

1. OS POSTULADOS DE EUCLIDES (PARA GEOMETRIA PLANA)

O ponto de partida da geometria euclideana são os seguintes termos ou frases que aceitamos sem definição: (1) ponto, (2) reta, (3) congruência, (4) um ponto está em uma reta, (5) um ponto está entre dois pontos. Dizer que a reta r passa pelo ponto P é o mesmo que dizer que o ponto P está na reta r . Denotaremos congruência por $\cong$.

As noções de congruência, de “estar entre” e de “estar em” serão sujeitas a certos axiomas, oportunamente enunciados. Nos Elementos [1], os axiomas sobre a noção de estar-entre e diversos axiomas sobre as noções de estar-em e de congruência são assumidos apenas implicitamente. Alguns dos axiomas sobre congruência são incluídos por Euclides nas “noções comuns” que antecedem o enunciado da sua primeira proposição.

Postulado 1. *Dados ¹ dois pontos P e Q , existe uma única reta que passa por P e Q . Essa reta é denotada por $\overleftrightarrow{PQ}$.*

Claro que $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{QP}$.

Na versão original do Primeiro Postulado, Euclides não menciona unicidade. Diz apenas: “Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto”. O resto do tratado, entretanto, contém pistas de que ele, implicitamente, assumia que a reta era única.

Na Seção 4, vamos enunciar todos os axiomas sobre o “estar entre”, que daí em diante serão chamados de axiomas de ordenamento. Para enunciar os demais postulados de Euclides, precisamos antecipar o seguinte axioma, que será posteriormente incluído no que chamaremos de “Axioma B1”.

Postulado X. Se o ponto B está entre A e C , então B está na reta $\overleftrightarrow{AC}$.

Definição 1.1. *Dados dois pontos A e B , o segmento de extremidades A e B , que denotaremos por AB , é o conjunto de pontos que consiste de: A , B e de todos os pontos que estão entre A e B .*

Segue do Postulado X que todos os pontos de AB estão na reta $\overleftrightarrow{AB}$.

A formulação original [1] do segundo postulado de Euclides é “fique postulado prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta” (reta limitada é como Euclides chamava um segmento). Seguindo Greenberg [2], adotaremos aqui a seguinte interpretação do que Euclides queria dizer:

Postulado 2. *Dado o segmento AB , para todo segmento CD existe um ponto E tal que B está entre A e E e BE é congruente a CD .*

Em outras palavras, todo segmento pode ser estendido indefinidamente, a partir de cada uma de suas extremidades.

Definição 1.2. *Dados dois pontos O e A , o círculo de centro O que passa por A é o conjunto dos pontos P tais que $OP \cong OA$.*

O enunciado original do terceiro postulado de Euclides é: “fique postulado, com todo centro e distância, descrever um círculo” [1]. Para os padrões modernos de rigor, seria necessário antes definir distância. Em vez disso, adotamos a seguinte formulação de [2] do terceiro postulado.

Postulado 3. *Dados dois pontos O e A , existe o círculo de centro O e raio OA .*

¹Sempre que nos referirmos a dois pontos, ou duas coisas quaisquer, ficará implícito que os dois pontos, ou as duas coisas, são distintos.

Usando a linguagem de conjuntos, onipresente na matemática contemporânea, o Postulado 3 se torna supérfluo diante da Definição 1.2.

Os três primeiros Postulados de Euclides podem ser interpretados como postulados do desenho geométrico. Chama-se de *régua euclideana* o instrumento ideal que permite traçar retas e de *compasso euclideano* o instrumento ideal que permite traçar círculos. Os dois primeiros postulados nos dizem que, usando uma régua, é possível traçar e prolongar indefinidamente a única reta que passa por dois pontos dados. O terceiro nos diz que, usando compasso, dados dois pontos, é possível traçar o círculo com centro em um dos pontos e passando pelo outro.

Definição 1.3. *Dados dois pontos A e B , a semirreta $\overrightarrow{AB}$ é o conjunto dos pontos P da reta $\overleftrightarrow{AB}$ tais que P pertence ao segmento AB ou B está entre A e P . Diremos então que A é o vértice da semirreta, ou que a semirreta se origina em A .*

Definição 1.4. *As semirretas distintas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são opostas se $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são iguais.*

Definição 1.5. *Um ângulo com vértice em A é a união de duas semirretas não opostas que se originam em A . As duas semirretas são chamadas de lados do ângulo. Denotamos por $\angle BAC$ ou $\angle CAB$ o ângulo formado pelas semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.*

Definição 1.6. *Os dois ângulos $\angle BAD$ e $\angle DAC$ são suplementares se as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são opostas.*

Definição 1.7. *Um ângulo é reto se é congruente a um ângulo suplementar a ele.*

Postulado 4. *Todos os ângulos retos são congruentes entre si.*

É importante frisar que os dois ângulos retos do enunciado do Postulado 4 não são necessariamente suplementares. Um deles pode estar aqui do nosso lado e o outro em outra galáxia. Num certo sentido, este postulado reflete a homogeneidade do espaço.

Na geometria métrica de Birkoff [6], que é a abordagem da geometria euclideana adotada em todos os livros de geometria para o Ensino Médio ou Fundamental, postula-se que todo ângulo possui uma medida, e define-se que dois ângulos são congruentes se possuem a mesma medida e que um ângulo é reto se mede 90 graus. Nessa abordagem, o Postulado 4 é uma proposição trivial. Antes de Birkoff, sem usar números reais, usando seus postulados de ordenamento e congruência, Hilbert demonstrou ([4, Teorema 21], ver também [6, Theorem 8.2.3]) o Postulado 4; ou seja, mostrou que ele é um postulado supérfluo também na *geometria sintética*. Hilbert atribuiu o resultado a Proclus, matemático e filósofo que viveu no século V.

Definição 1.8. *Duas retas r e s são paralelas se nunca se encontram, ou seja, se nenhum ponto está simultaneamente em r e em s .*

Na geometria espacial, exige-se também que duas retas paralelas sejam coplanares, mas estas notas tratam apenas da geometria plana.

Na tradução de Irineu Bicudo [1], a formulação do Quinto Postulado nos Elementos é: “fique postulado, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos”. Em outras palavras, suponha que sejam dadas três retas r , s e t , que t intersecta r e s , e que, em um dos lados de t a soma dos ângulos internos é menor do que dois retos. Então r e s se encontram no lado de t em que a soma dos ângulos internos é menor do que dois retos.

Como em [2], adotaremos a seguinte formulação do Quinto Postulado, comumente atribuída a Playfair, matemático escocês do século XVIII, mas que na verdade remonta a Proclus.

Postulado 5. *Dadas uma reta r e um ponto P que não está em r , existe uma única reta paralela a r que passa por P .*

A vantagem da formulação de Proclus/Playfair sobre a de Euclides é que a primeira envolve menos conceitos. Pode-se considerar a validade, ou não, do Postulado 5 em sistemas formais que satisfaçam apenas os “axiomas de incidência” (assunto da próxima seção); enquanto que a formulação de Euclides depende dos axiomas de ordenamento e congruência para ser enunciada (é preciso fazer sentido falar nos lados do plano determinados por uma reta, é preciso fazer sentido dizer que a soma de dois ângulos é menor do que dois retos).

Mais adiante, de posse dos axiomas de incidência, de ordenamento e de congruência, discutiremos a equivalência das duas formulações. Veremos que decorre dos axiomas básicos que, dadas uma reta r e um ponto P que não está em r , sempre existe pelo menos uma reta paralela a r que passa por P . A unicidade dessa reta é que é equivalente à formulação original do Quinto Postulado de Euclides.

O matemático francês Adrien Marie Legendre, que viveu de 1752 a 1833 e deu importantes contribuições à Mecânica e à Geometria, acreditou que tinha demonstrado o Quinto Postulado. Vamos listar em seguida os passos de uma de suas “demonstrações”, sendo dadas a reta r e um ponto P que não está em r . A figura quase indispensável para acompanhar o argumento será omitida neste documento. A leitora pode pegar papel e caneta e desenhar sua própria figura, ou pode consultar a Figura 1.12 de [2].

