Soluções Problemas para a Prova 1 - Desenho Geométrico 1

Problema 1: Dado um ponto P, existem pelo menos duas retas que passam por P.

Demonstração. Pelo Axioma (I3), existem três pontos não colineares A, B e C. Temos duas possibilidades: ou P é um desses três pontos ou não. No primeiro caso, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $P = A$. Assim, as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são duas retas distintas (pois A, B e C são não colineares) que passam por $P = A$. Já no segundo caso, considere primeiramente $\overleftrightarrow{AP}$. Como A, B e C são não colineares, ao menos um dos pontos B ou C não estão na reta $\overleftrightarrow{AP}$. Assumindo que esse ponto é B, sem perda de generalidade, as retas $\overleftrightarrow{AP}$ e $\overleftrightarrow{BP}$ são duas retas distintas que passam por P. $\square$

Problema 2: Dado um ponto P, existem pontos Q e R tais que P, Q e R não são colineares.

Demonstração. Segundo o Problema 1, existem retas r e s que passam por P e são distintas. Além disso, pelo Axioma (I2), em cada uma dessas retas existe um ponto distinto de P. Chamemos de Q o ponto distinto de P em s e de R o ponto distinto de P em r. Como as retas r e s têm interseção apenas no ponto P, pela Proposição 2.2, temos que $Q \neq R$. Além disso, se P, Q e R fossem colineares, teríamos $r = s$, um absurdo. Portanto, P, Q e R satisfazem o desejado. $\square$

As soluções para os Problemas 3 e 4 podem ser encontradas na seção 6 das notas da Matéria da P1, disponibilizadas pelo prof. Severino Toscano.

Problema 5: Exiba três retas, r, s e t no plano de Poincaré tais que r é paralela a s, s é paralela a t e r e t são concorrentes.

Solução. Considere $r = L_{0,1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1,\ y > 0\}$, $s = L_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1,\ y > 0\}$ e $t = L_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y > 0\}$. Temos que

(i) r é paralela a s, pois, para que $(x, y) \in r \cap s$, então $x = 1$. Mas

$$1 = y^2 + x^2 = y^2 + 1,$$

não tem solução com $y > 0$, ou seja, $r \cap s = \emptyset$;

(ii) s é paralela a t, pois não existe ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ com $x = 1$ e $x = 0$;

(iii) r e t são concorrentes, uma vez que o ponto $P = (0, 1) \in r \cap t$. De fato, P tem sua segunda coordenada maior que 0, sua primeira coordenada é igual a 0, de modo que $P \in t$ e $0^2 + 1^2 = 1$, ou seja $P \in r$.

Problema 6: Mostre que:

(a) na geometria de três pontos não existem retas paralelas;

Demonstração. Denotemos o conjunto de pontos da geometria de três pontos por A, B e C. Então, as retas nessa geometria são os conjuntos $r = \{A, B\}$, $s = \{B, C\}$ e $t = \{A, C\}$, de modo que r e s se interceptam em B, r e t se interceptam em A e s e t se interceptam em C. Assim, não existem retas paralelas. $\square$

(b) na geometria de quatro pontos, dadas uma reta r e um ponto P que não está em r, existe uma única reta paralela a r passando por P;

Demonstração. Sabemos que, na geometria de quatro pontos, as retas são conjuntos formados por exatamente dois pontos. Sem perda de generalidade, escrevamos $r = \{A, B\}$, com A e B distintos de P, já que P não está em r. Denotemos o outro ponto dessa geometria por Q, ie, Q é distinto de A, B e P. Assim, temos as retas que passam por P como os conjuntos $\{A, P\}, \{B, P\}$ e $\{P, Q\}$. As duas primeiras retas interceptam r em A e B, respectivamente, enquanto que a reta $\{P, Q\}$ é paralela a r, sendo portanto a única reta que passa por P e é paralela a r. □

(c) na geometria de cinco pontos, dadas uma reta r e um ponto P que não está em r, existem pelo menos duas retas paralelas a r passando por P.

