

NOTAS DE AULA

MAT 0230 - GEOMETRIA E DESENHO GEOMÉTRICO 1
2º SEMESTRE DE 2025, TURMA 42
IME - USP
SEVERINO TOSCANO DO REGO MELO

SUMÁRIO

Introdução	3
1. Os Postulados de Euclides (para geometria plana)	4
2. Axiomas de Incidência	6
3. Modelos	7
Plano de Descartes	8
Plano de Poincaré	9
Geometrias finitas	10
Esfera de Riemann	10
Planos projetivos	11
4. Axiomas de Ordenamento	12
Separação do plano	14
Ordenamento de quatro pontos	17
Separação da reta	18
Teorema da Barra Transversal	20
Interior de triângulo. Independência do Postulado de Pasch	21
Mais alguns resultados técnicos sobre ordenamento	22
Ordenamento no Plano de Descartes e no de Plano de Poincaré	24
5. Axiomas de Congruência	25
Congruência de segmentos	25
Congruência de ângulos	26

Axioma C6. Casos LAL e ALA de congruência	27
Teorema do Triângulo Isósceles	28
6. Mais consequências dos Axiomas de Congruência	29
Subtração de segmentos. Congruência dos suplementares de congruentes. Opostos pelo vértice.	29
Adição e subtração de ângulos	30
Caso LLL de congruência	31
Pons Asinorum (a demonstração de Euclides do Teorema do Triângulo Isósceles).	32
7. Mais resultados da Geometria Neutra	34
Desigualdades entre segmentos e entre ângulos, existência de triângulos isósceles.	34
Existência da perpendicular, o Quarto Postulado de Euclides	37
Ângulos externos, unicidade da perpendicular, existência da paralela	39
Alternos internos, critério LAA, existência do ponto médio	40
Bissetrizes	41
O que provou Legendre ao tentar demonstrar o Quinto Postulado	42
8. O Quinto Postulado e algumas de suas consequências	43
9. Construções	44
Axioma sobre interseção de círculos	44
Construção de um triângulo equilátero	45
10. Os teoremas de Tales e de Pitágoras	46
11. Apêndice: Relações de Equivalência	46
12. Algumas Soluções	47
Solução do Problema 3	47
Resultados de Geometria Analítica necessários para o Problema 4	48
Solução do Problema 4	48
Solução do Problema 19	50
13. Provas	50
Primeira Prova	50
Referências	51

INTRODUÇÃO

Esta é uma versão modificada, ainda em processo de edição, de notas de aula escritas para turmas da disciplina MAT0230 (Geometria e Desenho Geométrico I), que venho ministrando desde 2022 para alunos da Licenciatura em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Nosso objetivo é a compreensão dos fundamentos da geometria euclideana numa linguagem contemporânea. Estamos interessados primordialmente no método axiomático, que consiste em enunciar claramente quais são as premissas e, a partir delas, dar demonstrações completas de todos os resultados da teoria. As civilizações islâmica e ocidental herdaram esse método de Euclides, que consolidou no tratado *Os Elementos* [1] boa parte da Matemática conhecida na civilização helenística no quarto século antes de Cristo.

Euclides principia sua obra enunciando certas “noções comuns” (regras lógicas de dedução) e seus cinco “postulados”. Os quatro primeiros postulados podem ser encarados como simples verdades autoevidentes. Já o quinto, embora pareça correto, não é tão natural quanto os outros. Durante dois milênios, estudiosos tentaram demonstrar que o quinto postulado era supérfluo, ou seja, que podia ser deduzido a partir das verdades autoevidentes contidas nos quatro primeiros postulados e nas noções comuns. Foram dadas muitas “demonstrações” falaciosas, que na verdade continham alguma passagem em que se usavam, sutilmente, sem que se percebesse, consequências do quinto postulado. No século XIX, a construção de modelos de “geometria não-euclideana”, em que todos os postulados, menos o quinto, eram satisfeitos, mostrou de uma vez por todas que Euclides estava certo: é preciso se supor verdadeiro o quinto postulado para que seja possível demonstrar os resultados clássicos da geometria, como por exemplo os teoremas de Tales e de Pitágoras, conhecidos desde muito antes de Euclides.

A revolucionária descoberta das geometrias não-euclidianas evidenciou a necessidade de fundamentar a geometria em uma linguagem mais rigorosa do que a de Euclides. Para compreender, por exemplo, qual foi o erro de Legendre ao acreditar que tinha demonstrado o quinto postulado, era necessário explicitar os axiomas que Euclides tinha assumido apenas implicitamente e escrever demonstrações que pudessem ser verificadas usando apenas argumentos formais, sem o auxílio de figuras. No final do século XIX, Pasch enunciou os hoje chamados de “axiomas de ordenamento” que estabelecem as regras que podem ser usadas ao se lidar com a noção de um ponto estar entre dois outros pontos, e que têm como consequências a separação de uma reta por um ponto em duas partes disjuntas, e a separação de um plano por uma reta em dois semiplanos. Em seus “Fundamentos da Geometria” [4], baseando-se mais imediatamente no trabalho de Pasch, e coroadando um esforço de dois milênios de investigações, Hilbert propôs um conjunto de axiomas que completou a geometria de Euclides. Essa é talvez a segunda mais importante referência da Geometria, após os *Elementos*, naturalmente.

Nos anos 1930, Birkhoff propôs uma grande simplificação na teoria axiomática de Euclides-Hilbert. Ele partiu do princípio de que são conhecidos os números reais e suas propriedades e assumiu o “axioma da régua”, que estabelece uma bijeção entre uma reta e o conjunto dos números reais. Daí as noções de congruência e de estar-entre deixam de ser noções primitivas e tornam-se definições. E os postulados de Hilbert de ordenamento e congruência se tornam proposições, que podem ser demonstradas usando as propriedades dos números reais. A abordagem de Birkhoff é chamada de “geometria métrica”, a de Hilbert, de “geometria sintética”. O estudo da geometria sintética permite melhor apreciar a epopeia que começou com Euclides e culminou com a descoberta das geometrias não-euclidianas, e pode servir de porta de entrada para tópicos matemáticos mais avançados, em Lógica e em Álgebra, por exemplo. A geometria métrica é a que se ensina na Escola Básica, é a que se aplica em problemas de Física ou Engenharia. Por isso é discutível qual abordagem é a mais adequada para uma disciplina voltada para alunos de Licenciatura. Por um lado, estudar a geometria métrica os prepara melhor no conteúdo específico que vão ensinar; por outro, a abordagem sintética os coloca em contato com temas históricos importantes, que realçam o papel que a Matemática teve no desenvolvimento da civilização como um todo.

Embora muitas vezes eu vá direto às fontes, que são os livros de Euclides e de Hilbert, eu me baseei principalmente em quatro textos didáticos mais modernos, especialmente em [2], do qual tomei emprestadas a nomenclatura, a notação, e a ordem dos assuntos. Também fui muito influenciado por [6], que faz um interessante paralelo entre a abordagem métrica e a sintética da geometria. Consulte bastante [3], cuja exposição é mais profunda e mais completa do que as de [2, 6], além de servir como um guia excelente para se ler Euclides a partir de um ponto de vista moderno. De [5], extraí a construção de dois modelos: o plano de Descartes e o

plano de Poincaré. Estas notas são escritas com mais detalhes do que esses seis livros citados. Minha intenção foi tornar o assunto mais acessível para leitores menos experientes. Espero não ter exagerado a ponto de ter tornado cansativa a leitura.

1. OS POSTULADOS DE EUCLIDES (PARA GEOMETRIA PLANA)

O ponto de partida da geometria euclideana são os seguintes termos ou frases que aceitamos sem definição: (1) ponto, (2) reta, (3) congruência, (4) um ponto está em uma reta, (5) um ponto está entre dois pontos. Dizer que a reta r passa pelo ponto P é o mesmo que dizer que o ponto P está na reta r . Denotaremos congruência por $\cong$.

As noções de congruência, de “estar entre” e de “estar em” serão sujeitas a certos axiomas, oportunamente enunciados. Nos Elementos [1], os axiomas sobre a noção de estar-entre e diversos axiomas sobre as noções de estar-em e de congruência são assumidos apenas implicitamente. Alguns dos axiomas sobre congruência são incluídos por Euclides nas “noções comuns” que antecedem o enunciado da sua primeira proposição.

Postulado 1. *Dados ¹ dois pontos P e Q , existe uma única reta que passa por P e Q . Essa reta é denotada por $\overleftrightarrow{PQ}$.*

Claro que $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{QP}$.

Na versão original do Primeiro Postulado, Euclides não menciona unicidade. Diz apenas: “Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto”. O resto do tratado, entretanto, contém pistas de que ele, implicitamente, assumia que a reta era única.

Na Seção 4, vamos enunciar todos os axiomas sobre o “estar entre”, que daí em diante serão chamados de axiomas de ordenamento. Para enunciar os demais postulados de Euclides, precisamos antecipar o seguinte axioma, que será posteriormente incluído no que chamaremos de “Axioma B1”.

Postulado X. Se o ponto B está entre A e C , então B está na reta $\overleftrightarrow{AC}$.

Definição 1.1. *Dados dois pontos A e B , o segmento de extremidades A e B , que denotaremos por AB , é o conjunto de pontos que consiste de: A , B e de todos os pontos que estão entre A e B .*

Segue do Postulado X que todos os pontos de AB estão na reta $\overleftrightarrow{AB}$.

A formulação original [1] do segundo postulado de Euclides é “fique postulado prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta” (reta limitada é como Euclides chamava um segmento). Seguindo Greenberg [2], adotaremos aqui a seguinte interpretação do que Euclides queria dizer:

Postulado 2. *Dado o segmento AB , para todo segmento CD existe um ponto E tal que B está entre A e E e BE é congruente a CD .*

Em outras palavras, todo segmento pode ser estendido indefinidamente, a partir de cada uma de suas extremidades.

Definição 1.2. *Dados dois pontos O e A , o círculo de centro O que passa por A é o conjunto dos pontos P tais que $OP \cong OA$.*

O enunciado original do terceiro postulado de Euclides é: “fique postulado, com todo centro e distância, descrever um círculo” [1]. Para os padrões modernos de rigor, seria necessário antes definir distância. Em vez disso, adotamos a seguinte formulação de [2] do terceiro postulado.

¹Sempre que nos referirmos a dois pontos, ou duas coisas quaisquer, ficará implícito que os dois pontos, ou as duas coisas, são distintos.

Postulado 3. *Dados dois pontos O e A , existe o círculo de centro O e raio OA .*

Usando a linguagem de conjuntos, onipresente na matemática contemporânea, o Postulado 3 se torna supérfluo diante da Definição 1.2.

Os três primeiros Postulados de Euclides podem ser interpretados como postulados do desenho geométrico. Chama-se de *régua euclideana* o instrumento ideal que permite traçar retas e de *compasso euclideano* o instrumento ideal que permite traçar círculos. Os dois primeiros postulados nos dizem que, usando uma régua, é possível traçar e prolongar indefinidamente a única reta que passa por dois pontos dados. O terceiro nos diz que, usando compasso, dados dois pontos, é possível traçar o círculo com centro em um dos pontos e passando pelo outro.

Definição 1.3. *Dados dois pontos A e B , a semirreta $\overrightarrow{AB}$ é o conjunto dos pontos P da reta $\overleftrightarrow{AB}$ tais que P pertence ao segmento AB ou B está entre A e P . Diremos então que A é o vértice da semirreta, ou que a semirreta se origina em A .*

Definição 1.4. *As semirretas distintas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são opostas se $\overleftarrow{AB}$ e $\overleftarrow{AC}$ são iguais.*

Definição 1.5. *Um ângulo com vértice em A é a união de duas semirretas não opostas que se originam em A . As duas semirretas são chamadas de lados do ângulo. Denotamos por $\angle BAC$ ou $\angle CAB$ o ângulo formado pelas semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.*

Definição 1.6. *Os dois ângulos $\angle BAD$ e $\angle DAC$ são suplementares se as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são opostas.*

Definição 1.7. *Um ângulo é reto se é congruente a um ângulo suplementar a ele.*

Postulado 4. *Todos os ângulos retos são congruentes entre si.*

É importante frisar que os dois ângulos retos do enunciado do Postulado 4 não são necessariamente suplementares. Um deles pode estar aqui do nosso lado e o outro em outra galáxia. Num certo sentido, este postulado reflete a homogeneidade do espaço.

Na geometria métrica de Birkoff [6], que é a abordagem da geometria euclideana adotada em todos os livros de geometria para o Ensino Médio ou Fundamental, postula-se que todo ângulo possui uma medida, e define-se que dois ângulos são congruentes se possuem a mesma medida e que um ângulo é reto se mede 90 graus. Nessa abordagem, o Postulado 4 é uma proposição trivial. Antes de Birkoff, sem usar números reais, usando seus postulados de ordenamento e congruência, Hilbert demonstrou ([4, Teorema 21], ver também [6, Theorem 8.2.3]) o Postulado 4; ou seja, mostrou que ele é um postulado supérfluo também na *geometria sintética*. Hilbert atribui o resultado a Proclus, matemático e filósofo que viveu no século V. Nestas notas, o argumento de Hilbert é exposto no Teorema 7.15.

Definição 1.8. *Duas retas r e s são paralelas se nunca se encontram, ou seja, se nenhum ponto está simultaneamente em r e em s .*

Na geometria espacial, exige-se também que duas retas paralelas sejam coplanares, mas estas notas tratam apenas da geometria plana.

Na tradução de Irineu Bicudo [1], a formulação do Quinto Postulado nos Elementos é: “fique postulado, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos”. Em outras palavras, suponha que sejam dadas três retas r , s e t , que t intersecta r e s , e que, em um dos lados de t a soma dos ângulos internos é menor do que dois retos. Então r e s se encontram no lado de t em que a soma dos ângulos internos é menor do que dois retos.

Como em [2], adotaremos a seguinte formulação do Quinto Postulado, comumente atribuída a Playfair, matemático escocês do século XVIII, mas que na verdade remonta a Proclus.

Postulado 5. *Dadas uma reta r e um ponto P que não está em r , existe uma única reta paralela a r que passa por P .*

A vantagem da formulação de Proclus/Playfair sobre a de Euclides é que a primeira envolve menos conceitos. Pode-se considerar a validade, ou não, do Postulado 5 em sistemas formais que satisfaçam apenas os “axiomas de incidência” (assunto da próxima seção); enquanto que a formulação de Euclides depende dos axiomas de ordenamento e congruência para ser enunciada (é preciso fazer sentido falar nos lados do plano determinados por uma reta, é preciso fazer sentido dizer que a soma de dois ângulos é menor do que dois retos).

Mais adiante, de posse dos axiomas de incidência, de ordenamento e de congruência, discutiremos a equivalência das duas formulações. Veremos que decorre dos axiomas básicos que, dadas uma reta r e um ponto P que não está em r , sempre existe pelo menos uma reta paralela a r que passa por P . A unicidade dessa reta é que é equivalente à formulação original do Quinto Postulado de Euclides.

O matemático francês Adrien Marie Legendre, que viveu de 1752 a 1833 e deu importantes contribuições à Mecânica e à Geometria, acreditou que tinha demonstrado o Quinto Postulado. Vamos listar em seguida os passos de uma de suas “demonstrações”, sendo dadas a reta r e um ponto P que não está em r . A figura quase indispensável para acompanhar o argumento será omitida neste documento. A leitora pode pegar papel e caneta e desenhar sua própria figura, ou pode consultar a Figura 1.12 de [2].

- (1) Seja Q o ponto em r tal que $\overrightarrow{PQ}$ e r sejam perpendiculares.
- (2) Seja s a reta que passa por P e é perpendicular a $\overrightarrow{PQ}$.
- (3) Então s é paralela a r . Seja t uma reta que passa por P e é diferente de s . Queremos provar que t e r se interceptam.
- (4) Seja R um ponto que está em t e está no mesmo lado de s que r .
- (5) Seja R' um ponto do lado oposto ao de R relativamente à reta $\overrightarrow{PQ}$ tal que $\angle QPR \simeq \angle QPR'$.
- (6) O ponto Q está no interior do ângulo $\angle RPR'$.
- (7) Segue da afirmação precedente que a reta r intesecta um dos lados desse ângulo, $\overrightarrow{PR}$ ou $\overrightarrow{PR'}$.
- (8) Se a reta r intersecta $\overrightarrow{PR}$, está provado o que queríamos, pois P e R são pontos de t .
- (9) Suponha que r intersecta $\overrightarrow{PR'}$ e chame sua interseção de A . Tome B pertencente a $\overrightarrow{PR}$ tal que $PA \simeq PB$.
- (10) Pelo critério LAL de congruência de triângulos, $\triangle PQA \simeq \triangle PQB$. Logo $\angle PQA$ é congruente a $\angle PQB$.
- (11) O ângulo $\angle PQA$ é reto, porque as retas r e $\overrightarrow{PQ}$ são perpendiculares. Logo $\angle PQB$ também é reto e portanto as semirretas $\overrightarrow{QA}$ e $\overrightarrow{QB}$ são opostas.
- (12) Como Q e A estão em r , B também está em r e é portanto o ponto de encontro das retas r e t .

Temos um desafio bastante complexo pela frente: justificar os passos corretos desta sucessão de argumentos, e detectar a passagem em que Legendre usou sem perceber um fato que só possa ser demonstrado supondo válido o Quinto Postulado, o que torna este um argumento inválido por ser circular. Vamos revisitar esta “demonstração errada” quando a teoria, que começaremos a desenvolver sistematicamente na próxima seção, estiver suficientemente desenvolvida.

2. AXIOMAS DE INCIDÊNCIA

São apenas três os termos ou frases adotados sem definição na geometria de incidência plana: (1) ponto, (2) reta, (3) um ponto está em uma reta. A partir desses termos *primitivos*, outros termos podem ser definidos: (1) uma reta r passa por P se P está em r , (2) os pontos $P, Q, R, \dots$ são *colineares* se existe uma reta r na qual eles todos estão, (3) as retas $r, s, t, \dots$ são *concorrentes* se existe um ponto P que está em todas elas, (4) duas retas são *paralelas* se não são concorrentes. Às vezes diremos também que o ponto P “pertence” à reta r se P está em r , mas não usaremos o símbolo de pertencimento $\in$ da teoria dos conjuntos, pois uma reta não necessariamente consiste de um conjunto de pontos.

São três os axiomas da Geometria de Incidência:

- (I1) Dados dois pontos P e Q , existe uma única reta r que passa por P e por Q .
- (I2) Dada uma reta r , existem pelo menos dois pontos que estão em r .
- (I3) Existem pelo menos três pontos não colineares.

Notem que o Axioma I1 é o Primeiro Postulado de Euclides. Como já afirmamos na Seção 1, a reta r determinada por P e Q será denotada por $\overleftrightarrow{PQ}$ ou $\overleftrightarrow{QP}$.

Proposição 2.1. *O ponto R , distinto de P , está em $\overleftrightarrow{PQ}$ se e somente se $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{PR}$.*

Demonstração: Se o ponto R está em $\overleftrightarrow{PQ}$, então a única reta determinada por P e R é $\overleftrightarrow{PQ}$, ou seja, $\overleftrightarrow{PR} = \overleftrightarrow{PQ}$.

Por definição, R é um ponto de $\overleftrightarrow{PR}$. Logo, se $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{PR}$, então R é um ponto de $\overleftrightarrow{PQ}$. □

Proposição 2.2. *Dadas duas retas concorrentes r e s , existe apenas um ponto P que está nas duas simultaneamente.*

Demonstração: Se existissem dois pontos P e Q ambos pertencentes às retas r e s , então, pela unicidade postulada no Axioma I1, r e s seriam a mesma reta, $r = s = \overleftrightarrow{PQ}$. Mas, por hipótese, elas são duas retas. □

Dadas duas retas concorrentes r e s , se P é o único ponto que está simultaneamente em r e s , então diremos que P é o *ponto de interseção* de r e s .

Proposição 2.3. *Existem três retas não-concorrentes; isto é existem três retas r , s e t tal que não existe um ponto P que esteja em r , em s e em t simultaneamente.*

Demonstração: O Axioma I3 garante que existem três pontos não-colineares A , B e C . Afirmando que as retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CA}$ são distintas e não-colineares. De fato, são três retas distintas porque se duas delas fossem iguais, os três pontos seriam colineares (Proposição 2.1). E, pela Proposição 2.2, B é o único ponto que pertence simultaneamente a $\overleftrightarrow{AB}$ e a $\overleftrightarrow{BC}$. Logo, se as três retas fossem concorrentes, B pertenceria a $\overleftrightarrow{AC}$, contradizendo o fato de que A , B e C não são colineares. □

Proposição 2.4. *Dada uma reta r , existe pelo menos um ponto P que não está em r .*

Demonstração: O Axioma I3 garante que existem três pontos não-colineares A , B e C . Pelo menos um dos três pontos não está em r ; pois, caso contrário, os três pontos seriam colineares. □

Proposição 2.5. *Dado um ponto P , existe pelo menos uma reta que não passa por P .*

Demonstração: Se todas as retas passassem por P , não existiriam três retas não-concorrentes, contrariando a Proposição 2.3. □

Proposição 2.6. *Dado um ponto P , existem pelo menos duas retas que passam por P .*

Problema 1. Demonstre a Proposição 2.6.

Problema 2. Mostre que, dado um ponto P , existem pontos Q e R tais que P , Q e R não sejam colineares.

3. MODELOS

Dado um sistema axiomático, tal como a Geometria de Incidência, uma *interpretação* do sistema é a atribuição de significados aos termos adotados sem definição. Se os axiomas, com essa interpretação, são afirmações verdadeiras, essa interpretação é um *modelo*. Os axiomas da geometria de incidência são tão frouxos que permitem a existência de modelos completamente diferentes entre si, como veremos nesta seção. Em dois desses exemplos, usaremos os números reais.

As proposições que se demonstrem usando apenas os axiomas (I1), (I2) e (I3) e suas consequências serão automaticamente válidas em qualquer modelo da Geometria de Incidência.

Na linguagem da teoria dos conjuntos, uma interpretação da Geometria de Incidência consiste de um conjunto de pontos $\mathcal{P}$, um conjunto de retas $\mathcal{L}$ e, para descrever a noção de estar-em, um subconjunto $\mathfrak{R}$ de $\mathcal{P} \times \mathcal{L}$. Diremos que P está em r se, e somente se, $(P, r) \in \mathfrak{R}$. Chamaremos a noção de estar-em também de “relação de incidência”.

Plano de Descartes. Os pontos são os elementos de $\mathbb{R}^2$. As retas são os subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ da forma

$$L_{a,b,c} := \{(x, y); ax + by = c\}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad (a, b) \neq (0, 0).$$

Um ponto P está na reta r se $P \in r$. As Proposições 3.1 e 3.2, enunciadas e demonstradas a seguir, expressam que, para esta interpretação, os axiomas (I1) e (I2) são satisfeitos. Os pontos $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ e $C = (0, 1)$ não são colineares pois $\overleftrightarrow{AB}$ é a reta de equação $y = 0$, que não passa pelo ponto C ; ou seja, também o Axioma I3 é satisfeito. Tudo junto, isso mostra que o *plano cartesiano* é um modelo da Geometria de Incidência (leia mais sobre isso em [5, Section 2.1] e [6, Chapter 2]).

Proposição 3.1. *Dados dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em $\mathbb{R}^2$, existe uma única reta r que passa por (x_1, y_1) e (x_2, y_2) .*

Demonstração: Dados dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em $\mathbb{R}^2$, é imediato verificar que a equação

$$(1) \quad (y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y = (y_2 - y_1)x_1 + (x_1 - x_2)y_1$$

é satisfeita pelos dois pontos dados. O par de coeficientes $(y_2 - y_1, x_1 - x_2)$ é diferente de $(0, 0)$ porque os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são distintos. Logo $(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y = (y_2 - y_1)x_1 + (x_1 - x_2)y_1$ é a equação de uma reta que passa pelos dois pontos dados. Isto prova a existência.

Suponha que $ax + by = c$ é a equação de uma reta que passa pelos dois pontos dados, (x_1, y_1) e (x_2, y_2) ; isto é, suponha que vale $ax_1 + by_1 = ax_2 + by_2 = c$. Vamos provar que a equação $ax + by = c$ é equivalente à equação em (1).² Vamos dividir o argumento em três casos: (i) $x_1 = x_2$ e $y_2 \neq y_1$, (ii) $x_1 \neq x_2$ e $y_2 = y_1$, (iii) $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$ (o caso em que $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$ não ocorre porque os pontos são distintos).

No caso em que $x_1 = x_2$ e $y_2 \neq y_1$, segue de $ax_1 + by_1 = ax_1 + by_2 = c$ que $b(y_2 - y_1) = 0$, logo $b = 0$ (pois $y_2 - y_1 \neq 0$). Daí segue que $a \neq 0$ (pois $(a, b) \neq (0, 0)$). Como $b = 0$, a equação $ax + by = c$ se reduz a $ax = c$, que é equivalente a $x = \frac{c}{a}$. Como a reta passa por (x_1, y_1) , temos $x_1 = \frac{c}{a}$, ou seja, a equação $ax + by = c$ é equivalente a $x = x_1$, que é o que se obtém fazendo $x_1 = x_2$ em (1) e dividindo por $y_2 - y_1$, que não é nulo.

O mesmo argumento, trocando as letras, mostra que, se $x_1 \neq x_2$ e $y_2 = y_1$, então a equação $ax + by = c$ é equivalente a $y = y_1$, que é o que se obtém fazendo $y_2 - y_1 = 0$ em (1) e dividindo por $x_2 - x_1$.

No caso em que $x_2 - x_1$ e $y_2 - y_1$ são não nulos, segue de $ax_1 + by_1 = ax_2 + by_2 = c$ que $a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0$. Daí, como $(a, b) \neq (0, 0)$, segue que a e b são diferentes de zero e que $b = a \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1}$. Substituindo esta igualdade em $ax + by = c$, vem

$$ax + a \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} y = c.$$

Como o ponto (x_1, y_1) satisfaz esta equação, vem

$$ax_1 + a \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} y_1 = c.$$

Igualando os dois primeiros membros das duas últimas equações e cancelando o a , vem

$$x + \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} y = x_1 + \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} y_1,$$

que é equivalente a (1).

²Ou seja, vamos provar que (x, y) satisfaz $ax + by = c$ se e somente se (x, y) satisfaz (1); em outras palavras, vamos provar que o conjunto de soluções da equação $ax + by = c$ é idêntico ao conjunto de soluções da equação (1)

Separando em três casos, acabamos de provar que, dados dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , se L é uma reta que passa por ambos os pontos, então L é a reta de equação $(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y = (y_2 - y_1)x_1 + (x_1 - x_2)y_1$. Ou seja, provamos a unicidade. $\square$

Proposição 3.2. *Toda reta do Plano de Descartes possui pelo menos dois pontos.*

Demonstração: Seja r a reta de equação $ax + by = c$. Queremos provar que r possui pelo menos dois pontos. Separemos a demonstração em casos.