- (1) Seja Q o ponto em r tal que $\overrightarrow{PQ}$ e r sejam perpendiculares.
- (2) Seja s a reta que passa por P e é perpendicular a $\overrightarrow{PQ}$.
- (3) Então s é paralela a r . Seja t uma reta que passa por P e é diferente de s . Queremos provar que t e r se interceptam.
- (4) Seja R um ponto que está em t e está no mesmo lado de s que r .
- (5) Seja R' um ponto do lado oposto ao de R relativamente à reta $\overrightarrow{PQ}$ tal que $\angle QPR \simeq \angle QPR'$.
- (6) O ponto Q está no interior do ângulo $\angle RPR'$.
- (7) Segue da afirmação precedente que a reta r intesecta um dos lados desse ângulo, $\overrightarrow{PR}$ ou $\overrightarrow{PR'}$.
- (8) Se a reta r intersecta $\overrightarrow{PR}$, está provado o que queríamos, pois P e R são pontos de t .
- (9) Suponha que r intersecta $\overrightarrow{PR'}$ e chame sua interseção de A . Tome B pertencente a $\overrightarrow{PR}$ tal que $PA \simeq PB$.
- (10) Pelo critério LAL de congruência de triângulos, $\triangle PQA \simeq \triangle PQB$. Logo $\angle PQA$ é congruente a $\angle PQB$.
- (11) O ângulo $\angle PQA$ é reto, porque as retas r e $\overrightarrow{PQ}$ são perpendiculares. Logo $\angle PQB$ também é reto e portanto as semirretas $\overrightarrow{QA}$ e $\overrightarrow{QB}$ são opostas.
- (12) Como Q e A estão em r , B também está em r e é portanto o ponto de encontro das retas r e t .

Temos um desafio bastante complexo pela frente: justificar os passos corretos desta sucessão de argumentos, e detectar a passagem em que Legendre usou sem perceber um fato que só possa ser demonstrado supondo válido o Quinto Postulado, o que torna este um argumento inválido por ser circular. Vamos revisitar esta “demonstração errada” quando a teoria, que começaremos a desenvolver sistematicamente na próxima seção, estiver suficientemente desenvolvida.

2. AXIOMAS DE INCIDÊNCIA

São apenas três os termos ou frases adotados sem definição na geometria de incidência plana: (1) ponto, (2) reta, (3) um ponto está em uma reta. A partir desses termos *primitivos*, outros termos podem ser definidos: (1) uma reta r passa por P se P está em r , (2) os pontos $P, Q, R, \dots$ são *colineares* se existe uma reta r na qual eles todos estão, (3) as retas $r, s, t, \dots$ são *concorrentes* se existe um ponto P que está em todas elas, (4) duas retas são *paralelas* se não são concorrentes. Às vezes diremos também que o ponto P “pertence” à reta r se P está em r , mas não usaremos o símbolo de pertencimento $\in$ da teoria dos conjuntos, pois uma reta não necessariamente consiste de um conjunto de pontos.

São três os axiomas da Geometria de Incidência:

- (I1) Dados dois pontos P e Q , existe uma única reta r que passa por P e por Q .
- (I2) Dada uma reta r , existem pelo menos dois pontos que estão em r .

(I3) Existem pelo menos três pontos não colineares.

Notem que o Axioma I1 é o Primeiro Postulado de Euclides. Como já afirmamos na Seção 1, a reta r determinada por P e Q será denotada por $\overleftrightarrow{PQ}$ ou $\overleftrightarrow{QP}$.

Proposição 2.1. *O ponto R , distinto de P , está em $\overleftrightarrow{PQ}$ se e somente se $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{PR}$.*

Demonstração: Se o ponto R está em $\overleftrightarrow{PQ}$, então a única reta determinada por P e R é $\overleftrightarrow{PQ}$, ou seja, $\overleftrightarrow{PR} = \overleftrightarrow{PQ}$.

Por definição, R é um ponto de $\overleftrightarrow{PR}$. Logo, se $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{PR}$, então R é um ponto de $\overleftrightarrow{PQ}$. □

Proposição 2.2. *Dadas duas retas concorrentes r e s , existe apenas um ponto P que está nas duas simultaneamente.*

Demonstração: Se existissem dois pontos P e Q ambos pertencentes às retas r e s , então, pela unicidade postulada no Axioma I1, r e s seriam a mesma reta, $r = s = \overleftrightarrow{PQ}$. Mas, por hipótese, elas são duas retas. □

Dadas duas retas concorrentes r e s , se P é o único ponto que está simultaneamente em r e s , então diremos que P é o *ponto de interseção* de r e s .

Proposição 2.3. *Existem três retas não-concorrentes; isto é existem três retas r , s e t tal que não existe um ponto P que esteja em r , em s e em t simultaneamente.*

Demonstração: O Axioma I3 garante que existem três pontos não-colineares A , B e C . Afirmando que as retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CA}$ são distintas e não-colineares. De fato, são três retas distintas porque se duas delas fossem iguais, os três pontos seriam colineares (Proposição 2.1). E, pela Proposição 2.2, B é o único ponto que pertence simultaneamente a $\overleftrightarrow{AB}$ e a $\overleftrightarrow{BC}$. Logo, se as três retas fossem concorrentes, B pertenceria a $\overleftrightarrow{AC}$, contradizendo o fato de que A , B e C não são colineares. □

Proposição 2.4. *Dada uma reta r , existe pelo menos um ponto P que não está em r .*

Demonstração: O Axioma I3 garante que existem três pontos não-colineares A , B e C . Pelo menos um dos três pontos não está em r ; pois, caso contrário, os três pontos seriam colineares. □

Proposição 2.5. *Dado um ponto P , existe pelo menos uma reta que não passa por P .*

Demonstração: Se todas as retas passassem por P , não existiriam três retas não-concorrentes, contrariando a Proposição 2.3. □

Proposição 2.6. *Dado um ponto P , existem pelo menos duas retas que passam por P .*

Problema 1. Demonstre a Proposição 2.6.

Problema 2. Mostre que, dado um ponto P , existem pontos Q e R tais que P , Q e R não sejam colineares.

3. MODELOS

Dado um sistema axiomático, tal como a Geometria de Incidência, uma *interpretação* do sistema é a atribuição de significados aos termos adotados sem definição. Se os axiomas, com essa interpretação, são afirmações verdadeiras, essa interpretação é um *modelo*. Os axiomas da geometria de incidência são tão frouxos que permitem a existência de modelos completamente diferentes entre si, como veremos nesta seção. Em dois desses exemplos, usaremos os números reais.

As proposições que se demonstrem usando apenas os axiomas (I1), (I2) e (I3) e suas consequências serão automaticamente válidas em qualquer modelo da Geometria de Incidência.

Na linguagem da teoria dos conjuntos, uma interpretação da Geometria de Incidência consiste de um conjunto de pontos $\mathcal{P}$, um conjunto de retas $\mathcal{L}$ e, para descrever a noção de estar-em, um subconjunto $\mathfrak{R}$ de $\mathcal{P} \times \mathcal{L}$. Diremos que P está em r se, e somente se, $(P, r) \in \mathfrak{R}$. Chamaremos a noção de estar-em também de “relação de incidência”.

Plano de Descartes. Os pontos são os elementos de $\mathbb{R}^2$. As retas são os subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ da forma

$$L_{a,b,c} := \{(x, y); ax + by = c\}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad (a, b) \neq (0, 0).$$

Um ponto P está na reta r se $P \in r$. As Proposições 3.1 e 3.2, enunciadas e demonstradas a seguir, expressam que, para esta interpretação, os axiomas (I1) e (I2) são satisfeitos. Os pontos $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ e $C = (0, 1)$ não são colineares pois $\overrightarrow{AB}$ é a reta de equação $y = 0$, que não passa pelo ponto C ; ou seja, também o Axioma I3 é satisfeito. Tudo junto, isso mostra que o *plano cartesiano* é um modelo da Geometria de Incidência (leia mais sobre isso em [5, Section 2.1] e [6, Chapter 2]).

Proposição 3.1. *Dados dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em $\mathbb{R}^2$, existe uma única reta r que passa por (x_1, y_1) e (x_2, y_2) .*

Demonstração: Dados dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em $\mathbb{R}^2$, é imediato verificar que a equação

$$(1) \quad (y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y = (y_2 - y_1)x_1 + (x_1 - x_2)y_1$$

é satisfeita pelos dois pontos dados. O par de coeficientes $(y_2 - y_1, x_1 - x_2)$ é diferente de $(0, 0)$ porque os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são distintos. Logo $(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y = (y_2 - y_1)x_1 + (x_1 - x_2)y_1$ é a equação de uma reta que passa pelos dois pontos dados. Isto prova a existência.

Suponha que $ax + by = c$ é a equação de uma reta que passa pelos dois pontos dados, (x_1, y_1) e (x_2, y_2) ; isto é, suponha que vale $ax_1 + by_1 = ax_2 + by_2 = c$. Vamos provar que a equação $ax + by = c$ é equivalente à equação em (1).² Vamos dividir o argumento em três casos: (i) $x_1 = x_2$ e $y_2 \neq y_1$, (ii) $x_1 \neq x_2$ e $y_2 = y_1$, (iii) $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$ (o caso em que $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$ não ocorre porque os pontos são distintos).

