Soluções Problemas para a Prova 2 - Desenho Geométrico 1

Os problemas resolvidos serão apenas os problemas contidos no arquivo MateriaP2.pdf, embora a numeração utilizada, tanto nos resultados utilizados, quanto nos problemas, será a numeração das Notas de Aula.

Problema 15: Seja r uma reta e sejam A, B e C três pontos colineares que não estão em r. Mostre que, se r atravessa algum dos três segmentos determinados pelos pontos dados, então r atravessa também um, e apenas um, dos outros dois segmentos.

Demonstração. Suponha inicialmente que r atravesse o segmento AB. Então, A e B estão em lados opostos de r. Se C está do mesmo lado que A em relação a r, temos, pela Proposição 4.11, que C e B estão em lados opostos com relação a r e, portanto, r atravessa BC, mas não atravessa AC. Por outro lado, se C estiver no lado oposto a A, como B também está no lado oposto a A, pela Proposição 4.11, vale que B e C estão do mesmo lado com relação a r. Assim, r atravessa AC, mas não atravessa BC.
Analogamente, prova-se o desejado quando r atravessa BC ou quando r atravessa AC. $\square$

Problema 16: Mostre que as duas condições $A * B * D$ e $A * C * D$ podem ser satisfeitas sem que valha $A * B * C * D$, mesmo quando $B \neq C$.

Demonstração. Temos que, se vale $A*C*B*D$, então $A*B*D$ e $A*C*D$ são satisfeitas. Por exemplo, no plano cartesiano, se tomamos $A = (0,0), B = (0,2), C = (0,1)$ e $D = (0,3)$, obtemos que $A*C*B*D$. $\square$

Problema 17: Mostre que as condições $A * B * D, A * C * D$ e $B \neq C$ implicam que vale $A * B * C$ ou $A * C * B$.

Demonstração. Por hipótese, temos que A, B e D são colineares e A, C e D também o são, de modo que A, B, C e D são colineares. Mostremos que não pode ocorrer $B * A * C$, o que, por (B3), implicará que deve valer $A * B * C$ ou $A * C * B$.
Se vale $B * A * C$, como vale $A * C * D$, pela Proposição 4.13, vale que $B * A * D$, o que contradiz $A * B * D$, por (B3), um absurdo. Portanto, não é possível que valha $B * A * C$. $\square$

Problema 18:

(a) Mostre que as condições $A * B * C, A * B * D$ e $C \neq D$ implicam que vale $A * C * D$ ou $A * D * C$.

Demonstração. Façamos a contrapositiva. Sejam A, B, C e D pontos colineares com $C \neq D$. Por (B3), é equivalente não valer $A * C * D$ ou $A * D * C$ a valer $C * A * D$. Por (B1), $C * A * D$ é equivalente a $D * A * C$.
Agora, se vale $C * A * D$ e $A * B * D$, temos, pela Proposição 4.12, que vale $C * A * B$, ou seja, não vale $A * B * C$. Por outro lado, se valem $D * A * C$ e $A * B * C$, segundo a Proposição 4.12, segue que $D * A * B$, ou seja, não vale $A * B * D$. Isso conclui o argumento. $\square$

(b) Mostre que as condições $A * B * C, A * B * D$ e $C \neq D$ implicam que vale $B * C * D$ ou $B * D * C$.

Demonstração. Pelo item (a), vale que $A * C * D$ ou $A * D * C$. No primeiro caso, temos $A * C * D$ e $A * B * C$, de modo que a Proposição 4.12 implica que $B * C * D$. No segundo caso, temos $A * D * C$ e $A * B * D$, de onde segue que, segundo a Proposição 4.12, vale $B * D * C$. $\square$