CASO 1. Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então $(0, \frac{c}{b})$ e $(\frac{c}{a}, 0)$ são dois pontos distintos de r .

CASO 2. Se $a \neq 0$ e $b = 0$, então $(\frac{c}{a}, 0)$ e $(\frac{c}{a}, 1)$ são dois pontos distintos de r .

CASO 3. Se $a = 0$ e $b \neq 0$, então $(0, \frac{c}{b})$ e $(1, \frac{c}{b})$ são dois pontos distintos de r . $\square$

Problema 3. Mostre que, no Plano de Descartes, dadas uma reta r e um ponto P que não está em r , existe uma única reta paralela a r passando por P .

Plano de Poincaré. Os pontos são os elementos do conjunto $P := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$. As retas são os subconjuntos de P da forma L_a , $a \in \mathbb{R}$, ou $L_{a,r}$, $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$, definidos por

$$L_a := \{(x, y) \in P; x = a\}, \quad L_{a,r} := \{(x, y) \in P; (x - a)^2 + y^2 = r^2\}.$$

Um ponto P está na reta r se $P \in r$.

Veriquemos que os axiomas da Geometria de Incidência são satisfeitos no Plano de Poincaré. Considere dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em P . Dois casos devem ser considerados: (1) $x_1 = x_2$, (2) $x_1 \neq x_2$. No primeiro caso, a reta L_c , $c = x_1 = x_2$, passa por (x_1, y_1) e por (x_2, y_2) . Nenhuma reta L_b , com $b \neq c$ passa por (c, y_1) ou (c, y_2) . Quaisquer dois pontos numa reta $L_{a,r}$, $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$, possuem abscissas distintas. Logo L_c é a única reta passando por (c, y_1) e (c, y_2) . No segundo caso, por terem abscissas distintas, os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) não podem estar em uma mesma reta L_a , $a \in \mathbb{R}$. E eles estão em uma reta $L_{a,r}$, $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$, se e somente se o sistema de equações

$$(2) \quad \begin{cases} (x_1 - a)^2 + y_1^2 = r^2 \\ (x_2 - a)^2 + y_2^2 = r^2 \end{cases}$$

é satisfeito. Suponha que vale (2). Comparando as duas equações, concluímos que vale também

$$(3) \quad (x_1 - a)^2 + y_1^2 = (x_2 - a)^2 + y_2^2$$

Daí segue que $x_1^2 - 2ax_1 + y_1^2 = x_2^2 - 2ax_2 + y_2^2$ e, daí,

$$(4) \quad a = \frac{(x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2)}{2(x_2 - x_1)}.$$

Combinada à primeira das equações em (2), (4) implica que

$$(5) \quad r = \sqrt{\left[x_1 - \frac{(x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2)}{2(x_2 - x_1)} \right]^2 + y_1^2}.$$

Mostramos que (2) implica (4) e (5). Ou seja, provamos que se existir uma reta do tipo $L_{a,r}$ passando por (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , então a e r necessariamente serão dados por (4) e (5).

Ou seja, provamos a unicidade de (I1) também no caso em que $x_1 \neq x_2$. Para provar a existência, devemos verificar que (4) e (5) implicam (2). Espero que esteja visível para os leitores que (4) e (5) implicam a primeira das equações em (2). Por outro lado, (4) implica (3) (os cálculos que mostraram que (3) $\implies$ (4) mostram também que (4) $\implies$ (3)). A equação (3), combinada à primeira das equações em (2), implica a segunda das equações em (2). Isto conclui a demonstração de que o Axioma I1 é satisfeito nesta interpretação da Geometria de Incidência.

Para provar que o Axioma I2 é satisfeito para esta interpretação, de novo é preciso separar em dois casos. Dada uma reta do tipo L_a , $a \in \mathbb{R}$, existem infinitos pontos na reta, a saber, (a, t) , $t > 0$. Dada uma reta do

tipo $L_{a,r}$, existem infinitos pontos na reta, a saber, $(t, \sqrt{r^2 - (t-a)^2})$, $-r < t-a < r$. Logo toda reta possui pelo menos dois pontos.

A única reta que passa pelos pontos $A = (0, 1)$ e $B = (0, 2)$ é L_0 . Considere o ponto $C = (1, 1)$. Se A , B e C estivessem em uma mesma reta, pela unicidade de (I1) aplicado aos pontos A e B , essa reta seria a reta $\overleftrightarrow{AB} = L_0$ e portanto C pertenceria a L_0 . Mas C não pertence a L_0 , pois sua abscissa é diferente de 0. Logo A , B e C não são colineares. Logo o Axioma I3 é satisfeito.

Problema 4. Mostre que, no Plano de Poincaré, dadas uma reta r e um ponto P que não está em r , existem infinitas distintas retas paralelas a r passando por P .

Problema 5. Exiba três retas r , s e t no Plano de Poincaré tais que: (i) r é paralela a s , (ii) s é paralela a t , (iii) r e t são concorrentes.

Geometrias finitas. O modelo mais simples para a geometria de incidência consiste em declarar que os pontos são os elementos de um conjunto S com pelo menos três elementos, que as retas são os subconjuntos de dois elementos de S e que um ponto P está na reta r se $P \in r$. O caso em que S é finito já fornece um exemplo interessante. Chamaremos de “geometria de n pontos” o modelo associado a S no caso em que S possui n elementos.

Problema 6. Mostre que: (a) na geometria de três pontos não existem retas paralelas; (b) na geometria de quatro pontos, dadas uma reta r e um ponto P que não está em r , existe uma única paralela a r passando por P ; (c) na geometria de cinco pontos, dadas uma reta r e um ponto P que não está em r , existem pelo menos duas paralelas a r passando por P .

Problema 7. Considere a seguinte interpretação da geometria de incidência: os pontos são os elementos do conjunto $S := \{A, B, C, D\}$, as retas são os seguintes subconjuntos de S : $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, D\}$ e $\{B, C, D\}$. (a) Mostre que todos os axiomas de incidência são satisfeitos. (b) Mostre que neste modelo não existem retas paralelas.

Problema 8. Chame de pontos os elementos do conjunto $S := \{A, B, C, D\}$, chame de retas os seguintes subconjuntos de S ,

$$\{A, B, D\}, \quad \{B, C, D\}, \quad \{A, C\},$$

diga que um ponto P está numa reta r se $P \in r$. Mostre que: (a) dados dois pontos existe uma reta passando por eles, mas nem sempre essa reta é única, (b) toda reta possui pelo menos dois pontos, (c) existem três pontos não-colineares, (d) não existe um par de retas paralelas.

O Plano de Fano. Os pontos são os elementos do conjunto $S := \{A, B, C, D, E, F, G\}$. As retas são os seguintes subconjuntos de três pontos de S :

$$\{A, B, D\}, \quad \{A, F, E\}, \quad \{A, C, G\}, \quad \{G, F, B\}, \quad \{G, E, D\}, \quad \{D, F, C\}, \quad \{C, B, E\}.$$

Um ponto P está na reta r se $P \in r$. Este é o Exemplo 6 de [2, Chapter 2], veja lá uma figura ilustrativa. Você pode ler sobre isso também no verbete “Fano plane” da Wikipedia em inglês ou no verbete “Plano de Fano” da Wikipedia em espanhol. O Plano de Fano é um modelo da geometria de incidência em que todas as retas se encontram, cada reta passa por três pontos e por cada ponto passam três retas.

A geometria dual da geometria de três pontos. As retas são os elementos do conjunto de três elementos $S := \{A, B, C\}$. Os pontos são os subconjuntos de dois elementos de S . Um ponto P está na reta r se $r \in P$.

Esfera de Riemann. Os pontos são os elementos de uma esfera, as retas são os *círculos máximos*, ou seja, círculos contidos na esfera e com centro igual ao centro da esfera. Não existem retas paralelas. Esta interpretação não é um modelo da geometria de incidência, pois existem infinitas retas passando por dois pontos antipodais dados. Uma maneira de transformar essa interpretação imperfeita em um modelo da geometria de incidência é chamar de pontos os elementos do quociente da esfera pela relação de equivalência³ que identifica antípodas. As retas são as imagens dos círculos máximos no quociente.

³Quem não for familiar com relações de equivalência, por favor leia a Seção 11.

Planos projetivos. Em um modelo da geometria de incidência no qual seja válido o Quinto Postulado de Euclides (na versão de Playfair, tal como enunciado no Postulado 5 da Seção 1), o paralelismo de retas define uma relação de equivalência. Isso permite que se “projete” o modelo, acrescentando como “pontos no infinito” as classes de equivalência de retas paralelas. É o que fazemos nesta subseção, seguindo os passos expostos na última seção do Capítulo 2 de [2].

Proposição 3.3. *Seja dado um modelo da geometria de incidência em que seja válido o Postulado 5: dados uma reta r e um ponto P que não está em r , existe uma única reta s que passa por P e é paralela a r . Se três retas r , s e t são tais que r é paralela a s e s é paralela a t , então r é paralela a t .*

Demonstração: Suponha que r não seja paralela a t e seja P o ponto que está em r e em t . Então r e t são duas paralelas a s passando por P , o que contradiz o Quinto Postulado. $\square$

Seja $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ um modelo da geometria de incidência em que é válido o Postulado 5; $\mathcal{P}$ denotando o conjunto de pontos e $\mathcal{L}$ denotando o conjunto de retas. Dadas r e s em $\mathcal{L}$, definimos: $r \sim s$ se e somente se $r = s$ ou r é paralela a s . A relação $\sim$ é, obviamente, reflexiva e simétrica. Segue da Proposição 3.3 que $\sim$ é também transitiva e, portanto, é uma relação de equivalência. Para cada reta r de $\mathcal{P}$, denotamos

$$[r] = \{s; s \text{ é reta de } \mathcal{P} \text{ e } s \sim r\}.$$

Definamos $\mathcal{P}^*$ como a união disjunta de $\mathcal{P}$ com o conjunto das classes de equivalência de retas paralelas,

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \cup \{[r]; r \in \mathcal{L}\},$$

e $\mathcal{L}^*$ como sendo a união disjunta de $\mathcal{L}$ com a “reta no infinito” l_∞ ,

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{l_\infty\}.$$

Para obtermos uma interpretação em que os elementos de $\mathcal{P}^*$ sejam pontos e os elementos de $\mathcal{L}^*$ sejam retas, precisamos definir o que significa um “ponto” $P \in \mathcal{P}^*$ estar em uma “reta” $r \in \mathcal{L}^*$. Diremos que $[r]$ está em r para toda $r \in \mathcal{L}$; $[r]$ torna-se assim o “ponto no infinito” da reta r e de todas as retas $s \in \mathcal{L}$ paralelas a r no modelo original. Diremos também que todos os “pontos no infinito” estão na “reta no infinito”; isto é, $[r]$ está em l_∞ , para toda $r \in \mathcal{L}$. Além disso, todas as relações de incidência do modelo original continuam válidas. Finalmente, decretamos que as afirmações precedentes são todas as relações de incidência na nova interpretação.

É como se um par de retas paralelas do modelo original agora passasse a se encontrar em um ponto no infinito desta interpretação ampliada.

Proposição 3.4. *Com as definições acima, a interpretação $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*)$ é um modelo da geometria de incidência; isto é, os axiomas (I1), (I2) e (I3) são satisfeitos.*

Demonstração: Segue de como definimos a relação de incidência para $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*)$ que três pontos em $\mathcal{P}$ são colineares no modelo original se e somente se são colineares na nova interpretação. Segue então do fato de que (I3) é satisfeito no modelo original $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ que (I3) também é satisfeito na interpretação ampliada $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*)$.

Segue de (I2) para o modelo original que, dada uma reta $r \in \mathcal{L}$, existem pelo menos dois pontos $P, Q \in \mathcal{P}$ em r . Para verificar (I2) para a interpretação ampliada, basta portanto mostrar que l_∞ possui pelo menos dois pontos; ou seja, que existem duas retas r e s em $\mathcal{L}$ que não são paralelas. Isso segue de (I3) para o modelo original. De fato, se A , B e C são três pontos não colineares em $\mathcal{P}$, que existem, por causa de (I3), então $r = \overleftrightarrow{AB}$ e $s = \overleftrightarrow{AC}$ são duas retas colineares em $\mathcal{L}$.

Para verificar que (I1) é satisfeito na interpretação $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*)$, vamos dividir nosso argumento em três casos: (i) os dois pontos dados P e Q estão em $\mathcal{P}$, (ii) os dois pontos são pontos no infinito. (iii) P está em $\mathcal{P}$ e Q é um ponto no infinito,

No caso (i), segue de (I1) para o modelo original que existe uma reta em $\mathcal{L}$ que passa por P e Q . Como toda reta de $\mathcal{L}$ é também uma reta em $\mathcal{L}^*$, segue que existe uma reta em $\mathcal{L}^*$ passando por P e Q . A única reta

em $\mathcal{L}^*$ que não pertence também a $\mathcal{L}$ é l_∞ . Logo, para provar a unicidade da reta que passa por P e Q , basta observar P e Q não estão em l_∞ , cujos pontos são todos da forma $[r]$, para alguma reta r do modelo original.

No caso (ii), a verificação de (I1) segue imediatamente dos fatos de que todos os pontos no infinito estão em l_∞ e de que as demais retas de $\mathcal{L}^*$ possuem apenas um ponto no infinito; logo l_∞ é a única reta que passa por dois pontos no infinito.

Suponhamos agora que P é um ponto do modelo original e $Q = [r]$ para alguma reta r do modelo original. Para verificar a validade de (I1) neste caso, precisamos dividir o argumento em ainda dois subcasos. Suponhamos primeiro (subcaso iii-a) que, relativamente à relação de incidência do modelo original, P está em r . Então r é uma reta em $\mathcal{L}^*$ que, relativamente à relação de incidência da interpretação estendida, passa por P e $[r]$. Isto prova a existência. Já sabemos que, por definição, l_∞ não passa por P . Logo, para provar a unicidade neste subcaso iii-a, resta provar que, se s é uma reta de $\mathcal{L}$ que passa por P e $[r]$, então $s = r$. O único ponto no infinito que está em s é $[s]$. Logo s passa por $[r]$ se, e somente se, $[s] = [r]$, o que ocorre se, e somente se, $r = s$ ou r e s são paralelas. As retas r e s não são paralelas pois ambas passam por P . Logo $r = s$, como queríamos.

Suponhamos finalmente (subcaso iii-b) que P é um ponto do modelo original, $Q = [r]$ para alguma reta r do modelo original e que r não passa por P . Segue do Postulado 5 que existe uma única reta s do modelo original que é paralela a r (logo $[s] = [r]$) e passa por P . Então s passa por P e $[r]$. Resta provar que s é a única reta que, na interpretação estendida, passa por P e $[r]$. Já sabemos que, por definição, l_∞ não passa por P . Logo, para provar a unicidade neste subcaso iii-b, resta provar que, se s' é uma reta de $\mathcal{L}$ que passa por P e $[r]$, então $s' = s$. Seja s' uma tal reta. O único ponto no infinito que está em s' é $[s']$. Então s' passa por $[r]$ se, e somente se, $[s'] = [r]$, o que ocorre se, e somente se, $r = s'$ ou r e s' são paralelas. Como P não está em r mas está em s' , temos $r \neq s'$. Logo, se s' passa por $[r]$, então s' é paralela a r . Pela unicidade do Postulado 5, segue que $s = s'$. $\square$

O modelo $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*)$ é chamado de *o completamento projetivo* do modelo $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$.

Problema 9. Mostre que todas as pares de retas em um completamento projetivo são concorrentes.

O Plano de Fano, previamente definido, é o completamento projetivo do modelo mais simples da Geometria de Incidência que satisfaz o Quinto Postulado, a geometria de quatro pontos. Mais especificamente, se o conjunto de pontos da geometria original for $\mathcal{P} = \{A, D, F, G\}$ e as retas forem os subconjuntos de dois pontos de $\mathcal{P}$, então o ponto no infinito da classe $\overleftrightarrow{AF}$ é E , o ponto no infinito de $\overleftrightarrow{FD}$ é C , o de $\overleftrightarrow{GF}$ é B ; enquanto que a reta no infinito é $\{B, E, C\}$.

Para uma interpretação geométrica do completamento projetivo do Plano de Descartes, veja [2, Exemplo 2.7, Figura 2.8].

4. AXIOMAS DE ORDENAMENTO

Nesta seção, acrescentamos à formulação axiomática da Geometria iniciada na Seção 2 o termo primitivo “estar entre”, enunciamos os axiomas satisfeitos por esse novo termo primitivo e exploramos algumas de suas consequências.

A expressão $A * B * C$ denota a afirmação “ B está entre A e C ”. São os seguintes os três primeiros axiomas satisfeitos por essa relação:

- (B1) Se $A * B * C$, então (i) A, B e C são três pontos colineares e (ii) $C * B * A$.
- (B2) Dados dois pontos B e D , existem pontos A, C e E tais que $A * B * D$, $B * C * D$ e $B * D * E$.
- (B3) Dados três pontos colineares, um e apenas um deles está entre os outros dois.

David Hilbert [4] chamou de *Axiome der Anordnung* os axiomas satisfeitos pela noção de “estar entre”. Em inglês, em particular nas referências [2, 5, 6] nas quais se baseiam estas notas, chama-se o “estar entre” de “betweenness”, substantivo abstrato intraduzível para o português.

Dados dois pontos A e B , denotamos por AB o segmento com extremidades A e B e por $\overrightarrow{AB}$ a semirreta com origem em A que passa por B (veja as Definições 1.1 e 1.3). Podemos escrever

$$(6) \quad AB := \{A, B\} \cup \{P; A * P * B\} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AB} := AB \cup \{P; A * B * P\}$$

Note que AB e $\overrightarrow{AB}$ são subconjuntos do conjunto de todos os pontos que estão na reta $\overleftrightarrow{AB}$,

$$\overleftrightarrow{AB} := \{P; P \text{ é um ponto que está em } \overleftrightarrow{AB}\}.$$

Proposição 4.1. *Dados dois pontos A e B , temos $AB = BA$.*

Demonstração: Os pontos extremos dos dois segmentos são os mesmos, logo basta provar que, dado um ponto P , $A * P * B \iff B * P * A$. Mas isto é consequência imediata do item (ii) do axioma (B1). $\square$

Proposição 4.2. *Seja r uma reta, seja O um ponto em r , seja A um ponto que não está em r . Se $A * O * B$ ou se $A * B * O$, então B não está em r .*

Demonstração: Em qualquer dos dois casos, $A * O * B$ ou $A * B * O$, segue do Axioma B1 que O está em $\overleftrightarrow{AB}$. Se B estivesse em r , r e $\overleftrightarrow{AB}$ teriam dois pontos em comum, O e B ; logo seriam iguais, pela unicidade postulada no Axioma I1; logo A estaria em r , contrariando a hipótese. Logo B não está em r . $\square$

Proposição 4.3. *Sejam Q , A e B pontos colineares, com $A \neq B$. Então $Q * A * B$ se e somente se $Q \notin \overrightarrow{AB}$.*

Demonstração: Segue de (6) que Q pertence a $\overrightarrow{AB}$ se e somente se uma das seguintes afirmações são verdadeiras: (i) $Q = A$, (ii) $Q = B$, (iii) $A * Q * B$, ou (iv) $A * B * Q$. Equivalentemente, $Q \notin \overrightarrow{AB}$ se e somente se as afirmações (i), (ii), (iii) e (iv) são falsas. Queremos portanto provar que $Q * A * B$ se e somente se as afirmações (i), (ii), (iii) e (iv) são falsas.

Se $Q * A * B$, segue do Axioma B1 que $Q \neq A$ e $Q \neq B$ e segue do Axioma B3 que não ocorre $A * Q * B$, nem $A * B * Q$. Logo são falsas as afirmações (i), (ii), (iii) e (iv).

Reciprocamente, suponhamos que (i), (ii), (iii) e (iv) sejam afirmações falsas. Sendo falsas (i) e (ii), e como $A \neq B$ por hipótese, segue que A , B e C são três pontos distintos. Sendo falsas (iii) e (iv), segue da colinearidade dos três pontos e do Axioma B3 que $Q * A * B$. $\square$

Proposição 4.4. *Dados dois pontos A e B , temos $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = AB$.*

Demonstração: Segue de (6) que $AB \subset \overrightarrow{AB}$. Segue de (6) e da Proposição 4.1 que $AB = BA \subset \overrightarrow{BA}$. Logo $AB \subset \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$.

Suponha que $Q \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$. Queremos provar que $Q \in AB$. Vamos dividir em casos. Se $Q = A$ ou $Q = B$, então segue da definição de segmento que $Q \in AB$. Se Q é diferente de A e diferente de B , então, como todos os pontos das duas semirretas são pontos da reta $\overleftrightarrow{AB}$, os três pontos A , B e Q são colineares, e podemos portanto invocar o axioma (B3) para concluir que uma e apenas uma das seguintes alternativas ocorre:

- (i) $Q * A * B$,
- (ii) $A * Q * B$,
- (iii) $A * B * Q$.

Se ocorrer (i), segue da Proposição 4.3 que $Q \notin \overrightarrow{AB}$, o que é falso, pois estamos supondo que $Q \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$. Se ocorrer (iii), então $Q * B * A$, pelo axioma (B1). Daí, pela Proposição 4.3, $Q \notin \overrightarrow{BA}$, o que é falso. Logo, se valer $Q \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$, então não vale (i), nem vale (iii). Logo vale (ii), o que implica que $Q \in AB$. $\square$

Problema 10. Dados dois pontos A e B , mostre que $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \{P; P \text{ está em } \overleftrightarrow{AB}\}$.

Cabe aqui um comentário sobre nomenclatura. Adotamos os termos de [2] para a geometria de incidência, nosso ponto de partida para a axiomática completa da geometria euclidiana. Para nós, portanto, existe um conjunto de pontos e um conjunto de retas, mas as retas não são necessariamente conjuntos de pontos. É por isso que é preciso considerar a expressão “um ponto está em uma reta” como um termo primitivo, sem definição. Além disso o conjunto de todos os pontos que estão em uma reta não é, em geral, “igual” à reta, pois podem ser objetos de natureza diferente. Em alguns modelos (no Plano de Descartes e no Plano de Poincaré, por exemplo) pode acontecer de r ser igual a $\{P; P \text{ está em } r\}$, mas ao tratar da teoria axiomática abstrata, devemos fazer a distinção. Já no texto [3], convencionou-se explicitamente que cada reta é um subconjunto do conjunto de todos os pontos, e “está em” é o “pertence” da teoria dos conjuntos. Hilbert [4] é ambíguo a esse respeito, e o livro dele pode ser lido com uma ou outra convenção.

Dizemos que um segmento AB e uma reta r se interceptam se existe pelo menos um ponto pertencente a AB que também está em r . Isso não exclui a possibilidade de todos os pontos de AB estarem em r , ou que o ponto de interseção seja uma das extremidades do segmento. Vamos reservar a palavra “atravessar” para um tipo mais específico de interseção:

Definição 4.5. Diremos que o segmento AB atravessa a reta r ou, equivalentemente, que r atravessa AB se r e AB se interceptam em apenas um ponto, diferente de A e de B . Em outras palavras, r e AB se atravessam se as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e r são distintas e concorrentes e se o ponto P de interseção das duas retas satisfaz $A * P * B$.

Enunciamos agora nosso quarto axioma de ordenamento, conhecido como o “Postulado de Pasch” [4].

(B4) Seja r uma reta e sejam A , B e C três pontos não-colineares que não estão em r . Se r atravessa algum dos três segmentos determinados pelos pontos dados, então r atravessa também um, e apenas um, dos outros dois segmentos.

Definição 4.6. Sejam A , B e C três pontos não-colineares. O triângulo de vértices A , B e C , denotado por $\triangle ABC$, é a união dos segmentos AB , BC e AC , que são chamados de lados do triângulo.

Proposição 4.7. Suponha que a reta r atravessa o lado AB do triângulo $\triangle ABC$. Então r intercepta pelo menos um dos outros dois lados do triângulo. Só intercepta os outros dois lados se C estiver em r .

Demonstração: No caso em que r não passa por C , segue do Axioma B4 que r intercepta um, e apenas um, dos outros dois lados e que a interseção não é um dos extremos desse lado. Caso r passe por C , então r intercepta os lados AC e BC . $\square$

Separação do plano.

Dizemos que um conjunto S de pontos é *convexo* se, dados quaisquer dois pontos A e B em S , o segmento AB está todo contido em S . O objetivo desta subseção é mostrar que o conjunto dos pontos que não estão em uma reta é a união disjunta de dois subconjuntos convexos, chamados de “semiplanos” (veja o Problema 24).

Definição 4.8. Dada uma reta r e um ponto A que não está em r , o semiplano limitado por r que contém A é o conjunto de pontos $H_A := \{A\} \cup \{C; C \text{ não está em } r, C \neq A \text{ e } r \text{ não atravessa } AC\}$.

O principal resultado desta subseção é o teorema seguinte, que se trata essencialmente de uma versão traduzida e ligeiramente reformulada de [3, Proposition 7.1]

Teorema 4.9. Toda reta r limita exatamente dois semiplanos, e eles não possuem ponto em comum.

Demonstração: Seja X o conjunto dos pontos que não estão em r . Dados A e B em X , diremos que $A \sim B$ se $A \in H_B$.

Por definição, temos que $A \in H_A$. Se $A \in H_B$ e $A \neq B$, então r não atravessa AB , que é igual BA , pela Proposição 4.1; logo r não atravessa BA , logo $B \in H_A$. Isto prova que a relação $\sim$ é reflexiva e simétrica. Provaremos em seguida que ela também é transitiva.

Suponhamos que $A \sim B$ e $B \sim C$. Queremos provar que $A \sim C$. Claro que podemos supor que os pontos A, B e C são distintos, caso contrário não haveria o que provar. Vamos precisar separar em dois casos: ou esses três pontos são colineares, ou não são.

Suponhamos primeiramente que eles não são colineares. Temos que r não atravessa AB , nem atravessa BC (é isso o que significa $A \sim B$ e $B \sim C$). Se r atravessasse AC , seguiria, pelo Axioma B4, que r atravessaria AB ou BC , o que é falso. Logo r não atravessa AC , ou seja $A \sim C$.