Demonstração. Sabemos que, na geometria de cinco pontos, as retas são conjuntos formados por exatamente dois pontos. Sem perda de generalidade, escrevamos $r = \{A, B\}$, com A e B distintos de P, já que P não está em r. Denotemos os outros pontos dessa geometria por Q e S, ie, A, B, P, Q e S são todos pontos distintos.
Assim, temos as retas que passam por P como os conjuntos $\{A, P\}, \{B, P\}$ e $\{P, Q\}$ e $\{P, S\}$. As duas primeiras retas interceptam r em A e B, respectivamente, enquanto que as retas $\{P, Q\}$ e $\{P, S\}$ são paralelas a r, sendo portanto duas retas que passam por P e são paralelas a r. □

Problema 7: Considere a seguinte interpretação da geometria de incidência: os pontos são os elementos do conjunto $S = \{A, B, C, D\}$, as retas são os seguintes subconjuntos de S: $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, D\}$ e $\{B, C, D\}$.

(a) Mostre que todos os axiomas de incidência são satisfeitos.

Demonstração. Os pontos A e B estão contidos apenas na reta $\{A, B\}$, os pontos A e C estão contidos apenas na reta $\{A, C\}$, os pontos A e D estão contidos apenas na reta $\{A, D\}$ e os pares de pontos B e C, B e D e C e D estão todos contidos apenas na reta $\{B, C, D\}$, de modo que (I1) é satisfeito.
As retas $\{A, B\}$, $\{A, C\}$ e $\{A, D\}$ possuem dois pontos e a reta $\{B, C, D\}$ possui três pontos, ou seja, (I2) é satisfeito.
Os pontos A, B e C não são colineares. De fato, as únicas retas que passam por B são $\{A, B\}$ e $\{B, C, D\}$ e a primeira não contém o ponto C, enquanto que a segunda não contém o ponto A. Assim, não existe uma reta que contenha os três pontos, isto é, (I3) é satisfeito. □

(b) Mostre que, neste modelo, não existem retas paralelas.

Demonstração. Denotemos as retas por $r = \{A, B\}$, $s = \{A, C\}$, $t = \{A, D\}$ e $u = \{B, C, D\}$. Então, os pares de retas r e s, r e t e s e t se interceptam todas no ponto A e as retas r, s e t interceptam a reta u nos pontos B, C e D, respectivamente, de modo que todos os pares de retas se encontram em algum ponto. □

Problema 8: Chame de pontos os elementos do conjunto $S = \{A, B, C, D\}$, chame de retas os seguintes subconjuntos de S: $\{A, B, D\}, \{B, C, D\}, \{A, C\}$ e diga que um ponto P está numa reta r se $P \in r$. Mostre que:

(a) dados dois pontos, existe uma reta passando por eles, mas nem sempre essa reta é única;

Demonstração. Os pontos A e B estão contidos apenas na reta $\{A, B, D\}$, os pontos A e C estão contidos apenas na reta $\{A, C\}$, os pontos A e D estão contidos apenas na reta $\{A, B, D\}$, os pares de pontos B e C e C e D estão contidos apenas na reta $\{B, C, D\}$ e os pontos B e D estão contidos tanto na reta $\{A, B, D\}$ quanto na reta $\{B, C, D\}$. □

(b) toda reta possui pelo menos dois pontos;

Demonstração. As retas $\{A, B, D\}$ e $\{B, C, D\}$ possuem três pontos cada e a reta $\{A, C\}$ possui dois pontos. □

(c) existem três pontos não colineares;

Demonstração. Os pontos A, B e C não são colineares. De fato, as únicas retas que passam por A são $\{A, B, D\}$ e $\{A, C\}$ e a primeira não contém o ponto C, enquanto que a segunda não contém o ponto B. Assim, não existe uma reta que contenha os três pontos. $\square$

(d) não existe um par de retas paralelas.

Demonstração. Denotemos as retas por $r = \{A, B, D\}$, $s = \{B, C, D\}$ e $t = \{A, C\}$. Então, as retas r e s se interceptam nos pontos B e D, as retas r e t se interceptam no ponto A e as retas s e t se interceptam no ponto C, de modo que todos os pares de retas se encontram em algum ponto. $\square$

Problema 9: Mostre que todos os pares de retas em um completamento projetivo são concorrentes.