Problema 19: Mostre que, se $C \in \overrightarrow{AB}$ e $C \neq A$, então $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Demonstração. Basta mostrarmos que $\{\overleftrightarrow{AB}\} \setminus \overrightarrow{AB} = \{\overleftrightarrow{AB}\} \setminus \overrightarrow{AC}$ o que, pela Proposição 4.3, é equivalente a mostrar que, para um ponto Q em $\overleftrightarrow{AB}$, $Q * A * B$ ocorre se, e somente se, $Q * A * C$.
Suponha, primeiramente, que $Q * A * B$ ocorre. Como $C \in \overrightarrow{AB}$, vale ou $C = B$, ou $A * C * B$ ou $A * B * C$. O primeiro caso é trivial. Se vale $Q * A * B$ e $A * C * B$, a Proposição 4.12 implica que vale $Q * A * C$. Além disso, se vale $Q * A * B$ e $A * B * C$, pela Proposição 4.13, temos que $Q * A * C$.
Agora, suponha que $Q * A * C$ ocorra. Como antes, podemos ter $C = B$, $A * C * B$ ou $A * B * C$ e o primeiro caso é trivial. Se vale $A * C * B$ e $Q * A * C$, segue da Proposição 4.13 que $Q * A * B$ e, por fim, se ocorre $A * B * C$, como temos $Q * A * C$, pela Proposição 4.12, vale que $Q * A * B$. $\square$

Problema 20: Sejam r uma reta, P um ponto fora de r e Q um ponto distinto de P. Seja H o semiplano delimitado por r que contém P. Mostre que existe um ponto R distinto de P e pertencente a H tal que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR}$.

Demonstração. Pela separação do plano, pode ocorrer que Q esteja em r, que Q esteja no semiplano delimitado por r diferente de H ou que $Q \in H$. No último caso, basta tomar $R = Q$. No segundo caso, temos que existe um ponto Q' em r e em $PQ \setminus \{P, Q\} \subseteq \overrightarrow{PQ}$ o que, pelo Problema 19, implica que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ'}$. Considerando, então, Q' no lugar de Q caímos no primeiro caso. Pelo Axioma (B2), existe R tal que $P*R*Q'$ o que, pelo Problema 12, implica que $R \in H$. Além disso, o Problema 19 implica que $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ'}$, o que conclui o segundo caso e também resolve o primeiro. $\square$

Problema 21: Mostre que, se $A * B * C$, então o segmento AB está contido no segmento AC.

Demonstração. Por definição, já sabemos que $\{A, B\} \subseteq AC$. Seja agora P tal que $A*P*B$. Então, como vale $A*B*C$, pela Proposição 4.12, segue que $A*P*C$, ou seja $P \in AC$. Como $AB = \{A, B\} \cup \{P : A*P*B\}$, concluímos o desejado. $\square$

Problema 22: Mostre que, se $A * B * C$, então a semirreta $\overrightarrow{BC}$ está contida na semirreta $\overrightarrow{AC}$.

Demonstração. Temos que $\overrightarrow{BC} = BC \cup \{P : B*C*P\}$ e, pelo Problema 21, vale que $BC = CB \subseteq CA \subseteq \overrightarrow{AC}$. Agora, se P é tal que $B*C*P$, então segundo a Proposição 4.13, como vale $A*B*C$, temos que $A*C*P$, ou seja, $P \in \overrightarrow{AC}$. $\square$

Problema 23: Sejam A, B, C, D pontos tais que $A \neq B, C \neq D$ e vale a igualdade de segmentos $AB = CD$. Mostre que os dois conjuntos de pontos $\{A, B\}$ e $\{C, D\}$ são idênticos.

Demonstração. Basta mostrar que é impossível, sem perda de generalidade, que $A * C * B$. De fato, se $AB = CD$, então os pontos A, B, C e D são colineares e, caso não tenhamos $\{A, B\} = \{C, D\}$, então algum dos pontos de um dos pares estará entre os dois do outro par.
Suponha, então que vale $A*C*B$. Temos, por (B3), cinco possibilidades mutualmente excludentes para D: $D = A$, $D = B$, $D * A * B$, $A * D * B$ ou $A * B * D$. Sem perda de generalidade, basta considerar $D = A$, $D * A * B$ ou $A * D * B$. No primeiro caso, teríamos que $D * C * B$, isto é, $B \notin CD$, de modo que não vale $AB = CD$, um absurdo. No segundo caso, pela Proposição 4.12, $D * A * B$ e $A * C * B$ implicam que $D * C * B$, ou seja, novamente, $B \notin CD$, uma contradição. Por fim, no último caso, teríamos $A * D * B$ e $A * C * B$ o que, segundo o Problema 17, resulta em $A * C * D$ ou $A * D * C$ e, de qualquer forma, $A \notin CD$, um absurdo. $\square$

Problema 24: Seja H um semiplano delimitado pela reta r. Mostre que, se $A, B \in H$ e $A * P * B$, então $P \in H$.

