Soluções Problemas para a Prova 3 - Desenho Geométrico 1

Os problemas resolvidos serão apenas os problemas contidos nas Notas de Aula da matéria referente à P3 e a numeração utilizada, tanto nos resultados utilizados, quanto nos problemas, será a numeração das Notas de Aula.

Problema 42: Mostre que ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Demonstração. Sejam A um ponto, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ raios não opostos, $\overrightarrow{AD}$ oposto a $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AE}$ oposto a $\overrightarrow{AC}$. Queremos mostrar que $\angle BAC \cong \angle DAE$. Como $\overrightarrow{AE}$ é oposto a $\overrightarrow{AC}$, o ângulo $\angle BAE$ é suplementar a $\angle BAC$ e vice-versa. Ora, mas $\overrightarrow{AD}$ é oposto a $\overrightarrow{AB}$, de modo que $\angle DAE$ é também suplementar a $\angle BAE$. Logo, aplicando a Proposição 6.2 para $\angle ABC = \angle A'B'C' = \angle BAE$, concluímos que $\angle DAE \cong \angle BAC$. $\square$

Problema 43: São dados $B * A * E$ em uma reta r e $C * A * D$ em uma reta s distinta de r. Mostre que, se $\angle BAC \cong \angle BAD$, então $\angle BAC \cong \angle CAE$.

Demonstração. Temos que os ângulos $\angle BAD$ e $\angle CAE$ são opostos pelo vértice, de modo que, pelo Problema 42, vale que $\angle BAD \cong \angle CAE$. Temos também que $\angle BAD \cong \angle BAC$ e assim, de acordo com (C5), temos $\angle BAC \cong \angle CAE$. $\square$

Problema 44: Se um dos quatro ângulos formados por duas retas que se interceptam for reto, os demais três também serão.

Demonstração. Sejam O um ponto, $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$ semirretas opostas e $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OD}$ semirretas opostas. Suponha, sem perda de generalidade que tenhamos $\angle AOB$ um ângulo reto, com $\angle AOB \cong \angle BOC$. Imediatamente, vale que $\angle BOC$ é reto, pois $\angle AOB$ é suplementar a $\angle BOC$.
Pelo Problema 42, já que $\angle AOB$ e $\angle COD$ são opostos pelo vértice, temos $\angle AOB \cong \angle COD$ e como $\angle AOB \cong \angle BOC$, segue que $\angle COD \cong \angle BOC$. Além disso, já que $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OD}$ são opostas, concluímos que $\angle COD$ é reto.
Por fim, note que temos $A * O * C$ e $B * O * D$, ou seja, podemos aplicar o Problema 43. Portanto, segue que $\angle AOB \cong \angle AOD$ e como $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OB}$ são opostas, estes ângulos são suplementares, isto é, $\angle AOD$ é reto. $\square$

Problema 45: Seja $\angle BAC$ um ângulo reto, seja $\angle B'A'C'$ um ângulo congruente a $\angle BAC$. Então, $\angle B'A'C'$ também é um ângulo reto.

Demonstração. Como $\angle BAC$ é reto, tomando $\overrightarrow{AD}$ a semirreta oposta a $\overrightarrow{AB}$, temos que $\angle BAC \cong \angle CAD$. Seja $\overrightarrow{A'D'}$ a semirreta oposta a $\overrightarrow{A'B'}$, de modo que $\angle C'A'D'$ é suplementar a $\angle B'A'C'$. Pela Proposição 6.2, vale que $\angle C'A'D' \cong \angle CAD$. Como temos que a congruência de ângulo é uma relação de equivalência e $\angle CAD \cong \angle BAC$ e $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, concluímos que $\angle C'A'D' \cong \angle B'A'C'$ e, portanto, $\angle B'A'C'$ é reto. $\square$

Problema 46: Sejam A, B, C e D pontos tais que $A * C * D$, B não está em $\overleftrightarrow{AC}$ e $AB \cong AD$.

(a) Mostre que C está no interior de $\angle ABD$.

Demonstração. Primeiramente, temos que C está do mesmo lado que A em relação a $\overleftrightarrow{BD}$ pois a interseção entre $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ é o ponto D e vale que $A * C * D$, ou seja, não vale $A * D * C$. Similarmente, temos que C e D estão do mesmo lado em relação a $\overleftrightarrow{AB}$ e, assim, C está no interior de $\angle ABD$. $\square$

(b) Mostre que $\angle ABD \cong \angle ADB$.

Demonstração. Como B não está em $\overleftrightarrow{AC}$, podemos considerar o triângulo ΔABD, que é isósceles e, assim, pelo Teorema do Triângulo Isósceles (Proposição 5.7), segue que $\angle ABD \cong \angle ADB$. $\square$

(c) Mostre que $\angle ABC < \angle ADB$.

Demonstração. Como, pelo item (a), C está no interior de $\angle ABD$, vale que $\angle ABC < \angle ABD$. Agora, segundo o item (b), $\angle ABD \cong \angle ADB$ o que, de acordo com a Proposição 7.11, implica que $\angle ABC < \angle ADB$. $\square$

(d) Mostre que $\angle ABC < \angle BCA$.

Demonstração. Considere o triângulo ΔBCD, uma vez que B não está em $\overleftrightarrow{CD}$. Como $A * C * D$, temos que $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CD}$ são opostas e $\angle BCA$ é suplementar a $\angle BCD$. Logo, $\angle BCA$ é um ângulo externo de ΔBCD adjacente a $\angle BCD$ e, pelo Teorema 7.18, vale que $\angle CDB < \angle BCA$. Mas, já que $A \in \overrightarrow{DC}$, $\angle CDB = \angle ADB$. Portanto, temos $\angle ABC < \angle ADB$ (item (c)) e $\angle ADB < \angle BCA$, de modo que a Proposição 7.12 nos garante que $\angle ABC < \angle BCA$. $\square$

Problema 47: Sejam A, B, C e D pontos tais que B e D estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{AC}$, $DC \cong AB$ e $AD \cong BC$.

(a) Mostre que $\Delta ACD \cong \Delta CAB$.

Demonstração. Primeiramente, note que, por hipótese, B e D não estão na reta $\overleftrightarrow{AC}$ e, com isso, podemos formar os triângulos ΔACD e ΔCAB. Agora, temos que $AC \cong AC = CA$, por (C2), $CD = DC \cong AB$ e $DA = AD \cong BC$ e, portanto, a congruência LLL (Teorema 6.9) nos garante que $\Delta ACD \cong \Delta CAB$. $\square$

(b) Mostre que as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são paralelas, assim como são $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.

Demonstração. Considere as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, sendo cortadas pela reta $\overleftrightarrow{AC}$ nos pontos A e B, respectivamente. Pela congruência $\Delta ACD \cong \Delta CAB$, temos que $\angle ACD \cong \angle CAB$ e esses ângulos formam um par de ângulos alternos internos, de modo que a Proposição 7.26 nos permite concluir que $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são paralelas.

Similarmente, se consideramos as retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ cortadas pela reta transversal $\overleftrightarrow{AC}$ nos pontos A e C, respectivamente, a congruência $\Delta ACD \cong \Delta CAB$ nos dá que $\angle DAC \cong \angle BCA$, que formam um par de ângulos alternos internos. Novamente, a Proposição 7.26 nos garante que $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas. $\square$