Solução Prova 3 - Desenho Geométrico 1

A numeração utilizada nos resultados utilizados será a numeração das Notas de Aula.

Questão 1: Considere os triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ e os pontos X e X' tais que $A * X * B$ e $A' * X' * B'$. Temos ainda: $AX \cong A'X'$, $XB \cong X'B'$, $BC \cong B'C'$ e $AC \cong A'C'$. Mostre que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

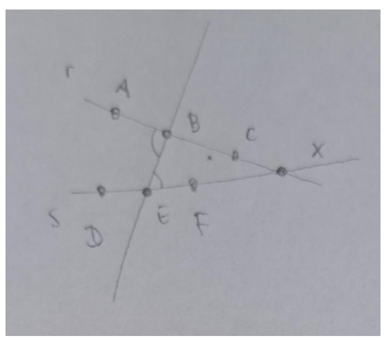
Demonstração. Por (C3), temos que $AB \cong A'B'$ e, portanto, utilizando o critério de congruência lado lado lado (Teorema 6.9), concluímos que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. □

Questão 2: Suponha que a reta t intercepta as duas retas r e s nos pontos B e E, respectivamente. Sejam A e C pontos de r, D e F pontos de s, tais que $A * B * C$ e $D * E * F$, A e D estão do mesmo lado de t, C e F estão do mesmo lado de t.
Mostre que, se r e s interceptam-se em um ponto X no mesmo lado de t que C e F, então $\angle BEF < \angle ABE$. Ilustre seu raciocínio com uma figura

Demonstração. Note inicialmente que X não está na reta t, uma vez que as retas r, s e t são distintas. Consideremos o triângulo ΔEBX. Como F e X estão do mesmo de t e estão na reta s, vale que $F, X \in \overrightarrow{EF} \backslash E$. Assim, vale que $\angle BEF = \angle BEX$. Similarmente, vale que $C, X \in \overrightarrow{BC}$, de modo que $\overrightarrow{BA}$ é a semirreta oposta a $\overrightarrow{BX}$ e $\angle ABE$ é um ângulo suplementar a $\angle EBX$. Consequentemente, pelo Teorema do Ângulo Externo (Teorema 7.18),

$$\angle BEF = \angle BEX < \angle ABE.$$

□



Questão 3: Sejam ΔABC e $\Delta A'B'C'$ triângulos tais que $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ e os ângulos $\angle BAC$ e $\angle B'A'C'$ são retos. Mostre que

(a) existe um ponto D tal que $D * A * C$ e $AD \cong A'C'$;

Demonstração. Pelo Axioma (C1), existe D na semirreta de $\overleftrightarrow{AC}$ oposta a $\overrightarrow{AC}$ tal que $AD \cong A'C'$. Assim, como D e C são distintos de A e estão em semirretas opostas, vale que $D * A * C$. □

(b) o ângulo $\angle BAD$ é reto;

Demonstração. Como as semirretas $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AC}$ e o ângulo $\angle BAC$ é reto, vale que seu ângulo suplementar $\angle BAD$ é também reto. □

(c) os triângulos ΔBAD e $\Delta B'A'C'$ são congruentes;

Demonstração. Vale que $AD \cong A'C'$, que $AB \cong A'B'$ e os ângulos $\angle BAD$ e $\angle B'A'C'$ são retos e, portanto, congruentes entre si (Teorema 7.17). Logo, pelo critério de congruência lado-ângulo-lado (Axioma C6) concluímos que $\Delta BAD \cong \Delta B'A'C'$. $\square$

(d) os ângulos $\angle BDA$ e $\angle BCA$ são congruentes;

Demonstração. Como consequência da congruência $\Delta BAD \cong \Delta B'A'C'$, segue que $BD \cong B'C'$. Além disso, temos também $B'C' \cong BC$ e, por (C2), vale que $BC \cong BD$. Assim, pelo Teorema do Triângulo Isósceles (Proposição 5.7), segue que $\angle BDA \cong \angle BCA$. $\square$

e os triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ são congruentes.

Demonstração. Pela congruência $\Delta BAD \cong \Delta B'A'C'$, vale que $\angle BDA \cong B'C'A'$ o que, utilizando que $\angle BDA \cong \angle BCA$ e o Axioma C5, implica que $\angle B'C'A' \cong BCA$. Portanto, temos as seguintes congruências: $BC \cong B'C'$, $\angle BCA \cong \angle B'C'A'$ e $\angle BAC \cong B'A'C'$ (Teorema 7.17), de onde segue, segundo o critério de congruência lado-ângulo-ângulo (Proposição 7.27), que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. $\square$

Problema 47: Sejam A, B, C e D pontos tais que B e D estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{AC}$, $DC \cong AB$ e $AD \cong BC$.

(a) Mostre que $\Delta ACD \cong \Delta CAB$.

Demonstração. Primeiramente, note que, por hipótese, B e D não estão na reta $\overleftrightarrow{AC}$ e, com isso, podemos formar os triângulos ΔACD e ΔCAB. Agora, temos que $AC \cong AC = CA$, por (C2), $CD = DC \cong AB$ e $DA = AD \cong BC$ e, portanto, a congruência LLL (Teorema 6.9) nos garante que $\Delta ACD \cong \Delta CAB$. $\square$

(b) Mostre que as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são paralelas, assim como são $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.

Demonstração. Considere as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, sendo cortadas pela reta $\overleftrightarrow{AC}$ nos pontos A e B, respectivamente. Pela congruência $\Delta ACD \cong \Delta CAB$, temos que $\angle ACD \cong \angle CAB$ e esses ângulos formam um par de ângulos alternos internos, de modo que a Proposição 7.26 nos permite concluir que $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são paralelas.
Similarmente, se consideramos as retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ cortadas pela reta transversal $\overleftrightarrow{AC}$ nos pontos A e C, respectivamente, a congruência $\Delta ACD \cong \Delta CAB$ nos dá que $\angle DAC \cong \angle BCA$, que formam um par de ângulos alternos internos. Novamente, a Proposição 7.26 nos garante que $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas. $\square$