

1. ALGUMAS DEFINIÇÕES

Definição 1.1. Dados dois pontos A e B , o segmento de extremidades A e B , que denotaremos por AB , é o conjunto de pontos que consiste de: A , B e de todos os pontos que estão entre A e B .

Definição 1.2. Dados dois pontos A e B , a semirreta $\overrightarrow{AB}$ é o conjunto dos pontos P da reta $\overleftrightarrow{AB}$ tais que P pertence ao segmento AB ou B está entre A e P . Diremos então que A é o vértice da semirreta, ou que a semirreta se origina em A .

Definição 1.3. As semirretas distintas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são opostas se $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são iguais.

Definição 1.4. Um ângulo com vértice em A é a união de duas semirretas não opostas que se originam em A . As duas semirretas são chamadas de lados do ângulo. Denotamos por $\angle BAC$ ou $\angle CAB$ o ângulo formado pelas semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Definição 1.5. Os dois ângulos $\angle BAD$ e $\angle DAC$ são suplementares se as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são opostas.

Definição 1.6. Um ângulo é reto se é congruente a um ângulo suplementar a ele.

Definição 1.7. Duas retas r e s são paralelas se nunca se encontram, ou seja, se nenhum ponto está simultaneamente em r e em s .

2. AXIOMAS DE INCIDÊNCIA

São apenas três os termos ou frases adotados sem definição na geometria de incidência plana: (1) ponto, (2) reta, (3) um ponto está em uma reta. A partir desses termos *primitivos*, outros termos podem ser definidos: (1) uma reta r passa por P se P está em r , (2) os pontos $P, Q, R, \dots$ são *colineares* se existe uma reta r na qual eles todos estão, (3) as retas $r, s, t, \dots$ são *concorrentes* se existe um ponto P que está em todas elas, (4) duas retas são *paralelas* se não são concorrentes.

(I1) Dados dois pontos P e Q , existe uma única reta r que passa por P e por Q .

(I2) Dada uma reta r , existem pelo menos dois pontos que estão em r .

(I3) Existem pelo menos três pontos não colineares.

A reta r determinada por P e Q será denotada por $\overleftrightarrow{PQ}$ ou $\overleftrightarrow{QP}$.

Proposição 2.1. O ponto R , distinto de P , está em $\overleftrightarrow{PQ}$ se e somente se $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{PR}$.

Dadas duas retas concorrentes r e s , se P é o único ponto que está simultaneamente em r e s , então diremos que P é o *ponto de interseção* de r e s .

Proposição 2.2. Existem três retas não-concorrentes; isto é existem três retas r, s e t tal que não existe um ponto P que esteja em r , em s e em t simultaneamente.

Proposição 2.3. Dada uma reta r , existe pelo menos um ponto P que não está em r .

Proposição 2.4. Dado um ponto P , existe pelo menos uma reta que não passa por P .

Proposição 2.5. Dado um ponto P , existem pelo menos duas retas que passam por P .

Problema 1. Mostre que, dado um ponto P , existem pontos Q e R tais que P, Q e R não sejam colineares.

3. MODELOS

Dado um sistema axiomático, tal como a Geometria de Incidência, uma *interpretação* do sistema é a atribuição de significados aos termos adotados sem definição. Se os axiomas, com essa interpretação, são afirmações verdadeiras, essa interpretação é um *modelo*.

Plano de Descartes. Os pontos são os elementos de $\mathbb{R}^2$. As retas são os subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ da forma

$$L_{a,b,c} := \{(x, y); ax + by = c\}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad (a, b) \neq (0, 0).$$

Um ponto P está na reta r se $P \in r$. As Proposições 3.1 e 3.2, enunciadas e demonstradas a seguir, expressam que, para esta interpretação, os axiomas (I1) e (I2) são satisfeitos. Os pontos $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ e $C = (0, 1)$ não são colineares pois $\overleftrightarrow{AB}$ é a reta de equação $y = 0$, que não passa pelo ponto C ; ou seja, também o Axioma I3 é satisfeito. Tudo junto, isso mostra que o *plano cartesiano* é um modelo da Geometria de Incidência.