Suponhamos agora que A, B e C são colineares e chamemos de s a reta que os contém. Por definição de X , cada um dos três pontos A, B e C não está em r , logo r e s são duas retas distintas. Pelo Axioma I2, r possui pelo menos dois pontos. Pelo menos um deles não está em s , caso contrário a unicidade do Axioma I1 implicaria que r seria igual a s . Seja portanto D um ponto de r que não está em s . Pelo Axioma B2, existe um ponto E tal que $E * A * D$. O ponto E não está em r , pela Proposição 4.2. Temos que $A \sim E$ pois, se existisse um ponto P em r tal que $E * P * A$, esse ponto seria o único (veja a Proposição 2.2) ponto de interseção de $\overleftrightarrow{AD}$ e r , ou seja, P seria igual a D , logo teríamos $E * D * A$ e $E * A * D$, o que não pode acontecer, pelo Axioma B3. O ponto E também não está em s , de novo pela Proposição 4.2, pois $E * A * D$. Então temos $E \sim A$, $A \sim B$ e os três pontos E, A e B são não colineares. Neste caso já vimos que o Axioma B4 implica que $E \sim B$. Logo temos $E \sim B$ e $B \sim C$, sendo E, B e C não-colineares (pois E não está em s , que é igual a $\overleftrightarrow{BC}$). Neste caso já vimos que o Axioma B4 implica que $E \sim C$. Logo temos $C \sim E$ e $E \sim A$, sendo C, E e A não colineares, logo (usando pela terceira vez o mesmo argumento) $C \sim A$, ou seja, $A \sim C$, como queríamos.

Provamos que $\sim$ é uma relação de equivalência em X . Por definição, os semiplanos determinados por r são as classes de equivalência associadas a esta relação de equivalência. Queremos provar que o conjunto das classes de equivalência $X/\sim$ possui exatamente dois elementos.

O conjunto X é não vazio, pela Proposição 2.4. Logo $X/\sim$ é não vazio. Seja A um elemento de X . Pelo Axioma I2, segue que existe um ponto O que está em r . Pelo Axioma B2, existe um ponto B tal que $A * O * B$. O ponto B não está em r , pela Proposição 4.2. Logo A e B são dois pontos de X . A reta r atravessa AB , pois o ponto O está em r e pertence a AB . Ou seja, $A \notin H_B$; ou seja, A e B pertencem a classes de equivalência distintas. Provamos que $X/\sim$ possui pelo menos dois elementos.

Para concluir a demonstração, devemos provar que, se existirem três pontos que não estão em r , pelo menos um par deles pertence a um mesmo semiplano. Para provar isto, suponhamos que A, B e C sejam três pontos de X . Basta provar, sem perda de generalidade, que, se r atravessar AB e AC , então r não atravessará BC . Isto segue do “apenas um” do Axioma B4, caso A, B e C não sejam colineares. Suponhamos agora que A, B e C sejam colineares. Vamos precisar usar de novo a construção que fizemos para provar a transitividade, mas agora o argumento é mais fácil porque já sabemos que $\sim$ é transitiva. Seja D um ponto que está em r , mas não está na reta s que contém os pontos A, B e C , seja E tal que $E * A * D$. Provamos acima que $A \sim E$ e que os pontos B, C e E são não-colineares. Como estamos supondo que $A \not\sim C$ e $A \not\sim B$, segue da transitividade de $\sim$ que $C \not\sim E$ e $B \not\sim E$. Temos portanto três pontos não colineares B, C e E tais que r atravessa BE e CE . Segue do Axioma B4 que r não atravessa BC . $\square$

Definição 4.10. *Dada uma reta r , os dois semiplanos determinados por r serão também chamados de lados de r . Diremos que A e B , distintos ou não, estão do mesmo lado de r se $A \in H_B$ e diremos que A e B estão em lados opostos de r se $A \notin H_B$.*

Proposição 4.11. *Sejam A, B e C três pontos que não estão na reta r . São verdadeiras as seguintes afirmações.*

- (1) *Se A e B estão do mesmo lado de r , e se B e C estão do mesmo lado de r , então A e C estão do mesmo lado de r .*
- (2) *Se A e B estão em lados opostos de r , e se B e C estão em lados opostos de r , então A e C estão do mesmo lado de r .*

- (3) Se A e B estão em lados opostos de r , e se B e C estão do mesmo lado de r , então A e C estão em lados opostos de r .

Demonstração: Vimos na demonstração do Teorema 4.9 que a relação definida pela sentença “ $A \sim B \iff A \in H_B$ ” é uma relação de equivalência no conjunto X dos pontos que não estão em r , e que a classe de equivalência de um ponto $A \in X$ é igual a H_A .

Se A e B estão do mesmo lado de r e B e C estão do mesmo lado de r , então $A \in H_B$ e $B \in H_C$. Logo, $A \in H_C$, pela transitividade de $\sim$. Logo A e C estão do mesmo lado de r , o que prova (1).

Se A e B estão em lados opostos de r e se B e C estão em lados opostos de r , então $A \not\sim B$ e $B \not\sim C$. Vimos na demonstração do Teorema 4.9 que $\sim$ possui duas, e só duas, classes de equivalência. Segue de $A \not\sim B$ e $B \not\sim C$ que A e C não pertencem à classe de equivalência que contém B , logo A e C pertencem à outra classe de equivalência, distinta de H_B . Logo, $A \sim C$; ou seja, $A \in H_C$; ou seja, A e C estão do mesmo lado de r . Provamos (2).

Se A e B estão em lados opostos de r e se B e C estão do mesmo lado de r , então $A \not\sim B$ e $C \sim B$. Segue então que $A \not\sim C$ (veja a Proposição 11.1). Logo A e C estão em lados opostos de r , o que conclui a demonstração. $\square$

Problema 11. Dados B e D em lados opostos da reta s , seja C a interseção das retas $\overleftrightarrow{BD}$ e s . Mostre que vale $B * C * D$.

Problema 12. Dados $A * B * C$, com C na reta s e A ou B fora da reta s , mostre que A e B estão do mesmo lado de s .

Problema 13. Sejam r uma reta, P um ponto em r e Q um ponto fora de r . Seja Z um ponto distinto de P na semirreta $\overrightarrow{PQ}$. Mostre que Z e Q estão do mesmo lado de r .

Problema 14. Sejam r uma reta, P um ponto em r , e Q e R pontos do mesmo lado de r . Mostre que, se R está em $\overrightarrow{PQ}$, então R é um ponto de $\overrightarrow{PQ}$.

Antes de pensar no próximo problema, releia a Definição 4.5 para lembrar quando nós dizemos que uma reta atravessa um segmento.

Problema 15. [Pasch para pontos colineares] Seja r uma reta e sejam A , B e C três pontos colineares que não estão em r . Mostre que, se r atravessa algum dos três segmentos determinados pelos pontos dados, então r atravessa também um, e apenas um, dos outros dois segmentos.

Cabe aqui um comentário sobre as diferentes abordagens adotadas pelos livros da nossa bibliografia.

Em vez de fazer como Hilbert [4] e Hartshorne [3] que adotam o Postulado de Pasch como o quarto axioma de ordenamento, Greenberg [2] convencionou, sem a princípio definir o que é o lado de uma reta, que a frase “ A e B estão do mesmo lado de uma reta r ” significa que ou os pontos A e B são iguais e não estão em r , ou os pontos A e B são distintos, não estão em r , e r atravessa AB . E convencionou que a frase “ A e B estão em lados opostos de r ” significa que A e B não estão em r e r atravessa AB . Daí ele adota como quarto axioma de ordenamento que as afirmações (1) e (2) da Proposição 4.11 são sempre válidas, dados A e B fora de r . Com estas convenções, a afirmação (3) é uma consequência lógica imediata de (1) e (2).

Quase todo o trabalho que fizemos nesta subseção foi, essencialmente, demonstrar que o Postulado de Pasch (nosso Axioma B4) implica que o quarto axioma de ordenamento de Greenberg é verdadeiro. A recíproca também é verdadeira, e é bem mais fácil de provar: o “B4 do Greenberg” implica o nosso Axioma B4, que é chamado então de Teorema de Pasch em [2, 6]. A grande vantagem da abordagem de Greenberg é que fica mais rápido provar a Separação do Plano. Uma desvantagem é ter de lidar com definições para o significado das frases “ A e B estão do mesmo lado de r ” e “ A e B estão em lados opostos de r ” sem definir antes o que são “lados” de uma reta (isto não está errado, mas é um pouco incômodo). A maior desvantagem talvez seja (esta

é uma afirmação bastante subjetiva) que o Postulado de Pasch parece muito mais natural, pode ser facilmente visualizado com uma figura, do que o “B4 do Greenberg”, que pode soar como uma afirmação excessivamente formal.

Ordenamento de quatro pontos.

Nesta subseção, vamos usar que cada reta divide o plano em dois semiplanos para compreender como se pode ordenar mais de três pontos na reta.

Proposição 4.12. *Se $A * B * C$ e $A * C * D$, então vale $B * C * D$ e $A * B * D$.*

Demonstração: Segue das hipóteses e do Axioma (B1) que A , B e C são três pontos distintos e que também A , C e D são três pontos distintos, ou seja, temos que

$$A \neq B, \quad A \neq C, \quad A \neq D, \quad B \neq C \quad \text{e} \quad C \neq D.$$

Também vale que $B \neq D$ pois, se B fosse igual a D , teríamos $A * B * C$ e $A * C * B$, o que violaria o Axioma B3. Logo os pontos dados são quatro pontos distintos. Seja r a reta determinada por A e C , $r = \overleftrightarrow{AC}$. Segue do Axioma B1 que B e D estão em r , ou seja, os quatro pontos são colineares.

Pela Proposição 2.4, existe um ponto E que não está em r . Denotemos por s a reta determinada por E e C , $s = \overleftrightarrow{EC}$. Segue da hipótese $A * C * D$ que A e D estão em lados opostos de s . Usando $A * B * C$ e o Problema 12, temos que A e B estão do mesmo lado de s . Segue da Proposição 4.11 que B e D estão em lados opostos de s . Como C é o ponto de interseção das retas $\overleftrightarrow{BD}$ e s , segue do Problema 11 que $B * C * D$.

Consideremos agora $t := \overleftrightarrow{EB}$. Segue de $A * B * C$ que A e C estão em lados opostos de t . Segue de $B * C * D$ e do Problema 12 que C e D estão do mesmo lado de t . Logo, pela Proposição 4.11, segue que A e D estão em lados opostos de t . O ponto de interseção de $\overleftrightarrow{AD}$ e t é B . Logo $A * B * D$, pelo Problema 11. $\square$

Os argumentos que usamos na demonstração da Proposição 4.12 podem ser usados também para obter:

Proposição 4.13. *Se $A * B * C$ e $B * C * D$, então vale $A * B * D$ e $A * C * D$.*

Demonstração resumida: Seja r a reta que passa pelo quatro pontos dados, seja E um ponto que não está em r , seja s a reta que passa por E e C , seja t a reta que passa por E e B . Então B e D estão em lados opostos de s , A e B estão do mesmo lado de s , logo A e D estão em lados opostos de s e portanto $A * C * D$. Além disso, A e C estão em lados opostos de t , C e D estão do mesmo lado de t . Logo A e D estão em lados opostos de t e portanto $A * B * D$. $\square$

Definição 4.14. *Dizemos que $A * B * C * D$ se valem as quatro seguintes afirmações: $A * B * C$, $A * B * D$, $A * C * D$ e $B * C * D$.*

Os enunciados das Proposições 4.12 e 4.13 podem ser resumidos esquematicamente como:

$$(7) \quad (A * B * C \wedge A * C * D) \vee (A * B * C \wedge B * C * D) \implies A * B * C * D$$

(o símbolos $\wedge$ e $\vee$ denotam “e” e “ou”, respectivamente).

Problema 16. Mostre que as duas condições $A * B * D$ e $A * C * D$ podem ser satisfeitas sem que valha $A * B * C * D$, mesmo quando $B \neq C$.

Problema 17. Mostre que as condições $A * B * D$, $A * C * D$ e $B \neq C$ implicam que vale $A * B * C$ ou $A * C * B$.

Problema 18.

- (a) Mostre que as condições $A * B * C$, $A * B * D$ e $C \neq D$ implicam que vale $A * C * D$ ou $A * D * C$.
- (b) Mostre que as condições $A * B * C$, $A * B * D$ e $C \neq D$ implicam que vale $B * C * D$ ou $B * D * C$.

Dicas: No (a), use (B3) e (7) para provar a contrapositiva. No (b), use o (a) e (7).

Problema 19. Mostre que, se $C \in \overrightarrow{AB}$ e $C \neq A$, então $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Sugestão: Use as Proposições 4.3, 4.12 e 4.13.

Problema 20. Sejam r uma reta, P um ponto fora de r , e Q um ponto distinto de P . Seja H o semiplano delimitado por r que contém P . Mostre que existe um ponto R distinto de P e pertencente a H tal que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR}$.

Problema 21. Mostre que, se $A * B * C$, então o segmento AB está contido no segmento AC .

Problema 22. Mostre que, se $A * B * C$, então a semirreta $\overrightarrow{BC}$ está contida na semirreta $\overrightarrow{AC}$.

Problema 23. [Os extremos de um segmento são unicamente determinados]

Sejam A, B, C, D pontos tais que $A \neq B, C \neq D$, e vale a igualdade de segmentos $AB = CD$. Mostre que os dois conjuntos de pontos $\{A, B\}$ e $\{C, D\}$ são idênticos.

Problema 24. [Os semiplanos são convexos]

Seja H um semiplano delimitado pela reta r . Mostre que, se $A, B \in H$ e $A * P * B$, então $P \in H$.

Problema 25. [As retas têm infinitos pontos] Supondo válidos os três axiomas de incidência e os quatro axiomas de ordenamento até aqui enunciados, mostre que toda reta passa por infinitos pontos.

Separação da reta.

Analogamente à Separação do Plano, resultado que diz que uma reta divide o resto do plano em duas partes convexas disjuntas, as proposições e problemas desta subseção implicarão que um ponto separa uma reta em duas partes convexas disjuntas. Por convenção, a reta que separa o plano não faz parte dos semiplanos por ela determinados. Convencionamos entretanto que as duas semirretas que (veremos) são determinadas por um ponto em uma reta contêm esse ponto.

Combinando as Proposições 4.3 e 4.12, obteremos agora (compare com o Problema 10):

Proposição 4.15. *Suponha que $C * A * B$ e seja r a reta que passa por A, B e C . Então temos*

$$\{P; P \text{ está em } r\} = \overrightarrow{AC} \cup \overrightarrow{AB}.$$

Demonstração: Sabemos que todos os pontos de $\overrightarrow{AC} \cup \overrightarrow{AB}$ estão em r . Queremos provar que, se P está em r , vale a implicação

$$(8) \quad P \notin \overrightarrow{AB} \implies P \in \overrightarrow{AC},$$

Como $P \notin \overrightarrow{AB}$, P é diferente de A e de B . Sem perda de generalidade, podemos também supor que $P \neq C$ (nada há a provar quando $P = C$, pois $C \in \overrightarrow{AC}$ pela definição de semirreta). Neste caso, supondo $P \neq C$, segue da Proposição 4.3 que (8) é equivalente ⁴ a:

$$(9) \quad P * A * B \implies \neg(C * A * P).$$

Vamos provar (9) separando nos três casos possíveis da posição relativa dos três pontos colineares P, B e C . Segue do Axioma (B3) que uma das três afirmações seguintes é satisfeita: (i) $P * C * B$, (ii) $C * P * B$ e (iii) $C * B * P$.

Se valer (i), $P * C * B$ e $C * A * B$ implicam, pela Proposição 4.12, que vale $P * C * A$, o que implica, de novo pelo Axioma B3, que não vale $C * A * P$ (note que, neste caso, a conclusão é independente de se supor que vale $P * A * B$).

Se valer (ii), $C * P * B$ e $P * A * B$ implicam que vale $C * P * A$, e portanto não vale $C * A * P$.

Se valer (iii), $C * B * P$ e $B * A * P$ implicam que vale $C * B * A$, contradizendo a hipótese $C * A * B$. Ou seja, o caso (iii) não ocorre. $\square$

⁴Dada uma afirmação Q , denotamos por $\neg Q$ a negação de Q , ou seja, a afirmação “ Q é falsa”.

Problema 26. Dada uma semirreta $\overrightarrow{AB}$, tome C tal que $C * A * B$. Seja D um ponto na reta $\overleftrightarrow{AB}$ distinto de A . Mostre que $D \in \overrightarrow{AB}$ se, e somente se, $C * A * D$.

Dica: Use a Proposição 4.3 e a Proposição 4.15.

Problema 27. [As semirretas são convexas] Sejam D e E dois pontos pertencentes à semirreta $\overrightarrow{AB}$, seja F tal que $D * F * E$. Mostre que F também pertence a $\overrightarrow{AB}$.

Dica: Use o Problema 18-a, o Problema 26 e (7).

Problema 28. [Os segmentos são convexas] Sejam D e E dois pontos pertencentes ao segmento AB , seja F tal que $D * F * E$. Mostre que F também pertence a AB .

Dica: Use o Problema 27 e a Proposição 4.4.

Como convencionamos na Definição 1.4, chamamos de *opostas* as duas semirretas distintas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ se $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$. Usando o Problema 19, podemos obter a seguinte caracterização mais conveniente dessa propriedade.

Proposição 4.16. As semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são opostas se e somente se $B * A * C$.

Demonstração: Suponha que as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ sejam opostas. Sendo distintas, segue do Problema 19 que $C \notin \overrightarrow{AB}$ e, em particular, que os pontos A , B e C são distintos. Como $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$ (usando a Definição 1.4 e a hipótese), temos que A , B e C são colineares. Segue de $C \notin \overrightarrow{AB}$ e da Proposição 4.3 que $C * A * B$.

Reciprocamente, suponha que $C * A * B$. Sendo colineares os três pontos, segue do Axioma (I1) que $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$. As semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são distintas porque $C \notin \overrightarrow{AB}$, pelo Problema 19. $\square$

Problema 29. Seja O , X e X' pontos tais que $X * O * X'$, seja r a reta que os contém. Mostre que, se C e C' são pontos distintos de r , $C \neq O \neq C'$, tais que $C \in \overrightarrow{OX}$ e $C' \in \overrightarrow{OX'}$, então vale $C * O * C'$.

Problema 30. Suponha que as semirretas distintas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não sejam opostas. Mostre que A , B e C não são colineares.

Problema 31. Mostre que toda semirreta possui uma única semirreta oposta.

Problema 32. Mostre que o ponto E pertence à semirreta oposta a $\overrightarrow{BA}$ se e somente se $A * B * E$.

Proposição 4.17. Se $C * A * B$, então $\overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{AB} = \{A\}$.

Demonstração: Pelo Axioma B1, os três pontos A , B e C são colineares; chamemos de r a reta que passa por eles três. Já sabemos que o ponto A pertence a $\overrightarrow{AC}$ e a $\overrightarrow{AB}$. O que queremos provar, portanto, é que, se $P \in \overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{AB}$, então $P = A$; ou, equivalentemente, que se P é um ponto distinto de A na reta r , então ou P não pertence a $\overrightarrow{AC}$ ou P não pertence a $\overrightarrow{AB}$.

Usando a Proposição 4.3, concluímos que o enunciado desta Proposição 4.17 é equivalente a

$$(10) \quad P \text{ ponto em } r, P \neq A \implies P * A * C \text{ ou } P * A * B.$$

Se $P = C$, já temos, por hipótese, que $P * A * B$. Resta provar (10) quando P for distinto de C . Aplicando o Axioma B3 para os três pontos colineares P , C e A , concluímos que uma das três afirmações seguintes é válida:

(i) $P * A * C$, (ii) $A * P * C$, (iii) $A * C * P$. Valendo (i), verifica-se (10). Valendo $A * P * C$, segue da hipótese $B * A * C$ e de (7) que vale $B * A * P$, verificando (10). Valendo $A * C * P$, segue da hipótese $B * A * C$ e de (7) que vale $B * A * P$, verificando (10). $\square$

Podemos resumir o conteúdo das três proposições precedentes no seguinte *princípio de separação da reta*:

(11) Um ponto A numa reta separa a reta em duas semirretas opostas que se interceptam em A .

De fato, dado A em r , tome $B \neq A$ em r (B existe pelo Axioma I2); em seguida tome C tal que $C * A * B$ (C existe pelo Axioma B2). Daí temos

$$\{P; P \text{ está em } r\} = \overrightarrow{AC} \cup \overrightarrow{AB} \text{ e } \overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{AB} = \{A\}.$$

Problema 33. Suponha que $B * A * C$. Mostre que $AC \cap AB = \{A\}$

Teorema da Barra Transversal.

Recorde que estamos denotando (veja a Definição 1.5) por $\angle BAC$ o ângulo que consiste da união das duas semirretas não-opostas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Definimos agora o *interior* do ângulo $\angle BAC$ como sendo a interseção de dois dos semiplanos determinados pelas retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$:

Definição 4.18. *O interior do ângulo $\angle BAC$ é o conjunto dos pontos P que satisfazem: (i) B e P estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AC}$ e (ii) C e P estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AB}$.*

O teorema seguinte é conhecido como o Teorema da Barra Transversal. A demonstração que apresentamos aqui é uma versão detalhada de uma que se encontra na página de Bruce Conrad, professor emérito da Universidade de Temple, Filadélfia. Vale a pena olhar o original, especialmente por causa da figura: <https://math.temple.edu/~conrad/crossbar>.

Teorema 4.19. *Seja X um ponto do interior do ângulo $\angle BAC$. Então a semirreta $\overrightarrow{AX}$ passa por algum ponto do segmento BC (distinto de B e de C).*

Demonstração: Os pontos A , B e C não são colineares, pois as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são distintas e não-opostas, pela definição de ângulo (veja o Problema 30).

O ponto X não está na reta $\overleftrightarrow{AB}$ nem na reta $\overleftrightarrow{AC}$ porque, estando no interior de $\angle BAC$, pertence a um semiplano delimitado por $\overleftrightarrow{AB}$ e a um outro semiplano delimitado por $\overleftrightarrow{AC}$. Segue que as retas $\overleftrightarrow{AX}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ são distintas e se interceptam em A . Também segue que $\overleftrightarrow{AX} \neq \overleftrightarrow{AC}$. Daí, nem B , nem C pertencem a $\overleftrightarrow{AX}$.

Pelo Axioma B2, existe um ponto D tal que $D * A * B$. Pelo Axioma B1, A , B e D são colineares, logo $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{DB}$. Como A , B e C não são colineares, C não pertence a $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{DB}$, logo os pontos B , C e D não são colineares. A reta $\overleftrightarrow{AX}$ atravessa o segmento BD em A . Segue do Axioma B4 aplicado à reta $\overleftrightarrow{AX}$ e aos pontos B , C e D , que $\overleftrightarrow{AX}$ ou atravessa o segmento BC ou atravessa o segmento DC .

O ponto A não pertence a BC porque A , B e C não são colineares. O ponto A também não pertence a DC , pois A , D e C não são colineares, pois C não está em $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AD}$. Logo, a reta $\overleftrightarrow{AX}$ atravessará um dos dois segmentos, BC ou DC , em um ponto distinto de A .

Seja Y um ponto tal que $Y * A * X$ (existe, pelo Axioma B2). Segue da Proposição 4.15 que todo ponto da reta $\overleftrightarrow{AX}$ pertence a $\overrightarrow{AX}$ ou a $\overrightarrow{AY}$. Para provar que a semirreta $\overrightarrow{AX}$ intercepta BC , basta portanto provar que:

- (1) se Z_1 é um ponto distinto de A na semirreta $\overrightarrow{AY}$ e Z_2 satisfaz $D * Z_2 * C$, então $Z_1 \neq Z_2$,
- (2) se Z_1 é um ponto distinto de A na semirreta $\overrightarrow{AY}$ e Z_2 satisfaz $B * Z_2 * C$, então $Z_1 \neq Z_2$,
- (3) se Z_1 é um ponto distinto de A na semirreta $\overrightarrow{AX}$ e Z_2 satisfaz $D * Z_2 * C$, então $Z_1 \neq Z_2$.

Vamos denotar por $\sim_{AB}$ ou $\sim_{AC}$ as relações de equivalência “estar do mesmo lado” de $\overleftrightarrow{AB}$ ou de $\overleftrightarrow{AC}$, respectivamente (veja a Proposição 4.11).

Segue de $Y * A * X$, de $\overleftrightarrow{AX} \neq \overleftrightarrow{AB}$, e de $\overleftrightarrow{AX} \neq \overleftrightarrow{AC}$ que $X \not\sim_{AB} Y$ e $X \not\sim_{AC} Y$.

Como, por hipótese, X está no interior de $\angle BAC$, $X \sim_{AB} C$ e $X \sim_{AC} B$. Daí, $Y \not\sim_{AC} B$ (pois $X \not\sim_{AC} Y$).

Se Z_1 é um ponto distinto de A na semirreta $\overrightarrow{AY}$, então $Z_1 \sim_{AB} Y$ (pelo Problema 13), daí $Z_1 \not\sim_{AB} X$ (pois $X \not\sim_{AB} Y$). Se $D * Z_2 * C$, então $Z_2 \sim_{AB} C$ (pelo Problema 12, pois D está em $\overleftrightarrow{AB}$), logo $Z_2 \sim_{AB} X$ (pois $X \sim_{AB} C$). Daí, se Z_1 é um ponto distinto de A na semirreta $\overrightarrow{AY}$ e Z_2 satisfaz $D * Z_2 * C$, então Z_1 e Z_2 estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{AB}$, em particular são dois pontos distintos. Isto prova (1).

Se Z_1 é um ponto distinto de A na semirreta $\overrightarrow{AY}$, então $Z_1 \sim_{AC} Y$ (pelo Problema 13), daí $Z_1 \not\sim_{AC} X$ (pois $X \not\sim_{AC} Y$). Se $B * Z_2 * C$, então $Z_2 \sim_{AC} B$ (pelo Problema 12, pois C está em $\overleftrightarrow{AC}$), logo $Z_2 \sim_{AC} X$ (pois $X \sim_{AC} B$). Daí, se Z_1 é um ponto distinto de A na semirreta $\overrightarrow{AY}$ e Z_2 satisfaz $B * Z_2 * C$, então Z_1 e Z_2 estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{AC}$, em particular são dois pontos distintos. Isto prova (2).

Se Z_1 é um ponto distinto de A na semirreta $\overrightarrow{AX}$, então $Z_1 \sim_{AC} B$ (pelo Problema 12). Se $D * Z_2 * C$, então $Z_2 \sim_{AC} D$ (pelo Problema 12). Mas $D \not\sim_{AC} B$, pois $D * A * B$. Logo, Z_1 e Z_2 estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AC}$, logo $Z_1 \neq Z_2$. Isto prova (3). $\square$

Problema 34. Seja D um ponto de $\overleftrightarrow{BC}$. Mostre que D pertence ao interior do ângulo $\angle BAC$ se e somente se $B * D * C$.

Problema 35. Seja D um ponto do interior do ângulo $\angle BAC$. Mostre que todos os pontos da semirreta $\overrightarrow{AD}$ distintos de A também estão no interior de $\angle BAC$.

Interior de triângulo. Independência do Postulado de Pasch.

Nesta subseção, definimos interior de triângulo e indicamos como se mostra que os interiores de ângulos e de triângulos são não-vazios. Também discutimos uma reformulação do Axioma B2 e a independência do Axioma B4.

