

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA
DA COMPUTAÇÃO (IME-USP)

Licenciatura em Matemática

Uma introdução à geometria do origami estruturada pela teoria da resolução de problemas

André Bassani Cavalle - 14558029

Camille Mayumi Yamamoto de Moura - 15635715

Flávia Pereira Parente - 15452419

Leonardo Figliolino de Oliveira - 15469011

Disciplina: Geometria e Desenho Geométrico I (MAT 0230)

Professor: Severino Toscano do Rêgo Melo

São Paulo
2025

Resumo

O presente trabalho apresenta uma introdução à geometria do origami, utilizando a teoria da resolução de problemas como eixo metodológico para o ensino de geometria plana no 9º ano do Ensino Fundamental. A fundamentação teórica baseia-se nos Axiomas de Huzita-Hatori, um conjunto de sete regras que formalizam matematicamente as construções possíveis através de dobraduras retas. Ao contrário da geometria clássica de régua e compasso, a geometria do origami demonstra maior alcance algébrico, permitindo operações como a divisão exata de um segmento em três partes e a resolução de problemas historicamente complexos.

A proposta prática do estudo detalha a aplicação de problemas clássicos, especificamente a construção de $1/3$ do lado de um quadrado e a trissecção do ângulo, demonstrando suas provas através de semelhança de triângulos e do Teorema de Pitágoras. Além das demonstrações, o trabalho propõe um plano de aula interativo que utiliza a manipulação do papel para visualizar propriedades geométricas, como a soma dos ângulos internos de um triângulo. Conclui-se que o origami atua como um recurso didático poderoso, tornando o aprendizado de conceitos abstratos mais tátil, visual e engajador para os estudantes.

Palavras-chave: Geometria do Origami; Axiomas de Huzita-Hatori; Resolução de Problemas, Ensino de Matemática.

Abstract

The present study provides an introduction to origami geometry, employing the theory of problem-solving as a methodological framework for teaching plane geometry to 9th-grade students. The theoretical foundation is based on the Huzita-Hatori Axioms, a set of seven rules that mathematically formalize the constructions possible through straight folds. Unlike classical ruler-and-compass geometry, origami geometry demonstrates a broader algebraic reach, allowing for operations such as the exact division of a segment into three parts and the resolution of historically complex problems.

The practical proposal of the study details the application of classic problems, specifically the construction of $1/3$ of a square's side and the angle trisection, demonstrating their proofs through triangle similarity and the Pythagorean Theorem. In addition to the proofs, the paper proposes an interactive lesson plan that utilizes paper manipulation to visualize geometric properties, such as the sum of the interior angles of a triangle. It concludes that origami serves as a powerful didactic resource, making the learning of abstract concepts more tactile, visual, and engaging for students.

Keywords: Origami Geometry; Huzita-Hatori Axioms; Problem Solving; Mathematics Education.

Lista de Figuras

Figura 1.1 - Visualização de uma dobra	6
Figura 1.2 - Visualização axioma 01	7
Figura 1.3 - Visualização axioma 02	7
Figura 1.4 - Visualização axioma 03	8
Figura 1.5 - Visualização axioma 04	8
Figura 1.6 - Visualização axioma 05	9
Figura 1.7 - Visualização axioma 06	9
Figura 1.8 - Visualização axioma 07	10
Figura 2.1 - Visualização Problema 1 Passo 1	11
Figura 2.2 - Visualização Problema 1 Passo 2	12
Figura 2.3 - Figura resultante Problema 1 Passo 2	12
Figura 2.4 - Triângulos $\triangle GAE$ e $\triangle EBI$	13
Figura 3.1 - Visualização Problema 2 Passo 1	14
Figura 3.2 - Visualização Problema 2 Passo 2	14
Figura 3.3 - Visualização Problema 2 Passo 3	15
Figura 3.4 - Visualização Problema 2 Passo 4	15
Figura 3.5 - Visualização Problema 2 Passo 5	16
Figura 3.6 - Figura resultante Problema 2 Passo 5	16
Figura 4.1 - 10 encaminhamentos propostos por Allevato e Onuchic (2014) para a MEEAAM-RP	17
Figura 4.2 - Visualização Introdução Passo 1	18
Figura 4.3 - Visualização Introdução Passo 2	18
Figura 4.4 - Visualização Introdução Passo 3	19
Figura 4.5 - Visualização Introdução Passo 4	19