Demonstração. Como $A, B \in H$, segue imediatamente que P não está em r. Agora, se P estivesse do outro lado de r, com relação a A, existiria Q em r e tal que $A * Q * P$. Mas, pela Proposição 4.12, como $A * P * B$, isso implicaria que $A * Q * B$, o que seria uma contradição com $A, B \in H$. Logo, pela separação do plano, vale que $P \in H$. $\square$

Problema 25: Supondo válidos os três axiomas de incidência e os quatro axiomas de ordenamento até aqui enunciados, mostre que toda reta passa por infinitos pontos.

Demonstração. Sejam r uma reta e s uma reta concorrente a r, que existe como consequência da Proposição 2.6. Por (B4), temos que r é separada em dois semiplanos. Sejam H um desses semiplanos, o qual contém ao menos um ponto de r, P na interseção de r e s e A_1 em r e em H.
Pelo Axioma (B2), existe A_2 em r tal que $P * A_1 * A_2$ e, segundo o Problema 12, $A_2 \in H$. Indutivamente, assuma construídos até o ponto A_n, para algum $n > 1$, com $P * A_k * A_n$, para todo $1 \leq k < n$. Novamente pelo Axioma (B2), existe A_{n+1} em r tal que $P * A_n * A_{n+1}$. Além disso, como $A_n \in H$, pela Hipótese de Indução, vale, segundo o Problema 12, que $A_{n+1} \in H$. Também segue que $P * A_k * A_n$ e $P * A_n * A_{n+1}$ implica que $P * A_k * A_{n+1}$, para todo $1 \leq k < n$.
Dessa forma, obtemos uma quantidade infinita de pontos de r em H, uma vez que cada passo da indução adiciona um ponto distinto de todos os anteriores, pela propriedade $P * A_k * A_n$. Em particular, r tem infinitos pontos. $\square$

Problema 26: Dada uma semirreta $\overrightarrow{AB}$, tome C tal que $C * A * B$. Seja D um ponto na reta $\overleftrightarrow{AB}$ distinto de A. Mostre que $D \in \overrightarrow{AB}$ se, e somente se, $C * A * D$.

Demonstração. Assuma inicialmente que $D \in \overrightarrow{AB}$. Se $D = B$, então já temos por hipótese que $C * A * D$. Se vale $A * D * B$, então pela Proposição 4.12, vale que $C * A * D$ e, se vale $A * B * D$, a Proposição 4.13 implica que $C * A * D$.
Agora, suponha que $D \notin \overrightarrow{AB}$. Segundo a Proposição 4.15, como D está em $\overleftrightarrow{AB}$, temos $D \in \overrightarrow{AC}$, ou seja, $D = C$ ou $A * D * C$ ou $A * D * C$. De qualquer forma, não vale $C * A * D$, pelo Axioma (B3). Com isso, demonstramos a "volta"pela contrapositiva. $\square$

Problema 27: Sejam D e E dois pontos pertencentes à semirreta $\overrightarrow{AB}$ e F um ponto tal que $D * F * E$. Mostre que F também pertence a $\overrightarrow{AB}$.

Demonstração. Suponha que $D, E \in \overrightarrow{AB}$ são pontos distintos e que $F \notin \overrightarrow{AB}$ é colinear a D e E. Então, temos que $F * A * B$. Sabemos que $D, E \in \overrightarrow{AB}$ e, portanto, pelo Problema 26, vale que $F * A * D$ e $F * A * E$. Agora, segundo o Problema 18, item (a), isso implica que vale $F * D * E$ ou $F * E * D$. Mas, por (B3), segue que não vale $D * F * E$, de onde concluímos o desejado. $\square$

Problema 28: Sejam D e E dois pontos pertencentes ao segmento AB e F tal que $D * F * E$. Mostre que F também pertence a AB.