Problema 36. Suponha que $A * B * C$ na reta r e que $A * D * E$ na reta s , $r \neq s$. Mostre que os segmentos BE e CD se interceptam em um ponto M e que M pertence aos interiores dos ângulos $\angle CAE$, $\angle ACE$ e $\angle AEC$.

Sugestão de passos para a resolução do problema: Mostre que

- (a) A e B estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{CD}$, A e D estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{BE}$.
- (b) A e E estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{CD}$, A e C estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{BE}$.
- (c) Existe M em $\overleftrightarrow{CD}$ tal que $B * M * E$, existe N em $\overleftrightarrow{BE}$ tal que $C * N * D$.
- (d) $M = N$.
- (f) M pertence aos interiores dos $\angle CAE$, $\angle ACE$ e $\angle AEC$.

Em vez de supor válido o segundo axioma de ordenamento de Hilbert, nosso Axioma B2, Hartshorne em [3] assume apenas a seguinte reformulação daquele axioma:

(B2') Dados dois pontos A e B , existe C tal que $A * B * C$.

Todas as vezes que invocamos o Axioma B2 até aqui, usamos na verdade apenas esta versão mais fraca, que dados A e B distintos, existe C tal que $A * B * C$. Por isso podemos usar os resultados já demonstrados para provar a seguinte Proposição.

Proposição 4.20. *Suponha que são válidos os axiomas (I1), (I2), (I3), (B1), (B2'), (B3) e (B4). Então vale também o Axioma B2.*

Demonstração: Dados dois pontos B e D , queremos mostrar que existem A , C e E tais que $A * B * D$, $B * C * D$ e $B * D * E$. A existência de A decorre de (B2') com D no lugar de A e mudando o nome do ponto obtido de C para A . A existência de E decorre de (B2') com B no lugar de A , D no lugar de B e mudando o nome do ponto obtido de C para E .

O que queremos provar, portanto, é que, dados B e D pontos distintos, existe um ponto, que chamaremos de F nesta demonstração, tal que $B * F * D$.

Pela Proposição 2.4, existe um ponto A fora de $\overleftrightarrow{BD}$. Chamemos de r a reta $\overleftrightarrow{AB}$ e de s a reta $\overleftrightarrow{AD}$. As retas r e s são distintas, caso contrário seguiria da unicidade do Axioma I1 que $r = s = \overleftrightarrow{BD}$ e portanto A estaria em $\overleftrightarrow{BD}$. Pelo Axioma (B2'), existem C em r e E em s tais que $A * B * C$ e $A * D * E$. Pelo Problema 36, os segmentos CD e BE se encontram em um ponto M pertencente ao interior do ângulo $\angle CAE$, que é igual

ao ângulo $\angle BAD$, pelo Problema 19. Segue do Teorema da Barra Transversal (Teorema 4.19) que existe F na semirreta $\overrightarrow{AM}$ satisfazendo $B * D * F$. $\square$

Definimos o interior de um triângulo $\triangle ACE$ como sendo a interseção dos interiores dos ângulos $\angle CAE$, $\angle ACE$ e $\angle AEC$. Segue do Axioma B2 que existem B e D tais que $A * B * C$ e $A * D * E$. Segue então do Problema 36 que os segmentos BE e CD se encontram em um ponto M no interior de $\triangle ACE$. Isto prova que o interior de um triângulo arbitrário é não-vazio.

Na linguagem da Lógica, a Proposição 4.20 nos diz que, assumindo (I1), (I2), (I3), (B1), (B3) e (B4), os Axiomas (B2) e (B2') são equivalentes.

O corpo $\mathbb{Z}_5$ dos “inteiros (mod 5)” é igual, por definição ao quociente $\mathbb{Z}/\sim$ dos inteiros $\mathbb{Z}$ pela relação de equivalência “ $j \sim k$ se e somente se $j - k$ é múltiplo de 5”. É possível verificar que a adição e a multiplicação de inteiros induzem no conjunto $\mathbb{Z}_5$ operações de adição e de multiplicação, munidas das quais $\mathbb{Z}_5$ se torna um corpo, sendo o elemento neutro da adição a classe de equivalência do inteiro 0 e sendo o elemento neutro da multiplicação a classe do 1. Este corpo tem uma propriedade muito peculiar: dados três elementos distintos de $\mathbb{Z}_5$, um e apenas um dos três é igual à média aritmética dos outros dois. Chamando de y o elemento que é a média dos outros dois, e chamando de x e z os outros dois, isto quer dizer que $x + z = 2y$. Denotamos isto por $x * y * z$. Esta noção de estar-entre no corpo $\mathbb{Z}_5$ é definida no Exercício 7.5 de [3]. Lá Hartshorne sugere que utilizemos essa noção para construir o modelo descrito no parágrafo subsequente.

Tal como no Plano de Descartes, no “plano cartesiano” $(\mathbb{Z}_5)^2$ os pontos são os pares ordenados (x, y) , $x, y \in \mathbb{Z}_5$, e as retas são os subconjuntos dos pontos (x, y) que satisfazem uma equação $ax + by = c$, com a, b e c em $\mathbb{Z}_5$ e $(a, b) \neq (0, 0)$. A mesma demonstração que demos de que o Plano de Descartes satisfaz os axiomas de incidência prova também que em qualquer “plano cartesiano” F^2 , sendo F um corpo arbitrário, são satisfeitos os axiomas de incidência. Tal como esboçado na página 25 para $\mathbb{R}^2$, é possível definir a noção de estar-entre em $(\mathbb{Z}_5)^2$ usando a noção de estar-entre em $\mathbb{Z}_5$ definida acima ($x * y * z$ se e somente se $x + z = 2y$) e verificar que (B1), (B2) e (B3) são satisfeitos. Pelo Problema 25, se valerem nossos sete axiomas de incidência e de ordenamento, todas as retas passam por infinitos pontos. O número total de pontos em $(\mathbb{Z}_5)^2$ é 25, logo nenhuma reta em $(\mathbb{Z}_5)^2$ pode passar por infinitos pontos. Isto prova que (B4) não é satisfeito neste modelo. Ou seja, o Axioma de Pasch não decorre dos axiomas (I1), (I2), (I3), (B1), (B2) e (B3).

Depois deste interlúdio, voltamos a supor que valem os nossos sete axiomas de incidência e ordenamento, (I1), (I2), (I3), (B1), (B2), (B3) e (B4).

Mais alguns resultados técnicos sobre ordenamento.

A seguinte Proposição será útil para definir a adição (sintética) de ângulos.

Proposição 4.21. *Dadas semirretas opostas $\overrightarrow{OK}$ e $\overrightarrow{OJ}$ e pontos H e L fora da reta $\overleftrightarrow{KJ}$, se H estiver no interior do ângulo $\angle KOL$, então L estará no interior de $\angle HOJ$.*

Demonstração: Em primeiro lugar, vamos reformular o enunciado da proposição, usando a definição de interior de ângulo e usando que os pontos J, O e K são colineares e, portanto, pelo Axioma I1, $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{JK}$

São dados 5 pontos J, O, K, L e H tais que $J * O * K$, L e H estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{JK}$, e H e K estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{OL}$. Queremos provar que

- (1) L e H estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{JK}$,
- (2) J e L estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{OH}$.

O item (1) é satisfeito por hipótese. Vamos demonstrar o item (2) por absurdo. Se (2) for falso, existe J' tal que $J * J' * L$ e $J' \in \overleftrightarrow{OH}$. Pelo Axioma B3, segue de $J' \in \overleftrightarrow{OH}$ que um dos quatro casos seguintes ocorre: (i)

$J' = O$, (ii) $J' * O * H$, (iii) $O * J' * H$ ou $O * H * J'$, (iv) $J' = H$. Queremos provar que qualquer uma dessas quatro possibilidades nos leva a uma contradição.

Se valesse (i), as retas $\overleftrightarrow{JL}$ e $\overleftrightarrow{JK}$ teriam dois pontos em comum, $J' = O = J$, logo seriam iguais, pelo Axioma I1. Logo L seria um ponto de $\overleftrightarrow{JK}$, o que contrariaria a hipótese de L pertencer a um dos lados de $\overleftrightarrow{JK}$.

Se valesse (ii), teríamos: (I) J' e H estariam em lados opostos de $\overleftrightarrow{JK}$ (pois O é um ponto de $\overleftrightarrow{JK}$, e (II) J' e L estariam do mesmo lado de $\overleftrightarrow{JK}$ (pelo Problema 12). Seguiria de (I) e (II), pela Proposição 4.11, que L e H estariam em lados opostos de $\overleftrightarrow{JK}$. Mas, por hipótese, L e H estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{JK}$ – contradição!

Se valesse (iii), então: (α) J' e H estariam do mesmo lado de $\overleftrightarrow{OL}$, pelo Problema 12, pois O está em $\overleftrightarrow{OL}$, enquanto J' e H não estão. Como $J * J' * L$, L está em $\overleftrightarrow{OL}$, e J' e J não estão, segue do Problema 12 que (β) J e J' estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{OL}$. Seguiria então de (α) e (β), pela Proposição 4.11, que J e H estariam do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{OL}$. Por outro lado, segue das hipóteses $J * O * K$ e “ H e K estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{OL}$ ”, pela Proposição 4.11, que J e H estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{OL}$. Teríamos então um absurdo: J e H não podem estar, simultaneamente, do mesmo lado e em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{OL}$.

Se valesse (iv), $J' = H$, teríamos, de $J * J' * L$, pelo Problema 12, que H e J estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{OL}$. Mas, por hipótese, J e K estão de lados opostos de $\overleftrightarrow{OL}$ (pois $J * O * K$) e K e H estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{OL}$; logo (pela Proposição 4.11), H e J estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{OL}$. Chegamos a um absurdo: provamos que H e J estão e não estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{OL}$. $\square$

Vamos usar a seguinte proposição para demonstrar o caso LLL de congruência de triângulos:

Proposição 4.22. *Sejam Z_1 e Z_2 dois pontos situados em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{XY}$, seja P o ponto de interseção do segmento Z_1Z_2 com a reta $\overleftrightarrow{XY}$. Temos:*

- (1) *Se $X * P * Y$, então Z_1 é um ponto do interior de $\angle XZ_2Y$ e Z_2 é um ponto do interior de $\angle XZ_1Y$.*
- (2) *Se $P * X * Y$, então X pertence aos interiores dos ângulos $\angle YZ_1Z_2$ e $\angle YZ_2Z_1$.*
- (3) *Se $X * Y * P$, então Y pertence aos interiores dos ângulos $\angle XZ_1Z_2$ e $\angle XZ_2Z_1$.*

Demonstração: O ponto P é o único ponto da reta $\overleftrightarrow{XY}$ que satisfaz $Z_1 * P * Z_2$. A existência de P , dados Z_1 e Z_2 como no enunciado, decorre da definição de dois pontos estarem em lados opostos de uma reta. A unicidade decorre da Proposição 2.2 aplicada às retas $r = \overleftrightarrow{XY}$ e $s = \overleftrightarrow{Z_1Z_2}$.

Se $X * P * Y$, segue do Problema 34 que P está no interior dos ângulos $\angle XZ_2Y$ e $\angle XZ_1Y$. Segue de $Z_1 * P * Z_2$, pela definição de semirreta, que $Z_1 \in \overrightarrow{Z_2P}$ e $Z_2 \in \overrightarrow{Z_1P}$. Daí segue, pelo Problema 35, que Z_1 é um ponto do interior de $\angle XZ_2Y$ e Z_2 é um ponto do interior de $\angle XZ_1Y$.

Se $P * X * Y$, segue do Problema 35 que X está no interior dos ângulos $\angle PZ_1Y$ e $\angle PZ_2Y$. Segue de $Z_1 * P * Z_2$ que $\angle PZ_1Y = \angle PZ_1Z_2$ e $\angle PZ_2Y = \angle PZ_2Z_1$. Isto prova a segunda afirmação do enunciado. A terceira se prova da mesma maneira, trocando os papéis de X e Y . $\square$

Para dar uma demonstração construtiva da existência do ponto médio de um segmento, vamos lançar mão do seguinte resultado sobre ordenamento.

Proposição 4.23. *Suponha que as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ sejam paralelas e que os pontos C e D estejam em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AB}$. Seja M o ponto de interseção de CD com $\overleftrightarrow{AB}$. Então temos $A * M * B$.*

Demonstração: Segue do Axioma B3 que uma e apenas uma das seguintes afirmações é satisfeita: (i) $M = A$, (ii) $M = B$, (iii) $M * A * B$, (iv) $A * B * M$, ou (v) $A * M * B$.

Se valesse (i), as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ teriam dois pontos em comum, A e C , logo seriam iguais (Axioma I1), logo D seria um ponto de $\overleftrightarrow{AC}$, o que não ocorre porque as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ são paralelas. Pelo mesmo argumento também não ocorre (ii) pois, se ocorresse, C seria um ponto de $\overleftrightarrow{BD}$.

Se valesse (iii), a reta $\overleftrightarrow{AC}$ interceptaria o segmento MB no ponto A . Nosso plano é usar o “postulado de Pasch” (Axioma B4) no triângulo $\triangle MBD$. Para tanto devemos primeiramente observar que, neste cenário: (i) os pontos M , B e D são distintos e não-colineares (de fato, temos $M * A * B$ e D está fora de $\overleftrightarrow{AB}$) e (ii) a reta $\overleftrightarrow{AC}$ não passa por esses três pontos (de fato, $\overleftrightarrow{AC}$ não passa por M porque C está fora de $\overleftrightarrow{AM} = \overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ não passa por B porque C está fora de $\overleftrightarrow{AB}$, e $\overleftrightarrow{AC}$ não passa por D porque a interseção das duas retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ é C). Se valesse (iii) seguiria portanto do Axioma B4 que $\overleftrightarrow{AC}$ atravessaria também ou o lado MD ou o lado BD do triângulo $\triangle MBD$. Como as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ são paralelas, vem que $\overleftrightarrow{AC}$ não intercepta BD . Se $\overleftrightarrow{AC}$ interceptasse MD em um ponto P , as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{CD} = \overleftrightarrow{MD}$ teriam dois pontos em comum, A e P , logo teríamos $\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{CD}$, o que é impossível pois $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ são paralelas. Logo, não vale (iii). Argumento idêntico aplicado a outros pontos mostra que não vale (iv). Isto prova que vale (v), ou seja, $A * M * B$. $\square$

No passo (7) da pseudodemonstração do Quinto Postulado que expusemos na página 6, Legendre usou inadvertidamente a seguinte consequência do resultado que ele queria demonstrar.

Proposição 4.24. *Além de assumirmos a validade dos axiomas de incidência e ordenamento até aqui apresentados, suponhamos que valha também o Quinto Postulado de Euclides na versão de Proclus/Playfair: Dada uma reta r e um ponto P que não está em r , existe uma única reta s passando por P e paralela a r . Neste contexto, se r é uma reta passando por um ponto Q situado no interior do ângulo $\angle BAC$, então r intersecta $\overleftrightarrow{AB}$ ou $\overleftrightarrow{AC}$.*

Demonstração: Se r não intersectasse a reta $\overleftrightarrow{AB}$, nem a $\overleftrightarrow{AC}$, existiriam duas retas paralelas a r passando pelo ponto A , violando a unicidade do Quinto Postulado. Logo r intersecta $\overleftrightarrow{AB}$ ou $\overleftrightarrow{AC}$. Para provar que r intersecta $\overleftrightarrow{AB}$ ou $\overleftrightarrow{AC}$, basta portanto provar que:

- (1) se r não intersecta $\overleftrightarrow{AC}$, então r intersecta $\overleftrightarrow{AB}$; e
- (2) se r intersecta $\overleftrightarrow{AC}$, digamos no ponto D , e se D não pertence a $\overleftrightarrow{AC}$, então r intersecta $\overleftrightarrow{AB}$.

Tenhamos sempre em mente, mesmo sem mencionar o fato explicitamente, que no máximo um ponto de r pode estar em $\overleftrightarrow{AB}$, pois, sendo Q um ponto do interior de $\angle BAC$, Q não está em $\overleftrightarrow{AB}$, logo $r \neq \overleftrightarrow{AB}$, logo dois pontos de r não podem estar em $\overleftrightarrow{AB}$ (pela Proposição 2.2). Pela mesma razão, no máximo um ponto de r pode estar na reta $\overleftrightarrow{AC}$.

Prova de (1): Se r não intersecta $\overleftrightarrow{AC}$, então r intersecta $\overleftrightarrow{AB}$ em um ponto distinto de A . Chamemos esse ponto de E . Como o segmento QE não intersecta $\overleftrightarrow{AC}$, segue que Q e E estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$. Como Q é um ponto do interior de $\angle BAC$, temos que Q e B estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$. Logo B e E estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$. Se E não pertencesse a $\overleftrightarrow{AB}$, valeria $E * A * B$ (pela Proposição 4.3), logo B e E estariam em lados opostos de $\overleftrightarrow{AB}$, mas não estão. Logo E pertence a $\overleftrightarrow{AB}$.

Prova de (2): Se D não pertence a $\overleftrightarrow{AC}$, então vale $D * A * C$ (pela Proposição 4.3)). Logo, D e C estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AB}$. Como Q é um ponto do interior de $\angle BAC$, temos que Q e C estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AB}$. Logo D e Q estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{AB}$. Seja F a interseção de $\overleftrightarrow{AB}$ com o segmento DQ (F é distinto de D e Q). Sendo F e Q pontos distintos da semirreta $\overrightarrow{DQ}$, e dado que D está em $\overleftrightarrow{AC}$ e Q não está, segue da Proposição 13 que F e Q estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$. Como Q e B estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$, segue que F e B estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$, logo F é um ponto de r que também está em $\overleftrightarrow{AB}$. $\square$

Ordenamento no Plano de Descartes e no de Plano de Poincaré.

Dados três números reais x, y e z , diremos que y está entre x e z , o que será denotado por $x * y * z$, se valer $x < y < z$ ou $x > y > z$. É um exercício bem simples verificar que (B1), (B2) e (B3) são satisfeitos por esta noção de “estar entre” para números reais. Como as retas do Plano de Descartes e as do Plano de Poincaré podem ser parametrizadas por números reais, podemos exportar a noção de “estar entre” dos reais para definir ordenamento de pontos nesses dois modelos da geometria de incidência.

De fato, seja $ax + by = c$ a equação de uma reta r no Plano de Descartes. Se b for diferente de zero, todos os pontos de r são da forma $D(t) = (t, \frac{at-c}{b})$ para algum (e único) $t \in \mathbb{R}$. Se $b = 0$, então $a \neq 0$ e todos os pontos de r são da forma $D(t) = (\frac{c}{a}, t)$ para algum $t \in \mathbb{R}$. Nos dois casos, diremos que três pontos de r , $D(t_1)$, $D(t_2)$ e $D(t_3)$, satisfazem $D(t_1) * D(t_2) * D(t_3)$ se e somente se $t_1 * t_2 * t_3$. É bem simples mostrar que os três primeiros axiomas de ordenamento são satisfeitos por esta noção de ordenamento dos pontos do Plano de Descartes. É possível mostrar, mas não faremos isso, que o Axioma B4 também é satisfeito.

No caso do Plano de Poincaré, também definiremos a noção de estar entre para três pontos colineares considerando dois tipos de retas. Se a reta s é do tipo L_a , para algum $a \in \mathbb{R}$, então todos os pontos de s são da forma $P(t) = (a, t)$, para algum $t > 0$. Se $s = L_{a,r}$ para algum $a \in \mathbb{R}$ e para algum $r > 0$, então todos os pontos de s são da forma $P(t) = (t, \sqrt{a^2 - t^2})$, para algum t no intervalo aberto $(a - r, a + r)$. Nos dois casos, diremos que três pontos de s , $P(t_1)$, $P(t_2)$ e $P(t_3)$, satisfazem $P(t_1) * P(t_2) * P(t_3)$ se e somente se $t_1 * t_2 * t_3$. É bem simples mostrar que os três primeiros axiomas de ordenamento são satisfeitos por esta noção de ordenamento dos pontos do Plano de Poincaré. É possível provar que o Axioma B4 também é satisfeito.

5. AXIOMAS DE CONGRUÊNCIA

A rigor, o termo primitivo “congruência” (ou “congruente”) são na verdade dois termos primitivos, congruência de segmentos e congruência de ângulos. Aceitamos sem definição as frases “o segmento PQ é congruente ao segmento RS ” e “o ângulo $\angle BAC$ é congruente ao ângulo $\angle EDF$ ”, o que será denotado por $PQ \cong RS$ e $\angle BAC \cong \angle EDF$, e listamos os seis axiomas que governam o uso dessas expressões.

A ideia intuitiva de congruência, se a gente pensa em geometria como uma descrição do espaço físico a nossa volta, é que duas figuras são congruentes se podem ser levadas de uma até a outra sem deformação, de modo que, quando superpostas, elas coincidam exatamente (é mais ou menos isso o que diz Euclides na sétima das Noções Comuns, no início dos Elementos [1]). Nosso objetivo é tratar congruência formalmente, sem que nossos argumentos dependam dessa ideia intuitiva, que entretanto pode ser usada, cautelosamente, como uma bússola para apontar o caminho da argumentação.

Congruência de segmentos.

- (C1) Sejam A e B dois pontos. Dada qualquer semirreta $\overrightarrow{A'X'}$, existe um único ponto $B' \in \overrightarrow{A'X'}$, $B' \neq A'$, tal que $AB \cong A'B'$.
- (C2) Se $AB \cong CD$ e $AB \cong EF$, então $CD \cong EF$. Além disso, todo segmento é congruente a si próprio.
- (C3) Se $A * B * C$, $A' * B' * C'$, $AB \cong A'B'$ e $BC \cong B'C'$, então $AC \cong A'C'$.

Como já mencionamos na página 5, o compasso euclidiano executa o que o Terceiro Postulado prescreve: dados dois pontos O e A , traça o círculo com centro em O e raio OA . O compasso euclidiano, entretanto, só funciona quando suas duas pontas estão no papel. Ao ser retirado do lugar em que o círculo foi traçado, ele fica frouxo e não preserva o registro do “comprimento” do segmento OA . Para transportar distâncias, os arquitetos usam como ferramenta o *compasso balaústre*, um compasso munido de um parafuso na articulação que permite prender os dois braços do compasso em uma abertura fixa. O Axioma (C1) pode ser interpretado como uma construção com um compasso balaústre, que executa o transporte de segmentos.

Segue imediatamente de (C2) a seguinte proposição. Seria logicamente equivalente incluir este enunciado como parte do Axioma C2.

Proposição 5.1. *Se $AB \cong CD$, então $CD \cong AB$.*

Demonstração: Por hipótese, $AB \cong CD$. Pela segunda parte de (C2), $AB \cong AB$. Pela primeira parte de (C2), $CD \cong AB$. $\square$

Segue do Axioma C2 e da Proposição 5.1 que a congruência de segmentos é uma relação de equivalência definida no conjunto de todos os segmentos.

Se $A * B * C$, diz-se que AC é a *adição* dos segmentos AB e BC . A proposição seguinte nos diz que esse conceito respeita congruência.

Proposição 5.2. *Dados segmentos AB , $A'B'$, CD e $C'D'$, existem únicos pontos E e E' tais que $A * B * E$, $A' * B' * E'$, $BE \cong CD$ e $B'E' \cong C'D'$. Se valer $AB \cong A'B'$ e $CD \cong C'D'$, podemos então concluir que $AE \cong A'E'$.*

Demonstração: Seja $\overrightarrow{BX'}$ a semirreta oposta a $\overrightarrow{BA}$ (veja o Problema 31). Pelo Axioma C1, existe um ponto E em $\overrightarrow{BX'}$ tal que $BE \cong CD$. Pelo Problema 32, temos $A * B * E$. Isto prova a existência de E . A unicidade de E decorre da unicidade postulada no Axioma C1 e de mais uma aplicação do Problema 32: se E_1 satisfaz o mesmo que E ($A * B * E_1$ e $BE_1 \cong CD$) então $E = E_1$. A existência e unicidade de E' se demonstra da mesma forma, obviamente.

Suponhamos agora que vale $CD \cong C'D'$. Pela maneira como obtivemos E e E' , temos também $BE \cong CD$ e $B'E' \cong C'D'$. Aplicando duas vezes a transitividade da congruência de segmentos, concluímos que $BE \cong B'E'$. Isto, somado à hipótese $AB \cong A'B'$, implica (usando o Axioma C3 com E e E' nos lugares de C e C' , respectivamente) que $AE \cong A'E'$. $\square$

Dado um segmento AB , denotamos por $[AB]$ a *classe de congruência* de AB ,

$$[AB] = \{A'B'; A'B' \text{ é um segmento e } A'B' \cong AB\}.$$

Como congruência de segmentos é uma relação de equivalência, temos que $[AB] = [FG]$ se e somente se $AB \cong FG$ (Proposição 11.2). A Proposição 5.2 nos diz que está bem definida a adição de classes de congruência de segmentos. Mais precisamente, dados dois segmentos AB e CD , seja E o único ponto tal que $A * B * E$ e $CD \cong BE$. Definimos então

$$[AB] + [CD] = [AE].$$

Isto faz sentido porque se tomarmos representantes $A'B'$ e $C'D'$ diferentes das classes $[AB]$ e $[CD]$, respectivamente, e obtivermos os pontos E e E' da maneira descrita no enunciado da Proposição 5.2, teremos $[AE] = [A'E']$.

É possível definir também a multiplicação de classes de equivalência de segmentos e demonstrar que essas operações são comutativas e associativas e vale a distributividade, formando o que se chama de a *aritmética dos segmentos* [3, Chapter 4].

Problema 37. Mostre que a adição de classes de congruência de segmentos é comutativa

Congruência de ângulos.

- (C4) Considere o ângulo $\angle BAC$. Dados uma semirreta $\overrightarrow{A'B'}$ e um semiplano H delimitado pela reta $\overleftrightarrow{A'B'}$, existe uma única semirreta $\overrightarrow{A'C'}$ com $C' \in H$ tal que $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$.
- (C5) Se $\angle BAC \cong \angle EDF$ e $\angle BAC \cong \angle HGI$, então $\angle EDF \cong \angle HGI$. Além disso, todo ângulo é congruente a si próprio.

Pelo Problema 19, se C'' for qualquer ponto distinto de A' da semirreta $\overrightarrow{A'C'}$, então $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'C''}$ e portanto são iguais os ângulos $\angle B'A'C'$ e $\angle B'A'C''$. Além disso, se $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'C''}$ então C' e C'' estão do mesmo lado

de $\overleftrightarrow{A'B'}$ (isto segue do Problema 13). Por isso falamos em unicidade da semirreta $\overrightarrow{A'C'}$, e não do ponto C' no enunciado do Axioma (C4).

Tal como para a congruência de segmentos, seria logicamente equivalente incluir a proposição seguinte como parte do Axioma C5.