Sumário

1	Introdução	5
2	Os Axiomas de Huzita-Hatori	6
2.1	Os axiomas	6
3	Problemas Apresentados	11
3.1	Problema 1: "Construção de $\frac{1}{3}$ a partir do quadrado"	11
3.2	Problema 2: "Trissecção do ângulo"	13
4	Plano de Aula	17
4.1	Introdução	17
4.2	Problema 1	19
4.3	Problema 2	19
5	Bibliografia	20

1 Introdução

No início do século VII, um novo método de fabricação de papel chegou ao Japão. Na época, um tipo de papel fino e resistente chamado “washi” foi criado. A princípio, esse material era utilizado para a realização de cópias de sutras (textos do hinduísmo e do budismo) e outros registros. Contudo, mais tarde, começou a ser usado para rituais e para embrulhar oferendas religiosas. Entre os séculos XIV e XV, algumas famílias estabeleceram regras e padrões de etiqueta que incluíam o dobramento cerimonial do papel. Nesse contexto, a produção de papel aumentou e os tão famosos origamis se tornaram ainda mais populares. Foi então que, em 1797, “Hiden Senbazuru Orikata”, o livro de origami mais antigo do mundo, foi publicado.

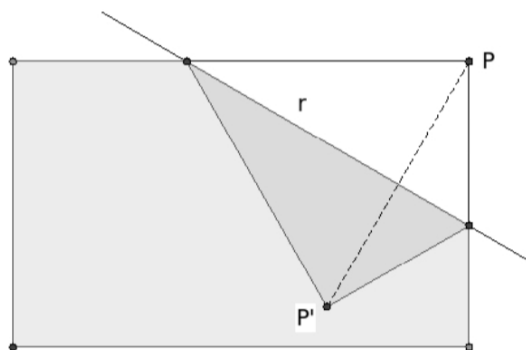
Ao longo dos anos, esta técnica foi difundida em outros campos, como na arte e na educação infantil. Nessa linha, o presente trabalho tem como objetivo apresentar uma introdução à geometria do origami para turmas de 9º Ano, a partir de problemas clássicos e uma metodologia motivada pela teoria da resolução de problemas.

2 Os Axiomas de Huzita-Hatori

Com o passar do tempo, matemáticos passaram a investigar a geometria determinada pela dobradura e origamis, de modo que em 1970 foi obtida sua primeira descrição. Humiaki Huzita foi responsável por desenvolver seis axiomas que descreviam transformações advindas da inclusão das dobraduras na geometria, todavia no ano de 2002 Koshiro Hatori apresentou uma dobra a qual não era descrita pelos axiomas de Huzita, evidenciando a necessidade de se adicionar mais axiomas à teoria, assim se definiu o sétimo axioma. Essa teoria axiomática resultante então ficou conhecida como *axiomas de Huzita-Hatori*. Mesmo existindo métodos no origami que envolvem dobras curvas, os axiomas de Huzita-Hatori se limitam a descrever apenas dobras retas, como será mostrado, .

Primeiramente, antes de enunciar os axiomas é necessário descrever os efeitos de se utilizar uma dobradura. Dado uma dobradura retilínea r em uma folha e um ponto P o qual está na parte a ser dobrada, o ponto P é levado para seu ponto simétrico em relação a r , esse ponto será nomeado de P' , o qual não está do mesmo lado de P em relação a r . Assim, dados o par de pontos P e P' temos que r é mediatriz desse par, ou seja, a dobradura parte o segmento de reta PP' em dois segmentos de mesma medida. Com relação a ângulos, temos que, dado um ponto V na dobradura, r é bissetriz do ângulo $\angle PVP'$.

Figura 1.1 - Visualização de uma dobra

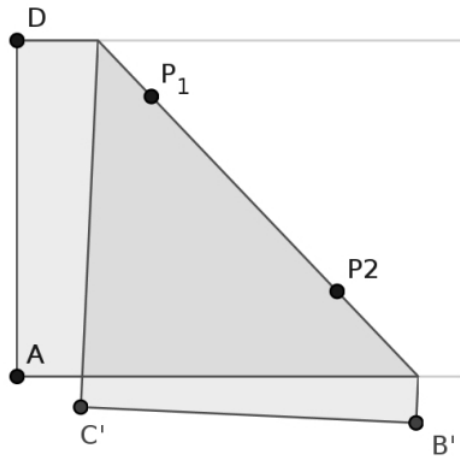


Fonte: Cavacami e Yolanda (2010, pág. 3)

2.1 Os axiomas

- O1. Dados dois pontos distintos, P_1 e P_2 , existe uma única dobra que passa por ambos.

