MAT 0450 - Seminário de Resolução de Problemas - Turma 47

1^a Prova - 30 de abril de 2013

1	
2	
3	
4	
Total	

Nome : ____

Número USP : ____

Assinatura : ____

Cada questão em branco vale 0,25.

Questão 1: Sejam x e y inteiros. Mostre que $8x + 4y$ é divisível por 11 se, e somente se, $6x + 3y$ é divisível por 11.

Questão 2: (a) Dado um ponto P no interior de um triângulo equilátero, sejam x, y e z as distâncias de P aos lados do triângulo. Mostre que o valor da soma $x + y + z$ é igual à altura do triângulo.

(b) Dado um ponto P no interior de um tetraedro regular, sejam x, y, z e w as distâncias de P às faces do tetraedro. Mostre que o valor da soma $x + y + z + w$ é igual à altura do tetraedro. (Use sem demonstrar que, se a aresta do tetraedro mede a, então a altura mede $a\sqrt{6}/3$.)

Questão 3: Calcule o valor de
$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!},$$
para $n = 1$, 2, 3 e 4. Conjecture uma fórmula geral e demonstre sua validade.

Questão 4: Dados n um inteiro maior que 2 e p um primo menor que n, seja l o único natural tal que a desigualdade $p^l \leq n < p^{l+1}$ seja satisfeita.

(a) No caso em que $p = 2$, mostre que:

`o expoente de` p `na fatoração de qualquer inteiro` k, $k \neq p^l$ `e` $1 \leq k \leq n$ `é menor do que` l.

(b) Dê exemplo de um inteiro n e de um primo $p > 2$ tais que a afirmação destacada acima seja falsa.

(c) Dê exemplo de um inteiro n e de um primo $p > 2$ tais que a afirmação destacada acima seja verdadeira.