Proposição 3.1. *Dados dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em $\mathbb{R}^2$, existe uma única reta r que passa por (x_1, y_1) e (x_2, y_2) .*

Proposição 3.2. *Toda reta do Plano de Descartes possui pelo menos dois pontos.*

Problema 2. Mostre que, no Plano de Descartes, dada uma reta r e dado um ponto P fora de r , existe uma única reta paralela a r passando por P .

Plano de Poincaré. Os pontos são os elementos do conjunto $P := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$. As retas são os subconjuntos de P da forma L_a , $a \in \mathbb{R}$, ou $L_{a,r}$, $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$, definidos por

$$L_a := \{(x, y) \in P; x = a\}, \quad L_{a,r} := \{(x, y) \in P; (x - a)^2 + y^2 = r^2\}.$$

Um ponto P está na reta r se $P \in r$.

Os axiomas da Geometria de Incidência são satisfeitos no Plano de Poincaré.

Problema 3. Mostre que, no Plano de Poincaré, dadas uma reta r e um ponto P que não está em r , existem infinitas distintas retas paralelas a r passando por P .

Problema 4. Exiba três retas r , s e t no Plano de Poincaré tais que: (i) r é paralela a s , (ii) s é paralela a t , (iii) r e t são concorrentes.

Geometrias finitas. O modelo mais simples para a geometria de incidência consiste em declarar que os pontos são os elementos de um conjunto S com pelo menos três elementos, que as retas são os subconjuntos de dois elementos de S e que um ponto P está na reta r se $P \in r$. O caso em que S é finito já fornece um exemplo interessante. Chamaremos de “geometria de n pontos” o modelo associado a S no caso em que S possui n elementos.

Problema 5. Mostre que: (a) na geometria de três pontos não existem retas paralelas; (b) na geometria de quatro pontos, dadas uma reta r e um ponto P que não está em r , existe uma única paralela a r passando por P ; (c) na geometria de cinco pontos, dadas uma reta r e um ponto P que não está em r , existem pelo menos duas paralelas a r passando por P .

4. AXIOMAS DE ORDENAMENTO

A expressão $A * B * C$ denota a afirmação “ B está entre A e C ”. São os seguintes os três primeiros axiomas satisfeitos por essa relação:

- (B1) Se $A * B * C$, então (i) A , B e C são três pontos colineares e (ii) $C * B * A$.
- (B2) Dados dois pontos B e D , existem pontos A , C e E tais que $A * B * D$, $B * C * D$ e $B * D * E$.
- (B3) Dados três pontos colineares, um e apenas um deles está entre os outros dois.

Dados dois pontos A e B , denotamos por AB o segmento com extremidades A e B e por $\overrightarrow{AB}$ a semirreta com origem em A que passa por B (veja as Definições 1.1 e 1.2). Podemos escrever

$$(1) \quad AB := \{A, B\} \cup \{P; A * P * B\} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AB} := AB \cup \{P; A * B * P\}$$

Note que AB e $\overrightarrow{AB}$ são subconjuntos do conjunto de todos os pontos que estão na reta $\overleftrightarrow{AB}$,

$$\overleftrightarrow{AB} := \{P; P \text{ é um ponto que está em } \overleftrightarrow{AB}\}.$$

Proposição 4.1. *Dados dois pontos A e B , temos $AB = BA$.*

Proposição 4.2. *Seja r uma reta, seja O um ponto em r , seja A um ponto que não está em r . Se $A * O * B$ ou se $A * B * O$, então B não está em r .*

Proposição 4.3. *Sejam Q , A e B pontos colineares, com $A \neq B$. Então $Q * A * B$ se e somente se $Q \notin \overrightarrow{AB}$.*

Proposição 4.4. *Dados dois pontos A e B , temos $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = AB$.*

Problema 6. Dados dois pontos A e B , mostre que $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \{P; P \text{ está em } \overleftrightarrow{AB}\}$.

Definição 4.5. Diremos que o segmento AB atravessa a reta r ou, equivalentemente, que r atravessa AB se r e AB se interceptam em apenas um ponto, diferente de A e de B . Em outras palavras, r e AB se atravessam se as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e r são distintas e concorrentes e se o ponto P de interseção das duas retas satisfaz $A * P * B$.

(B4) Seja r uma reta e sejam A , B e C três pontos não-colineares que não estão em r . Se r atravessa algum dos três segmentos determinados pelos pontos dados, então r atravessa também um, e apenas um, dos outros dois segmentos.