Proposição 5.3. *Se $\angle BAC \cong \angle EDF$, então $\angle EDF \cong \angle BAC$.*

Demonstração: Por hipótese, $\angle BAC \cong \angle EDF$. Pela segunda parte de (C5), $\angle BAC \cong \angle BAC$. Pela primeira parte de (C5), $\angle EDF \cong \angle BAC$. $\square$

Podemos agora dizer que a congruência de ângulos é uma relação de equivalência definida no conjunto de todos os ângulos.

Somar ângulos é mais complicado do que somar segmentos. É preciso tomar cuidado com ângulos que têm “interior grande demais”. Trataremos disso mais tarde. O resultado análogo à Proposição 5.2 que vamos provar para ângulos, o Teorema 6.7, decorrerá dos seis axiomas de congruência (e, naturalmente, também dos axiomas de incidência e de ordenamento).

Para enunciar o sexto axioma de congruência, precisamos antes definir a noção de congruência de triângulos.

Definição 5.4. *Diremos que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são congruentes, o que denotaremos por $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, se os lados correspondentes são dois-a-dois congruentes e se os ângulos correspondentes são dois-a-dois congruentes, isto é, se*

$$AB \cong DE, \quad BC \cong EF, \quad CA \cong FD, \quad \angle ABC \cong \angle DEF, \quad \angle BCA \cong \angle EFD \quad \text{e} \quad \angle CAB \cong \angle FDE.$$

É importante observar que a relação congruência de triângulos não se define para pares de triângulos, mas sim para pares de triângulos com vértices ordenados. Se, por exemplo, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ e BC e AC não forem congruentes, $\triangle BAC$ não será congruente a $\triangle DEF$. Embora, como conjuntos de pontos, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle BAC$ sejam idênticos, seus vértices estão ordenados de maneiras diferentes.

Problema 38. Mostre que congruência de triângulos é uma relação de equivalência. Isto é, mostre que

- (1) $\triangle ABC \cong \triangle ABC$,
- (2) $\triangle ABC \cong \triangle DEF \implies \triangle DEF \cong \triangle ABC$,
- (3) $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ e $\triangle DEF \cong \triangle GHI \implies \triangle ABC \cong \triangle GHI$

Axioma C6. Casos LAL e ALA de congruência.

O Axioma (C6), enunciado logo a seguir, é conhecido com o *caso LAL de congruência de triângulos*. Ele é dado como a Proposição 4 do Livro I dos Elementos. Mas, em sua demonstração, Euclides usa o conceito de área, sem definir ou postular do que se trata, e usa também o conceito de movimentos rígidos no plano. É possível definir área de certas regiões do plano e demonstrar suas propriedades [6, Chapter 14] e é possível axiomatizar a existência de movimentos rígidos e assim preencher as lacunas da demonstração da Proposição I.4 dos elementos [3, Section 17]. A abordagem de Hilbert foi, essencialmente, tomar o caso LAL de congruência como um postulado. Veremos no final desta subseção que, na verdade, Hilbert tomou como postulado um pouco menos do que o LAL, mas que no fim dá na mesma.

(C6) Se $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ e $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, então $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Os axiomas (C4) e (C1) nos permitem transportar ângulos e segmentos, respectivamente. Decorre agora do critério LAL que triângulos inteiros podem ser “transportados”. Mais precisamente, temos a seguinte proposição.

Proposição 5.5. *Dados triângulos $\triangle ABC$, segmento $A'B' \cong AB$ e semiplano H delimitado pela reta $\overleftrightarrow{A'B'}$, existe um único ponto C' em H tal que $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.*

Demonstração: O axioma (C4) nos fornece um ponto X em H tal que $\overrightarrow{A'X}$ é a única semirreta tal que $\angle CAB \cong \angle XA'B'$. Seja C' o ponto, cujas existência e unicidade são garantidas pelo Axioma (C1), tal que $AC \cong A'C'$. Segue do Problema 19 que $\angle C'A'B' = \angle XA'B'$, logo $\angle B'A'C' \cong \angle CAB$. Por hipótese, $AB \cong A'B'$. Segue do Axioma (C6) que $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. $\square$

Assumindo, como fazemos aqui, o Axioma C6, que garante a congruência de dois triângulos com pares de lados congruentes adjacentes a ângulos congruentes, podemos demonstrar a congruência de dois triângulos com pares de ângulos congruentes cujos lados adjacentes comuns também sejam congruentes. Em outras palavras, assumindo o critério LAL como verdadeiro, vamos agora demonstrar o critério ALA.

Proposição 5.6. *Sejam A , B e C três pontos não-colineares, sejam A' , B' e C' três pontos não-colineares. Se $AB \cong A'B'$, $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$ e $\angle CBA \cong \angle C'B'A'$, então $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.*

Demonstração: Seja X o único ponto da semirreta $\overrightarrow{B'C'}$ tal que $BC \cong B'X$ (a existência e a unicidade de X decorrem do Axioma C1). Temos, por hipótese, $AB \cong A'B'$ e $\angle ABC \cong \angle A'B'X$ ($\angle A'B'X = \angle A'B'C'$, porque $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{B'X}$, pelo Problema 19) e, por construção, $BC \cong B'X$. Segue portanto do Axioma C6 que

$$(12) \quad \triangle ABC \cong \triangle A'B'X$$

e, em particular, que

$$(13) \quad \angle CAB \cong \angle XA'B'.$$

O Problema 13 aplicado à reta $\overleftrightarrow{A'B'}$ e ao ponto C' implica que os pontos C' e X estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{A'B'}$. A hipótese $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$, (13) e a unicidade do Axioma (C4) implicam a igualdade de semirretas $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'X}$, o que implica, em particular, que X é o ponto de interseção das retas $\overleftrightarrow{A'C'}$ e $\overleftrightarrow{B'C'}$, ou seja, $X = C'$ e, portanto, (12) é a afirmação que queríamos demonstrar. $\square$

Em vez de assumir o Axioma C6, Hilbert assume apenas o seguinte axioma [4, Axioma IV-6], que à primeira vista pode parecer mais fraco do que (C6):

(C6') Se $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ e $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, então $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$.

O seguinte problema é o Teorema 11 de [4]. Ele pode ser resolvido imitando a demonstração da Proposição 5.6. Hilbert demonstra seu Teorema 11 e afirma que a nossa Proposição 5.6 (enunciada sem demonstração como o Teorema 12 em [4]) pode ser demonstrada de maneira semelhante.

Problema 39. [(C6') implica (C6)] Suponha que é válida a afirmação (C6'). Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ triângulos satisfazendo $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ e $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$. Mostre ⁵ que $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Sugestão: (i) Trocando o nome das letras, obtém-se $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$. (ii) Obtenha X em $\overrightarrow{B'C'}$ tal que $B'X \cong BC$. Use (C6') no triângulo $\triangle A'B'X$. (iii) Note que, se $X \neq C'$, (C4) terá sido violado.

Teorema do Triângulo Isósceles.

A proposição seguinte afirma que, se dois lados de um triângulo são congruentes, então os dois ângulos adjacentes ao terceiro lado são congruentes. Triângulos que têm essa propriedade são chamados de isósceles e este resultado é conhecido como o “teorema do triângulo isósceles”.

Proposição 5.7. *Se A , B e C são três pontos não-colineares e $AB \cong AC$, então $\angle ABC \cong \angle ACB$.*

Demonstração: Considere os triângulos com vértices ordenados $\triangle ABC$ e $\triangle ACB$. Por hipótese, temos $AB \cong AC$. Segue da Proposição 5.3 que $AC \cong AB$. Segue da definição de ângulo que $\angle BAC = \angle CAB$, daí, pela segunda parte do Axioma (C5), temos $\angle BAC \cong \angle CAB$. Segue do Axioma (C6) com $A' = A$, $B' = C$ e $C' = B$ a congruência $\triangle ABC \cong \triangle ACB$. Em particular, $\angle ABC \cong \angle ACB$. $\square$

⁵Claro que não vale invocar o Axioma C6. O objetivo deste problema é mostrar que, supondo válido o aparentemente mais fraco Axioma C6', aquilo que enunciamos como o Axioma C6 pode ser demonstrado como uma proposição.

Esta demonstração que acabamos de dar do Teorema do Triângulo Isósceles é devida a Papus, que viveu seis séculos depois de Euclides, ambos em Alexandria. A demonstração de Papus é muito mais curta do que a demonstração do mesmo teorema dada por Euclides na Proposição 5 do Livro I dos Elementos. O que permitiu a simplificação do argumento foi o uso do caso LAL de congruência de triângulos para um mesmo triângulo com os vértices ordenados de duas maneiras diferentes. Euclides só usava o LAL para dois triângulos diferentes. Papus deu um salto formal ao considerar como dois entes distintos o mesmo triângulo com os vértices ordenados de duas maneiras diferentes.

A recíproca do Teorema do Triângulo Isósceles pode ser demonstrada imitando a demonstração da Proposição 5.7, usando o caso ALA em vez do LAL. Isto fica como exercício:

Problema 40. Sejam A , B e C três pontos não-colineares. Mostre que, se $\angle ABC \cong \angle ACB$, então $AB \cong AC$.

Dado um triângulo $\triangle ABC$, diremos que ele é *equilátero* se os lados AB , BC e AC forem dois a dois congruentes, e que é *equiângulo* se os ângulos $\angle ABC$, $\angle CAB$ e $\angle BCA$ forem dois a dois congruentes.

Problema 41. Mostre que o triângulo $\triangle ABC$ é equilátero se, e somente se, ele é equiângulo.

6. MAIS CONSEQUÊNCIAS DOS AXIOMAS DE CONGRUÊNCIA

Como uma aplicação do Axioma C3, mostramos que a adição por justaposição de segmentos fica bem definida para classes de congruência de segmentos. Nesta seção, mostramos que isso vale também para subtração de segmentos e adição e subtração de ângulos. Essas operações são “sintéticas”, no sentido de que não dizem respeito a números, ou medidas, mas apenas a entes geométricos relacionados por congruência. Como aplicação da subtração de segmentos, veremos a demonstração de Euclides do Teorema do Triângulo Isósceles. Como aplicação da adição de ângulos, veremos o critério LLL de congruência de triângulos.

Subtração de segmentos. Congruência dos suplementares de congruentes. Opostos pelo vértice.

Provamos agora uma afirmação análoga ao Axioma C3 para subtração.

Proposição 6.1. Se $A * B * C$, $A' * B' * C'$, $AB \cong A'B'$ e $AC \cong A'C'$, então $BC \cong B'C'$.

Demonstração: Invoquemos o Axioma (C1) para obter o único ponto $X \in \overrightarrow{B'C'}$, tal que $X \neq B'$ e $B'X \cong BC$. Como $X \in \overrightarrow{B'C'}$ e $X \neq B'$, temos $X \notin \overrightarrow{B'A'}$ (pela Proposição 4.17) e, portanto, $A' * B' * X$ (pela Proposição 4.3). Temos, por hipótese, $AB \cong A'B'$ e, por construção, $BC \cong B'X$. Segue do Axioma (C3) que $AC \cong A'X$. Além disso, pelo Problema 22, $X \in \overrightarrow{A'C'}$. Logo X é o único ponto da semirreta $X \in \overrightarrow{A'C'}$ tal que $AC \cong A'X$. Mas o ponto C' também tem essa propriedade (por hipótese, $AC \cong A'C'$). Pela unicidade do Axioma C1, segue $X = C'$. Logo $BC \cong B'C'$. $\square$

Recorde que dois ângulos são suplementares se possuem um lado em comum e se os outros dois lados são semirretas opostas (veja a Definição 1.6). A proposição seguinte é o Teorema 13 de [4].

Proposição 6.2. Sejam $\angle ABC$ e $\angle A'B'C'$ dois ângulos congruentes, sejam $\angle CBD$ e $\angle C'B'D'$ seus suplementares. Então vale $\angle CBD \cong \angle C'B'D'$.

Demonstração: Sem perda de generalidade, podemos supor que

$$(14) \quad AB \cong A'B', \quad CB \cong C'B' \quad \text{e} \quad BD \cong B'D'$$

(de fato, se não fosse esse o caso, poderíamos invocar o Axioma C1 para substituir os pontos A' , C' e D' por novos pontos satisfazendo essa exigência). Segue de LAL (Axioma C6) a congruência $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Em particular, temos

$$(15) \quad AC \cong A'C' \quad \text{e} \quad \angle CAB \cong \angle C'A'B'.$$

Os pontos A , B e D satisfazem $A * B * D$ pois, como segue da definição de ângulos suplementares, $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BD}$ são semirretas opostas (veja a Proposição 4.16). Pela mesma razão, temos $A' * B' * D'$. Seguem do Problema 19 as igualdades de semirretas $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'D'}$, logo as igualdades de ângulos $\angle CAD = \angle CAB$ e $\angle C'A'D' = \angle C'A'B'$, o que, combinado às congruências de ângulos em (15) nos leva, pela reflexividade da congruência de ângulos, a

$$(16) \quad \angle CAD \cong \angle C'A'D'.$$

Segue (14), de $A * B * D$ e $A' * B' * D'$ e do Axioma C3 que $AD \cong A'D'$. Disto, de (14), de (16) e do Axioma C6, segue que $\triangle CAD \cong \triangle C'A'D'$. Em particular, usando o mesmo argumento de igualdade de ângulos que nos levou de (15) a (16), obtemos

$$(17) \quad CD \cong C'D' \quad \text{e} \quad \angle BDC \cong \angle B'D'C'.$$

Segue de $BD \cong B'D'$, de (17) e do Axioma C6 que $\triangle BCD \cong \triangle B'C'D'$. Em particular, temos $\angle CBD \cong \angle C'B'D'$, que é o que queríamos demonstrar. $\square$

Diremos que dois ângulos são *opostos pelo vértice* se seus quatro lados formam duas retas. Mais precisamente:

Definição 6.3. Os ângulos $\angle BAC$ e $\angle DAE$ são *opostos pelo vértice* se $B * A * E$ e $C * A * D$.

Problema 42. Usando a Proposição 6.2, mostre que ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

O conteúdo da Proposição 6.2 pode ser resumido na frase “os suplementares de ângulos congruentes são congruentes”. Tomando um pouco mais de cuidado, podemos dizer também algo na linha de “congruente de suplementar é suplementar”. Mais precisamente, vale o seguinte resultado.

Proposição 6.4. Sejam $\angle ABC$ e $\angle CBD$ ângulos suplementares, seja $\angle A'B'C'$ congruente a $\angle ABC$. Se D' é um ponto fora de $\overrightarrow{B'C'}$, D' e A' estão em lados opostos de $\overrightarrow{B'C'}$, e $\angle C'B'D' \cong \angle CBD$, então $\angle C'B'D'$ e $\angle A'B'C'$ são suplementares.

Demonstração: Invocando o Axioma B2, tome E' tal que $A' * B' * E'$. Pela Proposição 6.2, temos $\angle CBD \cong \angle C'B'E'$. Por hipótese, D' e A' estão em lados opostos de $\overrightarrow{B'C'}$ e, por construção, A' e E' também estão em lados opostos de $\overrightarrow{B'C'}$. Segue portanto da Proposição 4.11 que D' e E' estão do mesmo lado da reta $\overrightarrow{B'C'}$. Como ambos os ângulos $\angle C'B'D'$ e $\angle C'B'E'$ são congruentes a $\angle CBD$, segue da unicidade no Axioma C4 que as semirretas $\overrightarrow{B'D'}$ e $\overrightarrow{B'E'}$ são iguais. Segue portanto de $A' * B' * E'$ que $A' * B' * D'$ e, portanto, que as semirretas $\overrightarrow{B'A'}$ e $\overrightarrow{B'D'}$ são opostas, como queríamos. $\square$

Apesar de aparentemente auto-evidente, o lema seguinte precisa ser demonstrado. Ele será usado para provar a existência da bissetriz de um ângulo arbitrariamente dado.

Lema 6.5. Sejam A e M pontos em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{BC}$ tais que $AB \cong AC$ e $MB \cong MC$. Então M não está na reta $\overleftrightarrow{AB}$ nem na reta $\overleftrightarrow{AC}$.

Demonstração: O primeiro passo da demonstração é observar que, pelo teorema do triângulo isósceles, $\angle ABC \cong \angle ACB$ e $\angle CBM \cong \angle BCM$.

Vamos provar o lema por absurdo, separando em casos. Se M for um ponto de $\overleftrightarrow{AB}$, então vale $M * B * A$, pois M e A estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{AB}$. Os ângulos $\angle ABC$ e $\angle CBM$ serão portanto suplementares. Logo, pela Proposição 6.4, $\angle ACB$ e $\angle BCM$ também serão suplementares. Logo M está também em $\overleftrightarrow{AC}$, logo $M = A$, o que é um absurdo, pois $M \not\sim_{BC} A$. Do mesmo modo se chega a um absurdo partindo-se de $M * C * A$. $\square$

Adição e subtração de ângulos.

Seguindo [4], obteremos o teorema de adição de ângulos, Teorema 6.7, como consequência da subtração de ângulos (proposição seguinte) e da congruência dos suplementares de ângulos congruentes (Proposição 6.2).

Proposição 6.6. *Seja H um ponto no interior do ângulo $\angle KOL$, seja H' um ponto no interior do ângulo $\angle K'O'L'$. Se $\angle KOL \cong \angle K'O'L'$ e $\angle HOL \cong \angle H'O'L'$, então $\angle KOH \cong \angle K'O'H'$.*

Demonstração: Pelo Teorema 4.19 (o “teorema da barra transversal”), a semirreta $\overrightarrow{OH}$ intersecta o segmento KL . Chamemos de H_1 esse ponto de interseção. Pelo Problema 19, $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OH_1}$. Pelo Problema 35, H_1 pertence ao interior do ângulo $\angle KOL$. Pelo Problema 34, temos $K * H_1 * L$. Substituindo o H dado por H_1 e mudando o nome de H_1 para H , podemos portanto supor sem perda de generalidade que $K * H * L$. Também sem perda de generalidade, podemos supor ademais que

$$(18) \quad OK \cong O'K', \quad OH \cong O'H' \quad \text{e} \quad OL \cong O'L'$$

(de fato, se não fosse esse o caso, poderíamos invocar o Axioma (C1) para substituir os pontos K' , H' e L' por novos pontos satisfazendo essa exigência).

Seguem do Axioma (C6) e das hipóteses que foram adicionadas, sem perda de generalidade, no primeiro parágrafo desta demonstração as congruências

$$(19) \quad \Delta KOL \cong \Delta K'O'L' \quad \text{e} \quad \Delta HOL \cong \Delta H'O'L'.$$

Em particular, temos

$$\angle KLO \cong \angle K'L'O' \quad \text{e} \quad \angle HLO \cong \angle H'L'O'$$

Segue de $K * H * L$ e do Problema 19 que $\angle KLO = \angle HLO$. Vem portanto: $\angle KLO \cong \angle H'L'O'$. O Axioma (C4) nos diz que existe uma única semirreta $L'X$, com X e K' no mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{O'L'}$, tal que $\angle KLO \cong \angle XL'O'$. Os pontos H' e K' estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{O'L'}$ porque, por hipótese, H' está no interior do ângulo $\angle K'O'L'$. Logo, tanto H' quanto K' podem fazer o papel de X , logo $\overrightarrow{L'H'} = \overrightarrow{L'K'}$, e portanto L' , H' e K' são colineares. Como H' está no interior de $\angle K'O'L'$, segue do Problema 35 que $L' * H' * K'$.

Seguem de (19) as congruências $LH \cong L'H'$ e $KL \cong K'L'$. Daí segue da Proposição 6.1 (“subtração de segmentos”) que KH e $K'H'$ são congruentes. Por (18), OK e $O'K'$ são congruentes. Segue de $\Delta KOL \cong \Delta K'O'L'$ e de $\overrightarrow{KH} = \overrightarrow{K'L'}$ e $\overrightarrow{K'H'} = \overrightarrow{K'L'}$ que os ângulos $\angle OKH$ e $\angle O'K'H'$ são congruentes. Logo, por (C6), temos $\Delta OHK \cong \Delta O'H'K'$, em particular $\angle KOH \cong \angle K'O'H'$. $\square$

Teorema 6.7. *Seja H um ponto no interior do ângulo $\angle KOL$, seja H' um ponto no interior de $\angle K'O'L'$. Se $\angle KOH \cong \angle K'O'H'$ e $\angle HOL \cong \angle H'O'L'$, então $\angle KOL \cong \angle K'O'L'$.*

Demonstração: Use o Axioma (B2) para obter um ponto J tal que $K * O * J$ e um ponto J' tal que $K' * O' * J'$. Segue da Proposição 4.21 que L está no interior de $\angle HOJ$ e L' está no interior de $\angle H'O'J'$. Segue da definição de ângulo suplementar (Definição 1.6) que $\angle HOJ$ é suplementar de $\angle KOH$ e que $\angle H'O'J'$ é suplementar de $\angle K'O'H'$. Segue da hipótese $\angle KOH \cong \angle K'O'H'$ e da Proposição 6.2 que $\angle JOH \cong \angle J'O'H'$. Aplicando a Proposição 6.6 com os ângulos $\angle JOH$ e $\angle J'O'H'$ no lugar de $\angle KOL$ e $\angle K'O'L'$, concluímos que $\angle JOL \cong \angle J'O'L'$. Usando novamente a Proposição 6.2, concluímos que $\angle KOL \cong \angle K'O'L'$. $\square$

Caso LLL de congruência.

O caso ângulo-lado-ângulo de congruência de triângulos (Proposição 5.6) foi uma consequência razoavelmente simples do caso lado-ângulo-lado (Axioma C6) e dos demais axiomas de congruência de segmentos e de ângulos. O caso lado-lado-lado é mais complicado. Daremos nesta subseção uma demonstração de Hilbert. O primeiro passo será provar o critério no caso em que os dois triângulos têm um lado em comum. O Teorema 6.8 é o Teorema 17 de [4], o Teorema 6.9 é uma versão simplificada do Teorema 18 de [4].

Teorema 6.8. *Sejam Z_1 e Z_2 dois pontos situados em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{XY}$. Se $XZ_1 \cong XZ_2$ e $YZ_1 \cong YZ_2$, então $\Delta XYZ_1 \cong \Delta XYZ_2$ e, portanto, $\angle XYZ_1 \cong \angle XYZ_2$.*

Demonstração: Seja P o ponto de interseção do segmento Z_1Z_2 com a reta $\overleftrightarrow{XY}$. Segue do Axioma B3 que podemos dividir a demonstração em cinco casos:

(i) $P = X$, (ii) $P = Y$, (iii) $X * P * Y$, (iv) $P * X * Y$, (v) $X * Y * P$.

No caso (i), segue da hipótese $YZ_1 \cong YZ_2$ que o triângulo ΔYZ_1Z_2 é isósceles. Segue da Proposição 5.7 e de $Z_1 * X * Z_2$ ($X=P$) que

$$\angle XZ_1Y = \angle Z_2Z_1Y \cong \angle Z_1Z_2Y = \angle XZ_2Y.$$

Disto e das congruências $Z_1X \cong Z_2X$ (hipótese) e $XY \cong XY$ (Axioma C2), segue pelo Axioma C6 que os triângulos ΔXZ_1Y e ΔXZ_2Y são congruentes, o que é equivalente a dizer que $\Delta XYZ_1 \cong \Delta XYZ_2$.

No caso (ii), argumento idêntico ao do caso (i), trocando os papéis de X e Y , mostra que $\Delta XZ_1Y \cong \Delta XZ_2Y$ e, portanto, $\Delta XYZ_1 \cong \Delta XYZ_2$.

Nos três casos restantes, nem X nem Y pertencem à reta $\overleftrightarrow{Z_1Z_2}$. Segue das hipóteses $XZ_1 \cong XZ_2$ e $YZ_1 \cong YZ_2$ que os triângulos ΔXZ_1Z_2 e ΔYZ_1Z_2 são isósceles. Seguem então da Proposição 5.7 as congruências

$$(20) \quad \angle XZ_1Z_2 \cong \angle XZ_2Z_1 \quad \text{e} \quad \angle YZ_1Z_2 \cong \angle YZ_2Z_1.$$

No caso (iii), segue da Proposição 4.22-(1) que Z_2 está no interior de $\angle XZ_1Y$ e Z_1 está no interior de $\angle XZ_2Y$. Segue então de (20) e do Teorema 6.7 que

$$(21) \quad \angle XZ_1Y \cong \angle XZ_2Y.$$

No caso (iv), segue da Proposição 4.22-(2) e da Proposição 6.6 que vale (21). No caso (v), segue da Proposição 4.22-(3) e da Proposição 6.6 que vale (21). Assim, nos casos (iii), (iv) e (v), vale (21). Valem também, por hipótese, $XZ_1 \cong XZ_2$ e $YZ_1 \cong YZ_2$. Daí o Axioma C6 nos permite concluir que $\Delta XYZ_1 \cong \Delta XYZ_2$. $\square$

Observação: No caso em que $P = Y$ no lema precedente, os ângulos $\angle Z_1YX$ e $\angle Z_2YX$, que provamos serem congruentes, são também suplementares um do outro, pois $Z_1 * Y * Z_2$. Logo, eles são ângulos retos (veja a Definição 1.7).

Teorema 6.9. *Sejam A , B e C três pontos não-colineares, sejam A' , B' e C' três pontos não-colineares. Se $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ e $CA \cong C'A'$, então $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.*

Demonstração: Usando os axiomas de transporte de ângulos e segmentos (C4) e (C1), podemos obter o único ponto B_2 tal que:

- (1) B_2 e B' estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{A'C'}$,
- (2) $\angle B_2A'C' \cong \angle BAC$,
- (3) $A'B_2 \cong AB$.

Segue dos itens (2) e (3), pelo caso LAL de congruência de triângulos, que

$$(22) \quad \Delta A'B_2C' \cong \Delta ABC.$$

Vamos aplicar o Teorema 6.8 colocando $X = C'$, $Y = A'$, $Z_1 = B'$ e $Z_2 = B_2$. Pelo item (1), B_2 e B' estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{A'C'}$. Segue da congruência de triângulos em (22) que $BC \cong B_2C'$; por hipótese, temos $BC \cong B'C'$; daí segue pelo Axioma C2 que $B_2C' \cong B'C'$. Pelo item (3), temos $AB \cong A'B_2$; por hipótese, temos $AB \cong A'B'$, daí segue pelo Axioma C2 que $A'B' \cong A'B_2$. Podemos portanto invocar o Teorema 6.8 para concluir que $\Delta A'C'B' \cong \Delta A'C'B_2$, o que é a mesma coisa que

$$(23) \quad \Delta A'B'C' \cong \Delta A'B_2C'.$$

Segue de (22), (23) e da transitividade da congruência de triângulos (Problema 5.5) que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. $\square$

Pons Asinorum (a demonstração de Euclides do Teorema do Triângulo Isósceles).

