f uma função inteira satisfazendo $f(z) = \int_{|\zeta|=2} \frac{\zeta^3 \cos \zeta}{\zeta - z} d\zeta$ para todo z tal que $|z| < 2$. Mostre que $f(z) = 2\pi i z^3 \cos z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

30) (a) Mostre que

$$\theta(x, y) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x}{y} & , \text{ se } y > 0, \\ \arctan \frac{y}{x} & , \text{ se } x > 0, \\ -\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x}{y} & , \text{ se } y < 0, \end{cases}$$

“está bem definida” (ou seja, se $x > 0$ e $y \neq 0$, as possíveis duas definições dadas para $\theta(x, y)$ coincidem) e é infinitamente diferenciável em $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0); x \leq 0\}$.

(b) Mostre que é holomorfa a função definida por $\text{Log } z = \log \sqrt{x^2 + y^2} + i\theta(x, y)$, $z = x + iy \in U$.

(c) Seja $D = \{(x, y); -\pi < y < \pi\}$. Mostre que a restrição da exponencial a D , $\exp: D \rightarrow U$, é bijetora e que sua inversa é $\text{Log}: U \rightarrow D$ (chamada de “ramo principal do logaritmo”)

(d) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, defina $D_\alpha = \{(x, y); \alpha - \pi < y < \alpha + \pi\}$ e $U_\alpha = \mathbb{C} \setminus \{te^{i\alpha}; t \leq 0\}$. Mostre que $\exp : D_\alpha \rightarrow U_\alpha$ é bijetora e que sua inversa é a função Log_α definida por

$$(2) \quad \text{Log}_\alpha(z) = \text{Log}(ze^{-i\alpha}) + i\alpha = \log|z| + i\varphi, \text{ sendo } -\pi - \alpha < \varphi < \pi + \alpha \text{ tal que } z = |z|e^{i\varphi}.$$

(e) Escreva Log_α como uma série de potências em torno de $z_0 = e^{i\alpha}$. Qual é o raio de convergência dessa série?

31) Sejam $D = \{x + iy \in \mathbb{C}; |x| < \frac{\pi}{2}\}$ e $U = \{x + iy \in \mathbb{C}; x \neq 0 \text{ ou } |y| < 1\}$.

(a) Mostre que $\tan: D \rightarrow U$, $\tan z = \frac{1}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$ é bijeção analítica e que sua inversa $\tan^{-1}: U \rightarrow D$ é dada por $\tan^{-1}(w) = \frac{1}{2i} \text{Log} \left(\frac{1+iw}{1-iw} \right)$ (Log denota o ramo principal do logaritmo, definido no problema anterior).

(b) Qual é o raio de convergência r da série de Taylor de $\tan$ em torno de $z = 0$? E qual é o raio de convergência da série de $\tan^{-1}$ em torno de $w = 0$?

(c) Mostre que $\{\tan^{-1}(w); |w| < s\} = \{z; -\frac{\pi}{4} < \text{Re } z < \frac{\pi}{4}\}$.

(d) Dê alguma informação relevante sobre o conjunto $\{\tan z; |z| < r\}$. Tente provar, por exemplo, que ele contém a bola aberta de centro na origem e raio $(1 - e^{-\pi})/(1 + e^{-\pi})$ e a união de semifaixas $\{w; |\text{Re } w| > 1 \text{ e } |\text{Im } w| < 1\}$.

Sugestão: Inicialmente, use métodos computacionais para obter um esboço da curva

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}e^{it}\right) = \frac{2e^{-\pi \sin t} \sin(\pi \cos t)}{e^{-2\pi \sin t} + 2e^{-\pi \sin t} \cos(\pi \cos t) + 1} + i \frac{1 - e^{-2\pi \sin t}}{e^{-2\pi \sin t} + 2e^{-\pi \sin t} \cos(\pi \cos t) + 1}, \quad 0 < t < \pi.$$

32) Seja $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa e injetora, $f(0) = 0$.

(a) Mostre que existem ϵ e δ positivos tais que $|z| > \delta \Rightarrow |f(z)| > \epsilon$.

(b) Mostre que $g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & , \text{ se } z \neq 0, \\ f'(0) & , \text{ se } z = 0, \end{cases}$ é inteira e nunca se anula.

(c) Mostre que $h(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f'(0)z}{z^2} & , \text{ se } z \neq 0, \\ \frac{f''(0)}{2} & , \text{ se } z = 0, \end{cases}$ é inteira.

(d) Para ϵ e δ como no item (a), mostre que $\frac{|h(z)|}{|g(z)|} < \frac{1}{\delta} + \frac{|f'(0)|}{\epsilon}$ se $|z| > \delta$.

(e) Mostre que $f(z) = f'(0)z$ para todo $z \in \mathbb{C}$. **Sugestão:** Liouville para h/g .

33) Mostre que toda função inteira e injetora é um polinômio de grau 1.

34) Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ as raízes (não necessariamente distintas) do polinômio P e seja γ um caminho fechado que não passa por nenhuma dessas raízes. Mostre que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{P'(z)}{P(z)} dz = W(\gamma, a_1) + W(\gamma, a_2) + \dots + W(\gamma, a_n).$$

Dica: A aplicação $f \mapsto f'/f$ leva produtos em somas.