Definição 4.6. *Sejam A , B e C três pontos não-colineares. O triângulo de vértices A , B e C , denotado por $\triangle ABC$, é a união dos segmentos AB , BC e AC , que são chamados de lados do triângulo.*

Separação do plano.

Dizemos que um conjunto S de pontos é *convexo* se, dados quaisquer dois pontos A e B em S , o segmento AB está todo contido em S . O objetivo desta subseção é mostrar que o conjunto dos pontos que não estão em uma reta é a união disjunta de dois subconjuntos convexos, chamados de “semiplanos” (veja o Problema 20).

Definição 4.7. *Dada uma reta r e um ponto A que não está em r , o semiplano limitado por r que contém A é o conjunto de pontos $H_A := \{A\} \cup \{C; C \text{ não está em } r, C \neq A \text{ e } r \text{ não atravessa } AC\}$.*

Teorema 4.8. *Toda reta r limita exatamente dois semiplanos, e eles não possuem ponto em comum.*

Definição 4.9. *Dada uma reta r , os dois semiplanos determinados por r serão também chamados de lados de r . Diremos que A e B , distintos ou não, estão do mesmo lado de r se $A \in H_B$ e diremos que A e B estão em lados opostos de r se $A \notin H_B$.*

Proposição 4.10. *Sejam A , B e C três pontos que não estão na reta r . São verdadeiras as seguintes afirmações.*

- (1) *Se A e B estão do mesmo lado de r , e se B e C estão do mesmo lado de r , então A e C estão do mesmo lado de r .*
- (2) *Se A e B estão em lados opostos de r , e se B e C estão em lados opostos de r , então A e C estão do mesmo lado de r .*
- (3) *Se A e B estão em lados opostos de r , e se B e C estão do mesmo lado de r , então A e C estão em lados opostos de r .*

Problema 7. Dados B e D em lados opostos da reta s , seja C a interseção das retas $\overleftrightarrow{BD}$ e s . Mostre que vale $B * C * D$.

Problema 8. Dados $A * B * C$, com C na reta s e A ou B fora da reta s , mostre que A e B estão do mesmo lado de s .

Problema 9. Sejam r uma reta, P um ponto em r e Q um ponto fora de r . Seja Z um ponto distinto de P na semirreta $\overrightarrow{PQ}$. Mostre que Z e Q estão do mesmo lado de r .

Problema 10. Sejam r uma reta, P um ponto em r , e Q e R pontos do mesmo lado de r . Mostre que, se R está em $\overrightarrow{PQ}$, então R é um ponto de $\overrightarrow{PQ}$.

Problema 11. [Pasch para pontos colineares] Seja r uma reta e sejam A , B e C três pontos colineares que não estão em r . Mostre que, se r atravessa algum dos três segmentos determinados pelos pontos dados, então r atravessa também um, e apenas um, dos outros dois segmentos.

Ordenamento de quatro pontos.

Proposição 4.11. Se $A * B * C$ e $A * C * D$, então vale $B * C * D$ e $A * B * D$.

Proposição 4.12. Se $A * B * C$ e $B * C * D$, então vale $A * B * D$ e $A * C * D$.

Definição 4.13. Dizemos que $A * B * C * D$ se valem as quatro seguintes afirmações: $A * B * C$, $A * B * D$, $A * C * D$ e $B * C * D$.

$$(2) \quad (A * B * C \wedge A * C * D) \vee (A * B * C \wedge B * C * D) \implies A * B * C * D$$

Problema 12. Mostre que as duas condições $A * B * D$ e $A * C * D$ podem ser satisfeitas sem que valha $A * B * C * D$, mesmo quando $B \neq C$.

Problema 13. Mostre que as condições $A * B * D$, $A * C * D$ e $B \neq C$ implicam que vale $A * B * C$ ou $A * C * B$.

Problema 14.

(a) Mostre que as condições $A * B * C$, $A * B * D$ e $C \neq D$ implicam que vale $A * C * D$ ou $A * D * C$.

(b) Mostre que as condições $A * B * C$, $A * B * D$ e $C \neq D$ implicam que vale $B * C * D$ ou $B * D * C$.

Dicas: No (a), use (B3) e (2) para provar a contrapositiva. No (b), use o (a) e (2).

Problema 15. Mostre que, se $C \in \overrightarrow{AB}$ e $C \neq A$, então $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Sugestão: Use as Proposições 4.3, 4.11 e 4.12.