Demonstração. Temos, de acordo com a Proposição 4.4, que $D, E \in AB = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$. Aplicando o Problema 27 para ambas as semirretas, concluímos que $F \in \overrightarrow{AB}$ e $F \in \overrightarrow{BA}$, ou seja, $F \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = AB$. $\square$

Problema 29: Sejam O, X e X' pontos tais que $X * O * X'$ e r a reta que os contém. Mostre que, se C e C' são pontos distintos de r, $C \neq O \neq C'$, tais que $C \in \overrightarrow{OX}$ e $C' \in \overrightarrow{OX'}$, então vale $C * O * C'$.

Demonstração. Sabemos que $C \in \overrightarrow{OX} \setminus \{O\} = \{X\} \cup \{P : O * P * X\} \cup \{P : O * X * P\}$. Suponha, primeiramente, que $C = X$. Se $C' = X'$, já temos por hipótese que $C * O * C'$. Se vale $O * C' * X'$, temos que $C * O * X'$ implica, pela Proposição 4.12, que $C * O * C'$. Se vale $O * X' * C'$, similarmente, pela Proposição 4.13, vale que $C * O * C'$. De maneira análoga, todos os casos em que $C' = X'$ já foram contemplados.
Agora, suponha que temos $O * C * X$, ou ainda, $X * C * O$, de onde segue, pela Proposição 4.12, que temos $X * C * O * X'$. Se vale $O * C' * X'$, então $C * O * X'$ implica, segundo a Proposição 4.12, que $C * O * C'$. Se vale $O * X' * C'$, segue da relação $C * O * X'$ e da Proposição 4.13 que $C * O * C'$. Similarmente, todos os casos em que $O * C' * X'$ nos permitem chegar à conclusão desejada.
Finalmente, resta considerar apenas $O * X * C$ e $O * X' * C'$. De acordo com a Proposição 4.13, $C * X * O$ (B1) e $X * O * X'$ implicam que vale $C * O * X'$ e disso junto de $O * X' * C'$ decorre, novamente pela Proposição 4.13, que $C * O * C'$. $\square$

Problema 30: Suponha que as semirretas distintas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não sejam opostas. Mostre que A, B e C não são colineares.

Demonstração. Suponha que A, B e C sejam colineares e distintos. Segundo o Axioma (B3), vale que $A * B * C$, $A * C * B$ ou $C * A * B$. Nos primeiros dois casos, temos ou $B \in \overrightarrow{AC}$ ou $C \in \overrightarrow{AB}$, de onde concluímos, a partir do Problema 19, que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, ou seja, as semirretas não são distintas. Já no último caso, segue da Proposição 4.16 que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são opostas. Com isso, fica provada a contrapositiva. □

Problema 31: Mostre que toda semirreta possui uma única semirreta oposta.

Demonstração. Seja $\overrightarrow{AB}$ uma semirreta. Pelo Axioma (B2), existe C tal que $C * A * B$, de onde, pela Proposição 4.16, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$ são semirretas opostas. Se $\overrightarrow{AD}$ é uma semirreta oposta a $\overrightarrow{AB}$, em particular, D não pertence a $\overrightarrow{AB}$, pois isso implicaria $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}$, pelo Problema 19. Portanto, pelo Problema 26, não vale $C * A * D$ o que, por (B3), significa que ou $C = D$ ou $A * C * D$ ou $A * D * C$. De qualquer forma, vale que $D \in \overrightarrow{AC}$, ou seja, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$, pelo Problema 19. □

Problema 32: Mostre que o ponto E, distinto de B, pertence à semirreta oposta a $\overrightarrow{BA}$ se, e somente se, $A * B * E$.