35) Seja h analítica no aberto U , $h(z) \neq 0$ para todo $z \in U$, seja $f(z) = (z - z_0)^m h(z)$ e seja γ um caminho fechado homólogo a 0 em U , $z_0 \notin \text{Im } \gamma$. Mostre que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = W(\gamma, z_0)m.$$

36) Seja U um aberto simplesmente conexo, sejam $z_1, \dots, z_n$ pontos de U , seja $U^* = U \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$, seja f analítica em U^* . Seja $r > 0$ tal que os discos fechados de centro em z_j e raio r sejam dois a dois disjuntos e estejam contidos em U^* . Sejam γ_k os círculos de raio r e centro em z_k orientados no sentido antihorário e sejam $a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} f(\zeta) d\zeta$. Mostre que existe H analítica em U^* tal que

$$H'(z) = f(z) - \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{z - z_k}, \quad \text{para todo } z \in U^*.$$

37) Seja f analítica no aberto U e seja $z_0 \in U$ tal que $f'(z_0) \neq 0$. Mostre que, se C for um círculo positivamente orientado com centro em z_0 e raio suficientemente pequeno, então temos

$$\frac{2\pi i}{f'(z_0)} = \int_C \frac{1}{f(z) - f(z_0)} dz.$$

38) Seja f uma função inteira que só se anula em $z = 0$. Suponha que existem positivos ϵ e δ tais que $|f(z)| > \epsilon$ sempre que $|z| > \delta$. Mostre que existem $a \in \mathbb{C}$ não-nulo e n , inteiro positivo, tais que $f(z) = az^n$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Sugestão: Mostre que $z = 0$ não é uma singularidade essencial de $f(1/z)$

39) Seja f uma função inteira, não constante. Mostre que a imagem de f é densa.

39 $\frac{1}{2}$) Mostre que, se f é uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ e se $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$, então: (a) o número de polos de f é finito e (b) f é uma função racional (isto é, um quociente de dois polinômios).

40) Encontre os 4 primeiros termos não nulos da série de Laurent de $f(z) = 1/[z^2(1 - \cos z)]$ em algum anel da forma $\{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < \delta\}$, $\delta > 0$. Qual é o maior valor de δ para o qual a soma da série é igual a $f(z)$ para todo z no anel?

41) Encontre os 4 primeiros termos da série de Laurent de $f(z) = e^z/(z^3 + z)$ em algum anel da forma $\{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < \delta\}$, $\delta > 0$. Para que valores de z a soma da série é igual a $f(z)$?

42) Mostre que as séries seguintes definem funções meromorfas em $\mathbb{C}$, determine seus polos e as ordens e resíduos em cada polo: (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } nz}{n!(z^2 + n^2)}$.

43) (a) Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2 z^2 + 1}$ define uma função meromorfa f em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(b) Determine os polos de f e calcule o resíduo de f em cada deles.

(c) Mostre que a restrição de f a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ possui extensão contínua a $\mathbb{R}$

44) Seja f analítica em $\{z; 0 < |z - z_0| < r\}$. Suponha que, em z_0 , f tem um polo simples com resíduo igual a $n \in \mathbb{Z}$. Mostre que existe h analítica em $\{z; |z| < r\}$ com $h(z_0) \neq 0$, tal que $g(z) = (z - z_0)^n h(z)$ satisfaz $f = g'/g$.

45) Seja f analítica em $\{z; \operatorname{Im} z \geq 0\}$, tal que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = 0$. Mostre que, para todo z com

$\operatorname{Im} z > 0$, temos $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t - z} dt$.

46) Mostre que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi e^{-\frac{|\xi|}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{|\xi|}{\sqrt{2}} + \operatorname{sen} \frac{|\xi|}{\sqrt{2}} \right)$, para todo $\xi \in \mathbb{R}$.

47) Denotemos neste problema por “log” o ramo do logaritmo definido em $\mathbb{C} \setminus \{it; t \leq 0\}$ pela equação (2) com $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Seja $f(z) = \frac{(\log z)^2}{1 + z^2}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{it; t \leq 0\}$. Dados $0 < \delta < 1 < R$, seja $C_{R,\delta}$ o caminho fechado que consiste da concatenação das seguintes quatro curvas diferenciáveis:

(i) o intervalo $[-R, -\delta]$, (ii) o semicírculo S_δ de raio δ e centro na origem, percorrido no sentido horário no semiplano superior, (iii) o intervalo $[\delta, R]$ e (iv) o semicírculo S_R de raio R e centro na origem, percorrido no sentido antihorário no semiplano superior.

(a) Calcule $\int_{C_{R,\delta}} f(z) dz$.

(b) Mostre que são nulos os limites $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S_\delta} f(z) dz$ e $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} f(z) dz$.

(c) Mostre que $\int_0^\infty \frac{\log x}{1 + x^2} dx = 0$ e $\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{1 + x^2} dx = \frac{\pi^3}{8}$.

48) Dado $a \in \mathbb{R}$, $|a| \neq 1$, mostre que $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + a^2 + 2a \cos \theta} d\theta = \frac{2\pi}{|a^2 - 1|}$.

Dica: Se $z = e^{i\theta}$, $\cos \theta = (z + \frac{1}{z})/2$.