Problema 16. Sejam r uma reta, P um ponto fora de r , e Q um ponto distinto de P . Seja H o semiplano delimitado por r que contém P . Mostre que existe um ponto R distinto de P e pertencente a H tal que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR}$.

Problema 17. Mostre que, se $A * B * C$, então o segmento AB está contido no segmento AC .

Problema 18. Mostre que, se $A * B * C$, então a semirreta $\overrightarrow{BC}$ está contida na semirreta $\overrightarrow{AC}$.

Problema 19. [Os extremos de um segmento são unicamente determinados]

Sejam A, B, C, D pontos tais que $A \neq B$, $C \neq D$, e vale a igualdade de segmentos $AB = CD$. Mostre que os dois conjuntos de pontos $\{A, B\}$ e $\{C, D\}$ são idênticos.

Problema 20. [Os semiplanos são convexos]

Seja H um semiplano delimitado pela reta r . Mostre que, se $A, B \in H$ e $A * P * B$, então $P \in H$.

Problema 21. [As retas têm infinitos pontos] Supondo válidos os três axiomas de incidência e os quatro axiomas de ordenamento até aqui enunciados, mostre que toda reta passa por infinitos pontos.

Separação da reta.

Proposição 4.14. Suponha que $C * A * B$ e seja r a reta que passa por A, B e C . Então temos

$$\{P; P \text{ está em } r\} = \overrightarrow{AC} \cup \overrightarrow{AB}.$$

Problema 22. Dada uma semirreta $\overrightarrow{AB}$, tome C tal que $C * A * B$. Seja D um ponto na reta $\overleftrightarrow{AB}$ distinto de A . Mostre que $D \in \overrightarrow{AB}$ se, e somente se, $C * A * D$.

Dica: Use a Proposição 4.3 e a Proposição 4.14.

Problema 23. [As semirretas são convexas] Sejam D e E dois pontos pertencentes à semirreta $\overrightarrow{AB}$, seja F tal que $D * F * E$. Mostre que F também pertence a $\overrightarrow{AB}$.

Dica: Use o Problema 14-a, o Problema 22 e (2).

Problema 24. [Os segmentos são convexas] Sejam D e E dois pontos pertencentes ao segmento AB , seja F tal que $D * F * E$. Mostre que F também pertence a AB .

Dica: Use o Problema 23 e a Proposição 4.4.

Como convencionamos na Definição 1.3, chamamos de *opostas* as duas semirretas distintas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ se $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$. Usando o Problema 15, podemos obter a seguinte caracterização mais conveniente dessa propriedade.

Proposição 4.15. As semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são opostas se e somente se $B * A * C$.

Problema 25. Seja O , X e X' pontos tais que $X * O * X'$, seja r a reta que os contém. Mostre que, se C e C' são pontos distintos de r , $C \neq O \neq C'$, tais que $C \in \overrightarrow{OX}$ e $C' \in \overrightarrow{OX'}$, então vale $C * O * C'$.

Problema 26. Suponha que as semirretas distintas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não sejam opostas. Mostre que A , B e C não são colineares.

Problema 27. Mostre que toda semirreta possui uma única semirreta oposta.

Problema 28. Mostre que o ponto E pertence à semirreta oposta a $\overrightarrow{BA}$ se e somente se $A * B * E$.

Proposição 4.16. Se $C * A * B$, então $\overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{AB} = \{A\}$.

(3) Um ponto A numa reta separa a reta em duas semirretas opostas que se interceptam em A .

De fato, dado A em r , tome $B \neq A$ em r (B existe pelo Axioma I2); em seguida tome C tal que $C * A * B$ (C existe pelo Axioma B2). Daí temos

$$\{P; P \text{ está em } r\} = \overrightarrow{AC} \cup \overrightarrow{AB} \text{ e } \overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{AB} = \{A\}.$$

Problema 29. Suponha que $B * A * C$. Mostre que $AC \cap AB = \{A\}$

Teorema da Barra Transversal.

Denotamos por $\angle BAC$ o ângulo que consiste da união das duas semirretas não-opostas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Definimos o interior do ângulo $\angle BAC$ como sendo a interseção de dois dos semiplanos determinados pelas retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$:

Definição 4.17. O interior do ângulo $\angle BAC$ é o conjunto dos pontos P que satisfazem: (i) B e P estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AC}$ e (ii) C e P estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AB}$.