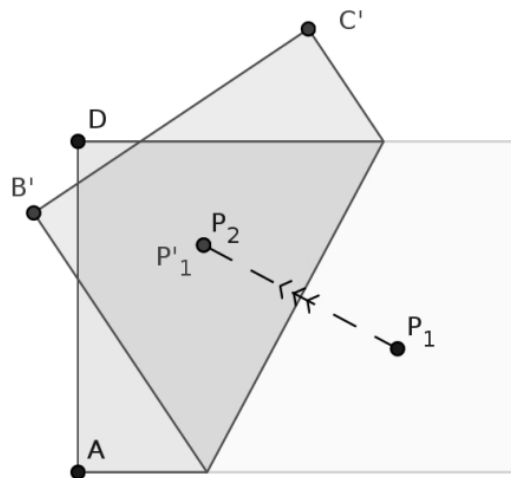
Figura 1.2 - Visualização axioma O1



Fonte: Cavacami e Yolanda (2010, pág. 4)

O2. Dados dois pontos distintos P_1 e P_2 existe uma única dobra a qual coloca P_1 sobre P_2 .

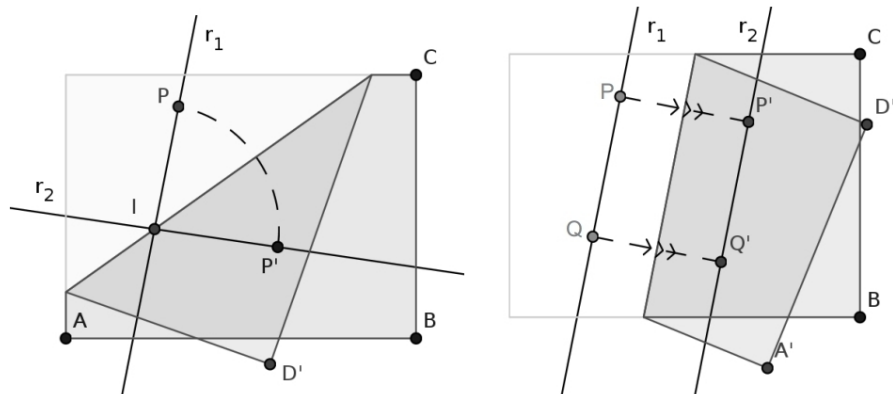
Figura 1.3 - Visualização axioma O2



Fonte: Cavacami e Yolanda (2010, pág. 4)

O3. Dadas duas retas distintas, paralelas ou concorrentes, r_1 e r_2 , existe uma dobradura que coloca a reta r_1 sobre r_2 .

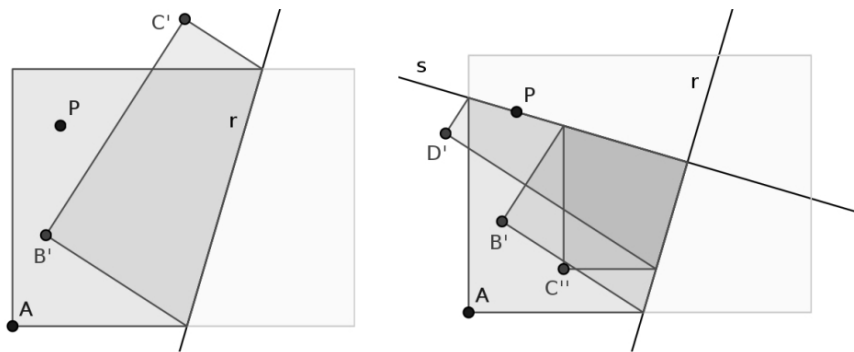
Figura 1.4 - Visualização axioma O3



Fonte: Cavacami e Yolanda (2010, pág. 3)

O4. Dado um ponto P e uma reta r existe apenas uma dobradura que é perpendicular a r e que passa por P .