Apresentamos nesta subseção a demonstração de Euclides do Teorema do Triângulo Isósceles (Proposição 5 do Livro I dos Elementos), em que são usados o critério LAL de congruência de triângulos (Axioma C6), a subtração de segmentos e a congruência dos suplementares. A figura que acompanha a demonstração tem a

aparência de uma ponte e em algum momento passou a ser conhecida, na Europa Latina, como “Pons Asinorum” (ponte dos asnos). A alcunha não faz referência apenas à aparência da figura, mas também à dificuldade de se compreender a prova de Euclides. A proposição, apresentada logo no início dos Elementos, era vista como um obstáculo para o leitor iniciante. É possível supor que “pons asinorum” significasse também “mata-burros”, um obstáculo feito com ripas ou caibros, comum em estradas da zona rural, que permite a passagem de veículos com rodas e seres humanos, mas não a passagem de quadrúpedes. Só um conhecedor do latim medieval saberá dizer com certeza.

A esta altura, a leitora já deve estar se sentindo confiante para ultrapassar esse obstáculo que, no nosso caso, é ainda um pouco mais complicado do que no caso dos alunos da Europa antiga que estudavam os Elementos em latim, pois eles podiam buscar a verdade em figuras, enquanto que nós temos de nos basear nos axiomas de ordenamento de Pasch/Hilbert.

Para escrever a demonstração de Euclides invocando apenas definições, axiomas, proposições e problemas destas Notas de Aula, convém provar primeiro o seguinte lema.

Lema 6.10. *Se temos $X * Y * Z$, $XY \cong X'Y'$ e $Z' \in \overrightarrow{X'Y'}$ e $XZ \cong X'Z'$, então vale $X' * Y' * Z'$. v*

Demonstração: Seja Z'' o ponto, cuja existência é postulada pelo Axioma C1, pertencente à semirreta ⁶ oposta a $\overrightarrow{Y'X'}$ tal que $Y'Z'' \cong YZ$. Temos: $X * Y * Z$, $X' * Y' * Z''$, $XY \cong X'Y'$ (por hipótese) e $YZ \cong Y'Z''$ (por construção). Decorre daí, pelo Axioma C3, que $XZ \cong X'Z''$. O ponto Z'' pertence à semirreta $\overrightarrow{X'Y'}$, pois $X' * Y' * Z''$. Logo Z'' é o único ponto da semirreta $\overrightarrow{X'Y'}$ tal que $XZ \cong X'Z''$ (a unicidade de um tal ponto é garantida pelo Axioma C1). Mas Z' também é um tal ponto, logo $Z' = Z''$, logo $X' * Y' * Z'$. $\square$

Segunda demonstração da Proposição 5.7, o “Teorema do Triângulo Isósceles”.

São dados três pontos não-colineares A , B e C tais que $AB \cong AC$. Queremos provar que $\angle ABC \cong \angle ACB$.

Pelo Axioma B2, é possível tomar um ponto F tal que $F * B * A$. Em seguida, podemos invocar o Axioma C1 para encontrar o único ponto G na semirreta $\overrightarrow{AC}$, $G \neq A$ tal que $AG \cong AF$. Pelo Problema 19, temos $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AF}$ e $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG}$. Temos portanto $\angle GAB = \angle FAC$, $AB \cong AC$, e $AF \cong AG$. Segue do Axioma (C6) que são congruentes os triângulos $\triangle GAB$ e $\triangle FAC$. Em particular, temos

$$(24) \quad FC \cong BG \quad \text{e} \quad \angle AFC \cong \angle BGA.$$

Aplicando o Lema 6.10, com $X = X' = A$, $Y = B$, $Y' = C$, $Z = F$, $Z' = G$, concluímos que vale $A * C * G$. Daí, pela Proposição 6.1 (subtração de segmentos), vale $FB \cong CG$. Isto e (24) (notando que, pelo Problema 19, $\angle AFC = \angle BFC$ e $\angle BGA = \angle BGC$) implicam, pelo Axioma C6, a congruência $\triangle BCF \cong \triangle CBG$. Em particular, segue a congruência

$$(25) \quad \angle CBF \cong \angle BCG.$$

Neste ponto, a demonstração da Proposição 5 dos Elementos poderia terminar invocando a nossa Proposição 6.2. De fato, os ângulos $\angle ABC$ e $\angle CBF$ são suplementares, e também são suplementares os ângulos $\angle ACB$ e $\angle BCG$. Segue portanto de (25) a congruência $\angle ABC \cong \angle ACB$, que queríamos demonstrar.

Mas Euclides não fala da congruência dos suplementares. Em vez disto, implicitamente apela para sua Noção Comum 3 (“Caso de coisas iguais sejam subtraídas coisas iguais, as restantes são iguais”) na situação em que as “coisas” são ângulos. Na axiomática de Hilbert, que adotamos nestas Notas, a Noção Comum 3 para ângulos é a nossa Proposição 6.6.

Acabamos de provar que $\angle ABG \cong \angle ACF$ e que $\angle CBG \cong \angle BCF$. Para podermos usar a Proposição 6.6 e concluirmos que $\angle ABC \cong \angle ACB$, resta apenas verificar que o ponto C está no interior do ângulo $\angle ABG$ e que o ponto B está no interior do ângulo $\angle ACF$. Isto se verifica porque $A * B * F$ e $A * C * G$ (Problema 34).

⁶Sobre semirreta oposta, veja a Definição 1.4 e a Proposição 4.16.

7. MAIS RESULTADOS DA GEOMETRIA NEUTRA

Os resultados geométricos que podem ser demonstrados usando apenas os axiomas de incidência, de ordenamento e de congruência formam o que se costuma chamar de “Geometria Neutra”. A validade desses resultados é independente do Quinto Postulado de Euclides, eles são portanto verdadeiros tanto na geometria euclideana (que assume o Quinto Postulado), quanto nas geometrias “não-euclidianas” (em que o Quinto Postulado é falso). É possível definir no Plano de Poincaré, por exemplo, noções de ordenamento e congruência que satisfaçam os axiomas de ordenamento e congruência (na Seção 3 verificamos que os axiomas de incidência são satisfeitos). Logo, os resultados que provamos até agora (o teorema da barra transversal, o teorema do triângulo isósceles, o caso LLL de congruência de triângulos, por exemplo) e os que vamos provar nesta seção (existência de perpendiculares, paralelas, pontos médios, bissetrizes) são válidos também no Plano de Poincaré.

Desigualdades entre segmentos e entre ângulos, existência de triângulos isósceles.

Vamos definir nesta subseção a noção sintética (isto é, sem fazer referência a medidas, ou números) de desigualdades entre segmentos e ângulos, e estabelecer suas propriedades.

Definição 7.1. *Dados pontos $A \neq B$ e $C \neq D$ escrevemos $AB < CD$ e $CD > AB$ se existe X tal que $C * X * D$ e $AB \cong CX$.*

Proposição 7.2. [Tricotomia da desigualdade de segmentos] *Dados pontos $A \neq B$ e $C \neq D$, vale uma e apenas uma das três afirmações seguintes: (i) $AB < CD$, (ii) $AB \cong CD$, (iii) $AB > CD$.*

Demonstração: O Axioma C1 garante a existência de um ponto Z na semirreta $\overrightarrow{CD}$, $Z \neq C$, tal que $AB \cong CZ$. Segue da definição de semirreta que uma e só uma das afirmações seguintes é satisfeita: (i) $C * Z * D$, (ii) $Z = D$ ou (iii) $C * D * Z$. Se valer (i), segue da Definição 7.1 que $AB < CD$. Se valer (ii), então $AB \cong CD$. Resta provar que, se valer (iii), então $CD < AB$. Suponhamos portanto que $C * D * Z$. Pelo Axioma C1, podemos então tomar D' na semirreta $\overrightarrow{AB}$ tal que $AD' \cong CD$. Segue do Lema 6.10 que $A * D' * B$. Segue então da Definição 7.1 que $CD < AB$. $\square$

Proposição 7.3. [Congruência preserva desigualdade de segmentos] *Se $AB \cong A'B'$ e $CD \cong C'D'$, então $AB < CD$ se e somente se $A'B' < C'D'$.*

Demonstração: Suponhamos que $AB \cong A'B'$, $CD \cong C'D'$ e $AB < CD$. Da Definição 7.1, temos que existe X tal que $C * X * D$ e $AB \cong CX$. Podemos usar o Axioma C1 para obter um ponto X' na semirreta $\overrightarrow{C'D'}$ tal que $CX \cong C'X'$. Segue do Lema 6.10 que $C' * X' * D'$. Usando o Axioma C2 e a Proposição 5.1 (simetria da congruência), vemos que segue de $AB \cong CX$ e $CX \cong C'X'$ que $AB \cong C'X'$. Por hipótese, temos $AB \cong A'B'$. De novo pelo Axioma C2, segue que $A'B' \cong C'X'$. Provamos que existe X' tal que $A'B' \cong C'X'$ e $C' * X' * D'$, ou seja, provamos que $A'B' < C'D'$.

Da mesma maneira se prova que, se $AB \cong A'B'$, $CD \cong C'D'$ e $A'B' < C'D'$, então $AB < CD$. $\square$

Não é imediatamente evidente, apenas a partir da Definição 7.1, que $AB < CD$ seja equivalente a $BA < CD$ e a $AB < DC$, como tem de ser para que possamos falar de desigualdades entre segmentos, já que, como conjunto de pontos, $AB = BA$ e $CD = DC$. Isto agora segue imediatamente da Proposição 7.3 pois, pelo Axioma C2, todo segmento é congruente a si próprio, logo $AB \cong BA$ e $CD \cong DC$.

Proposição 7.4. *Se $A * B * C$, então $AB < AC$.*

Demonstração: Dados A , B e C tais que $A * B * C$, devemos mostrar que se verifica a Definição 7.1 no caso em que A toma o lugar de C e C toma o lugar de D . Para isto, basta colocar B no lugar de X . $\square$

A primeira proposição demonstrada por Euclides nos Elementos é a construção de um triângulo equilátero que tenha como um dos lados um segmento dado. Para justificar a construção de Euclides em linguagem

moderna mais rigorosa, é necessário adotar algum postulado que garanta que dois círculos, um com o centro sobre o outro, se interceptem. Euclides usa também que se três pontos definem três segmentos congruentes, esses três pontos não são colineares. Mas esse detalhe é fácil de justificar a partir dos axiomas de ordenamento e de congruência de Hilbert, como vemos na proposição seguinte.

Proposição 7.5. *Se A, B e C são três pontos distintos e se $AB \cong AC$ e $AB \cong BC$, então A, B e C não são colineares e o triângulo $\triangle ABC$ é equilátero.*

Demonstração: Pelo Axioma C2, segue de $AB \cong AC$ e $AB \cong BC$ que $AC \cong BC$. Resta provar que os três pontos não são colineares. Se fossem, um deles estaria entre os outros dois, pelo Axioma B3. Suponhamos que vale $A * B * C$. Segue então da Proposição 7.4 que $AB < AC$, contradizendo a hipótese $AB \cong AC$ (pela Proposição 7.2). Claro que o mesmo argumento se aplicaria se A ou C fosse o ponto que está entre os outros dois. $\square$

Proposição 7.6. [Transitividade da desigualdade de segmentos] *Se $AB < CD$ e $CD < EF$, então $AB < EF$.*

Demonstração: Segue de $AB < CD$ que existe X tal que $C * X * D$ e $AB \cong CX$. Segue de $CD < EF$ que existe Y tal que $E * Y * F$ e $CD \cong EY$. Usando o Axioma C1, podemos obter um ponto $X' \in \overrightarrow{EY}$ tal que $CX \cong EX'$. Temos portanto $CX \cong EX'$, $CD \cong EY$, $C * X * D$ e $X' \in \overrightarrow{EY}$. O Lema 6.10 implica portanto que $E * X' * Y$. Isto, junto com $E * Y * F$, implica que $E * X' * F$ (usamos a Proposição 4.12). Mas $CX \cong EX'$ e $CX \cong AB$ implicam que $AB \cong EX'$ (usamos o Axioma C2). Ou seja, provamos que existe X' tal que $AB \cong EX'$ e $E * X' * F$, ou seja $AB < EF$. $\square$

Podemos também definir a noção de desigualdade entre ângulos.

Definição 7.7. *Dados $\angle BAC$ e $\angle EDF$, escrevemos $\angle BAC < \angle EDF$ e $\angle EDF > \angle BAC$ se existir X no interior de $\angle EDF$ tal que $\angle BAC \cong \angle EDX$.*

Tal como no caso de segmentos, vamos provar em seguida que vale a tricotomia, a compatibilidade com a congruência e a transitividade da desigualdade entre ângulos. Antes, um lema:

Lema 7.8. *Dados ângulos $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, $\angle XAC \cong \angle X'A'C'$, se X pertencer ao interior de $\angle BAC$ e se X' e B' estiverem do mesmo lado de $\overleftrightarrow{A'C'}$, então X' pertence ao interior de $\angle B'A'C'$.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, podemos supor que $AB \cong A'B'$ e $AC \cong A'C'$ (se for preciso, e usando o Axioma C1 para tal, podemos substituir B' e C' por novos pontos B'' e C'' satisfazendo esta hipótese adicional e tais que $\angle B''AC'' = \angle B'AC'$ e, em seguida, abandonar os B' e C' originais e mudar os nomes de B'' e C'' para B' e C'). Segue então da hipótese $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, usando o critério LAL de congruência de triângulos, que $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ e, em particular, que $\angle BCA \cong \angle B'C'A'$.

Pelo Teorema da Barra Transversal, existe D em $\overleftrightarrow{AX}$ tal que $B * D * C$. Pelo Axioma C1, existe $D' \in \overleftrightarrow{C'B'}$ tal que $CD \cong C'D'$. Temos portanto $AC \cong A'C'$, $CD \cong C'D'$ e

$$\angle D'C'A' = \angle B'C'A' \cong \angle BCA = \angle DCA.$$

Segue do LAL que $\triangle ACD \cong \triangle A'C'D'$ e, em particular, que $\angle DAC \cong \angle D'A'C'$. Por hipótese, X' e B' estão no mesmo lado de $\overleftrightarrow{A'C'}$; por construção, D' e B' estão no mesmo lado de $\overleftrightarrow{A'C'}$; logo X' e D' estão no mesmo lado de $\overleftrightarrow{A'C'}$. Segue da unicidade do Axioma C3 que $\overleftrightarrow{A'D'} = \overleftrightarrow{A'X'}$. Para provar que X' está no interior de $\angle B'A'C'$, basta portanto provar que D' está no interior de $\angle B'A'C'$ (veja o Problema 35).

Já provamos que $X' \sim_{A'C'} D'$ e temos, por hipótese, que $X' \sim_{A'C'} B'$. Logo $B' \sim_{A'C'} D'$. Para provar que D' está no interior de $\angle B'A'C' = \angle B'AC'$ basta portanto mostrar que D' e C' estão no mesmo lado de $\overleftrightarrow{A'B'}$. Como já sabemos que $D' \in \overleftrightarrow{C'B'}$, basta provar que $D' \neq B'$ e que não vale $C' * B' * D'$. Segue de $C * D * B$ que $CD < CB$ (Proposição 7.4). Segue de $\triangle ACD \cong \triangle A'C'D'$ que $CD \cong C'D'$. Disso e de $CB \cong C'B'$

segue $C'D' < C'B'$ (Proposição 7.3). Daí segue que $D' \neq B'$ e que não vale $C' * B' * D'$ (se valesse, teríamos $C'D' > C'B'$, pela Proposição 7.4). $\square$

Proposição 7.9. [Tricotomia da desigualdade de ângulos] *Dados $\angle BAC$ e $\angle EDF$ vale uma e apenas uma das seguintes três afirmações: (i) $\angle BAC < \angle EDF$, (ii) $\angle BAC \cong \angle EDF$, ou (iii) $\angle BAC > \angle EDF$.*

Demonstração: Seja H o semiplano limitado por $\overleftrightarrow{DF}$ que contém E . Pelo Axioma C4, existe uma única semirreta $\overrightarrow{AX}$ com $X \in H$ tal que $\angle BAC \cong \angle XDF$. Segue dos resultados demonstrados na Subseção “Separação do Plano” que uma e apenas uma das três possibilidades seguintes podem ocorrer: (a) X e F estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{DE}$, (b) X está na reta $\overleftrightarrow{DE}$, (c) X e F estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{DE}$.

Se valer (a), então X pertence ao interior de $\angle EDF$, logo temos $\angle BAC < \angle XDF$. Se valer (b) então X pertence à semirreta $\overrightarrow{DE}$, pois X e E estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{DF}$ (pelo Problema 14); logo $\angle EDF = \angle XDF$, logo $\angle BAC \cong \angle EDF$.

Suponhamos agora que vale (c). Queremos provar que $\angle EDF < \angle BAC$. Note primeiro que (c) implica que X pertence ao interior do suplementar $\angle F_1DE$ de $\angle EDF$. De fato, X e E estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{DF} = \overleftrightarrow{DF_1}$, por construção de X , e X e F_1 estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{DE}$ porque X e F estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{DE}$ e $F_1 * D * F$. Segue então da Proposição 4.21 que E pertence ao interior de $\angle XDF$. Para provar o que queremos (ou seja, que $\angle EDF < \angle BAC$), tome agora X' no semiplano H' limitado por $\overleftrightarrow{AC}$ que contém B e tal que $\angle EDF \cong \angle X'AC$. Pelo Lema 7.8, X' pertence ao interior de $\angle BAC$ (pois E pertence ao interior de $\angle XDF$, $\angle XDF \cong \angle BAC$ e X' e B estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$). Por definição, temos então que $\angle EDF < \angle BAC$. $\square$

Proposição 7.10. [Congruência preserva desigualdade de ângulos] *Se $\angle BAC < \angle EDF$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ e $\angle EDF \cong \angle E'D'F'$, então $\angle B'A'C' < \angle E'D'F'$.*

Demonstração: Seja X pertencente ao semiplano limitado por $\overleftrightarrow{DF}$ que contém E tal que $\angle BAC \cong \angle XDF$. Segue da hipótese $\angle BAC < \angle EDF$ que X pertence ao interior de $\angle EDF$.

Seja X' pertencente ao semiplano limitado por $\overleftrightarrow{D'F'}$ que contém E' tal que $\angle B'A'C' \cong \angle X'D'F'$. Segue das escolhas de X e de X' e da hipótese $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ que $\angle XDF \cong \angle X'D'F'$. Usando o Lema 7.8, segue agora da hipótese $\angle EDF \cong \angle E'D'F'$ e do fato de X pertencer ao interior de $\angle EDF$ que X' pertence ao interior de $\angle E'D'F'$, ou seja, que $\angle A'B'C' < \angle E'D'F'$. $\square$

Está na hora de observar que a definição de desigualdade de ângulos não depende da ordem em que os lados dos ângulos são listados, como tinha de ser. Mais precisamente se $\angle BAC < \angle EDF$, então $\angle CAB < \angle EDF$, $\angle BAC < \angle FDE$, etc. Esta afirmação aparentemente trivial não decorre imediatamente da Definição 7.7. É preciso invocar o Axioma C5 para obter $\angle BAC \cong \angle CAB$ (pois $\angle BAC = \angle CAB$ pela definição de ângulo) e $\angle EDF \cong \angle FDE$ e então aplicar a Proposição 7.10.

Proposição 7.11. [Transitividade da desigualdade de ângulos] *Se $\angle BAC < \angle EDF$ e $\angle EDF < \angle HGI$, então $\angle BAC < \angle HGI$.*

Demonstração: Seja W o semiplano limitado por $\overleftrightarrow{DF}$ que contém E , seja W' o semiplano limitado por $\overleftrightarrow{GI}$ que contém H . Seja $X \in W$ tal que $\angle BAC \cong \angle XDF$, seja $Y \in W'$ tal que $\angle EDF \cong \angle YGI$, seja $X' \in W'$ tal que $\angle XDF \cong \angle X'GI$.

Segue das hipóteses $\angle BAC < \angle EDF$ e $\angle EDF < \angle HGI$ que X pertence ao interior de $\angle EDF$ e que Y pertence ao interior de $\angle HGI$, isto é, que

$$(26) \quad H \sim_{GI} Y \quad \text{e} \quad Y \sim_{GH} I$$

(a notação $\sim_{PQ}$ foi introduzida na demonstração do Teorema 4.19). Segue do fato de X pertencer ao interior de $\angle EDF$ e do Lema 7.8 que X' pertence ao interior de $\angle YGI$, isto é, que

$$(27) \quad Y \sim_{GI} X' \quad \text{e} \quad X' \sim_{GY} I.$$

Segue das primeiras equivalências em (26) e em (27) que $H \sim_{GI} X'$. Para provar que X' pertence ao interior de $\angle HGI$, basta agora provar que $X' \sim_{GH} I$. Segue do Teorema da Barra Transversal (pois X' pertence ao interior de $\angle YGI$) que o segmento YI atravessa $\overleftrightarrow{GX'}$ em um ponto $X'' \neq G$. Segue de $Y * X'' * I$ e $Y \sim_{GH} I$ (pelo Problema 24) que $X'' \sim_{GH} I$. O segmento $X'X''$ não intercepta $\overleftrightarrow{GH}$ pois $X'' \in \overleftrightarrow{GX'}$ e $\overleftrightarrow{GX'} \neq \overleftrightarrow{GH}$. Logo $X' \sim_{GH} X''$. Como já temos $X'' \sim_{GH} I$, segue que $X' \sim_{GH} I$ e, portanto, que X' está no interior de $\angle HGI$. Por definição, isto quer dizer que $\angle BAC < \angle HGI$. $\square$

Podemos agora mostrar que existe um triângulo isósceles, com qualquer base dada, sem usar axioma algum sobre interseções de círculos.

Proposição 7.12. [Existência de triângulos isósceles] *Dado um segmento BC e H um semiplano delimitado por $\overleftrightarrow{BC}$, existe A em H tal que $AB \cong AC$.*

Demonstração: Tome arbitrariamente um ponto D em H . Pela recíproca do Teorema do Triângulo Isósceles (Problema 40), se $\angle DBC \cong \angle DCB$, então $DB \cong DC$ e podemos tomar $A = D$. Caso contrário, segue da Proposição 7.9 que ou vale $\angle DBC < \angle DCB$ ou vale $\angle DCB < \angle DBC$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $\angle DBC < \angle DCB$. Tome X no interior de $\angle DCB$ tal que $\angle DBC \cong \angle XCB$. Pelo Teorema da Barra Transversal, $\overleftrightarrow{CX}$ cruza BD em um ponto que chamaremos de A . Temos então $\angle ACB = \angle XCB \cong \angle DBC = \angle ABC$. Pela recíproca do Teorema do Triângulo Isósceles (Problema 40), segue que $AB \cong AC$. Além disso, A e D estão no mesmo lado de $\overleftrightarrow{BC}$, pois $B * A * D$ (veja o Problema 12). Logo A pertence a H . $\square$

Existência da perpendicular, o Quarto Postulado de Euclides.

Duas retas que se interceptam determinam quatro ângulos. De fato, seja O o ponto de interseção das retas r e s , sejam A e C pontos de r tais que $A * O * C$, sejam B e D pontos de s tais que $B * O * D$. Os quatro ângulos formados por r e s são $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$ e $\angle AOD$. Os ângulos $\angle AOD$ e $\angle BOC$ são opostos pelo vértice, logo congruentes (Problema 42). O mesmo vale para o par $\angle AOB$ e $\angle COD$. Os demais quatro pares de ângulos formados pelos quatro ângulos determinados por r e s são suplementares. Se um dos quatro ângulos for reto (isto é, congruente a um suplementar seu, veja a Definição 1.7), os quatro serão retos. Neste caso, dizemos que as retas r e s são perpendiculares.

Nesta subseção vamos demonstrar que, dadas uma reta r e um ponto P , existe uma reta s perpendicular a r passando por P . O caso em que P não está em r é tratado no Teorema 7.13, cuja demonstração usa congruência de triângulos. O caso em que P está em r segue facilmente do caso em que P não está em r : o ângulo que alguma paralela a r faz com r pode ser transportado para o ponto que queremos usando o Axioma C5.

Nesta subseção, mostramos também que o Quarto Postulado de Euclides (“todos os ângulos retos são congruentes entre si”) é supérfluo, pois essa afirmação pode ser demonstrada a partir dos axiomas de incidência, ordenamento e congruência introduzidos até agora. Na subseção seguinte, o “Quarto Postulado” será usado na demonstração da unicidade das perpendiculares.

Teorema 7.13. *Dadas uma reta r e um ponto P que não está em r , existe uma reta s perpendicular a r passando por P .*

Demonstração: Tomemos dois pontos A e B em r (que existem, pelo Axioma I2). Aplicando a Proposição 5.5 (sobre o transporte de triângulos) ao triângulo $\triangle ABP$, tomando no lugar de DE o próprio segmento AB , e escolhendo como o semiplano H o lado de r oposto a P , obtemos um ponto P' em H tal que

$$(28) \quad \triangle ABP \cong \triangle ABP'.$$

Seja Q o ponto de interseção do segmento PP' com a reta r .

Como A e B são dois pontos distintos, então Q é diferente de pelo menos um dos dois. Sem perda de generalidade, podemos supor que $Q \neq A$. Basta portanto considerar os casos: (i) $Q * A * B$ e (ii) Q pertence a $\overleftrightarrow{AB}$. No caso (i), temos dois pares de ângulos suplementares: $(\angle PAQ, \angle PAB)$ e $(\angle P'AQ, \angle P'AB)$. Segue

de (28), que $\angle PAB \cong \angle P'AB$. Como suplementares de congruentes são congruentes (Proposição 6.2), temos $\angle PAQ \cong \angle P'AQ$. No caso (ii), segue de (28) e de $\angle PAQ = \angle PAB$ e $\angle P'AQ = \angle P'AB$ que $\angle PAQ \cong \angle P'AQ$. Ou seja, tanto no caso (i) quanto no caso (ii), temos

$$(29) \quad \angle PAQ \cong \angle P'AQ$$

Podemos aplicar o Axioma C6 aos triângulos $\triangle PAQ$ e $\triangle P'AQ$, que têm em comum o lado QA , pois segue de (28) que $AP \cong AP'$ e provamos (29). Daí obtemos, em particular, a congruência de ângulos $\angle PQA \cong \angle P'QA$. Mas estes dois ângulos são suplementares um do outro (pois $P * Q * P'$). Logo são ângulos retos. Provamos que as retas $\overleftrightarrow{PP'}$ e r são perpendiculares. $\square$

Problema 43. Seja $\angle BAC$ um ângulo reto, seja $\angle B'A'C'$ um ângulo congruente a $\angle BAC$. Então $\angle B'A'C'$ também é um ângulo reto.

Teorema 7.14. Dada uma reta r e dado um ponto P em r , existe reta s perpendicular a r passando por P .