No caso em que $x_1 = x_2$ e $y_2 \neq y_1$, segue de $ax_1 + by_1 = ax_1 + by_2 = c$ que $b(y_2 - y_1) = 0$, logo $b = 0$ (pois $y_2 - y_1 \neq 0$). Daí segue que $a \neq 0$ (pois $(a, b) \neq (0, 0)$). Como $b = 0$, a equação $ax + by = c$ se reduz a $ax = c$, que é equivalente a $x = \frac{c}{a}$. Como a reta passa por (x_1, y_1) , temos $x_1 = \frac{c}{a}$, ou seja, a equação $ax + by = c$ é equivalente a $x = x_1$, que é o que se obtém fazendo $x_1 = x_2$ em (1) e dividindo por $y_2 - y_1$, que não é nulo.

O mesmo argumento, trocando as letras, mostra que, se $x_1 \neq x_2$ e $y_2 = y_1$, então a equação $ax + by = c$ é equivalente a $y = y_1$, que é o que se obtém fazendo $y_2 - y_1 = 0$ em (1) e dividindo por $x_2 - x_1$.

No caso em que $x_2 - x_1$ e $y_2 - y_1$ são não nulos, segue de $ax_1 + by_1 = ax_2 + by_2 = c$ que $a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0$. Daí, como $(a, b) \neq (0, 0)$, segue que a e b são diferentes de zero e que $b = a \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1}$. Substituindo esta igualdade em $ax + by = c$, vem

$$ax + a \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} y = c.$$

Como o ponto (x_1, y_1) satisfaz esta equação, vem

$$ax_1 + a \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} y_1 = c.$$

Igualando os dois primeiros membros das duas últimas equações e cancelando o a , vem

$$x + \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} y = x_1 + \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} y_1,$$

que é equivalente a (1).

²Ou seja, vamos provar que (x, y) satisfaz $ax + by = c$ se e somente se (x, y) satisfaz (1); em outras palavras, vamos provar que o conjunto de soluções da equação $ax + by = c$ é idêntico ao conjunto de soluções da equação (1)

Separando em três casos, acabamos de provar que, dados dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , se L é uma reta que passa por ambos os pontos, então L é a reta de equação $(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y = (y_2 - y_1)x_1 + (x_1 - x_2)y_1$. Ou seja, provamos a unicidade. $\square$

Proposição 3.2. *Toda reta do Plano de Descartes possui pelo menos dois pontos.*

Demonstração: Seja r a reta de equação $ax + by = c$. Queremos provar que r possui pelo menos dois pontos. Separemos a demonstração em casos.

CASO 1. Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então $(0, \frac{c}{b})$ e $(\frac{c}{a}, 0)$ são dois pontos distintos de r .

CASO 2. Se $a \neq 0$ e $b = 0$, então $(\frac{c}{a}, 0)$ e $(\frac{c}{a}, 1)$ são dois pontos distintos de r .

CASO 3. Se $a = 0$ e $b \neq 0$, então $(0, \frac{c}{b})$ e $(1, \frac{c}{b})$ são dois pontos distintos de r . $\square$

Problema 3. Mostre que, no Plano de Descartes, dadas uma reta r e um ponto P que não está em r , existe uma única reta paralela a r passando por P .

Plano de Poincaré. Os pontos são os elementos do conjunto $P := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$. As retas são os subconjuntos de P da forma L_a , $a \in \mathbb{R}$, ou $L_{a,r}$, $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$, definidos por

$$L_a := \{(x, y) \in P; x = a\}, \quad L_{a,r} := \{(x, y) \in P; (x - a)^2 + y^2 = r^2\}.$$

Um ponto P está na reta r se $P \in r$.

Veriquemos que os axiomas da Geometria de Incidência são satisfeitos no Plano de Poincaré. Considere dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em P . Dois casos devem ser considerados: (1) $x_1 = x_2$, (2) $x_1 \neq x_2$. No primeiro caso, a reta L_c , $c = x_1 = x_2$, passa por (x_1, y_1) e por (x_2, y_2) . Nenhuma reta L_b , com $b \neq c$ passa por (c, y_1) ou (c, y_2) . Quaisquer dois pontos numa reta $L_{a,r}$, $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$, possuem abscissas distintas. Logo L_c é a única reta passando por (c, x_1) e (c, x_2) . No segundo caso, por terem abscissas distintas, os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) não podem estar em uma mesma reta L_a , $a \in \mathbb{R}$. E eles estão em uma reta $L_{a,r}$, $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$, se e somente se o sistema de equações

$$(2) \quad \begin{cases} (x_1 - a)^2 + y_1^2 = r^2 \\ (x_2 - a)^2 + y_2^2 = r^2 \end{cases}$$

é satisfeito. Suponha que vale (2). Comparando as duas equações, concluímos que vale também

$$(3) \quad (x_1 - a)^2 + y_1^2 = (x_2 - a)^2 + y_2^2$$

Daí segue que $x_1^2 - 2ax_1 + y_1^2 = x_2^2 - 2ax_2 + y_2^2$ e, daí,

$$(4) \quad a = \frac{(x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2)}{2(x_2 - x_1)}.$$

Combinada à primeira das equações em (2), (4) implica que

$$(5) \quad r = \sqrt{\left[x_1 - \frac{(x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2)}{2(x_2 - x_1)} \right]^2 + y_1^2}.$$

Mostramos que (2) implica (4) e (5). Ou seja, provamos que se existir uma reta do tipo $L_{a,r}$ passando por (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , então a e r necessariamente serão dados por (4) e (5).

Ou seja, provamos a unicidade de (I1) também no caso em que $x_1 \neq x_2$. Para provar a existência, devemos verificar que (4) e (5) implicam (2). Espero que esteja visível para os leitores que (4) e (5) implicam a primeira das equações em (2). Por outro lado, (4) implica (3) (os cálculos que mostraram que (3) $\implies$ (4) mostram também que (4) $\implies$ (3)). A equação (3), combinada à primeira das equações em (2), implica a segunda das equações em (2). Isto conclui a demonstração de que o Axioma I1 é satisfeito nesta interpretação da Geometria de Incidência.

Para provar que o Axioma I2 é satisfeito para esta interpretação, de novo é preciso separar em dois casos. Dada uma reta do tipo L_a , $a \in \mathbb{R}$, existem infinitos pontos na reta, a saber, (a, t) , $t > 0$. Dada uma reta do

tipo $L_{a,r}$, existem infinitos pontos na reta, a saber, $(t, \sqrt{r^2 - t^2})$, $-r < t - a < r$. Logo toda reta possui pelo menos dois pontos.

A única reta que passa pelos pontos $A = (0, 1)$ e $B = (0, 2)$ é L_0 . Considere o ponto $C = (1, 1)$. Se A , B e C estivessem em uma mesma reta, pela unicidade de (I1) aplicado aos pontos A e B , essa reta seria a reta $\overleftrightarrow{AB} = L_0$ e portanto C pertenceria a L_0 . Mas C não pertence a L_0 , pois sua abscissa é diferente de 0. Logo A , B e C não são colineares. Logo o Axioma I3 é satisfeito.

Problema 4. Mostre que, no Plano de Poincaré, dadas uma reta r e um ponto P que não está em r , existem infinitas distintas retas paralelas a r passando por P .

Problema 5. Exiba três retas r , s e t no Plano de Poincaré tais que: (i) r é paralela a s , (ii) s é paralela a t , (iii) r e t são concorrentes.

Geometrias finitas. O modelo mais simples para a geometria de incidência consiste em declarar que os pontos são os elementos de um conjunto S com pelo menos três elementos, que as retas são os subconjuntos de dois elementos de S e que um ponto P está na reta r se $P \in r$. O caso em que S é finito já fornece um exemplo interessante. Chamaremos de “geometria de n pontos” o modelo associado a S no caso em que S possui n elementos.

Problema 6. Mostre que: (a) na geometria de três pontos não existem retas paralelas; (b) na geometria de quatro pontos, dadas uma reta r e um ponto P que não está em r , existe uma única paralela a r passando por P ; (c) na geometria de cinco pontos, dadas uma reta r e um ponto P que não está em r , existem pelo menos duas paralelas a r passando por P .

Problema 7. Considere a seguinte interpretação da geometria de incidência: os pontos são os elementos do conjunto $S := \{A, B, C, D\}$, as retas são os seguintes subconjuntos de S : $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, D\}$ e $\{B, C, D\}$. (a) Mostre que todos os axiomas de incidência são satisfeitos. (b) Mostre que neste modelo não existem retas paralelas.

Problema 8. Chame de pontos os elementos do conjunto $S := \{A, B, C, D\}$, chame de retas os seguintes subconjuntos de S ,

$$\{A, B, D\}, \quad \{B, C, D\}, \quad \{A, C\},$$

diga que um ponto P está numa reta r se $P \in r$. Mostre que: (a) dados dois pontos existe uma reta passando por eles, mas nem sempre essa reta é única, (b) toda reta possui pelo menos dois pontos, (c) existem três pontos não-colineares, (d) não existe um par de retas paralelas.