Demonstração. Seja $\overrightarrow{BC}$ a semirreta oposta a $\overrightarrow{BA}$. Pela Proposição 4.16, vale que $A * B * C$. Além disso, temos que $E \in \overrightarrow{BC} \setminus \{B\} = \{C\} \cup \{P : B * P * C\} \cup \{P : B * C * P\}$. Se $E = C$, imediatamente vale que $A * B * E$. Se $B * E * C$, temos que $A * B * C$ implica, pela Proposição 4.12, que $A * B * E$. Se $B * C * E$, temos, a partir da Proposição 4.13 e $A * B * C$ que $A * B * E$. □

Problema 33: Suponha que $B * A * C$. Mostre que $AC \cap AB = \{A\}$.

Demonstração. Claramente, $\{A\} \subseteq AC \cap AB$. Temos que $AC \subseteq \overrightarrow{AC}$ e $AB \subseteq \overrightarrow{AB}$, de onde segue, pela Proposição 4.17, que

$$\{A\} = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{AC} \supseteq AB \cap AC.$$ □

Problema 34: Seja D um ponto de $\overleftrightarrow{BC}$. Mostre que D pertence ao interior do ângulo $\angle BAC$ se, e somente se, $B * D * C$.

Demonstração. Suponha que não vale $B * D * C$. Se $D = B$ ou $B = C$ então D está em uma das retas $\overleftrightarrow{AB}$ ou $\overleftrightarrow{AC}$ e, portanto, não está no interior de $\angle BAC$. Se $C * B * D$, então o ponto B está tanto no segmento CD quanto na reta $\overleftrightarrow{AB}$, ou seja, C e D estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{AB}$. Similarmente, se vale $D * C * B$, temos que o ponto C em $\overleftrightarrow{AC}$ e em BD testemunha que D e B estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{AC}$. Assim, temos que D não está no interior de $\angle BAC$ em ambos os casos.
Agora, se vale $B * D * C$, então o ponto C, que é o único ponto em comum entre $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ está fora de BD, ou seja, B e D estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$. Além disso, o ponto B, que é o único ponto em comum entre $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ está fora do segmento CD, isto é, D e C estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AB}$. Assim, D está no interior de $\angle BAC$. □

Problema 35: Seja D um ponto do interior do ângulo $\angle BAC$. Mostre que todos os pontos da semirreta $\overrightarrow{AD}$ distintos de A também estão no interior de $\angle BAC$.

Demonstração. Se $P \in \overrightarrow{AD} \setminus \{A\}$, então $P = D$ ou $A * P * D$ ou $A * D * P$. Temos que a reta $\overleftrightarrow{AD}$ intercepta as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ apenas no ponto A, ou seja, em qualquer um dos casos, segue que P está do mesmo lado que D, com relação a ambas as retas. Como D está do mesmo lado que C com relação a $\overleftrightarrow{AB}$ e do mesmo lado que B com relação a $\overleftrightarrow{AC}$, segue da Proposição 4.11 que P está do mesmo lado que C com relação a $\overleftrightarrow{AB}$ e do mesmo lado que B com relação a $\overleftrightarrow{AC}$, isto é, P está no interior de $\angle BAC$. □

Problema 36: Suponha que $A * B * C$ na reta r e que $A * D * E$ na reta s, $s \neq r$. Mostre que os segmentos BE e CD se interceptam em um ponto M e que M pertence aos interiores dos ângulos $\angle CAE, \angle ACE$ e $\angle AEC$.