Demonstração: Seja Q um ponto qualquer que não esteja em r (a Proposição 2.5 nos garante a existência de um tal Q). Seja t uma reta perpendicular a r passando por Q . Se r passar por P , terminamos. Se r não passar por P , chamemos de X a interseção de t e r . Pelo Axioma C4, existe uma semirreta $\overrightarrow{PY}$ tal que $\angle QXP \cong \angle YPX$. Como $\angle QXP$ é reto, segue do Problema 43 que $\angle YPX$ é reto, logo $s := \overleftrightarrow{PY}$ é perpendicular a r . $\square$

O resultado seguinte é o Teorema 21 de [4]. Hilbert atribui a ideia da demonstração a Proclus, filósofo que nasceu em Constantinopla em 412, estudou em Alexandria, e morreu em Atenas em 485.

Teorema 7.15. Dois ângulos retos quaisquer são congruentes.

Demonstração: Sejam $\angle BAC$ e $\angle B'A'C'$ dois ângulos retos, sejam $\angle CAD$ e $\angle C'A'D'$, respectivamente, seus suplementares (temos portanto $B * A * D$ e $B' * A' * D'$). Temos $\angle BAC \cong \angle CAD$ e $\angle B'A'C' \cong \angle C'A'D'$. Queremos provar que $\angle BAC$ e $\angle B'A'C'$ são congruentes.

Seja C'' um ponto no mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AB}$ que C e tal que $\angle BAC'' \cong \angle B'A'C'$. A existência de C'' decorre do Axioma C4. Decorre também do Axioma C4 que $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ se e somente se $C'' \in \overleftrightarrow{AC}$. Queremos provar, portanto, que C'' está em $\overleftrightarrow{AC}$.

Suponhamos por absurdo que C'' não está em $\overleftrightarrow{AC}$ e que B e C'' estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AC}$. O ponto C'' está então no interior de $\angle BAC$. Segue da Definição 7.7 que $\angle BAC'' < \angle BAC$. Como C'' está no interior de $\angle BAC$ e vale $B * A * D$, segue, pela Proposição 4.21, que C está no interior de $\angle C''AD$, logo vale $\angle CAD < \angle C''AD$. Por hipótese, $\angle BAC \cong \angle CAD$. Temos portanto

$$\angle BAC'' < \angle BAC \cong \angle CAD < \angle C''AD,$$

logo, pelas Proposições 7.10 e 7.11,

$$(30) \quad \angle BAC'' < \angle C''AD.$$

De $\angle BAC'' \cong \angle B'A'C'$ segue, pela Proposição 6.2 (suplementares de congruentes são congruentes), que $\angle C''AD \cong \angle C'A'D'$. Por hipótese, $\angle B'A'C' \cong \angle C'A'D'$. Logo, pela transitividade da congruência de ângulos (Axioma C5), vem

$$\angle C''AD \cong \angle C'A'D' \cong \angle B'A'C' \cong \angle BAC'',$$

o que contradiz (30). Logo B e C'' não estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$. Da mesma maneira se prova que B e C'' não estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{AC}$. Logo C'' está em $\overleftrightarrow{AC}$. Segue do Problema 14 que C'' é um ponto de $\overleftrightarrow{AC}$, pois C e C'' estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AB}$. $\square$

Ângulos externos, unicidade da perpendicular, existência da paralela.

Nosso próximo objetivo é demonstrar que um ângulo externo de um triângulo é maior do que qualquer dos dois ângulos internos não-adjacentes.

Chamamos de *ângulo externo* de um triângulo um suplementar de um ângulo do triângulo. Os ângulos do triângulo podem ser chamados, para enfatizar a ideia, de *ângulos internos*. Mais detalhadamente, dado o triângulo $\triangle ABC$, sejam A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 e C_2 pontos tais que $A_1 * A * B$, $A_2 * A * C$, $B_1 * B * C$, $B_2 * B * A$, $C_1 * C * A$ e $C_2 * C * B$ (Axioma B2). Os seis ângulos externos de $\triangle ABC$ são: $\angle A_1AC$, $\angle A_2AB$, $\angle B_1BA$, $\angle B_2BC$, $\angle C_1CB$ e $\angle C_2CA$.

O seguinte resultado é o Teorema 22 de [4], chamado por Hilbert de *teorema do ângulo externo*.

Teorema 7.16. *Um ângulo externo de um triângulo é maior do que qualquer ângulo interno que não lhe seja adjacente.*

Demonstração: Dado o triângulo $\triangle ABC$, tome D tal que $D * A * B$ e $AD \cong BC$ (Axiomas B2 e C1). Queremos provar que $\angle ACB < \angle DAC$ e $\angle ABC < \angle DAC$.

Vamos primeiramente provar que $\angle ACB$ e $\angle CAD$ não são congruentes. Suponha por absurdo que são. Nesse caso, temos $AD \cong CB$, $AC \cong CA$ e $\angle DAC \cong \angle BCA$. Pelo critério LAL (Axioma C6), segue $\triangle DAC \cong \triangle BCA$, logo $\angle ACD \cong \angle CAB$. Como $\angle DAC$ e $\angle CAB$ são suplementares e D e B estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{AC}$, segue, pela Proposição 6.4, que $\angle ACB$ e $\angle ACD$ são suplementares, logo D está em $\overleftrightarrow{CB}$ e em $\overleftrightarrow{AB}$ simultaneamente, logo $D = B$ e $D * A * B$, o que é absurdo.

Como já sabemos que $\angle ACB \not\cong \angle CAD$, para provar que $\angle ACB < \angle CAD$, pela Proposição 7.11, basta provar que $\angle CAD \not\leq \angle ACB$. Suponhamos então, por absurdo, que temos $\angle CAD < \angle ACB$. Pela definição de desigualdade de ângulos (Definição 7.7), segue que existe X no interior de $\angle ACB$ tal que $\angle XCA \cong \angle CAD$. Pelo teorema da barra transversal (Teorema 4.19), segue que a semirreta $\overrightarrow{CX}$ e o segmento AB se interceptam no ponto que chamaremos de B' . O ângulo $\angle CAD$ é um ângulo externo do triângulo $\triangle ACB'$. Segue pela parte do teorema que já foi demonstrada, aplicada ao triângulo $\triangle ACB'$, que $\angle ACB'$ não é congruente a $\angle CAD$, o que contradiz $\angle ACB' = \angle ACX \cong \angle CAD$. Com isto, provamos que $\angle DAC > \angle ACB$.

Resta provar que $\angle DAC > \angle ABC$. Seja D' tal que $D' * A * C$. Então, por serem opostos pelo vértice, os ângulos $\angle DAC$ e $\angle D'AB$ são congruentes. Pela parte do teorema que já está demonstrada, segue que $\angle D'AB > \angle ABC$. Logo, $\angle DAC > \angle ABC$, pela Proposição 7.10. $\square$

Definição 7.17. *Um ângulo maior do que um reto é chamado de obtuso, um menor do que um reto, de agudo.*

Proposição 7.18. *O suplementar de um ângulo agudo é obtuso, e vice-versa.*

Demonstração: Considere o par de ângulos suplementares $\angle ABC$ e $\angle CBD$. Suponha que $\angle ABC$ é obtuso. Logo existe X no interior de $\angle ABC$ tal que $\angle ABX$ é reto. Como X está no interior de $\angle ABC$, C está no interior de $\angle XBD$ (Proposição 4.21). Logo $\angle CBD < \angle XBD$, que é reto. Logo $\angle CBD$ é agudo. Se $\angle ABC$ for agudo, um argumento análogo mostra que $\angle CBD$ é obtuso. $\square$

Seguem do teorema do ângulo externo as seguintes proposições.

Proposição 7.19. *Pelo menos dois ângulos de um triângulo são agudos.*

Demonstração: No triângulo $\triangle ABC$, suponha que $\angle CAB$ não seja agudo. Então o ângulo externo no vértice A ou é reto ou é agudo. Em qualquer caso, os ângulos internos em B e em C ($\angle ABC$ e $\angle ACB$) serão menores do que um reto, pelo Teorema 7.16 e pela Proposição 7.11 (transitividade da desigualdade de ângulos). Mostramos que, se um dos ângulos internos de um triângulo for agudos, os outros dois serão agudos. $\square$

Proposição 7.20. *Dada uma reta r e dado um ponto P , existe no máximo uma reta s perpendicular a r passando por P .*

Demonstração: Suponha primeiro que P não esteja em r . Suponha então, por absurdo, que existam duas retas distintas s e s' passando por P e perpendiculares a r . Os pontos de interseção de s e s' com r são distintos, pois s e s' já possuem o ponto P em comum, e P está fora de r (estamos usando consequências do Axioma I1). Chamemos esses dois pontos de interseção de Q e Q' . Os três pontos P , Q e Q' são não colineares, pois Q e Q' estão em r e P não está. Podemos portanto considerar o triângulo $\Delta PQQ'$. Esse triângulo teria dois ângulos retos, contradizendo a Proposição 7.19.

Suponha agora que P esteja em r e sejam s e s' retas perpendiculares a r passando por P . Tome Q em s e Q' em s' que estejam do mesmo lado de r e tome $X \neq P$ em r . Os ângulos $\angle QPX$ e $\angle Q'PX$ são retos, logo congruentes, pelo Teorema 7.15. Estando os pontos Q e Q' do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{PX} = r$ e sendo os ângulos $\angle QPX$ e $\angle Q'PX$ congruentes, segue da unicidade do Axioma C4 que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ'}$, logo $s = \overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{PQ'} = s'$. $\square$

Os enunciados do Teorema 7.13, do Teorema 7.14 e da Proposição 7.20 podem ser unificados na seguinte sentença:

Teorema 7.21. *Dada uma reta r e um ponto P , existe uma única reta s passando por P e perpendicular a r .*

A existência de perpendiculares implica na existência de paralelas.

Teorema 7.22. *Dada uma reta r e um ponto P fora de r , existe (pelo menos) uma reta s paralela a r passando por P .*

Demonstração: Seja t a reta perpendicular a r passando por P . Chamemos de Q a interseção de r e t . Seja s a reta perpendicular a t passando por P . Suponhamos por absurdo que s e r não sejam paralelas. Chamemos de R a interseção de s e r . O triângulo ΔPQR teria então dois ângulos retos, o que é um absurdo, pela Proposição 7.19. Logo s e r são paralelas e s passa por P . $\square$

Alternos internos, critério LAA, existência do ponto médio.

Definição 7.23. Seja t uma reta transversal às retas r e s , ou seja, suponha que a reta t intercepta r e s nos pontos B e E , respectivamente. Sejam A e C pontos de r , D e F pontos de s , tais que $A * B * C$ e $D * E * F$, A e D estão do mesmo lado de t , C e F estão do mesmo lado de t . Os ângulos $\angle ABE$, $\angle BEF$, $\angle CBE$ e $\angle BED$ são chamados de ângulos internos. Os pares $(\angle ABE, \angle BEF)$ e $(\angle CBE, \angle BED)$ são chamados pares de ângulos alternos internos.

Proposição 7.24. *Se duas retas r e s são atravessadas pela reta t , e um par de ângulos alternos internos é congruente, então r e s são paralelas.*

Demonstração: Vamos demonstrar a contrapositiva do enunciado, isto é, vamos provar que, se r e s são concorrentes, então os dois pares de alternos internos não podem ser congruentes.

Usando a notação da Definição 7.23, suponha que as retas r e s se encontram em um ponto P do mesmo lado de t que A e D . Então $\angle PBE = \angle ABE$ e $\angle PEB = \angle DEB$ são ângulos internos do triângulo ΔBEP . O ângulo $\angle BEF$, sendo suplementar a $\angle DEB$ é um ângulo externo de ΔBEP . Pelo teorema do ângulo externo (Teorema 7.16), os ângulos $\angle ABE$ e $\angle BEF$ não são congruentes. Do mesmo modo, os ângulos $\angle CBE$ e $\angle BED$ não são congruentes porque o primeiro é um ângulo externo do triângulo ΔBEP e o segundo é um ângulo interno não-adjacente ao primeiro.

Se as retas r e s se encontrarem no outro lado de t , o mesmo argumento funciona, apenas trocando os papéis de externo e interno dos pares de ângulos que queremos mostrar que não são congruentes. $\square$

O teorema do ângulo externo tem como consequência mais um critério de congruência de triângulos, o Lado-Ângulo-Ângulo, enunciado como o Teorema 25 de [4] e demonstrada em seguida como a Proposição 7.25. A demonstração do critério LAA nos livros didáticos da escola básica usa que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus. Essa afirmação sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo depende, naturalmente,

de que se defina medida de ângulos, ou ao menos que se dê um significado sintético (sem usar números reais) para a afirmação. Entretanto, a soma dos ângulos internos de um triângulo só é igual a 180 graus se supusermos válido o Quinto Postulado de Euclides. A demonstração que damos aqui (baseada no Exercício 10 do Capítulo 4 de [2]) não depende do Quinto Postulado, é portanto um resultado de geometria neutra.

O critério LAA terá como consequência a existência do ponto médio de um segmento e a existência da bissetriz de um ângulo.

Proposição 7.25. *Se $AC \cong A'C'$, $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$ e $\angle CBA \cong \angle C'B'A'$, então $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.*

Demonstração: Primeiramente provemos que por absurdo que AB não é maior do que $A'B'$. Suponha que seja. Então existe X , $A * X * B$, tal que $AX \cong A'B'$. Temos $\angle CAX = \angle CAB \cong \angle C'A'B'$, $AC \cong A'C'$, $AX \cong A'B'$. Segue pelo Axioma C6 (LAL) que $\triangle ACX \cong \triangle A'C'B'$, logo $\angle AXC \cong \angle A'B'C' \cong \angle ABC$. Provamos que o ângulo externo $\angle CXA$ do triângulo $\triangle CXB$ é congruente ao ângulo interno $\angle CBX = \angle ABC$ do mesmo triângulo, o que contradiz o Teorema 7.16, pois $\angle CXA$ e $\angle CBX$ não são adjacentes. Analogamente se demonstra que AB não é menor do que $A'B'$ e, portanto, que $AB \cong A'B'$. Segue por LAL que $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. $\square$

Definição 7.26. *O ponto M é um ponto médio do segmento AB se $A * M * B$ e $AM \cong BM$.*

Para trocar o artigo indefinido “um” pelo artigo definido “o” nesta definição, é preciso provar que o ponto médio de um segmento, se existir, é único. De fato, temos:

Proposição 7.27. *Sejam A , B , M e M' pontos tais que $A * M * B$, $A * M' * B$, $AM \cong BM$ e $AM' \cong BM'$. Então $M = M'$.*

Demonstração: Suponha por absurdo que $M \neq M'$. Segue então de $A * M * B$ e $A * M' * B$ e do Problema 17 que (i) $A * M * M'$ ou (ii) $A * M' * M$. Se valer (i), $A * M * M'$, como temos também que $A * M' * B$, segue pela Proposição 4.12 que $M * M' * B$. Também segue de $A * M * M'$, pela Proposição 7.4, que $AM < AM'$. Da mesma maneira, segue de $M * M' * B$ que $BM' < BM$. Combinando essas duas desigualdades às hipóteses $AM \cong BM$ e $AM' \cong BM'$, vem

$$AM' \cong BM' < BM \cong AM < AM'$$

Daí, usando as Proposições 7.6 e 7.3, segue que $AM' < AM'$, o que é um absurdo, pela Proposição 7.2). No caso em que vale (ii), $A * M' * M$, chegamos a um absurdo com os mesmos argumentos, trocando os papéis de M e M' . $\square$

A existência do ponto médio é o Teorema 26 de [4], que demonstramos a seguir, seguindo o roteiro do Exercício 12 do Capítulo 4 de [2]. A demonstração deste teorema não apenas garante a existência do ponto médio, mas também descreve uma construção para obtê-lo.

Teorema 7.28. *O ponto médio de qualquer segmento de reta existe.*

Demonstração: Dado o segmento AB tome arbitrariamente um ponto C fora de $\overleftrightarrow{AB}$ (Proposição 2.4). Usando os Axiomas C1 e C4, obtenha um ponto C' tal que $AC \cong BC'$, $\angle CAB \cong \angle C'BA$ e C e C' estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AB}$. As retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC'}$ são atravessadas pela reta $\overleftrightarrow{AB}$. Os ângulos alternos internos $\angle CAB$ e $\angle C'BA$ são congruentes, por construção. Daí segue, pela Proposição 7.24, que as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC'}$ são paralelas.

Seja M o ponto de interseção de CC' com $\overleftrightarrow{AB}$. Pela Proposição 4.23, temos $A * M * B$. Segue de $A * M * B$ e $C * M * C'$ que os ângulos $\angle CMA$ e $\angle C'MB$ são opostos pelo vértice, logo são congruentes (Problema 42). Temos portanto $AC \cong BC'$, $\angle AMC \cong \angle M'BC'$ e $\angle CAM = \angle CAB \cong \angle ABC' = \angle MBC'$. Pelo critério LAA de congruência de triângulos (Proposição 7.25), segue $\triangle ACM \cong \triangle BC'M$ e, em particular, $AM \cong BM$. $\square$

Bissetrizes.

Definição 7.29. Dizemos que a semirreta $\overrightarrow{AM}$ é uma bissetriz do ângulo $\angle BAC$ se M pertence ao interior de $\angle BAC$ e $\angle BAM \cong \angle MAC$.

Não existem duas bissetrizes distintas de um mesmo ângulo:

Problema 44. Mostre que, se $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{AM'}$ são bissetrizes de $\angle BAC$, então $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM'}$.

Sugestão: Mostre que não é perda de generalidade supor que B, C, M e M' estão na mesma reta. Daí use as propriedades de desigualdades de ângulos para chegar a um absurdo se M e M' forem distintos.

Vamos expor aqui a demonstração de Euclides (Proposição 9 do Livro I dos Elementos) para a existência da bissetriz de um ângulo, abordando também questões sobre ordenamento que o texto de Euclides não discute. Fazemos uma pequena modificação no argumento original: em vez de, como faz Euclides, usarmos um triângulo equilátero, na nossa construção usamos um triângulo isósceles. A vantagem de fazer assim é não precisarmos assumir mais um axioma para justificar a construção de um triângulo equilátero (veja o Teorema 9.4).

Lema 7.30. Seja M um ponto que não pertence a nenhuma das três retas determinadas pelos pontos A, B e C . Se $\angle BAM \cong \angle CAM$ e M e A estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{BC}$, então M está no interior de $\angle BAC$.

Demonstração: Queremos mostrar que $M \sim_{AB} C$ e $M \sim_{AC} B$. Já que temos $\angle BAM \cong \angle CAM$, segue da Proposição 7.9 (tricotomia da desigualdade de ângulos) que basta provar que

$$M \not\sim_{AB} C \implies \angle BAM < \angle CAM \quad \text{e} \quad M \not\sim_{AC} B \implies \angle CAM < \angle BAM$$

Dada a simetria dos papéis desempenhados por B e C nas hipóteses, basta provar a primeira das duas afirmações precedentes. Para tanto, basta provar que $M \not\sim_{AB} C$ implica que B está no interior de $\angle CAM$.

Suponhamos portanto que M e C estejam em lados opostos de $\overleftrightarrow{AB}$. Queremos provar que $B \sim_{AM} C$ e $B \sim_{AC} M$. Seja N um ponto de $\overleftrightarrow{AB}$ tal que $M * N * C$. Por hipótese, M e A estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{BC}$; logo N e A também estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{BC}$ (pelo Problema 13). Como as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ têm apenas um ponto em comum, e A e N são pontos de $\overleftrightarrow{AB}$, a interseção de AN com $\overleftrightarrow{BC}$ é o ponto B . Logo temos $A * B * N$. Daí segue do Problema 13 que $B \sim_{AM} N$ e $B \sim_{AC} N$. Logo, basta mostrar que $N \sim_{AM} C$ e $N \sim_{AC} M$. Mas isto segue de novo do Problema 13, pois temos $M * N * C$. $\square$

Teorema 7.31. Dado um ângulo qualquer $\angle BAC$, existe M no interior de $\angle BAC$ tal que $\angle BAM \cong \angle MAC$.

Demonstração: Modificando, se necessário, a posição de B ou C em um dos dois lados do ângulo $\angle BAC$ (usando o Axioma C1), podemos supor, sem perda de generalidade, que AB e AC são congruentes.

Pela Proposição 7.12, existe um ponto M , no lado de $\overleftrightarrow{BC}$ oposto a A , tal que $BM \cong CM$. Temos $AB \cong AC$, $BM \cong CM$ e $AM \cong AM$. Pelo critério LLL de congruência, segue que $\triangle ABM$ e $\triangle ACM$ são congruentes e, portanto, temos $\angle ABM \cong \angle ACM$.

Pelo Lema 6.5, M não está em $\overleftrightarrow{AB}$, nem em $\overleftrightarrow{AC}$ (por construção, também não está em $\overleftrightarrow{BC}$). Daí, pelo Lema 7.30, M pertence ao interior de $\angle BAC$. $\square$

O que provou Legendre ao tentar demonstrar o Quinto Postulado.

Já estamos prontos para justificar os passos corretos e apontar o erro da tentativa de Legendre de demonstrar o Quinto Postulado a partir dos demais axiomas da geometria de Euclides. Dada uma reta r e um ponto P fora de r , correspondentemente aos itens listados na página 6, podemos afirmar que:

- (1) Pelo Teorema 7.13, existe uma reta perpendicular a r passando por P . Chamamos de Q a interseção dessa reta com r .
- (2) Pela Proposição 7.14, existe uma reta s perpendicular a $\overleftrightarrow{PQ}$ passando por P .

- (3) Como justificado na demonstração do Teorema 7.22, a reta s obtida no passo (2) é paralela à reta r dada. Seja t uma reta distinta de s passando por P . Queremos provar que t intercepta r .
- (4) Dois pontos quaisquer da reta r estão no mesmo lado da reta s , pois r e s não possuem ponto de interseção. Podemos portanto falar do lado de s onde estão todos os pontos de r : trata-se do semiplano H_1 que contém um, e portanto todos os pontos de r . A reta t intercepta a reta s em um único ponto, P . Tomemos arbitrariamente um ponto X em t , X distinto de P . Se X pertence a H_1 , façamos $R = X$. Se X não pertence a H_1 , tomemos R em t tal que $X * P * R$ (existe um tal R pelo Axioma B2); logo X e R estarão em lados opostos de s , logo R estará em H_1 , pelo Teorema 4.9 (Separação do Plano).
- (5) Podemos supor que R não está em $\overrightarrow{PQ}$, caso contrário não haveria o que demonstrar (t seria igual a $\overrightarrow{PQ}$, que intercepta r em Q). Seja H_2 o semiplano delimitado pela reta $\overrightarrow{PQ}$ que não contém R . Pelo Axioma C4 (transporte de ângulo), existe uma única semirreta $\overrightarrow{PR'}$ com R' em H_2 tal que $\angle QPR \cong \angle QPR'$.
- (6) Provemos agora que Q pertence ao interior de $\angle RPR'$.

8. O QUINTO POSTULADO E ALGUMAS DE SUAS CONSEQUÊNCIAS

Usando os axiomas de incidência, ordenamento e congruência, mostramos no Teorema 7.22 que, dada uma reta r e dado um ponto P que não está em r , existe uma reta paralela a r passando por P . A formulação moderna do Quinto Postulado de Euclides, adotada por Hilbert, é:

- (P)** Dada uma reta r e dado um ponto P que não está em r , não existe mais do que uma reta paralela a r que passe por P .

A formulação original, dada na segunda página dos Elementos, em tradução de Irineu Bicudo, é:

- (Euc5)** Fique postulado, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

Para provar que o postulado **(P)** é equivalente ao Quinto Postulado de Euclides, precisamos “traduzir” **(Euc5)** para a linguagem de Hilbert. Primeiro diremos o que significa dois ângulos serem menores do que dois retos:

Definição 8.1. Dados dois ângulos $\angle BAC$ e $\angle EDF$, tome F' no lado de $\overrightarrow{AC}$ oposto ao de B tal que $\angle CAF' \cong \angle EDF$. Diremos que a soma de $\angle BAC$ e $\angle EDF$ é menor do que dois retos se (i) $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{AF'}$ e (ii) C está no interior de $\angle BAF'$.

Esta é uma boa definição devido ao Axioma (C4). Usando a Definição 7.23, podemos agora reinterpretar **(Euc5)** como:

- (EucH)** Seja t uma reta que atravessa as retas r e s , seja B o ponto de interseção de r e t , seja E o ponto de interseção de s e t , sejam $\angle CBE$ e $\angle BEF$ ângulos internos do mesmo lado de t . Se a soma de $\angle CBE$ e $\angle BEF$ for menor do que dois retos, então as semirretas $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{EF}$ se interceptam.

O seguinte teorema é o Theorem 4.5 de [2]. Vale a pena olhar as duas figuras que ilustram sua demonstração.

Teorema 8.2. Os axiomas **(P)** e **(EucH)** são equivalentes.

Demonstração: Suponha que o Axioma P é satisfeito. Queremos provar que o Axioma EucH também é satisfeito. Para tanto, tomemos uma reta t transversal às retas r e s , chamemos de B o ponto de interseção de r e t , de E o ponto de interseção de s e t , e suponhamos que os ângulos internos $\angle CBE$ e $\angle BEF$ estejam do mesmo lado de t e somem menos de dois retos. Seja D um ponto tal que $D * E * F$. Como a soma de $\angle CBE$ e $\angle BEF$ é menor do que dois retos, $\angle CBE < \angle BED$ (use a Definição 8.1, a Proposição 4.21 e a Definição 7.7 para justificar esta afirmação). Pelo Axioma (C4), existe uma única semirreta $\overrightarrow{BC'}$ tal que C' e

C estão do mesmo lado de t e $\angle C'BE \cong \angle BED$. Pela Proposição 7.24, as retas $\overleftrightarrow{BC'}$ e s são paralelas. Temos $\angle CBE < \angle BED \cong \angle C'BE$, daí as retas $r = \overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{BC'}$ são distintas. Segue do Axioma P que r e s não são paralelas. Seja X a interseção de r e s . Queremos provar que X e C estão do mesmo lado de t . Por absurdo, suponha que X e D estejam do mesmo lado de t . Daí, $\angle CBE$ é um ângulo externo ao triângulo $\triangle BEX$, não-adjacente ao ângulo interno $\angle BEX = \angle BED$. Mas já vimos que $\angle CBE < \angle BED$, o que contradiz o Teorema 7.16. Isto prova que X está do mesmo lado de t que E e F e que as semirretas $\overrightarrow{BE}$ e $\overrightarrow{EF}$ se encontram em X . Ou seja, provamos que vale o Axioma EuclH.