O Plano de Fano. Os pontos são os elementos do conjunto $S := \{A, B, C, D, E, F, G\}$. As retas são os seguintes subconjuntos de três pontos de S :

$$\{A, B, D\}, \quad \{A, F, E\}, \quad \{A, C, G\}, \quad \{G, F, B\}, \quad \{G, E, D\}, \quad \{D, F, C\}, \quad \{C, B, E\}.$$

Um ponto P está na reta r se $P \in r$. Este é o Exemplo 6 de [2, Chapter 2], veja lá uma figura ilustrativa. Você pode ler sobre isso também no verbete “Fano plane” da Wikipedia em inglês ou no verbete “Plano de Fano” da Wikipedia em espanhol. O Plano de Fano é um modelo da geometria de incidência em que todas as retas se encontram, cada reta passa por três pontos e por cada ponto passam três retas.

A geometria dual da geometria de três pontos. As retas são os elementos do conjunto de três elementos $S := \{A, B, C\}$. Os pontos são os subconjuntos de dois elementos de S . Um ponto P está na reta r se $r \in P$.

Esfera de Riemann. Os pontos são os elementos de uma esfera, as retas são os *círculos máximos*, ou seja, círculos contidos na esfera e com centro igual ao centro da esfera. Não existem retas paralelas. Esta interpretação não é um modelo da geometria de incidência, pois existem infinitas retas passando por dois pontos antipodais dados. Uma maneira de transformar essa interpretação imperfeita em um modelo da geometria de incidência é chamar de pontos os elementos do quociente da esfera pela relação de equivalência³ que identifica antípodas. As retas são as imagens dos círculos máximos no quociente.

³Quem não for familiar com relações de equivalência, por favor leia a Seção 5.

Planos projetivos. Em um modelo da geometria de incidência no qual seja válido o Quinto Postulado de Euclides (na versão de Playfair, tal como enunciado no Postulado 5 da Seção 1), o paralelismo de retas define uma relação de equivalência. Isso permite que se “projete” o modelo, acrescentando como “pontos no infinito” as classes de equivalência de retas paralelas. É o que fazemos nesta subseção, seguindo os passos expostos na última seção do Capítulo 2 de [2].

Proposição 3.3. *Seja dado um modelo da geometria de incidência em que seja válido o Postulado 5: dados uma reta r e um ponto P que não está em r , existe uma única reta s que passa por P e é paralela a r . Se três retas r , s e t são tais que r é paralela a s e s é paralela a t , então r é paralela a t .*

Demonstração: Suponha que r não seja paralela a t e seja P o ponto que está em r e em t . Então r e t são duas paralelas a s passando por P , o que contradiz o Quinto Postulado. $\square$

Seja $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ um modelo da geometria de incidência em que é válido o Postulado 5; $\mathcal{P}$ denotando o conjunto de pontos e $\mathcal{L}$ denotando o conjunto de retas. Dadas r e s em $\mathcal{L}$, definimos: $r \sim s$ se e somente se $r = s$ ou r é paralela a s . A relação $\sim$ é, obviamente, reflexiva e simétrica. Segue da Proposição 3.3 que $\sim$ é também transitiva e, portanto, é uma relação de equivalência. Para cada reta r de $\mathcal{P}$, denotamos

$$[r] = \{s; s \text{ é reta de } \mathcal{P} \text{ e } s \sim r\}.$$

Definamos $\mathcal{P}^*$ como a união disjunta de $\mathcal{P}$ com o conjunto das classes de equivalência de retas paralelas,

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \cup \{[r]; r \in \mathcal{L}\},$$

e $\mathcal{L}^*$ como sendo a união disjunta de $\mathcal{L}$ com a “reta no infinito” l_∞ ,

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{l_\infty\}.$$

Para obtermos uma interpretação em que os elementos de $\mathcal{P}^*$ sejam pontos e os elementos de $\mathcal{L}^*$ sejam retas, precisamos definir o que significa um “ponto” $P \in \mathcal{P}^*$ estar em uma “reta” $r \in \mathcal{L}^*$. Diremos que $[r]$ está em r para toda $r \in \mathcal{L}$; $[r]$ torna-se assim o “ponto no infinito” da reta r e de todas as retas $s \in \mathcal{L}$ paralelas a r no modelo original. Diremos também que todos os “pontos no infinito” estão na “reta no infinito”; isto é, $[r]$ está em l_∞ , para toda $r \in \mathcal{L}$. Além disso, todas as relações de incidência do modelo original continuam válidas. Finalmente, decretamos que as afirmações precedentes são todas as relações de incidência na nova interpretação.

É como se um par de retas paralelas do modelo original agora passasse a se encontrar em um ponto no infinito desta interpretação ampliada.

Proposição 3.4. *Com as definições acima, a interpretação $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*)$ é um modelo da geometria de incidência; isto é, os axiomas (I1), (I2) e (I3) são satisfeitos.*

Demonstração: Segue de como definimos a relação de incidência para $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*)$ que três pontos em $\mathcal{P}$ são colineares no modelo original se e somente se são colineares na nova interpretação. Segue então do fato de que (I3) é satisfeito no modelo original $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ que (I3) também é satisfeito na interpretação ampliada $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*)$.

Segue de (I2) para o modelo original que, dada uma reta $r \in \mathcal{L}$, existem pelo menos dois pontos $P, Q \in \mathcal{P}$ em r . Para verificar (I2) para a interpretação ampliada, basta portanto mostrar que l_∞ possui pelo menos dois pontos; ou seja, que existem duas retas r e s em $\mathcal{L}$ que não são paralelas. Isso segue de (I3) para o modelo original. De fato, se A , B e C são três pontos não colineares em $\mathcal{P}$, que existem, por causa de (I3), então $r = \overleftrightarrow{AB}$ e $s = \overleftrightarrow{AC}$ são duas retas colineares em $\mathcal{L}$.

Para verificar que (I1) é satisfeito na interpretação $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*)$, vamos dividir nosso argumento em três casos: (i) os dois pontos dados P e Q estão em $\mathcal{P}$, (ii) os dois pontos são pontos no infinito. (iii) P está em $\mathcal{P}$ e Q é um ponto no infinito,

No caso (i), segue de (I1) para o modelo original que existe uma reta em $\mathcal{L}$ que passa por P e Q . Como toda reta de $\mathcal{L}$ é também uma reta em $\mathcal{L}^*$, segue que existe uma reta em $\mathcal{L}^*$ passando por P e Q . A única reta

em $\mathcal{L}^*$ que não pertence também a $\mathcal{L}$ é l_∞ . Logo, para provar a unicidade da reta que passa por P e Q , basta observar P e Q não estão em l_∞ , cujos pontos são todos da forma $[r]$, para alguma reta r do modelo original.

No caso (ii), a verificação de (I1) segue imediatamente dos fatos de que todos os pontos no infinito estão em l_∞ e de que as demais retas de $\mathcal{L}^*$ possuem apenas um ponto no infinito; logo l_∞ é a única reta que passa por dois pontos no infinito.

Suponhamos agora que P é um ponto do modelo original e $Q = [r]$ para alguma reta r do modelo original. Para verificar a validade de (I1) neste caso, precisamos dividir o argumento em ainda dois subcasos. Suponhamos primeiro (subcaso iii-a) que, relativamente à relação de incidência do modelo original, P está em r . Então r é uma reta em $\mathcal{L}^*$ que, relativamente à relação de incidência da interpretação estendida, passa por P e $[r]$. Isto prova a existência. Já sabemos que, por definição, l_∞ não passa por P . Logo, para provar a unicidade neste subcaso iii-a, resta provar que, se s é uma reta de $\mathcal{L}$ que passa por P e $[r]$, então $s = r$. O único ponto no infinito que está em s é $[s]$. Logo s passa por $[r]$ se, e somente se, $[s] = [r]$, o que ocorre se, e somente se, $r = s$ ou r e s são paralelas. As retas r e s não são paralelas pois ambas passam por P . Logo $r = s$, como queríamos.