Demonstração. Sabemos que $\overleftrightarrow{CD}$ intercepta $r = \overleftrightarrow{AC}$ apenas em C e que $A * B * C$, ou seja, A e B estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{CD}$. Além disso, $\overleftrightarrow{CD}$ intercepta $s = \overleftrightarrow{AD}$ em D e $A * D * E$, de modo que A e E estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{CD}$. Assim, pela Proposição 4.11, vale que B e E estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{CD}$ e, portanto, existe M com $B * M * E$ e M em $\overleftrightarrow{CD}$.
Similarmente, temos que $\overleftrightarrow{BE}$ intercepta $s = \overleftrightarrow{AE}$ apenas em E e que $A * D * E$, ou seja, A e D estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{BE}$. Além disso, $\overleftrightarrow{BE}$ intercepta $r = \overleftrightarrow{AB}$ em B e $A * B * C$, de modo que A e C estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{BE}$. Assim, pela Proposição 4.11, vale que C e D estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{BE}$ e, portanto, existe N com $C * N * D$ e N em $\overleftrightarrow{BE}$. Como as retas $\overleftrightarrow{BE}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são distintas (caso contrário, teríamos $r = s$), segue que sua interseção é única, isto é, $N = M$.
Temos que $\overleftrightarrow{EM} = \overleftrightarrow{EB}$ intercepta $\overleftrightarrow{AC} = r$ em B e que $E * M * B$, ou seja, M e E estão do mesmo lado de r. Também temos que $\overleftrightarrow{CM} = \overleftrightarrow{CD}$ intercepta $\overleftrightarrow{AE} = s$ em D e $C * M * D$, ou seja, C e M estão do mesmo lado de s. Portanto, M está no interior de $\angle CAE$.
Vimos que $C * D * M$ e, em particular, $M \in \overrightarrow{CD} \setminus \{C\}$. Mas como $A * D * E$, E é a única interseção de $\overleftrightarrow{CE}$ e $\overleftrightarrow{AD} = s$ e A é a única interseção de $\overleftrightarrow{CA}$ e $\overleftrightarrow{DE} = s$, vale que D está no interior de $\angle ACE$. Assim, pelo Problema 35, vale que M está no interior de $\angle ACE$.
Finalmente, temos que $E * M * B$ e, em particular $M \in \overrightarrow{EB} \setminus \{E\}$. Mas como $A * B * C$, C é a única interseção de $\overleftrightarrow{CE}$ e $\overleftrightarrow{AB} = r$ e A é a única interseção de $\overleftrightarrow{EA}$ e $\overleftrightarrow{CB} = r$, vale que B está no interior de $\angle AEC$. Assim, pelo Problema 35, vale que M está no interior de $\angle AEC$. □

Problema 37: Mostre que a adição de classes de congruência de segmentos é comutativa.

Demonstração. Sejam AB e CD segmentos. Pela Proposição 5.2, existem únicos E com $A * B * E$ e F com $C * D * F$ tais que $BE \cong CD$ e $DF \cong AB$. Assim, temos que

$$[AB] + [CD] = [AE] \qquad \text{e} \qquad [CD] + [AB] = [CF].$$

Por (B1), temos que $F * D * C$ e temos $FD = DF \cong AB$ e $DC = CD \cong BE$, pela Proposição 5.1. Portanto, o Axioma (C3) implica que $AE \cong FC = CF$, ou seja,

$$[AB] + [CD] = [AE] = [CF] = [CD] + [AB].$$

□

Problema 38: Mostre que a congruência de triângulos é uma relação de equivalência.

Demonstração. Primeiramente, seja ΔABC um triângulo. Por (C2), temos que $AB \cong AB$, $AC \cong AC$ e $BC \cong BC$ e, por (C5), vale que $\angle BAC \cong \angle BAC$, $\angle ABC \cong \angle ABC$ e $\angle ACB \cong \angle ACB$, ou seja, temos que $\Delta ABC \cong \Delta ABC$, isto é, a relação de congruência de triângulos é reflexiva.
Agora sejam $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ dois triângulos. Temos então $AB \cong DE$, $BC \cong EF$ e $CA \cong FD$, de onde segue, pela Proposição 5.1, que $DE \cong AB$, $EF \cong BC$ e $FD \cong CA$. Além disso, temos que $\angle BAC \cong \angle EDF$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ e $\angle ACB \cong \angle DFE$, de onde, segundo a Proposição 5.3, vale que $\angle EDF \cong \angle BAC$, $\angle DEF \cong \angle ABC$ e $\angle DFE \cong \angle ACB$. Portanto, vale que $\Delta DEF \cong \Delta ABC$, ou seja, a relação de congruência de triângulos é simétrica.
Por fim, sejam três triângulos $\Delta ABC \cong \Delta DEF$, ou, pelo parágrafo anterior, $\Delta DEF \cong \Delta ABC$, e $\Delta DEF \cong \Delta GHI$. Temos, da primeira congruência, que $DE \cong AB$, $EF \cong BC$ e $FD \cong CA$ e, da segunda congruência, $DE \cong GH$, $EF \cong HI$ e $FD \cong IG$. Logo, segue do Axioma (C2) que $AB \cong GH$, $BC \cong HI$ e $CA \cong IG$. Similarmente, também temos que, de $\Delta DEF \cong \Delta ABC$, $\angle EDF \cong \angle BAC$, $\angle DEF \cong \angle ABC$ e $\angle DFE \cong \angle ACB$ e, de $\Delta DEF \cong \Delta GHI$, que $\angle EDF \cong \angle HGI$, $\angle DEF \cong \angle GHI$ e $\angle DFE \cong \angle GIH$. Assim, pelo Axioma (C5), vale que $\angle BAC \cong \angle HGI$, $\angle ABC \cong \angle GHI$ e $\angle ACB \cong \angle GIH$. Consequentemente, de todas essas congruências, vale que $\Delta ABC \cong \Delta GHI$, ou seja, a relação de congruência de triângulos é transitiva. □

