MAT 5714 (Funções Analíticas) - Pós-graduação em Matemática - IME - USP

2^a Prova - 23 de novembro de 2015

Questão 1 (2,5 pts) Seja $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^3+z}$. Seja S_R o semicírculo de raio $R > 0$ e centro na origem, contido no semiplano superior e parametrizado no sentido anti-horário, $S_R = \{Re^{it};\ 0 \leq t \leq \pi\}$. Defina então, para R positivo e diferente de 1, $I_R = \displaystyle\int_{S_R} f(z)\,dz$.

(a) Mostre que $\lim\limits_{R\to 0} I_R = \pi i$.

(b) Mostre que $\lim\limits_{R\to\infty} I_R = 0$.

Seja $C_{R,\delta}$, $0 < \delta < 1 < R$, o caminho fechado que consiste da concatenação das seguintes quatro curvas diferenciáveis: (i) o intervalo $[-R, -\delta]$, (ii) $(-S_\delta)$, isto é, o semicírculo de raio δ e centro na origem, percorrido no sentido horário no semiplano superior, (iii) o interval $[\delta, R]$ e (iv) o semicírculo S_R.

(c) Calcule $\displaystyle\int_{C_{R,\delta}} f(z)\,dz$.

(d) Conclua que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^3+x}\,dx = \frac{\pi(e-1)}{2e}$.

Questão 2 (2,5 pts) Seja m um inteiro positivo e sejam $a_n \in \mathbb{C}$, $n = -m, -m+1, -m+2, \cdots$, tais que a série $\displaystyle\sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge, para todo z tal que $0 < |z-z_0| < \delta$. Defina, para cada um desses valores de z, $f(z)$ como sendo igual à soma da série. Supondo que $f(z) \neq 0$ se $0 < |z-z_0| < \delta$ e que $a_{-m} \neq 0$,

(a) mostre que $1/f(z)$ tem uma extensão holomorfa g a $\{z;\ |z-z_0| < \delta\}$, tal que $g^{(j)}(z_0) = 0$ se $0 \leq j < m$;

(b) expresse $g^{(m)}(z_0)$ e $g^{(m+1)}(z_0)$ em termos dos a_n's.

Questão 3 (2,5 pts) Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(nz-1)^2}$ define uma função meromorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, com polos duplos e resíduos nulos em $z = \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

`Sugestão`: Mostre primeiro que a série define uma função holomorfa em $\{z \in \mathbb{C};\ z \neq 0 \text{ e } z \neq \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \cdots\}$.

Questão 4 (2,5 pts) Seja D o disco unitário aberto centrado na origem, $D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$.

(a) Mostre que, se $f : D \to D$ é analítica e $f(0) = 0$, então $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in D$.

`Sugestão`: Aplique o princípio do máximo para $\dfrac{f(z)}{z}$ em $\{|z| \leq r\}$, $0 < r < 1$.

Seja P o semiplano aberto que consiste dos $z \in \mathbb{C}$ tais que $\operatorname{Re} z > 0$.

(b) Mostre que $T(z) = \dfrac{1-z}{1+z}$ é um isomorfismo analítico de P em D. `Dica`: Calcule $T(T(z))$.

(c) Seja $f : D \to P$ analítica tal que $f(0) = 1$. Mostre que $\dfrac{1-|z|}{1+|z|} \leq |f(z)| \leq \dfrac{1+|z|}{1-|z|}$, para todo $z \in D$.