

Questão 1) (2 pts) Mostre que na geometria de três pontos (a) não existem retas paralelas e (b) por cada ponto passam exatamente duas retas.

Seja $S = \{A, B, C\}$ em que A, B, C são os pontos e os subconjuntos $\{A, B\}$, $\{B, C\}$ e $\{A, C\}$ são as únicas retas neste modelo. $\rightarrow$ seção "Geometrias Finitas".

- (a) Note que:
- a reta $\{A, B\}$ passa por A e por B ,
 - a reta $\{B, C\}$ passa por B e por C ,
 - a reta $\{A, C\}$ passa por A e por C .

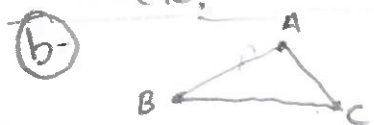
Então valem os Axiomas de incidência (I_1) e (I_2) . Além disso, duas retas são paralelas se não existe um ponto que está em ambas (Proposição 2.2).

Como o ponto A está tanto na reta $\{A, B\}$ e $\{A, C\}$;

o ponto B está tanto em $\{A, B\}$ e $\{B, C\}$;

o ponto C está tanto em $\{A, C\}$ e $\{B, C\}$;

Não é possível obter um par de retas que não compartilhe um dos pontos A, B ou C . Portanto não existem paralelas neste modelo.



Sabemos que neste modelo só existem 3 retas $\{A, B\}$, $\{B, C\}$, $\{A, C\}$ e 3 pontos: A, B e C .

Pela proposição 2.5:

Existe pelo menos 1 reta que não passa por A ;

Existe pelo menos 1 reta que não passa por B ;

Existe pelo menos 1 reta que não passa por C ;

Pela proposição 2.6: Existem pelo menos 2 retas passando por A ;
pelo menos duas retas passando por B ; pelo menos 2 retas passando por C .

Então, nesse modelo, por cada ponto passam 2 retas.

Boa!

Questão 2 (2 pts) Dê exemplo de quatro pontos A, B, C e D no Plano de Poincaré tais que todo subconjunto com três elementos de $\{A, B, C, D\}$ não seja colinear.

Os pontos no plano de Poincaré são $P := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$,
e as retas são $L_a = \{(x, y) \in P, x = a\}$ e
 $L_{a,r} = \{(x, y) \in P, (x-a)^2 + y^2 = r^2\}$.

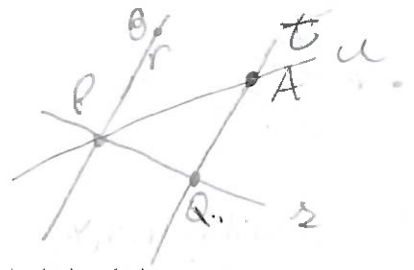
Dados os pontos $A = (3, 4)$, $B = (3, 1)$, $C = (2, 1)$ e $D = (2, 4)$.

$\{A, B, C\}$ não são colineares pois dada a reta $L_3 = \{(x, y) \in P, x = 3\}$
 $A \in L_3$, $B \in L_3$ e $C \notin L_3$ e pelo I1, L_3 é a única reta que
passa por A e B .

$\{A, B, D\}$ não são colineares pois $D \notin L_3$.

$\{A, C, D\}$ não são colineares pois dada a reta $L_2 = \{(x, y) \in P, x = 2\}$
 $A \notin L_2$ e novamente pelo I1, L_2 é a única reta que passa por C e D .

$\{B, C, D\}$ não são colineares pois $B \notin L_2$.



Questão 3) (3 pts)

(a) Assuma válidos os três axiomas de incidência, denotados por (I1), (I2) e (I3) nas Notas de Aula. Suponha que A, B, C e D são quatro pontos tais que $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ sejam paralelas. Mostre que D não está em $\overleftrightarrow{AC}$.