Suponhamos finalmente (subcaso iii-b) que P é um ponto do modelo original, $Q = [r]$ para alguma reta r do modelo original e que r não passa por P . Segue do Postulado 5 que existe uma única reta s do modelo original que é paralela a r (logo $[s] = [r]$) e passa por P . Então s passa por P e $[r]$. Resta provar que s é a única reta que, na interpretação estendida, passa por P e $[r]$. Já sabemos que, por definição, l_∞ não passa por P . Logo, para provar a unicidade neste subcaso iii-b, resta provar que, se s' é uma reta de $\mathcal{L}$ que passa por P e $[r]$, então $s' = s$. Seja s' uma tal reta. O único ponto no infinito que está em s' é $[s']$. Então s' passa por $[r]$ se, e somente se, $[s'] = [r]$, o que ocorre se, e somente se, $r = s'$ ou r e s' são paralelas. Como P não está em r mas está em s' , temos $r \neq s'$. Logo, se s' passa por $[r]$, então s' é paralela a r . Pela unicidade do Postulado 5, segue que $s = s'$. $\square$

O modelo $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*)$ é chamado de *o completamento projetivo* do modelo $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$.

Problema 9. Mostre que todas as pares de retas em um completamento projetivo são concorrentes.

O Plano de Fano, previamente definido, é o completamento projetivo do modelo mais simples da Geometria de Incidência que satisfaz o Quinto Postulado, a geometria de quatro pontos. Mais especificamente, se o conjunto de pontos da geometria original for $\mathcal{P} = \{A, D, F, G\}$ e as retas forem os subconjuntos de dois pontos de $\mathcal{P}$, então o ponto no infinito da classe $\overleftrightarrow{AF}$ é E , o ponto no infinito de $\overleftrightarrow{FD}$ é C , o de $\overleftrightarrow{GF}$ é B ; enquanto que a reta no infinito é $\{B, E, C\}$.

Para uma interpretação geométrica do completamento projetivo do Plano de Descartes, veja [2, Exemplo 2.7, Figura 2.8].

4. AXIOMAS DE ORDENAMENTO

Nesta seção, acrescentamos à formulação axiomática da Geometria iniciada na Seção 2 o termo primitivo “estar entre”, enunciamos os axiomas satisfeitos por esse novo termo primitivo e exploramos algumas de suas consequências.

A expressão $A * B * C$ denota a afirmação “ B está entre A e C ”. São os seguintes os três primeiros axiomas satisfeitos por essa relação:

- (B1) Se $A * B * C$, então (i) A, B e C são três pontos colineares e (ii) $C * B * A$.
- (B2) Dados dois pontos B e D , existem pontos A, C e E tais que $A * B * D$, $B * C * D$ e $B * D * E$.
- (B3) Dados três pontos colineares, um e apenas um deles está entre os outros dois.

David Hilbert [4] chamou de *Axiome der Anordnung* os axiomas satisfeitos pela noção de “estar entre”. Em inglês, em particular nas referências [2, 5, 6] nas quais se baseiam estas notas, chama-se o “estar entre” de “betweenness”, substantivo abstrato intraduzível para o português.

Dados dois pontos A e B , denotamos por AB o segmento com extremidades A e B e por $\overrightarrow{AB}$ a semirreta com origem em A que passa por B (veja as Definições 1.1 e 1.3). Podemos escrever

$$(6) \quad AB := \{A, B\} \cup \{P; A * P * B\} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AB} := AB \cup \{P; A * B * P\}$$

Note que AB e $\overrightarrow{AB}$ são subconjuntos do conjunto de todos os pontos que estão na reta $\overleftrightarrow{AB}$,

$$\overleftrightarrow{AB} := \{P; P \text{ é um ponto que está em } \overleftrightarrow{AB}\}.$$

Proposição 4.1. *Dados dois pontos A e B , temos $AB = BA$.*

Demonstração: Os pontos extremos dos dois segmentos são os mesmos, logo basta provar que, dado um ponto P , $A * P * B \iff B * P * A$. Mas isto é consequência imediata do item (ii) do axioma (B1). $\square$

Proposição 4.2. *Seja r uma reta, seja O um ponto em r , seja A um ponto que não está em r . Se $A * O * B$ ou se $A * B * O$, então B não está em r .*

Demonstração: Em qualquer dos dois casos, $A * O * B$ ou $A * B * O$, segue do Axioma B1 que O está em $\overleftrightarrow{AB}$. Se B estivesse em r , r e $\overleftrightarrow{AB}$ teriam dois pontos em comum, O e B ; logo seriam iguais, pela unicidade postulada no Axioma I1; logo A estaria em r , contrariando a hipótese. Logo B não está em r . $\square$

Proposição 4.3. *Sejam Q , A e B pontos colineares, com $A \neq B$. Então $Q * A * B$ se e somente se $Q \notin \overrightarrow{AB}$.*

Demonstração: Segue de (6) que Q pertence a $\overrightarrow{AB}$ se e somente se uma das seguintes afirmações são verdadeiras: (i) $Q = A$, (ii) $Q = B$, (iii) $A * Q * B$, ou (iv) $A * B * Q$. Equivalentemente, $Q \notin \overrightarrow{AB}$ se e somente se as afirmações (i), (ii), (iii) e (iv) são falsas. Queremos portanto provar que $Q * A * B$ se e somente se as afirmações (i), (ii), (iii) e (iv) são falsas.

Se $Q * A * B$, segue do Axioma B1 que $Q \neq A$ e $Q \neq B$ e segue do Axioma B3 que não ocorre $A * Q * B$, nem $A * B * Q$. Logo são falsas as afirmações (i), (ii), (iii) e (iv).

Reciprocamente, suponhamos que (i), (ii), (iii) e (iv) sejam afirmações falsas. Sendo falsas (i) e (ii), e como $A \neq B$ por hipótese, segue que A , B e C são três pontos distintos. Sendo falsas (iii) e (iv), segue da colinearidade dos três pontos e do Axioma B3 que $Q * A * B$. $\square$

Proposição 4.4. *Dados dois pontos A e B , temos $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = AB$.*

Demonstração: Segue de (6) que $AB \subset \overrightarrow{AB}$. Segue de (6) e da Proposição 4.1 que $AB = BA \subset \overrightarrow{BA}$. Logo $AB \subset \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$.

Suponha que $Q \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$. Queremos provar que $Q \in AB$. Vamos dividir em casos. Se $Q = A$ ou $Q = B$, então segue da definição de segmento que $Q \in AB$. Se Q é diferente de A e diferente de B , então, como todos os pontos das duas semirretas são pontos da reta $\overleftrightarrow{AB}$, os três pontos A , B e Q são colineares, e podemos portanto invocar o axioma (B3) para concluir que uma e apenas uma das seguintes alternativas ocorre:

- (i) $Q * A * B$,
- (ii) $A * Q * B$,
- (iii) $A * B * Q$.

Se ocorrer (i), segue da Proposição 4.3 que $Q \notin \overrightarrow{AB}$, o que é falso, pois estamos supondo que $Q \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$. Se ocorrer (iii), então $Q * B * A$, pelo axioma (B1). Daí, pela Proposição 4.3, $Q \notin \overrightarrow{BA}$, o que é falso. Logo, se valer $Q \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$, então não vale (i), nem vale (iii). Logo vale (ii), o que implica que $Q \in AB$. $\square$

Problema 10. Dados dois pontos A e B , mostre que $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \{P; P \text{ está em } \overleftrightarrow{AB}\}$.

Cabe aqui um comentário sobre nomenclatura. Adotamos os termos de [2] para a geometria de incidência, nosso ponto de partida para a axiomática completa da geometria euclidiana. Para nós, portanto, existe um conjunto de pontos e um conjunto de retas, mas as retas não são necessariamente conjuntos de pontos. É por isso que é preciso considerar a expressão “um ponto está em uma reta” como um termo primitivo, sem definição. Além disso o conjunto de todos os pontos que estão em uma reta não é, em geral, “igual” à reta, pois podem ser objetos de natureza diferente. Em alguns modelos (no Plano de Descartes e no Plano de Poincaré, por exemplo) pode acontecer de r ser igual a $\{P; P \text{ está em } r\}$, mas ao tratar da teoria axiomática abstrata, devemos fazer a distinção. Já no texto [3], convencionou-se explicitamente que cada reta é um subconjunto do conjunto de todos os pontos, e “está em” é o “pertence” da teoria dos conjuntos. Hilbert [4] é ambíguo a esse respeito, e o livro dele pode ser lido com uma ou outra convenção.

Dizemos que um segmento AB e uma reta r se interceptam se existe pelo menos um ponto pertencente a AB que também está em r . Isso não exclui a possibilidade de todos os pontos de AB estarem em r , ou que o ponto de interseção seja uma das extremidades do segmento. Vamos reservar a palavra “atravessar” para um tipo mais específico de interseção:

Definição 4.5. Diremos que o segmento AB atravessa a reta r ou, equivalentemente, que r atravessa AB se r e AB se interceptam em apenas um ponto, diferente de A e de B . Em outras palavras, r e AB se atravessam se as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e r são distintas e concorrentes e se o ponto P de interseção das duas retas satisfaz $A * P * B$.

Enunciamos agora nosso quarto axioma de ordenamento, conhecido como o “Postulado de Pasch” [4].