Teorema 4.18. Seja X um ponto do interior do ângulo $\angle BAC$. Então a semirreta $\overrightarrow{AX}$ passa por algum ponto do segmento BC (distinto de B e de C).

Problema 30. Seja D um ponto de $\overleftrightarrow{BC}$. Mostre que D pertence ao interior do ângulo $\angle BAC$ se e somente se $B * D * C$.

Problema 31. Seja D um ponto do interior do ângulo $\angle BAC$. Mostre que todos os pontos da semirreta $\overrightarrow{AD}$ distintos de A também estão no interior de $\angle BAC$.

Interior de triângulo.

Problema 32. Suponha que $A * B * C$ na reta r e que $A * D * E$ na reta s , $r \neq s$. Mostre que os segmentos BE e CD se interceptam em um ponto M e que M pertence aos interiores dos ângulos $\angle CAE$, $\angle ACE$ e $\angle AEC$.

Sugestão de passos para a resolução do problema: Mostre que

- A e B estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{CD}$, A e D estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{BE}$.
- A e E estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{CD}$, A e C estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{BE}$.
- Existe M em $\overleftrightarrow{CD}$ tal que $B * M * E$, existe N em $\overleftrightarrow{BE}$ tal que $C * N * D$.
- $M = N$.
- M pertence aos interiores dos $\angle CAE$, $\angle ACE$ e $\angle AEC$.

Definimos o interior de um triângulo $\triangle ACE$ como sendo a interseção dos interiores dos ângulos $\angle CAE$, $\angle ACE$ e $\angle AEC$. Segue do Axioma B2 que existem B e D tais que $A * B * C$ e $A * D * E$. Segue então do Problema 32 que os segmentos BE e CD se encontram em um ponto M no interior de $\triangle ACE$. Isto prova que o interior de um triângulo arbitrário é não-vazio.

5. AXIOMAS DE CONGRUÊNCIA

Aceitamos sem definição as frases “o segmento PQ é congruente ao segmento RS ” e “o ângulo $\angle BAC$ é congruente ao ângulo $\angle EDF$ ”, o que será denotado por $PQ \cong RS$ e $\angle BAC \cong \angle EDF$, e listamos os seis axiomas que governam o uso dessas expressões.

Congruência de segmentos.

- (C1) Sejam A e B dois pontos. Dada qualquer semirreta $\overrightarrow{A'X}$, existe um único ponto $B' \in \overrightarrow{A'X}$, $B' \neq A'$, tal que $AB \cong A'B'$.
 (C2) Se $AB \cong CD$ e $AB \cong EF$, então $CD \cong EF$. Além disso, todo segmento é congruente a si próprio.
 (C3) Se $A * B * C$, $A' * B' * C'$, $AB \cong A'B'$ e $BC \cong B'C'$, então $AC \cong A'C'$.

Proposição 5.1. *Se $AB \cong CD$, então $CD \cong AB$.*

Segue do Axioma C2 e da Proposição 5.1 que a congruência de segmentos é uma relação de equivalência definida no conjunto de todos os segmentos.

Se $A * B * C$, diz-se que AC é a *adição* dos segmentos AB e BC . A proposição seguinte nos diz que esse conceito respeita congruência.

Proposição 5.2. *Dados segmentos AB , $A'B'$, CD e $C'D'$, existem únicos pontos E e E' tais que $A * B * E$, $A' * B' * E'$, $BE \cong CD$ e $B'E' \cong C'D'$. Se valer $AB \cong A'B'$ e $CD \cong C'D'$, podemos então concluir que $AE \cong A'E'$.*

Dado um segmento AB , denotamos por $[AB]$ a *classe de congruência* de AB ,

$$[AB] = \{A'B'; A'B' \text{ é um segmento e } A'B' \cong AB\}.$$

Como congruência de segmentos é uma relação de equivalência, temos que $[AB] = [FG]$ se e somente se $AB \cong FG$ (Proposição 6.2). A Proposição 5.2 nos diz que está bem definida a adição de classes de congruência de segmentos. Mais precisamente, dados dois segmentos AB e CD , seja E o único ponto tal que $A * B * E$ e $CD \cong BE$. Definimos então

$$[AB] + [CD] = [AE].$$

Isto faz sentido porque se tomarmos representantes $A'B'$ e $C'D'$ diferentes das classes $[AB]$ e $[CD]$, respectivamente, e obtivermos os pontos E e E' da maneira descrita no enunciado da Proposição 5.2, teremos $[AE] = [A'E']$.

