

Assuma válidos os axiomas I1, I2, I3, B1, B2, B3, B4, C1, C2, C3, C4, C5 e C6.

Questão 1 (2 pts) Seja D um ponto na reta $\overleftrightarrow{BC}$. Mostre que, se D pertencer ao interior do ângulo $\angle BAC$, então $B * D * C$.

Vamos considerar que $B * D * C$ não vale. Então se $D = B$ ou $B = C$ então D estará na reta $\overleftrightarrow{AB}$ ou $\overleftrightarrow{AC}$ então não estará no interior de $\angle BAC$. ✓

Se $C * B * D$, então o ponto B está tanto em CD quanto em $\overleftrightarrow{AB}$ logo $D \in C$, ficam de lados opostos de $\overleftrightarrow{AB}$.

Então se vale $D * C * B$ temos que o ponto C em $\overleftrightarrow{AC}$ e em BD mostra que $B \in C$ também estão de lados opostos de $\overleftrightarrow{AC}$. ✓

Vendo assim D não estaria no interior de $\angle BAC$. ✓

Agora com $B * D * C$ valendo, o ponto C é o único ponto em comum entre $\overleftrightarrow{BP}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ está fora de BD , então $D \in B$ ficam do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$ também o ponto B é o único em comum entre $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ está fora do segmento CD . ✓

$D \in C$ estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AB}$, Assim, D está no interior de $\angle BAC$

Questão 2 (2 pts) Suponha que a reta r passa pelo ponto A e por algum ponto no interior do ângulo $\angle BAC$.
Mostre que B e C estão em lados opostos de r .

- Seja P um ponto t.q. $P \in r$ e $P \in \angle BAC$ ⁽¹²⁾ ~~int~~
- Tome a semirreta $\overrightarrow{AP}$
- Por Teorema da barra transversal, $\exists M \in \overrightarrow{AP}$ t.q. $M \in BC$ ✓
- Como $\overrightarrow{AP} \subset r$, então temos que r e BC se interceptam no ponto M
(Def. 9.5) e (Prop. 2.2)
- Assim, por Def. 47, $C \in H_B$. Por Def. 9.5, B e C estão em lados opostos. ✓

* Numeração do original: Matéria P2.

Questão 3 (3 pts) Seja dada uma reta r .

(a) Mostre que existem em r quatro pontos A, B, C e D tais que $A * B * C * D$.

(b) Mostre que, se $A * B * C * D$ em r , então existe em r um ponto E diferente de A , de B , de C e de D .

a) Toda reta possui pelo menos dois pontos, ^(I2) podemos dizer que esses dois pontos são A e D tal que A e D estão em r .
 pelo (B2) existe C tal que $A * C * D$ e como temos A, C , pelo (B2) existe B tal que $A * B * C$, então
 temos $A * B * C$ e $A * C * D$, com o prop. 4.11* vale $B * C * D$ e
 $A * B * D$ então pelo prop. 4.13*, vale $A * B * C * D$. 

b) Podemos pegar C e D o pelo (B2) temos E tal que
 $C * E * D$, como E está em r e é distinto de C e D , se $E = A$
 teríamos $C * A * D$ e que contradiz a $A * C * D$ mencionado, pois que
 $A * B * C * D$ (B3), se $E = B$ temos $C * B * D$ e que contradiz $B * C * D$ men-
 tionado pois que $A * B * C * D$ (B3), então temos E em r diferente de A
 de B , de C , de D . 

Questão 3 (3 pts) Seja dada uma reta r .

(a) Mostre que existem em r quatro pontos A, B, C e D tais que $A * B * C * D$.

(b) Mostre que, se $A * B * C * D$ em r , então existe em r um ponto E diferente de A , de B , de C e de D .

a) Dada a reta r , por 12 existem pelo menos dois pontos (B e C em r) e $\overleftrightarrow{BC} = r$. ✓

Pela definição de semirreta temos que dada a semirreta formada pelos pontos B e C temos

$$\overrightarrow{BC} = BC \cup \{P, B * C * P\}$$

Pelo problema 2f, temos que toda semirreta possui uma única semirreta oposta.