Problema 39: Suponha que é válida a afirmação (**C6'**). Sejam ΔABC e $\Delta A'B'C'$ triângulos satisfazendo $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ e $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$. Mostre que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

Demonstração. Pelo Axioma (C6'), vale que $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$. Tome, por (C1), o único $X \in \overrightarrow{C'B'}$ com $C'X \cong CB$ e considere $\Delta A'C'X$. Temos que $C'A' = A'C' \cong AC = CA$, $C'X' \cong CB$ e, como as semirretas $\overrightarrow{C'B'}$ e $\overrightarrow{C'X}$ são iguais pelo Problema 19, $\angle A'C'X = \angle A'C'B' \cong \angle ACB$, de onde segue, aplicando o Axioma (C6') novamente, que $\angle C'A'X \cong \angle CAB \cong \angle C'A'B'$. Pela unicidade do Axioma (C4), teremos que as semirretas $\overrightarrow{A'X}$ e $\overrightarrow{A'B'}$ serão as mesmas e, assim, como X e B' estão em $\overleftrightarrow{C'B'}$, vale que $X = B'$.
Portanto, temos que $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$, $BC \cong B'C'$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ e $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$. Aplicando mais uma vez o Axioma (C6'), a partir das relações $AC \cong A'C', AB \cong A'B'$ e $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$, concluímos que $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ e, finalmente, $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. □

Problema 40: Sejam A, B e C três pontos não-colineares. Mostre que, se $\angle ABC \cong \angle ACB$, então $AB \cong AC$.

Demonstração. Temos, por (C2), que $BC \cong BC = CB$. Além disso, $\angle ABC \cong \angle ACB$ e, pela Proposição 5.3, $\angle ACB \cong \angle ABC$. Assim, segundo o critério ALA para congruência de triângulos, vale que $\Delta ABC \cong \Delta ACB$. Em particular, $AB \cong AC$. □

Problema 41: Mostre que o triângulo ΔABC é equilátero se, e somente se, ele é equiângulo.

Demonstração. Suponha inicialmente que ΔABC é equilátero, ou seja, $AB \cong BC \cong AC$. De $AB \cong BC$, vale, pela Proposição 5.7, que $\angle BAC \cong \angle BCA$ e, similarmente, de $AB \cong AC$, decorre que $\angle ABC \cong \angle ACB = \angle BCA$. Portanto, temos $\angle BAC \cong \angle BCA \cong \angle ABC$, ou seja, como a congruência de ângulos é uma relação de equivalência, vale que ΔABC é equiângulo.
Suponha agora ΔABC equiângulo, isto é, $\angle ABC \cong \angle ACB \cong \angle BAC$. De $\angle ABC \cong \angle ACB$, temos, pelo Problema 40, que $AB \cong AC$ e, similarmente, de $\angle ACB \cong \angle BAC$, decorre que $AB = BA \cong BC$. Logo, temos $AC \cong AB \cong BC$, ou seja, concluímos que ΔABC é equilátero, uma vez que a congruência de segmentos é uma relação de equivalência. □