Problema 33. Mostre que a adição de classes de congruência de segmentos é comutativa

Congruência de ângulos.

- (C4) Considere o ângulo $\angle BAC$. Dados uma semirreta $\overrightarrow{A'B'}$ e um semiplano H delimitado pela reta $\overleftrightarrow{A'B'}$, existe uma única semirreta $\overrightarrow{A'C'}$ com $C' \in H$ tal que $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$.
 (C5) Se $\angle BAC \cong \angle EDF$ e $\angle BAC \cong \angle HGI$, então $\angle EDF \cong \angle HGI$. Além disso, todo ângulo é congruente a si próprio.

Pelo Problema 15, se C'' for qualquer ponto distinto de A' da semirreta $\overrightarrow{A'C'}$, então $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'C''}$ e portanto são iguais os ângulos $\angle B'A'C'$ e $\angle B'A'C''$. Além disso, se $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'C''}$ então C' e C'' estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{A'B'}$ (isto segue do Problema 9). Por isso falamos em unicidade da semirreta $\overrightarrow{A'C'}$, e não do ponto C' no enunciado do Axioma (C4).

Proposição 5.3. *Se $\angle BAC \cong \angle EDF$, então $\angle EDF \cong \angle BAC$.*

Demonstração: Por hipótese, $\angle BAC \cong \angle EDF$. Pela segunda parte de (C5), $\angle BAC \cong \angle BAC$. Pela primeira parte de (C5), $\angle EDF \cong \angle BAC$. $\square$

Podemos agora dizer que a congruência de ângulos é uma relação de equivalência definida no conjunto de todos os ângulos.

Definição 5.4. Diremos que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são congruentes, o que denotaremos por $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, se os lados correspondentes são dois-a-dois congruentes e se os ângulos correspondentes são dois-a-dois congruentes, isto é, se

$$AB \cong DE, \quad BC \cong EF, \quad CA \cong FD, \quad \angle ABC \cong \angle DEF, \quad \angle BCA \cong \angle EFD \quad \text{e} \quad \angle CAB \cong \angle FDE.$$

É importante observar que a relação congruência de triângulos não se define para pares de triângulos, mas sim para pares de triângulos com vértices ordenados. Se, por exemplo, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ e BC e AC não forem congruentes, $\triangle BAC$ não será congruente a $\triangle DEF$. Embora, como conjuntos de pontos, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle BAC$ sejam idênticos, seus vértices estão ordenados de maneiras diferentes.

Problema 34. Mostre que congruência de triângulos é uma relação de equivalência. Isto é, mostre que

- (1) $\triangle ABC \cong \triangle ABC$,
- (2) $\triangle ABC \cong \triangle DEF \implies \triangle DEF \cong \triangle ABC$,
- (3) $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ e $\triangle DEF \cong \triangle GHI \implies \triangle ABC \cong \triangle GHI$

Axioma C6. Casos LAL e ALA de congruência.

O Axioma (C6), enunciado logo a seguir, é conhecido com o *caso LAL de congruência de triângulos*.

(C6) Se $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ e $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, então $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Os axiomas (C4) e (C1) nos permitem transportar ângulos e segmentos, respectivamente. Decorre agora do critério LAL que triângulos inteiros podem ser “transportados”. Mais precisamente, temos a seguinte proposição.

Proposição 5.5. Dados triângulos $\triangle ABC$, segmento $A'B' \cong AB$ e semiplano H delimitado pela reta $\overleftrightarrow{A'B'}$, existe um único ponto C' em H tal que $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Assumindo o critério LAL como verdadeiro, vamos agora demonstrar o critério ALA.

Proposição 5.6. Sejam A , B e C três pontos não-colineares, sejam A' , B' e C' três pontos não-colineares. Se $AB \cong A'B'$, $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$ e $\angle CBA \cong \angle C'B'A'$, então $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Em vez de assumir o Axioma C6, Hilbert assume apenas o seguinte axioma, que à primeira vista pode parecer mais fraco do que (C6):

(C6') Se $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ e $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, então $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$.