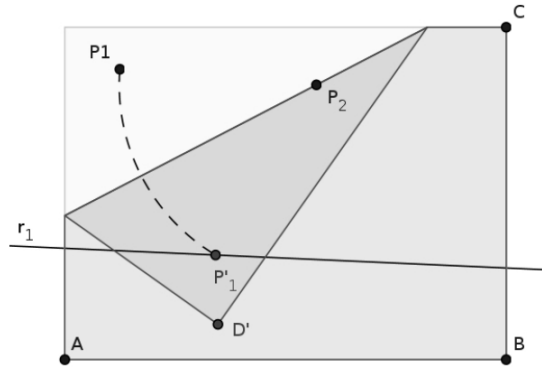
Figura 1.5 - Visualização axioma O4



Fonte: Cavacami e Yolanda (2010, pág. 5)

O5. Dados dois pontos distintos, P_1 e P_2 , e uma reta r existe uma única dobradura que passa por P_2 e que põe P_1 sobre r .

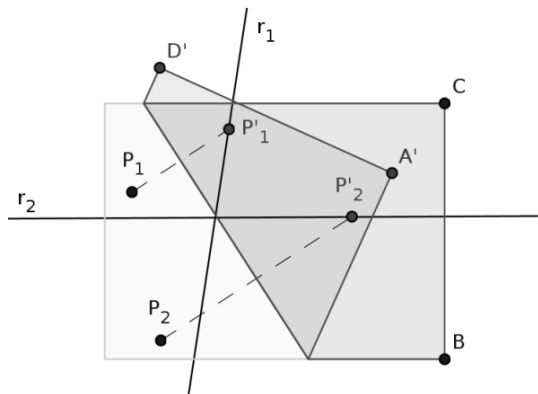
Figura 1.6 - Visualização axioma O5



Fonte: Cavacami e Yolanda (2010, pág. 5)

- O6. Dados dois pontos P_1 e P_2 distintos e duas retas r_1 e r_2 distintas existe uma dobradura a qual, simultaneamente, leva P_1 sobre r_1 e P_2 sobre r_2 .

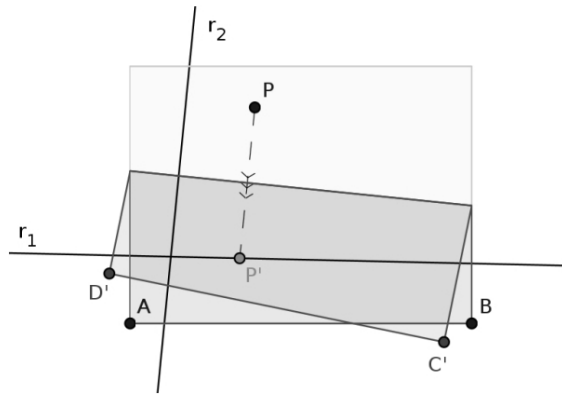
Figura 1.7 - Visualização axioma O6



Fonte: Cavacami e Yolanda (2010, pág. 6)

- O7. Dadas duas retas r_1 e r_2 e um ponto P existe uma dobradura perpendicular a r_2 que coloca P sobre r_1 .

Figura 1.8 - Visualização axioma O7



Fonte: Cavacami e Yolanda (2010, pág. 6)

3 Problemas Apresentados

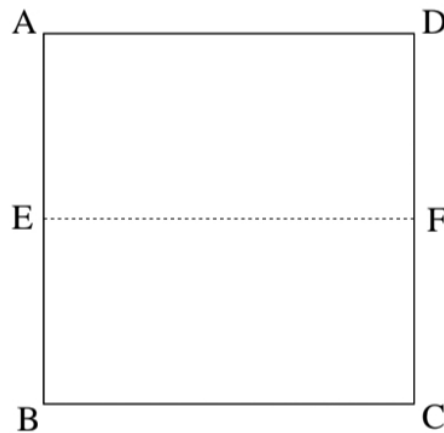
Dos problemas clássicos da geometria do origami, escolhemos dois para a introdução do assunto. Nessa linha, a motivo da escolha dos problemas vem da simplicidade dos enunciados e das suas respectivas provas.

3.1 Problema 1: "Construção de $\frac{1}{3}$ a partir do quadrado"

Em outras palavras, esse enunciado pode ser adaptado para: "Divida o lado do quadrado em três lados iguais". Assim, podemos seguir da seguinte forma:

Passo 1. Seja dado um quadrado ABCD. Suponha-o de lado igual a 1. Encontre os pontos médios E e F dos lados AB e CD, respectivamente.