(B4) Seja r uma reta e sejam A , B e C três pontos não-colineares que não estão em r . Se r atravessa algum dos três segmentos determinados pelos pontos dados, então r atravessa também um, e apenas um, dos outros dois segmentos.

Definição 4.6. Sejam A , B e C três pontos não-colineares. O triângulo de vértices A , B e C , denotado por $\triangle ABC$, é a união dos segmentos AB , BC e AC , que são chamados de lados do triângulo.

Proposição 4.7. Suponha que a reta r atravessa o lado AB do triângulo $\triangle ABC$. Então r intercepta pelo menos um dos outros dois lados do triângulo. Só intercepta os outros dois lados se C estiver em r .

Demonstração: No caso em que r não passa por C , segue do Axioma B4 que r intercepta um, e apenas um, dos outros dois lados e que a interseção não é um dos extremos desse lado. Caso r passe por C , então r intercepta os lados AC e BC . $\square$

Separação do plano.

Definição 4.8. Dada uma reta r e um ponto A que não está em r , o semiplano limitado por r que contém A é o conjunto de pontos $H_A := \{A\} \cup \{C; C \text{ não está em } r, C \neq A \text{ e } r \text{ não atravessa } AC\}$.

O principal resultado desta subseção é o teorema seguinte, que se trata essencialmente de uma versão traduzida e ligeiramente reformulada de [3, Proposition 7.1]

Teorema 4.9. Toda reta r limita exatamente dois semiplanos, e eles não possuem ponto em comum.

Demonstração: Seja X o conjunto dos pontos que não estão em r . Dados A e B em X , diremos que $A \sim B$ se $A \in H_B$.

Por definição, temos que $A \in H_A$. Se $A \in H_B$ e $A \neq B$, então r não atravessa AB , que é igual BA , pela Proposição 4.1; logo r não atravessa BA , logo $B \in H_A$. Isto prova que a relação $\sim$ é reflexiva e simétrica. Provaremos em seguida que ela também é transitiva.

Suponhamos que $A \sim B$ e $B \sim C$. Queremos provar que $A \sim C$. Claro que podemos supor que os pontos A , B e C são distintos, caso contrário não haveria o que provar. Vamos precisar separar em dois casos: ou esses três pontos são colineares, ou não são.

Suponhamos primeiramente que eles não são colineares. Temos que r não atravessa AB , nem atravessa BC (é isso o que significa $A \sim B$ e $B \sim C$). Se r atravessasse AC , seguiria, pelo Axioma B4, que r atravessaria AB ou BC , o que é falso. Logo r não atravessa AC , ou seja $A \sim C$.

Suponhamos agora que A , B e C são colineares e chamemos de s a reta que os contém. Por definição de X , cada um dos três pontos A , B e C não está em r , logo r e s são duas retas distintas. Pelo Axioma I2, r possui pelo menos dois pontos. Pelo menos um deles não está em s , caso contrário a unicidade do Axioma I1 implicaria que r seria igual a s . Seja portanto D um ponto de r que não está em s . Pelo Axioma B2, existe um ponto E tal que $E * A * D$. O ponto E não está em r , pela Proposição 4.2. Temos que $A \sim E$ pois, se existisse um ponto P em r tal que $E * P * A$, esse ponto seria o único (veja a Proposição 2.2) ponto de interseção de $\overleftrightarrow{AD}$ e r , ou seja, P seria igual a D , logo teríamos $E * D * A$ e $E * A * D$, o que não pode acontecer, pelo Axioma B3. O ponto E também não está em s , de novo pela Proposição 4.2, pois $E * A * D$. Então temos $E \sim A$, $A \sim B$ e os três pontos E , A e B são não colineares. Neste caso já vimos que o Axioma B4 implica que $E \sim B$. Logo temos $E \sim B$ e $B \sim C$, sendo E , B e C não-colineares (pois E não está em s , que é igual a $\overleftrightarrow{BC}$). Neste caso já vimos que o Axioma B4 implica que $E \sim C$. Logo temos $C \sim E$ e $E \sim A$, sendo C , E e A não colineares, logo (usando pela terceira vez o mesmo argumento) $C \sim A$, ou seja, $A \sim C$, como queríamos.

Provamos que $\sim$ é uma relação de equivalência em X . Por definição, os semiplanos determinados por r são as classes de equivalência associadas a esta relação de equivalência. Queremos provar que o conjunto das classes de equivalência $X/\sim$ possui exatamente dois elementos.

O conjunto X é não vazio, pela Proposição 2.4. Logo $X/\sim$ é não vazio. Seja A um elemento de X . Pelo Axioma I2, segue que existe um ponto O que está em r . Pelo Axioma B2, existe um ponto B tal que $A * O * B$. O ponto B não está em r , pela Proposição 4.2. Logo A e B são dois pontos de X . A reta r atravessa AB , pois o ponto O está em r e pertence a AB . Ou seja, $A \notin H_B$; ou seja, A e B pertencem a classes de equivalência distintas. Provamos que $X/\sim$ possui pelo menos dois elementos.

Para concluir a demonstração, devemos provar que, se existirem três pontos que não estão em r , pelo menos um par deles pertence a um mesmo semiplano. Para provar isto, suponhamos que A , B e C sejam três pontos de X . Basta provar, sem perda de generalidade, que, se r atravessar AB e AC , então r não atravessará BC . Isto segue do “apenas um” do Axioma B4, caso A , B e C não sejam colineares. Suponhamos agora que A , B e C sejam colineares. Vamos precisar usar de novo a construção que fizemos para provar a transitividade, mas agora o argumento é mais fácil porque já sabemos que $\sim$ é transitiva. Seja D um ponto que está em r , mas não está na reta s que contém os pontos A , B e C , seja E tal que $E * A * D$. Provamos acima que $A \sim E$ e que os pontos B , C e E são não-colineares. Como estamos supondo que $A \not\sim C$ e $A \not\sim B$, segue da transitividade de $\sim$ que $C \not\sim E$ e $B \not\sim E$. Temos portanto três pontos não colineares B , C e E tais que r atravessa BE e CE . Segue do Axioma B4 que r não atravessa BC . $\square$

Dada uma reta r , os dois semiplanos determinados por r serão também chamados de *lados* de r . Diremos que A e B , distintos ou não, estão *do mesmo lado* de r se $A \in H_B$ e diremos que A e B estão *em lados opostos* de r se $A \notin H_B$.

Proposição 4.10. *Sejam A , B e C três pontos que não estão na reta r . São verdadeiras as seguintes afirmações.*

- (1) *Se A e B estão do mesmo lado de r , e se B e C estão do mesmo lado de r , então A e C estão do mesmo lado de r .*
- (2) *Se A e B estão em lados opostos de r , e se B e C estão em lados opostos de r , então A e C estão do mesmo lado de r .*
- (3) *Se A e B estão em lados opostos de r , e se B e C estão do mesmo lado de r , então A e C estão em lados opostos de r .*

Demonstração: Vimos na demonstração do Teorema 4.9 que a relação definida pela sentença “ $A \sim B \iff A \in H_B$ ” é uma relação de equivalência no conjunto X dos pontos que não estão em r , e que a classe de equivalência de um ponto $A \in X$ é igual a H_A .

Se A e B estão do mesmo lado de r e B e C estão do mesmo lado de r , então $A \in H_B$ e $B \in H_C$. Logo, $A \in H_C$, pela transitividade de $\sim$. Logo A e C estão do mesmo lado de r , o que prova (1).

Se A e B estão em lados opostos de r e se B e C estão em lados opostos de r , então $A \not\sim B$ e $B \not\sim C$. Vimos na demonstração do Teorema 4.9 que $\sim$ possui duas, e só duas, classes de equivalência. Segue de $A \not\sim B$ e $B \not\sim C$ que A e C não pertencem à classe de equivalência que contém B , logo A e C pertencem à outra classe de equivalência, distinta de H_B . Logo, $A \sim C$; ou seja, $A \in H_C$; ou seja, A e C estão do mesmo lado de r . Provamos (2).

Se A e B estão em lados opostos de r e se B e C estão do mesmo lado de r , então $A \not\sim B$ e $C \sim B$. Segue então que $A \not\sim C$ (veja a Proposição 5.1). Logo A e C estão em lados opostos de r , o que conclui a demonstração. $\square$

Problema 11. Dados B e D em lados opostos da reta s , seja C a interseção das retas $\overleftrightarrow{BD}$ e s . Mostre que vale $B * C * D$.

Problema 12. Dados $A * B * C$, com C na reta s e A e B fora da reta s , mostre que A e B estão do mesmo lado de s .

Problema 13. Sejam r uma reta, P um ponto em r e Q um ponto fora de r . Seja Z um ponto distinto de P na semirreta $\overrightarrow{PQ}$. Mostre que Z e Q estão do mesmo lado de r .