Problema 35. [(C6') implica (C6)] Suponha que é válida a afirmação (C6'). Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ triângulos satisfazendo $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ e $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$. Mostre

Sugestão: (i) Trocando o nome das letras, obtém-se $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$. (ii) Obtenha X em $\overleftrightarrow{B'C'}$ tal que $B'X \cong BC$. Use (C6') no triângulo $\triangle A'B'X$. (iii) Note que, se $X \neq C'$, (C4) terá sido violado.

Teorema do Triângulo Isósceles.

A proposição seguinte afirma que, se dois lados de um triângulo são congruentes, então os dois ângulos adjacentes ao terceiro lado são congruentes. Triângulos que têm essa propriedade são chamados de isósceles e este resultado é conhecido como o “teorema do triângulo isósceles”.

Proposição 5.7. Se A , B e C são três pontos não-colineares e $AB \cong AC$, então $\angle ABC \cong \angle ACB$.

Demonstração: Considere os triângulos com vértices ordenados $\triangle ABC$ e $\triangle ACB$. Por hipótese, temos $AB \cong AC$. Segue da Proposição 5.3 que $AC \cong AB$. Segue da definição de ângulo que $\angle BAC = \angle CAB$, daí, pela segunda parte do Axioma (C5), temos $\angle BAC \cong \angle CAB$. Segue do Axioma (C6) com $A' = A$, $B' = C$ e $C' = B$ a congruência $\triangle ABC \cong \triangle ACB$. Em particular, $\angle ABC \cong \angle ACB$. $\square$

A recíproca do Teorema do Triângulo Isósceles pode ser demonstrada imitando a demonstração da Proposição 5.7, usando o caso ALA em vez do LAL. Isto fica como exercício:

Problema 36. Sejam A , B e C três pontos não-colineares. Mostre que, se $\angle ABC \cong \angle ACB$, então $AB \cong AC$.

Dado um triângulo $\triangle ABC$, diremos que ele é *equilátero* se os lados AB , BC e AC forem dois a dois congruentes, e que é *equiângulo* se os ângulos $\angle ABC$, $\angle CAB$ e $\angle BCA$ forem dois a dois congruentes.

Problema 37. Mostre que o triângulo $\triangle ABC$ é equilátero se, e somente se, ele é equiângulo.

6. APÊNDICE: RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA

Uma *relação* em um conjunto X é, por definição, um subconjunto do produto cartesiano $X \times X$. Se R é uma relação em X , é usual denotar $(x, y) \in R$ por $x \sim y$. Frequentemente definiremos uma relação definindo o significado da expressão $x \sim y$, sem fazer referência direta ao subconjunto R de todos os pares ordenados (x, y) que satisfazem $x \sim y$.

Uma *relação de equivalência* em um conjunto X é uma relação em X que satisfaz as três propriedades seguintes:

- (1) $x \sim x$, para todo $x \in X$;
- (2) se $x \sim y$, então $y \sim x$;
- (3) se $x \sim y$ e $y \sim z$, então $x \sim z$.

Chama-se de *reflexiva* uma relação que satisfaça (1). Chama-se de *simétrica* uma relação que satisfaça (2). Chama-se de *transitiva* uma relação que satisfaça (3). Usando esses termos, podemos então dizer que uma relação de equivalência é uma relação reflexiva, simétrica e transitiva.

Proposição 6.1. Seja $\sim$ uma relação de equivalência em X , sejam x , y e z elementos de X . Se $x \not\sim y$ e $y \sim z$, então $x \not\sim z$.

Seja X um conjunto munido de uma relação de equivalência. Para cada $x \in X$, definimos

$$[x] = \{y \in X; y \sim x\}$$

Um subconjunto da forma $[x]$ para algum $x \in X$ é chamado de *classe de equivalência*. O conjunto de todas as classes de equivalência se denota por $X/\sim$,

$$X/\sim = \{[x]; x \in X\},$$

e é chamado *quociente de X por $\sim$*

Proposição 6.2. Seja X um conjunto munido de uma relação de equivalência. Dados x e y pertencentes a X , são equivalentes as seguintes afirmações: (1) $x \sim y$, (2) $[x] = [y]$, (3) $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.

Proposição 6.3. Um conjunto X munido de uma relação de equivalência $\sim$ pode ser escrito como a união disjunta de suas classes de equivalência.