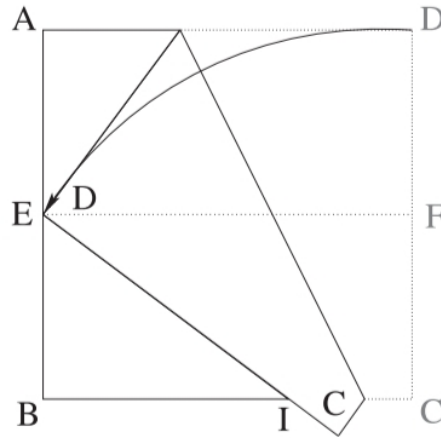
Figura 2.1 - Visualização Problema 1 Passo 1



Fonte: Cavacami e Yolanda (2010, pág. 10)

Passo 2. Leve o vértice D ao ponto E. O novo segmento CD determina sobre o antigo BC um ponto I. Temos que IC, depois de aberto, equivale a $\frac{1}{3}$ do lado do quadrado ABCD.

Figura 2.2 - Visualização Problema 1 Passo 2

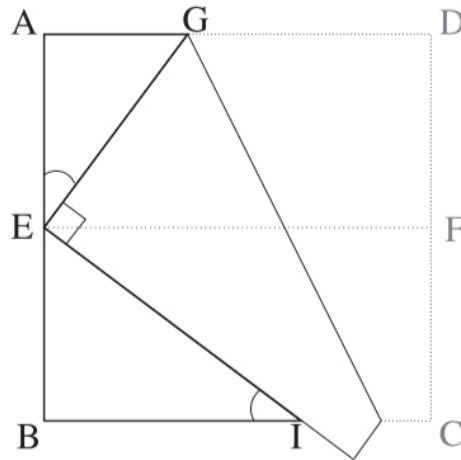


Fonte: Cavacami e Yolanda (2010, pág. 10)

Com isso, a demonstração segue por semelhança de triângulos:

Ao levar o vértice D ao ponto E, o antigo seguimento AD agora determina um ponto G. Os ângulos \widehat{AEG} e \widehat{BEI} são complementares, pois \widehat{GEI} é reto por ser o refletido de \widehat{GDC} que é reto. Os triângulos $\triangle GAE$ e $\triangle EBI$ são retângulos. Como \widehat{AEG} é complementar de \widehat{BEI} , então \widehat{AEG} é congruente à \widehat{BIE} . Como os triângulos são retângulos e possuem um dos ângulos congruentes, eles são semelhantes.

Figura 2.3 - Figura resultante Problema 1 Passo 2



Fonte: Cavacami e Yolanda (2010, pág. 10)

Denominaremos agora por x e y os segmentos AG e BI, respectivamente. Como G é um ponto entre A e D, $GD = GE = 1 - x$. Temos também que $AE = EB = \frac{1}{2}$.

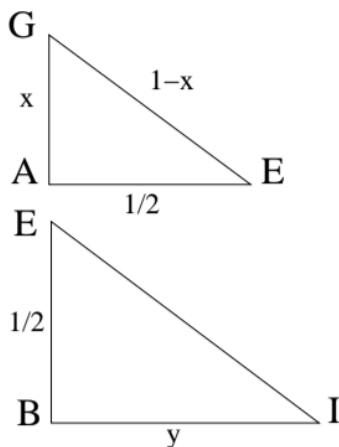
Por Pitágoras, temos no triângulo $\triangle GAE$:

$$(1 - x)^2 = x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \implies 1 - 2x + x^2 = x^2 + \frac{1}{4} \implies x = \frac{3}{8}$$

Pela semelhança dos triângulos $\triangle GAE$ e $\triangle EBI$, temos:

$$\frac{y}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{x} \implies \frac{y}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{8}} \implies y \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{4} \implies y = \frac{2}{3}$$

Figura 2.4 - Triângulos $\triangle GAE$ e $\triangle EBI$



Fonte: Cavacami e Yolanda (2010, pág. 11)

Logo,

$$IC = BC - BI = 1 - y = 1 - \frac{2}{3} \implies IC = \frac{1}{3}$$

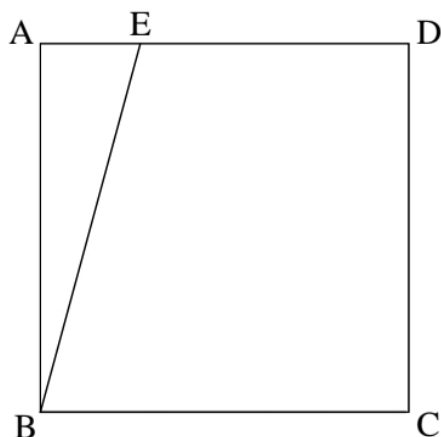
Como queríamos demonstrar.