Problema 14. Sejam r uma reta, P um ponto em r , e Q e R pontos do mesmo lado de r . Mostre que, se R está em $\overrightarrow{PQ}$, então R é um ponto de $\overrightarrow{PQ}$.

Problema 15. Sejam r uma reta, P um ponto fora de r , e Q um ponto distinto de P . Seja H o semiplano delimitado por r que contém P . Mostre que existe um ponto R distinto de P e pertencente a H tal que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR}$.

5. APÊNDICE: RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA

Uma *relação* em um conjunto X é, por definição, um subconjunto do produto cartesiano $X \times X$. Se R é uma relação em X , é usual denotar $(x, y) \in R$ por $x \sim y$. Frequentemente definiremos uma relação definindo o significado da expressão $x \sim y$, sem fazer referência direta ao subconjunto R de todos os pares ordenados (x, y) que satisfazem $x \sim y$.

Uma *relação de equivalência* em um conjunto X é uma relação em X que satisfaz as três propriedades seguintes:

- (1) $x \sim x$, para todo $x \in X$;
- (2) se $x \sim y$, então $y \sim x$;
- (3) se $x \sim y$ e $y \sim z$, então $x \sim z$.

Chama-se de *reflexiva* uma relação que satisfaça (1). Chama-se de *simétrica* uma relação que satisfaça (2). Chama-se de *transitiva* uma relação que satisfaça (3). Usando esses termos, podemos então dizer que uma relação de equivalência é uma relação reflexiva, simétrica e transitiva.

Dada uma afirmação A , denotamos por $\neg A$ a negação de A , ou seja, a afirmação “ A é falsa”. Na demonstração da Proposição 5.1 vamos usar a seguinte regra de lógica: provar que as afirmações A e B implicam a afirmação C é equivalente a provar que $\neg C$ e B implicam $\neg A$.

Proposição 5.1. *Seja $\sim$ uma relação de equivalência em X , sejam x, y e z elementos de X . Se $x \not\sim y$ e $y \sim z$, então $x \not\sim z$.*

Demonstração: O que queremos provar é equivalente à afirmação “se $y \sim z$ e $x \sim z$, então $x \sim y$ ”. Esta afirmação é verdadeira, pois $\sim$ é simétrica, transitiva e reflexiva. $\square$

Seja X um conjunto munido de uma relação de equivalência. Para cada $x \in X$, definimos

$$[x] = \{y \in X; y \sim x\}$$

Um subconjunto da forma $[x]$ para algum $x \in X$ é chamado de *classe de equivalência*. O conjunto de todas as classes de equivalência se denota por $X/\sim$,

$$X/\sim = \{[x]; x \in X\},$$

e é chamado *quociente de X por $\sim$*

Proposição 5.2. *Seja X um conjunto munido de uma relação de equivalência. Dados x e y pertencentes a X , são equivalentes as seguintes afirmações: (1) $x \sim y$, (2) $[x] = [y]$, (3) $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.*

Demonstração: Como primeiro passo, provemos que (1) implica (2). Sejam x e y tais que $x \sim y$. Queremos provar que os conjuntos $[x]$ e $[y]$ são iguais. Para tanto, tome $z \in [x]$. Então $z \sim x$. Temos portanto $x \sim y$ e $z \sim x$. Segue da transitividade que $z \sim y$, isto é, $z \in [y]$. Da mesma maneira se prova que $z \in [y]$ implica $z \in [x]$. Logo, $z \in [x] \iff z \in [y]$; isto é, $[x] = [y]$.

Provemos em seguida que (2) implica (3). Segue de $[x] = [y]$ que $[x] \cap [y] = [x]$. Para todo $x \in X$, $[x]$ é não vazio porque ao menos $x \in [x]$ (pois $\sim$ é reflexiva). Logo $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.

Finalmente, provemos que (3) implica (1). Se existe algum z pertencente a $[x] \cap [y]$, então $z \sim x$ e $z \sim y$. Segue então da simetria e da transitividade que $x \sim y$. $\square$

Proposição 5.3. *Um conjunto X munido de uma relação de equivalência $\sim$ pode ser escrito como a união disjunta de suas classes de equivalência.*

Demonstração: As classes de equivalência de $\sim$ são subconjuntos de X , logo

$$\bigcup_{x \in X} [x] \subseteq X.$$

Todo elemento de z de X pertence à classe de equivalência $[z]$, pois $z \sim z$ (a relação é reflexiva). Ou seja, se $z \in X$, então $z \in \bigcup_{x \in X} [x]$. Isto prova a igualdade

$$(7) \quad X = \bigcup_{x \in X} [x]$$

Além disso, segue da Proposição 5.2 que duas classes de equivalência distintas são disjuntas (não se interceptam). $\square$

6. ALGUMAS SOLUÇÕES

Solução do Problema 3.

Dada uma reta r no Plano de Descartes, de equação

$$(8) \quad ax + by = c,$$

diremos que ela é vertical se $b = 0$ e que ela não é vertical se $b \neq 0$. Quando a reta é vertical, o coeficiente a tem de ser diferente de zero, pois $(a, b) \neq (0, 0)$. Daí, (8) é equivalente a $x = d$, com $d = \frac{c}{a}$. Quando a reta não é vertical, a equação em (8) pode ser dividida por b e reescrita como $y = mx + k$, com $m = -\frac{a}{b}$ e $k = \frac{c}{b}$.

O Problema 3 pede para mostrar que, dada uma reta r e um ponto P que não está em r , existe uma única reta s que é paralela a r e passa por P . Vamos dividir a solução em dois casos: (1) r não é vertical e (2) r é vertical.

No caso (1), seja $y = mx + k$ a equação de r ; seja (x_0, y_0) o ponto P . Defina s como sendo a reta de equação $y = mx + (y_0 - mx_0)$. É evidente que s passa por P . Queremos provar que s é paralela a r e que, se uma reta s' passa por P e $s' \neq s$, então s' não é paralela a r .

Para provar que r e s são paralelas, devemos mostrar que o sistema

$$\begin{cases} y = mx + k \\ y = mx + (y_0 - mx_0) \end{cases}$$

não tem solução. Se este sistema tivesse solução, necessariamente k seria igual a $y_0 - mx_0$. Mas $k \neq (y_0 - mx_0)$, porque r não passa por P . Logo o sistema não tem solução e as retas r e s são paralelas.

Seja agora s' uma reta que passa por (x_0, y_0) , $s' \neq s$. Dependendo de s' ser ou não ser vertical, a equação de s' pode ser $x = x_0$ ou $y = m'x + (y_0 - m'x_0)$ com $m' \neq m$. Os sistemas

$$\begin{cases} y = mx + k \\ x = x_0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y = mx + k \\ y = m'x + (y_0 - m'x_0) \end{cases}$$

têm soluções, a saber, respectivamente, $(x_0, mx_0 + k)$ e $(\frac{y_0 - m'x_0 - k}{m - m'}, \frac{m(y_0 - m'x_0 - k)}{m - m'} + k)$. Logo s' não é paralela a s .

No caso (2), seja (x_0, y_0) o ponto P , seja $x = d$ a equação de r . Defina s como sendo a reta de equação $x = x_0$. É evidente que s passa por P e é paralela a r (pois $d \neq x_0$, já que P não está em r). Queremos mostrar que, se s' passa por P e $s' \neq s$, então s' não é paralela a r . A única reta vertical que passa por P é a reta s . Como s' passa por P e é diferente de s , s' não é vertical e portanto a equação de s' é da forma $y = mx + k$. O ponto $(d, md + k)$ é o ponto de interseção de s' e r , logo s' e r não são paralelas, como queríamos.

Resultados de Geometria Analítica necessários para o Problema 4.

No Plano Cartesiano $\mathbb{R}^2$, define-se a *distância* entre os pontos $P = (p_1, p_2)$ e $Q = (q_1, q_2)$ pela fórmula

$$d(P, Q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}$$

É óbvio que $d(P, Q) = d(Q, P)$. Vamos usar sem demonstrar a *desigualdade triangular*

$$d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q),$$

válida para quaisquer pontos P, Q e R .

Dados um ponto A e um real positivo r , o círculo $C_{A,r}$ de centro no ponto A e raio r é o conjunto dos pontos X tais que $d(X, A) = r$. Segue então que um ponto $X = (x, y)$ pertence ao círculo de centro em $A = (a_1, a_2)$ e raio r se e somente se a equação

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = r^2$$

é satisfeita.