(b) Além dos três axiomas de incidência, assuma válido o Postulado 5, tal como enunciado na Seção 1 das Notas. Mostre que por cada ponto passam pelo menos três retas.

a) Suponha que D está em $\overleftrightarrow{AC}$. Como A está em $\overleftrightarrow{AC}$ e C está em $\overleftrightarrow{AC}$, A, C e D estão em uma mesma reta, logo, são colineares. ✓

Por (I1), a reta que passa por C e D é única, logo, se A, C e D são colineares, A está nessa única reta que passa por C e D . Com isso A está em $\overleftrightarrow{CD}$. Mas, por hipótese, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são paralelas, logo, não têm pontos em comum. Como A está em $\overleftrightarrow{AB}$ e em $\overleftrightarrow{CD}$, elas teriam um ponto em comum, o que é uma contradição. Portanto, D não está em $\overleftrightarrow{AC}$. ✓

b) Dado um ponto P , pela proposição 2.6, existem pelo menos duas retas r e s que passam por P .

Por (I2), existem, pelo menos dois pontos em s , logo $\exists$ um ponto Q , diferente de P , que está em s . Q não está em r , pois se estivesse, r e s se encontrariam em P e em Q , mas, pela proposição 2.2, retas concorrentes se encontram em um único ponto, e elas já se encontram em P . ✓

Pelo Postulado 5, como Q não está em r , existe uma reta t paralela a r que passa por Q . Por (I2), a reta t passa, por, pelo menos dois pontos. Logo, existe um ponto A , diferente de Q , que está em t . Por (I1), dados P e A , existe uma reta que passa por P e A .

Além disso, por (I2), existem, pelo menos, dois pontos em r , logo, existe o ponto B , diferente de P em r .

Agora, basta provar que u é diferente de s e de r , para que existam três retas que passem por P . ✓

(continua no final).

obs: $P \neq A$, pois se $P = A$, r passaria por A , mas A está em t que é paralela a r , logo A não pode estar em r , o que é uma contradição. Portanto, $P \neq A$. Analogamente, $P \neq B$.

Use esta página como rascunho ou como espaço para continuar as soluções das questões.

3.b) i) u e r são distintas

Dados os pontos P, Q, B e A , temos:
 $\overleftrightarrow{PB}$ e $\overleftrightarrow{QA}$ são paralelas (pois $r = \overleftrightarrow{PB}$ e $t = \overleftrightarrow{QA}$ e r e t são paralelas). Pelo problema (a), A não está em $\overleftrightarrow{PQ}$, logo, A não está em s .

Como A não está em $\overleftrightarrow{PQ}$ e $A \neq P$, pela prop. 2.1, $\overleftrightarrow{PQ} \neq \overleftrightarrow{PA}$, logo $s \neq u$. ✓

ii) u e r são distintas

A não está em r , pois A está em t e t é paralela a r . Logo, A não está em $\overleftrightarrow{PB}$. Como $P \neq B$, pela prop. 2.1, $\overleftrightarrow{PA} \neq \overleftrightarrow{PB}$, logo $u \neq r$. ✓

Portanto, por cada ponto passam pelo menos três retas. ✓

Questão 4 (3 pts) Assuma válidos todos os axiomas de incidência e de ordenamento enunciados nas Notas.

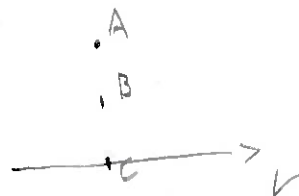
(a) Dados $A * B * C$ com C na reta r e A e B fora de r , mostre que A e B estão do mesmo lado de r .

(b) Mostre que cada semiplano delimitado por uma reta r possui pelo menos dois pontos.

Dica: Segue da Definição 4.8 das Notas que todo semiplano possui pelo menos um ponto.

a) Por (B1) A, B e C

não colineares



Vamos supor por contradição que B está do lado oposto de r então existe um ponto P que intercepta r assim temos $A * P * B$, portanto P está em $\overleftrightarrow{AB}$, segundo a proposição 2.2 existe apenas um ponto de interseção entre duas retas, como C está em $\overleftrightarrow{AB}$ e em r $P = C$ mas se $P = C$ $A * C * B$ e $A * B * C$ que é uma contradição e vai contra (B3).

Portanto A e B devem estar do mesmo lado.

b) existe uma reta r que separa 2 semiplanos, um semiplano contém um ponto A , segundo (I2) existe um ponto P que está em r (o ponto não pertence ao semiplano) e segundo (B2) existe um ponto B tq. $A * B * P$ como provamos em a), A e B devem estar do mesmo lado da reta portanto pertencem ao mesmo semiplano.