3.2 Problema 2: "Trisseção do ângulo"

A questão de dividir um ângulo em três partes iguais utilizando apenas régua e compasso era famosa na Grécia antiga, problema esse que é impossível de resolver com apenas essas ferramentas. Entretanto, utilizando origamis a solução se apresenta de modo não muito complicado, como na resolução que será apresentada, escrita pela primeira vez por Hisashi Abe em 1980.

Passo 1. Seja um quadrado ABCD, marque um ponto E em um de seus lados, o considere em AD por simplicidade, de modo que o ângulo $E\hat{B}C$ seja agudo.

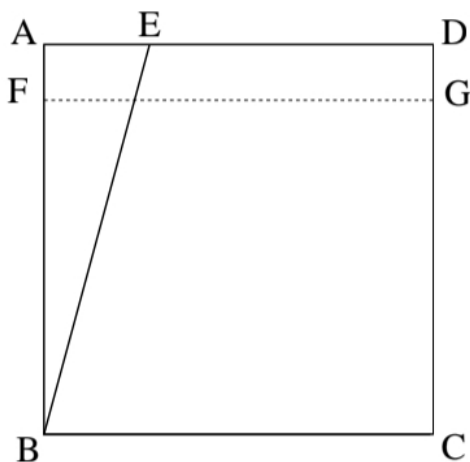
Figura 3.1 - Visualização Problema 2 Passo 1



Fonte: Cavacami e Yolanda (2010, pág. 16)

Passo 2. Marque então nos lados do quadrado ABCD dois pontos F e G distintos de modo que FG seja paralela a AD e esses pontos não sejam vértices do quadrado.

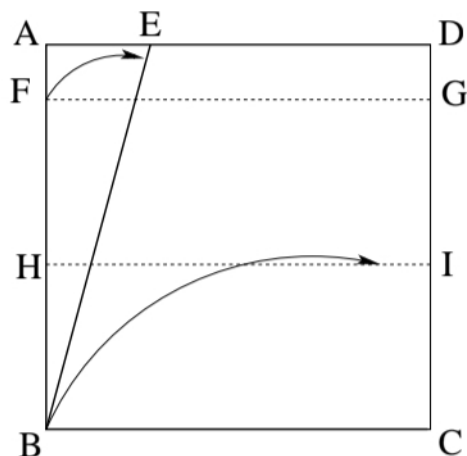
Figura 3.2 - Problema 2 Passo 2



Fonte: Cavacami e Yolanda (2010, pág. 17)

Passo 3. Marque então os pontos H e I, que são os pontos médios de FB e GC. Perceba que HI é paralela a FG

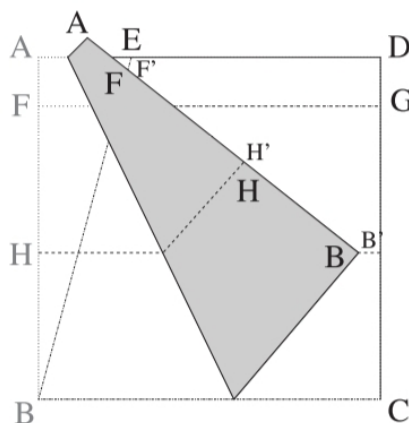
Figura 3.3 - Problema 2 Passo 3



Fonte: Cavacami e Yolanda (2010, pág. 17)

Passo 4. Realize uma dobradura de modo a levar o ponto F sobre EB e o ponto B sobre HI, que de fato existe, graças ao sexto axioma de Huzita-Hatori. Para uma melhor visualização, marque os pontos H', F' e B' (onde foram H, F e B), sobre o papel.