Proposição 6.1. *Dados A e B em $\mathbb{R}^2$ e $s > r > 0$ tais que $r + d(A, B) < s$, então os círculos $C_{A,r}$ e $C_{B,s}$ não possuem ponto em comum.*

Demonstração: Se $d(X, A) = r$, segue da desigualdade triangular que

$$d(X, B) \leq d(X, A) + d(A, B) = r + d(A, B) < s.$$

Isto mostra que, se X pertence ao círculo $C_{A,r}$, então X não pertence ao círculo $C_{B,s}$. □

No caso particular em que $A = (a, 0)$ e $B = (b, 0)$, temos $d(A, B) = |a - b|$ e, portanto, para $s > r > 0$, $r + d(A, B) < s \iff r + |a - b| < s \iff |a - b| < s - r \iff r - s < a - b < s - r \iff b - s < a - r$ e $a + r < b + s$. A Proposição 6.1 tem portanto a seguinte consequência.

Proposição 6.2. *Dados números reais a e b e números positivos r e s tais que $s > r > 0$ e $b - s < a - r < a + r < b + s$, então os conjuntos $L_{a,r}$ e $L_{b,s}$ (os quais chamamos de “retas do plano de Poincaré” na página 6) não se interceptam.*

Podemos demonstrar também a seguinte proposição.

Proposição 6.3. *Se $|b - a| > r$, então as retas do Plano de Poincaré L_b e $L_{a,r}$ não se interceptam.*

Demonstração: Se (x, y) está em $L_{a,r}$, então $y > 0$ e $(x - a)^2 + y^2 = r^2$. Daí

$$|x - a| < \sqrt{(x - a)^2 + y^2} = r < |b - a|.$$

Segue de $|x - a| < |b - a|$ que $x \neq b$, logo (x, y) não está em L_b . $\square$

Solução do Problema 4.

Dada uma reta t no plano de Poincaré e um ponto $P = (x_0, y_0)$ que não está em t , queremos mostrar que existem infinitas retas paralelas a t passando por P . Vamos dividir a solução em dois casos: $t = L_b$ para algum $b \in \mathbb{R}$ ou $t = L_{b,s}$ para algum $b \in \mathbb{R}$ e algum $s > 0$.

Caso 1: $t = L_b$.

Como P não está em t , temos $x_0 \neq b$. Logo $t' = L_{x_0}$ é uma reta passando por P . Ela não intercepta L_b porque todos os seus pontos são da forma (x_0, y) , todos os pontos de L_b são da forma (b, y') , e $x_0 \neq b$. Logo L_{x_0} e L_b são paralelas

Por outro lado, nenhuma reta do tipo L_a com $a \neq x_0$ passa por P . Então, para encontrar outras paralelas a t passando por P , temos de procurá-las entre as retas do tipo $L_{a,r}$. Pela Proposição 6.3, se $|b - a| > r$, então $L_{a,r}$ e L_b são paralelas. Para resolver o Problema no Caso 1, basta portanto mostrar que existem infinitos pares (a, r) , $r > 0$, satisfazendo $|b - a| > r$ tais que (x_0, y_0) está em $L_{a,r}$. Ou seja, queremos mostrar que existem infinitos pares (a, r) , com $r > 0$, satisfazendo

$$|b - a|^2 > r^2 \text{ e } r^2 = (x_0 - a)^2 + y^2;$$

ou seja, queremos mostrar que existem infinitos valores de a satisfazendo

$$(x_0 - a)^2 + y^2 < (b - a)^2,$$

inequação esta que é equivalente a (Verifique esta afirmação!)

$$(9) \quad 2a(b - x_0) < b^2 - (x_0^2 + y_0^2).$$

Suponhamos agora que $b - x_0 > 0$. Então a inequação (9) é equivalente a

$$(10) \quad a < \frac{b^2 - (x_0^2 + y_0^2)}{2(b - x_0)}.$$

Por outro lado, se $b - x_0 < 0$, (9) é equivalente a

$$(11) \quad a > \frac{b^2 - (x_0^2 + y_0^2)}{2(b - x_0)}.$$

Evidentemente existem infinitos valores de a satisfazendo as inequações (10) e (11). Nos dois subcasos ($b - x_0$ positivo ou negativo), mostramos que existem infinitas retas do tipo $L_{a,r}$ paralelas a L_b . É isto o que queríamos provar pois, como já observamos, $b \neq x_0$, pois (x_0, y_0) não está em L_b .

Caso 2: $t = L_{b,s}$.

Usando que t não passa em P , ou seja, que $(x_0 - b)^2 + y_0^2 \neq s^2$, mostraremos que existem infinitos pares (a, r) , $r > 0$, tais que $L_{a,r}$ passa por P e é paralela a $L_{b,s}$. Definindo $r_0 = \sqrt{(x_0 - b)^2 + y_0^2}$, temos que L_{b,r_0} passa por P . Além disso, t e L_{b,r_0} são paralelas (pois todos os pontos de t satisfazem $(x_0 - b)^2 + y^2 = s^2$, todos os pontos de L_{b,r_0} satisfazem $(x_0 - b)^2 + y^2 = r_0^2$ e $r_0 \neq s$)

Suponhamos primeiro que $(x_0 - b)^2 + y_0^2 < s^2$.

Em vista da Proposição 6.2, para provar que existem infinitas retas paralelas a t passando por P , basta mostrar que existem infinitos (a, r) , com $r > 0$, tais que

$$b - s < a - r < a + r < b + s \quad \text{e} \quad (x_0 - a)^2 + y_0^2 = r^2.$$

Isto é equivalente a mostrar que existem infinitos valores de a que satisfazem as inequações

$$(12) \quad b - s < a - \sqrt{(x_0 - a)^2 + y_0^2} \quad \text{e} \quad a + \sqrt{(x_0 - a)^2 + y_0^2} < b + s.$$

Como estamos supondo que $(x_0 - b)^2 + y_0^2 < s^2$, as inequações em (12) são satisfeitas para $a = b$. Além disso, as funções $f(a) = a - \sqrt{(x_0 - a)^2 + y_0^2}$ e $g(a) = a + \sqrt{(x_0 - a)^2 + y_0^2}$ são contínuas. Se uma função contínua h definida em $\mathbb{R}$ satisfaz as desigualdades $h(b) < k_1$ e $h(b) > k_2$ para constantes k_1 e k_2 , as desigualdades $h(a) < k_1$ e $h(a) > k_2$ continuarão sendo satisfeitas para todo a suficientemente próximo de b ou, mais precisamente, para todo a pertencente a um intervalo aberto contendo b . Daí, segue que existe um intervalo aberto I contendo b tal que, para todo a em I , as desigualdades $b - s < f(a)$ e $g(a) < b + s$ são satisfeitas. Mostramos que, para todo a em I , as desigualdades em (12) são satisfeitas. Isto é o que queríamos mostrar, pois existem infinitos elementos em I .

Manipulando com muito cuidado e engenhosidade as desigualdades que queremos demonstrar, é possível encontrar, em termos dos dados b, s, x_0 e y_0 , os limites de um tal intervalo I , sem que seja preciso falar de funções contínuas. Essa seria uma solução mais elementar, mas não mais fácil. Usar conceitos mais avançados muitas vezes torna mais fácil a solução de um problema elementar.

Resta considerar o caso em que $(x_0 - b)^2 + y_0^2 > s^2$. Os argumentos são praticamente idênticos ao caso em que $(x_0 - b)^2 + y_0^2 < s^2$, embora algumas variáveis troquem de lugar. Vamos apenas esboçar a solução. Queremos mostrar que existem infinitos pares (a, r) , $r > 0$, tais que

$$a - r < b - s < b + s < a + r \quad \text{e} \quad (x_0 - a)^2 + y_0^2 = r^2,$$

ou seja, queremos mostrar que as inequações

$$a - \sqrt{(x_0 - a)^2 + y_0^2} < b - s \quad \text{e} \quad b + s < a + \sqrt{(x_0 - a)^2 + y_0^2}$$

são satisfeitas por infinitos valores de a . Isto decorre de as desigualdades serem satisfeitas quando $a = b$ e da continuidade da função $\phi(a) = \sqrt{(x_0 - a)^2 + y_0^2}$.

REFERÊNCIAS

- [1] Os Elementos de Euclides, tradução de Irineu Bicudo. Editora da Unesp, 2009.
- [2] M. J. GREENBERG. Euclidean and Non-Euclidean Geometries, 3ª edição. W. H. Freeman, 2003.
- [3] R. HARTSHORNE. Geometry: Euclid and Beyond. Springer, 1997.
- [4] D. HILBERT. Foundations of Geometry, Second Edition. The Open Court Publishing Company, La Salle, Illinois, 1971 (tradução do original em alemão Grundlagen der Geometrie, 1903).
- [5] R. MILLMAN & G. PARKER. Geometry – a metric approach with models. Springer, 1991.
- [6] EDWIN MOISE. Elementary Geometry from an Advanced Standpoint. Addison Wesley, 1963.