Demonstração. Seja $\mathcal{M} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ um modelo da geometria de incidência que satisfaz o quinto Postulado de Euclides e denote por $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*)$ seu completamento projetivo, onde $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{\ell_\infty\}$. Sejam $r, s \in \mathcal{L}^*$.
Se $r, s \in \mathcal{L}$, temos duas possibilidades. Se r e s são concorrentes em $\mathcal{M}$, elas continuam sendo concorrentes no completamento projetivo, uma vez que o mesmo ponto que testemunhava a concorrência em $\mathcal{M}$ a testemunha no completamento. Agora se r é paralela a s em $\mathcal{M}$, então $r \sim s$, de modo que $[r] = [s]$. Além disso, por definição r passa por $[r]$ e s passa por $[s]$, de onde segue que r e s se encontram em $[r] = [s]$.
Se $\{r, s\} \not\subset \mathcal{L}$, então alguma das duas retas é ℓ_∞. Assuma, sem perda de generalidade que $s = \ell_\infty$. Então tanto r quanto s passam pelo ponto $[r]$, ou seja, elas são concorrentes. $\square$

Problema 10: Dados dois pontos A e B, mostre que $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \{\overleftrightarrow{AB}\}$.

Demonstração. Pelo Axioma (B1), temos que todos os pontos de $\overrightarrow{AB}$ e de $\overrightarrow{BA}$ estão na reta $\overleftrightarrow{AB}$, isto é, $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} \subseteq \{\overleftrightarrow{AB}\}$.
Por outro lado, já temos que A e B estão em $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$. Seja então P em $\overleftrightarrow{AB}$ distinto de A e B. Pelo Axioma (B3), vale que ou $A * P * B$, ou $P * A * B$ ou $A * B * P$. No primeiro caso, temos que $P \in AB \subset \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$. No segundo caso, temos que $P \in \overrightarrow{BA}$ e, no terceiro caso, $P \in \overrightarrow{AB}$. Assim, vale que todo P em $\overleftrightarrow{AB}$ pertence a $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$, isto é, $\{\overleftrightarrow{AB}\} \subseteq \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$, de onde concluímos o desejado. $\square$

Problema 11: Dados B e D em lados opostos da reta s, seja C a interseção das retas $\overleftrightarrow{BD}$ e s. Mostre que vale $B * C * D$.

Demonstração. Por definição, como B e D estão em lados opostos de s, vale que $B \notin H_D$, isto é, a reta s atravessa o segmento BD, ou seja, existe um ponto E em BD distinto de B e D tal que E está em s. Ora, mas por definição de BD, vale que $B * E * D$. Além disso, todos os pontos de BD estão também em $\overleftrightarrow{BD}$, de modo que E é um ponto comum a $\overleftrightarrow{BD}$ e a s. Pela Proposição 2.2, $E = C$ e, portanto, $B * C * D$. $\square$

Problema 12: Dados $A * B * C$, com C na reta s e A e B fora da reta s, mostre que A e B estão do mesmo lado de s.

Demonstração. Suponha o contrário, isto é, que A e B estão de lados opostos de s. Seja D a interseção das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e s. Pelo Problema 11, vale que $A * D * B$. Mas C também está na interseção das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e s, de modo que, como as retas são distintas, deve valer que $C = D$. Assim, teríamos $A * C * B$ e $A * B * C$, uma contradição com o Axioma (B3). $\square$

Problema 13: Sejam r uma reta, P um ponto em r e Q um ponto fora de r. Seja Z um ponto distinto de P na semirreta $\overrightarrow{PQ}$. Mostre que Z e Q estão do mesmo lado de r.

Demonstração. Sabemos que

$$\overrightarrow{PQ} = \{P, Q\} \cup \{R : P * R * Q\} \cup \{R : P * Q * R\}.$$

Primeiramente, temos que Q está do mesmo lado que Q, por definição. Agora, se vale que Z é tal que $P * Z * Q$, aplicando o resultado do Problema 12 para $C = P$, $B = Z$ e $A = Q$, obtemos que Z e Q estão do mesmo lado de r. Similarmente, se Z é tal que $P * Q * Z$, usando o Problema 12 para $C = P$, $B = Q$ e $A = Z$, concluímos que Q e Z estão do mesmo lado de r. □

Problema 14: Sejam r uma reta, P um ponto em r e Q e R pontos do mesmo lado de r. Mostre que, se R está em $\overleftrightarrow{PQ}$, então R é um ponto de $\overrightarrow{PQ}$.

Demonstração. Se $Q = R$, não há nada a ser provado. Agora, se Q e R são distintos, pelo Axioma (B3), vale que ou $P * Q * R$, ou $P * R * Q$ ou $Q * P * R$. Nos primeiros dois casos, temos que R está em $\overrightarrow{PQ}$. No terceiro caso, teríamos que P seria um ponto comum ao segmento QR e também à reta r, ou seja, Q e R estariam em lados opostos de r, um absurdo. Logo, só podem valer os dois primeiros casos, nos quais R está em $\overrightarrow{PQ}$. □