Vamos denotar a semirreta-oposta de $\overrightarrow{BC}$ como $\overrightarrow{BA}$. ✓

Logo o ponto $A \in \overrightarrow{BA}$ e $A \notin \overrightarrow{BC}$

Como $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BA}$ são distintas e opostas.

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} = r \Rightarrow A \in r.$$

E como $\overrightarrow{BC}$ é um subconjunto de $\{\overrightarrow{BC}\}$, então como $P \in \overrightarrow{BC}$, $P \in \overrightarrow{BC}$ logo $P \in r$.

Pela proposição 4.15, $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$ são opostas se e somente se $A * B * C$ e pela semirreta $\overrightarrow{BC}$, $P \in \overrightarrow{BC}$, $B * C * P$. ✓

$$\left. \begin{array}{l} \text{Por prop. 4.12} \Rightarrow A * B * C \\ B * C * D \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A * B * D \\ A * C * D \end{array} \right\} \Rightarrow A * B * C * D. \quad \text{def. 4.13}$$

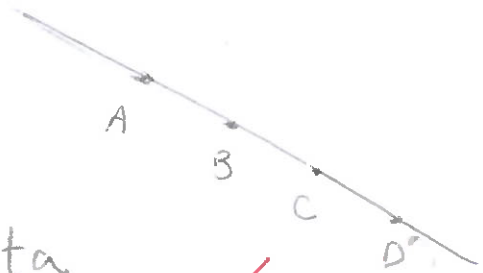
e existe $D \in \overrightarrow{BC}$ tal que $B * C * D$. ✓

b) $A * B * C + D$ em $r \Rightarrow \exists E \in r, E \neq A, B, C, D.$

Dada a reta r , temos a semirreta $\overrightarrow{AB}$, um subconjunto de r .

Como $A * B * C * D \Rightarrow A * B * C$
 $\text{e } A * B * D$

Logo $C \in \overrightarrow{AB}$ e $D \in \overrightarrow{AB}$.



Pelo problema 2F, $\overrightarrow{AB}$ tem uma semirreta oposta que denominaremos $\overrightarrow{AE}$ e pelo problema 28 $B * A * E$.

Pela definição 1.3 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} = r \Rightarrow E * A * B$

Portanto o ponto E pertence a r e não pertence a $\overrightarrow{AB}$ portanto é distinto de A, B, C e D .

Boa!

Questão 4 (3 pts) Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ dois triângulos isósceles, $AB \cong AC$ e $A'B' \cong A'C'$. Mostre que, se $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ e se $BC \cong B'C'$, então $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Suponha $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ Triângulos isósceles / $AB \cong AC$, $A'B' \cong A'C'$

$$\angle ABC \cong \angle A'B'C' \text{ e } BC \cong B'C'$$

Como Triângulo Isósceles Temos: $AB \cong AC \Rightarrow \angle BCA \cong \angle CBA$
 $\wedge A'B' \cong A'C' \Rightarrow \angle C'B'A' \cong \angle A'C'B'$

$$\left. \begin{array}{l} \text{(I)} \angle CBA = \angle ABC \cong \angle A'B'C' \\ \angle C'B'A' = \angle A'B'C' \cong \angle A'C'B' \end{array} \right\} \Rightarrow \angle ABC \cong \angle A'C'B'$$

$$\text{(II)} \angle ABC \cong \angle A'C'B' \Rightarrow \angle BCA \cong \angle A'C'B'$$

$$\angle ABC \cong \angle BCA \Rightarrow \angle ACB \cong \angle A'C'B'$$

$$\text{(III)} BC \cong B'C'$$

Como Temos $BC \cong B'C'$, $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$ e $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$
 o caso ALA nos garante que $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