Reciprocamente, suponha que o Axioma EuclH é satisfeito, sejam P um ponto fora da reta r , seja t a única reta perpendicular a r passando por P , e seja s a única reta perpendicular a t passando por P (Teorema 7.21). As retas r e s são paralelas, pela demonstração do Teorema 7.22. Seja q uma reta distinta de s passando por P . Como q não é perpendicular a t , dois dos ângulos determinados por q e t são agudos, opostos pelo vértice. Um desses dois é um ângulo interno relativamente ao cruzamento de q e r . O outro ângulo interno do mesmo lado de t é reto, pois é um ângulo formado pelas retas perpendiculares r e t . Logo, a soma desses dois ângulos internos é menor do que dois retos. Pelo Axioma EuclH, as retas q e r se encontram. Provamos que qualquer reta q diferente de s que passe por P não é paralela a r , ou seja, s é a única paralela a r que passa por P . Provamos que é válido o Axioma P. $\square$

É importante frisar que o Axioma P pode ser formulado fazendo menção apenas aos axiomas de incidência, enquanto que o Axioma EuclH depende também dos axiomas de ordenamento e congruência. Só faz sentido, portanto, formular (e demonstrar) a equivalência entre os dois postulados num sistema axiomático que englobe ordenamento e congruência. Mas, como vimos no Problema 6, por exemplo, faz sentido investigar se o Axioma P é, ou não, válido em modelos de geometria de incidência que não estejam munidos das noções de ordenamento e congruência. Vimos também, na Subseção “Planos Projetivos” da Seção 3 que a construção clássica de plano projetivo pode ser feita também em qualquer geometria de incidência que satisfaça o Axioma P.

9. CONSTRUÇÕES

Apesar de todo esforço que fizemos para axiomatizar ordem e congruência na geometria euclidiana, ainda não podemos justificar rigorosamente, sem apelar para uma figura, a demonstração da primeira proposição dos Elementos, a construção com régua e compasso de um triângulo equilátero com um lado dado. Para enunciar o axioma adicional de que necessitamos, será preciso definir interior de círculo, e para isso precisamos antes tratar da desigualdade de segmentos.

Axioma sobre interseção de círculos.

Como já vimos na Definição 1.2, dados dois pontos O e A , o círculo com centro em O passando por A é o conjunto dos pontos P tais que $OP \cong OA$. O segmento OA é um *raio* do círculo.

Proposição 9.1. *Seja Γ o círculo de centro O passando por A . Qualquer reta r passando por O intercepta Γ exatamente em dois pontos C e C' que satisfazem $C * O * C'$.*

Demonstração: Sejam X e X' dois pontos de r tais que $X * O * X'$ (a existência desses dois pontos decorre dos Axiomas I2 e B2). Pelo Axioma C1, existem únicos $C \in \overrightarrow{OX}$ e $C' \in \overrightarrow{OX'}$ tais que $OC \cong OA$ e $OC' \cong OA$. Os pontos C e C' estão portanto na interseção de r com Γ . Se P é qualquer ponto da reta r distinto de O que esteja na reta r e no círculo Γ , segue pela Proposição 4.15 que ou $P \in \overrightarrow{OX}$ (neste caso $P = C$) ou $P \in \overrightarrow{OX'}$ (neste caso $P = C'$). Ou seja, C e C' são os únicos pontos de interseção de Γ com r . A demonstração de que $C * O * C'$ fica para o leitor (veja o Problema 29). $\square$

Qualquer segmento CC' , com C e C' como no enunciado da Proposição 9.1, é um *diâmetro* de Γ .

O centro de um dado círculo é unicamente determinado, enquanto que seu raio está determinado a menos de congruência. Mais precisamente, temos [3, Proposition 11.1]:

Proposição 9.2. *Seja Γ o círculo de centro O passando por A , seja Γ' o círculo de centro O' passando por A' . Se os dois conjuntos de pontos Γ e Γ' são iguais, então $O = O'$ e $OA \cong O'A'$.*

Demonstração: Suponha por absurdo que $O \neq O'$. A Proposição 9.1 nos diz que a interseção da reta $\overleftrightarrow{OO'}$ com o círculo Γ consiste de dois pontos, e igualmente para a interseção de Γ' com $\overleftrightarrow{OO'}$. Essas interseções são conjuntos idênticos, pois $\Gamma = \Gamma'$. Sejam C e C' os dois elementos desse conjunto. Sabemos que valem $C * O * C'$ e $C * O' * C'$, mas não sabemos se vale $C * O * O'$ ou $C * O' * O$. Podemos supor sem perda de generalidade que vale $C * O * O'$ (caso contrário, poderíamos trocar os nomes de C e C'). Temos portanto $C * O * O' * C'$ (veja (7)).

Segue da Proposição 7.4 que $O'C' < OC'$ e $OC < O'C$. Segue de $OC \cong OC'$ (C e C' são pontos em um círculo de centro em O) e de $OC < O'C$ que $OC' < O'C$ (Proposição 7.3). Segue de $O'C' < OC'$ e $OC' < O'C$ que $O'C' < O'C$ (Proposição 7.6).

Os pontos C e C' pertencem a Γ' , logo $O'C \cong O'C'$, o que seria um absurdo, pois já provamos que $O'C' < O'C$, o que violaria a tricotomia da Proposição 7.2.

Agora que sabemos que $O = O'$, segue imediatamente da definição de círculo que $OA \cong O'A'$. $\square$

Definição 9.3. *Seja Γ um círculo, seja O o centro de Γ , seja OA um raio de Γ . O interior de Γ é o conjunto dos pontos P tais que $OP < OA$ ou $P = O$. O exterior de Γ é o conjunto dos pontos Q tais que $OQ > OA$.*

Acrescentamos à nossa teoria mais um axioma, chamado em [2] de “Princípio da Continuidade Circular” que pode ser vagamente interpretado como querendo dizer que o círculo não tem buracos, e portanto é contínuo.

(E) Sejam Γ_1 e Γ_2 dois círculos. Se Γ_1 possui pelo menos um ponto no interior de Γ_2 e pelo menos um ponto no exterior de Γ_2 , então Γ_1 e Γ_2 possuem exatamente dois pontos de interseção.

Construção de um triângulo equilátero.

Com o auxílio do Axioma E, podemos agora demonstrar a primeira proposição dos Elementos, que descreve a construção com régua e compasso de um triângulo equilátero com um lado dado. Na nossa linguagem, podemos reenunciar aquela proposição como o seguinte teorema, ao qual adicionamos a informação de que há duas soluções possíveis para o problema.

Teorema 9.4. *Dados dois pontos A e B , existem C e C' em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AB}$ tais que $\triangle ABC$ e $\triangle ABC'$ são equiláteros.*

Demonstração: Seja Γ_1 o círculo com centro em A e raio AB , seja Γ_2 o círculo com centro em B e raio BA . Seja B' tal que $B' * A * B$ e $AB' \cong AB$ (Axioma C1). Por definição, B' é um ponto de Γ_1 . Segue da Proposição 7.4 que $BB' > AB$, logo B' é um ponto do exterior de Γ_2 . Por outro lado, B é um ponto de Γ_1 que pertence ao interior de Γ_2 . Segue do Axioma E que existem dois pontos distintos C e C' que pertencem a Γ_1 e a Γ_2 . Daí, $AC \cong AB$, $BC \cong AB$, $AC' \cong AB$ e $BC' \cong AB$ (definição de círculo). vDaí segue, pela Proposição 7.5, que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ABC'$ são equiláteros. Como têm um lado em comum, são congruentes, pelo critério LLL de congruência. Em particular, os ângulos $\angle CAB$ e $\angle C'AB$ são congruentes. Se os pontos C e C' não estivessem em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AB}$, as semirretas AC e AC' seriam idênticas, pela unicidade do Axioma C4. Daí C e C' seriam iguais, pela unicidade do Axioma C1 (pois $AC \cong AC'$). $\square$

10. OS TEOREMAS DE TALES E DE PITÁGORAS

11. APÊNDICE: RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA

Uma *relação* em um conjunto X é, por definição, um subconjunto do produto cartesiano $X \times X$. Se R é uma relação em X , é usual denotar $(x, y) \in R$ por $x \sim y$. Frequentemente definiremos uma relação definindo o significado da expressão $x \sim y$, sem fazer referência direta ao subconjunto R de todos os pares ordenados (x, y) que satisfazem $x \sim y$.

Uma *relação de equivalência* em um conjunto X é uma relação em X que satisfaz as três propriedades seguintes:

- (1) $x \sim x$, para todo $x \in X$;
- (2) se $x \sim y$, então $y \sim x$;
- (3) se $x \sim y$ e $y \sim z$, então $x \sim z$.

Chama-se de *reflexiva* uma relação que satisfaça (1). Chama-se de *simétrica* uma relação que satisfaça (2). Chama-se de *transitiva* uma relação que satisfaça (3). Usando esses termos, podemos então dizer que uma relação de equivalência é uma relação reflexiva, simétrica e transitiva.

Dada uma afirmação A , denotamos por $\neg A$ a negação de A , ou seja, a afirmação “ A é falsa”. Na demonstração da Proposição 11.1 vamos usar a seguinte regra de lógica: provar que as afirmações A e B implicam a afirmação C é equivalente a provar que $\neg C$ e B implicam $\neg A$.

Proposição 11.1. *Seja $\sim$ uma relação de equivalência em X , sejam x, y e z elementos de X . Se $x \not\sim y$ e $y \sim z$, então $x \not\sim z$.*

Demonstração: O que queremos provar é equivalente à afirmação “se $y \sim z$ e $x \sim z$, então $x \sim y$ ”. Esta afirmação é verdadeira, pois $\sim$ é simétrica, transitiva e reflexiva. $\square$

Seja X um conjunto munido de uma relação de equivalência. Para cada $x \in X$, definimos

$$[x] = \{y \in X; y \sim x\}$$

Um subconjunto da forma $[x]$ para algum $x \in X$ é chamado de *classe de equivalência*. O conjunto de todas as classes de equivalência se denota por $X/\sim$,

$$X/\sim = \{[x]; x \in X\},$$

e é chamado *quociente de X por $\sim$*

Proposição 11.2. *Seja X um conjunto munido de uma relação de equivalência. Dados x e y pertencentes a X , são equivalentes as seguintes afirmações: (1) $x \sim y$, (2) $[x] = [y]$, (3) $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.*

Demonstração: Como primeiro passo, provemos que (1) implica (2). Sejam x e y tais que $x \sim y$. Queremos provar que os conjuntos $[x]$ e $[y]$ são iguais. Para tanto, tome $z \in [x]$. Então $z \sim x$. Temos portanto $x \sim y$ e $z \sim x$. Segue da transitividade que $z \sim y$, isto é, $z \in [y]$. Da mesma maneira se prova que $z \in [y]$ implica $z \in [x]$. Logo, $z \in [x] \iff z \in [y]$; isto é, $[x] = [y]$.

Provemos em seguida que (2) implica (3). Segue de $[x] = [y]$ que $[x] \cap [y] = [x]$. Para todo $x \in X$, $[x]$ é não vazio porque ao menos $x \in [x]$ (pois $\sim$ é reflexiva). Logo $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.

Finalmente, provemos que (3) implica (1). Se existe algum z pertencente a $[x] \cap [y]$, então $z \sim x$ e $z \sim y$. Segue então da simetria e da transitividade que $x \sim y$. $\square$

Proposição 11.3. *Um conjunto X munido de uma relação de equivalência $\sim$ pode ser escrito como a união disjunta de suas classes de equivalência.*

Demonstração: As classes de equivalência de $\sim$ são subconjuntos de X , logo

$$\bigcup_{x \in X} [x] \subseteq X.$$

Todo elemento de z de X pertence à classe de equivalência $[z]$, pois $z \sim z$ (a relação é reflexiva). Ou seja, se $z \in X$, então $z \in \bigcup_{x \in X} [x]$. Isto prova a igualdade

$$(31) \quad X = \bigcup_{x \in X} [x]$$

Além disso, segue da Proposição 11.2 que duas classes de equivalência distintas são disjuntas (não se interceptam). $\square$

12. ALGUMAS SOLUÇÕES

Solução do Problema 3.

Dada uma reta r no Plano de Descartes, de equação

$$(32) \quad ax + by = c,$$

diremos que ela é vertical se $b = 0$ e que ela não é vertical se $b \neq 0$. Quando a reta é vertical, o coeficiente a tem de ser diferente de zero, pois $(a, b) \neq (0, 0)$. Daí, (32) é equivalente a $x = d$, com $d = \frac{c}{a}$. Quando a reta não é vertical, a equação em (32) pode ser dividida por b e reescrita como $y = mx + k$, com $m = -\frac{a}{b}$ e $k = \frac{c}{b}$.

O Problema 3 pede para mostrar que, dada uma reta r e um ponto P que não está em r , existe uma única reta s que é paralela a r e passa por P . Vamos dividir a solução em dois casos: (1) r não é vertical e (2) r é vertical.

No caso (1), seja $y = mx + k$ a equação de r ; seja (x_0, y_0) o ponto P . Defina s como sendo a reta de equação $y = mx + (y_0 - mx_0)$. É evidente que s passa por P . Queremos provar que s é paralela a r e que, se uma reta s' passa por P e $s' \neq s$, então s' não é paralela a r .

Para provar que r e s são paralelas, devemos mostrar que o sistema

$$\begin{cases} y = mx + k \\ y = mx + (y_0 - mx_0) \end{cases}$$

não tem solução. Se este sistema tivesse solução, necessariamente k seria igual a $y_0 - mx_0$. Mas $k \neq (y_0 - mx_0)$, porque r não passa por P . Logo o sistema não tem solução e as retas r e s são paralelas.

Seja agora s' uma reta que passa por (x_0, y_0) , $s' \neq s$. Dependendo de s' ser ou não ser vertical, a equação de s' pode ser $x = x_0$ ou $y = m'x + (y_0 - m'x_0)$ com $m' \neq m$. Os sistemas

$$\begin{cases} y = mx + k \\ x = x_0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y = mx + k \\ y = m'x + (y_0 - m'x_0) \end{cases}$$

têm soluções, a saber, respectivamente, $(x_0, mx_0 + k)$ e $(\frac{y_0 - m'x_0 - k}{m - m'}, \frac{m(y_0 - m'x_0 - k)}{m - m'} + k)$. Logo s' não é paralela a s .

No caso (2), seja (x_0, y_0) o ponto P , seja $x = d$ a equação de r . Defina s como sendo a reta de equação $x = x_0$. É evidente que s passa por P e é paralela a r (pois $d \neq x_0$, já que P não está em r). Queremos mostrar que, se s' passa por P e $s' \neq s$, então s' não é paralela a r . A única reta vertical que passa por P é a reta s . Como s' passa por P e é diferente de s , s' não é vertical e portanto a equação de s' é da forma $y = mx + k$. O ponto $(d, md + k)$ é o ponto de interseção de s' e r , logo s' e r não são paralelas, como queríamos.

Resultados de Geometria Analítica necessários para o Problema 4.

No Plano Cartesiano $\mathbb{R}^2$, define-se a *distância* entre os pontos $P = (p_1, p_2)$ e $Q = (q_1, q_2)$ pela fórmula

$$d(P, Q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}$$

É óbvio que $d(P, Q) = d(Q, P)$. Vamos usar sem demonstrar a *desigualdade triangular*

$$d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q),$$

válida para quaisquer pontos P, Q e R .

Dados um ponto A e um real positivo r , o círculo $C_{A,r}$ de centro no ponto A e raio r é o conjunto dos pontos X tais que $d(X, A) = r$. Segue então que um ponto $X = (x, y)$ pertence ao círculo de centro em $A = (a_1, a_2)$ e raio r se e somente se a equação

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = r^2$$

é satisfeita.

Proposição 12.1. *Dados A e B em $\mathbb{R}^2$ e $s > r > 0$ tais que $r + d(A, B) < s$, então os círculos $C_{A,r}$ e $C_{B,r}$ não possuem ponto em comum.*

Demonstração: Se $d(X, A) = r$, segue da desigualdade triangular que

$$d(X, B) \leq d(X, A) + d(A, B) = r + d(A, B) < s.$$

Isto mostra que, se X pertence ao círculo $C_{A,r}$, então X não pertence ao círculo $C_{B,s}$. □

No caso particular em que $A = (a, 0)$ e $B = (b, 0)$, temos $d(A, B) = |a - b|$ e, portanto, para $s > r > 0$,
 $r + d(A, B) < s \iff r + |a - b| < s \iff |a - b| < s - r \iff r - s < a - b < s - r \iff b - s < a - r \text{ e } a + r < b + s$.
 A Proposição 12.1 tem portanto a seguinte consequência.

Proposição 12.2. *Dados números reais a e b e números positivos r e s tais que $s > r > 0$ e $b - s < a - r < a + r < b + s$, então os conjuntos $L_{a,r}$ e $L_{b,s}$ (os quais chamamos de “retas do plano de Poincaré” na página 9) não se interceptam.*

Podemos demonstrar também a seguinte proposição.

Proposição 12.3. *Se $|b - a| > r$, então as retas do Plano de Poincaré L_b e $L_{a,r}$ não se interceptam.*

Demonstração: Se (x, y) está em $L_{a,r}$, então $y > 0$ e $(x - a)^2 + y^2 = r^2$. Daí

$$|x - a| < \sqrt{(x - a)^2 + y^2} = r < |b - a|.$$

Segue de $|x - a| < |b - a|$ que $x \neq b$, logo (x, y) não está em L_b . □

Solução do Problema 4.

Dada uma reta t no plano de Poincaré e um ponto $P = (x_0, y_0)$ que não está em t , queremos mostrar que existem infinitas retas paralelas a t passando por P . Vamos dividir a solução em dois casos: $t = L_b$ para algum $b \in \mathbb{R}$ ou $t = L_{b,s}$ para algum $b \in \mathbb{R}$ e algum $s > 0$.

Caso 1: $t = L_b$.

Como P não está em t , temos $x_0 \neq b$. Logo $t' = L_{x_0}$ é uma reta passando por P . Ela não intercepta L_b porque todos os seus pontos são da forma (x_0, y) , todos os pontos de L_b são da forma (b, y') , e $x_0 \neq b$. Logo L_{x_0} e L_b são paralelas

Por outro lado, nenhuma reta do tipo L_a com $a \neq x_0$ passa por P . Então, para encontrar outras paralelas a t passando por P , temos de procurá-las entre as retas do tipo $L_{a,r}$. Pela Proposição 12.3, se $|b - a| > r$, então

$L_{a,r}$ e L_b são paralelas. Para resolver o Problema no Caso 1, basta portanto mostrar que existem infinitos pares (a, r) , $r > 0$, satisfazendo $|b - a| > r$ tais que (x_0, y_0) está em $L_{a,r}$. Ou seja, queremos mostrar que existem infinitos pares (a, r) , com $r > 0$, satisfazendo

$$|b - a|^2 > r^2 \text{ e } r^2 = (x_0 - a)^2 + y_0^2;$$

ou seja, queremos mostrar que existem infinitos valores de a satisfazendo

$$(x_0 - a)^2 + y_0^2 < (b - a)^2,$$

inequação esta que é equivalente a (Verifique esta afirmação!)

$$(33) \quad 2a(b - x_0) < b^2 - (x_0^2 + y_0^2).$$

Suponhamos agora que $b - x_0 > 0$. Então a inequação (33) é equivalente a

$$(34) \quad a < \frac{b^2 - (x_0^2 + y_0^2)}{2(b - x_0)}.$$

Por outro lado, se $b - x_0 < 0$, (33) é equivalente a

$$(35) \quad a > \frac{b^2 - (x_0^2 + y_0^2)}{2(b - x_0)}.$$

Evidentemente existem infinitos valores de a satisfazendo as inequações (34) e (35). Nos dois subcasos ($b - x_0$ positivo ou negativo), mostramos que existem infinitas retas do tipo $L_{a,r}$ paralelas a L_b . É isto o que queríamos provar pois, como já observamos, $b \neq x_0$, pois (x_0, y_0) não está em L_b .

Caso 2: $t = L_{b,s}$.

Usando que t não passa em P , ou seja, que $(x_0 - b)^2 + y_0^2 \neq s^2$, mostraremos que existem infinitos pares (a, r) , $r > 0$, tais que $L_{a,r}$ passa por P e é paralela a $L_{b,s}$. Definindo $r_0 = \sqrt{(x_0 - b)^2 + y_0^2}$, temos que L_{b,r_0} passa por P . Além disso, t e L_{b,r_0} são paralelas (pois todos os pontos de t satisfazem $(x_0 - b)^2 + y_0^2 = s^2$, todos os pontos de L_{b,r_0} satisfazem $(x_0 - b)^2 + y_0^2 = r_0^2$ e $r_0 \neq s$).

Suponhamos primeiro que $(x_0 - b)^2 + y_0^2 < s^2$.

Em vista da Proposição 12.2, para provar que existem infinitas retas paralelas a t passando por P , basta mostrar que existem infinitos (a, r) , com $r > 0$, tais que

$$b - s < a - r < a + r < b + s \text{ e } (x_0 - a)^2 + y_0^2 = r^2.$$

Isto é equivalente a mostrar que existem infinitos valores de a que satisfazem as inequações

$$(36) \quad b - s < a - \sqrt{(x_0 - a)^2 + y_0^2} \text{ e } a + \sqrt{(x_0 - a)^2 + y_0^2} < b + s.$$

Como estamos supondo que $(x_0 - b)^2 + y_0^2 < s^2$, as inequações em (36) são satisfeitas para $a = b$. Além disso, as funções $f(a) = a - \sqrt{(x_0 - a)^2 + y_0^2}$ e $g(a) = a + \sqrt{(x_0 - a)^2 + y_0^2}$ são contínuas. Se uma função contínua h definida em $\mathbb{R}$ satisfaz as desigualdades $h(b) < k_1$ e $h(b) > k_2$ para constantes k_1 e k_2 , as desigualdades $h(a) < k_1$ e $h(a) > k_2$ continuarão sendo satisfeitas para todo a suficientemente próximo de b ou, mais precisamente, para todo a pertencente a um intervalo aberto contendo b . Daí, segue que existe um intervalo aberto I contendo b tal que, para todo a em I , as desigualdades $b - s < f(a)$ e $g(a) < b + s$ são satisfeitas. Mostramos que, para todo a em I , as desigualdades em (36) são satisfeitas. Isto é o que queríamos mostrar, pois existem infinitos elementos em I .

Manipulando com muito cuidado e engenhosidade as desigualdades que queremos demonstrar, é possível encontrar, em termos dos dados b, s, x_0 e y_0 , os limites de um tal intervalo I , sem que seja preciso falar de funções contínuas. Essa seria uma solução mais elementar, mas não mais fácil. Usar conceitos mais avançados muitas vezes torna mais fácil a solução de um problema elementar.

Resta considerar o caso em que $(x_0 - b)^2 + y_0^2 > s^2$. Os argumentos são praticamente idênticos ao caso em que $(x_0 - b)^2 + y_0^2 < s^2$, embora algumas variáveis troquem de lugar. Vamos apenas esboçar a solução.

Queremos mostrar que existem infinitos pares (a, r) , $r > 0$, tais que

$$a - r < b - s < b + s < a + r \quad \text{e} \quad (x_0 - a)^2 + y_0^2 = r^2,$$

ou seja, queremos mostrar que as inequações

$$a - \sqrt{(x_0 - a)^2 + y_0^2} < b - s \quad \text{e} \quad b + s < a + \sqrt{(x_0 - a)^2 + y_0^2}$$

são satisfeitas por infinitos valores de a . Isto decorre de as desigualdades serem satisfeitas quando $a = b$ e da continuidade da função $\phi(a) = \sqrt{(x_0 - a)^2 + y_0^2}$.

Solução do Problema 19.

São dados um ponto C e uma semirreta $\overrightarrow{AB}$ tais que $C \neq A$ e $C \in \overrightarrow{AB}$. Queremos provar que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. Claro que podemos supor que B também é diferente de C , caso contrário não há o que se demonstrar.

Os três pontos são colineares pois, pela definição de semirreta, $C \in \overrightarrow{AB}$ implica que C é um ponto de $\overleftrightarrow{AB}$. Pelo Axioma B3, um e só um dos três casos seguintes pode ocorrer: (1) $C * A * B$, (2) $A * C * B$, (3) $A * B * C$. Segue da hipótese $C \in \overrightarrow{AB}$ que o caso (1) não ocorre. Devemos portanto, supondo que vale $A * C * B$ ou $A * B * C$, mostrar que

$$P \in \overrightarrow{AB} \iff P \in \overrightarrow{AC},$$

o que é equivalente a

$$(37) \quad P \notin \overrightarrow{AB} \iff P \notin \overrightarrow{AC},$$

Para provar (37), basta supor que P está em $\overleftrightarrow{AB}$ (caso contrário, as duas afirmações em (37) são falsas e não há o que provar). Nesse caso, segue da Proposição 4.3 que (37) é equivalente a

$$(38) \quad P * A * B \iff P * A * C.$$

A hipótese “ $A * C * B$ ou $A * B * C$ ” e o que queremos provar (38) não se alteram se trocarmos os papéis de B e C . Logo basta provar que $A * B * C$ implica (38). Ou seja, queremos provar que

$$A * B * C \text{ e } P * A * B \implies P * A * C$$

e

$$A * B * C \text{ e } P * A * C \implies P * A * B.$$

A primeira dessas implicações decorre da Proposição 4.13 e a segunda da Proposição 4.12 (ordenamento de quatro pontos).

13. PROVAS

Primeira Prova.

Questão 1) (2 pts) Mostre que na geometria de três pontos (a) não existem retas paralelas e (b) por cada ponto passam exatamente duas retas.

Questão 2) (2 pts) Dê exemplo de quatro pontos A, B, C e D no Plano de Poincaré tais que todo subconjunto com três elementos de $\{A, B, C, D\}$ não seja colinear.

Questão 3) (3 pts)

(a) Assuma válidos os três axiomas de incidência, (I1), (I2) e (I3). Suponha que A, B, C e D são quatro pontos tais que $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ sejam paralelas. Mostre que D não está em $\overleftrightarrow{AC}$.

(b) Além dos três axiomas de incidência, assuma válido o Postulado 5, tal como enunciado na Seção 1 das Notas. Mostre que por cada ponto passam pelo menos três retas.

Questão 4) (3 pts) Assuma válidos todos os axiomas de incidência e de ordenamento destas Notas.

(a) Dados $A * B * C$ com C na reta r e A e B fora de r , mostre que A e B estão do mesmo lado de r .

(b) Mostre que cada semiplano delimitado por uma reta r possui pelo menos dois pontos.

Dica: Segue da Definição 4.8 das Notas que todo semiplano possui pelo menos um ponto.

REFERÊNCIAS

- [1] Os Elementos de Euclides, tradução de Irineu Bicudo. Editora da Unesp, 2009.
- [2] M. J. GREENBERG. Euclidean and Non-Euclidean Geometries, 3^a edição. W. H. Freeman, 2003.
- [3] R. HARTSHORNE. Geometry: Euclid and Beyond. Springer, 1997.
- [4] D. HILBERT. Foundations of Geometry, Second Edition. The Open Court Publishing Company, La Salle, Illinois, 1971 (tradução do original em alemão Grundlagen der Geometrie, 1903).
- [5] R. MILLMAN & G. PARKER. Geometry – a metric approach with models. Springer, 1991.
- [6] EDWIN MOISE. Elementary Geometry from an Advanced Standpoint. Addison Wesley, 1963.