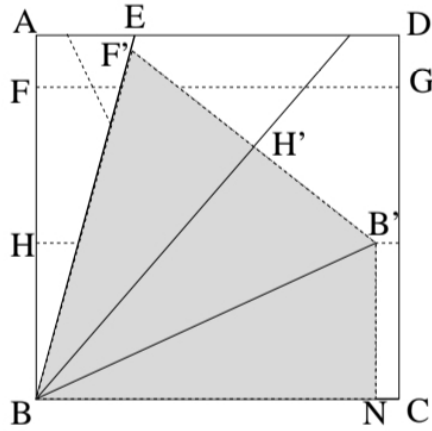
Figura 3.4 - Problema 2 Passo 4



Fonte: Cavacami e Yolanda (2010, pág. 17)

Passo 5. Abra novamente e trace os segmentos $F'B'$, $B'B$ e $H'B$. Trace por B' uma paralela a HB , com extremidade N . Temos que os triângulos $\triangle BB'N$, $\triangle BB'H'$ e $\triangle BF'H'$ são congruentes, com os ângulos em B congruentes.

Figura 3.5 - Problema 2 Passo 5

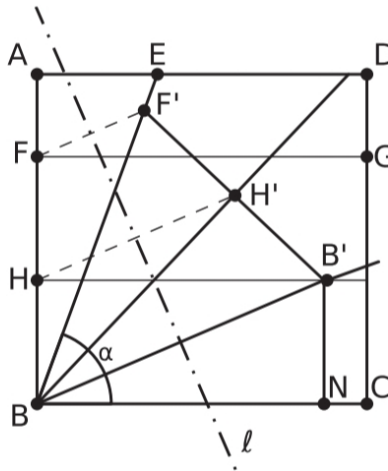


Fonte: Cavacami e Yolanda (2010, pág. 18)

Com isso, a demonstração segue por semelhança de triângulos:

Os triângulos $\triangle BB'N$ e $\triangle BB'H'$ são congruentes, pois possuem a hipotenusa BB' em comum e os catetos opostos aos ângulos no vértice B são congruentes, já que $NB' = BH = B'H'$. Os triângulos $\triangle BB'H'$ e $\triangle BF'H'$ são congruentes, pois possuem um cateto BH' em comum e os catetos opostos aos ângulos no vértice B são congruentes, pois $H'B' = HB = HF = H'F'$.

Figura 3.6 - Figura resultante Problema 2 Passo 5



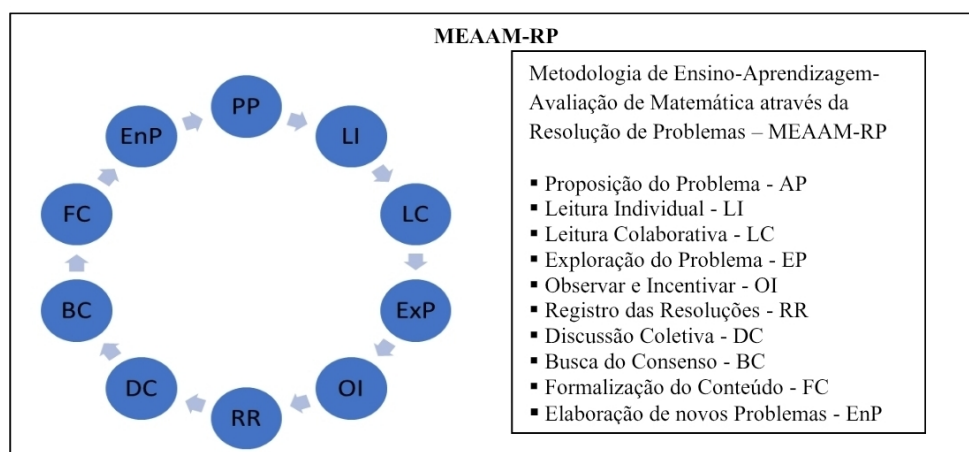
Fonte: Cavacami e Yolanda (2010, pág. 18)

Assim está mostrado a trissecção de ângulos agudos, sendo que para os obtusos o processo é semelhante, onde se é necessário realizar os mesmos passos aqui listados apenas na parte do ângulo que for excedente a 90° , todavia, posteriormente adicionando o resultado obtido ao terço do restante.

4 Plano de Aula

Grandes pesquisadores da área da resolução de problemas, como Lourdes Onuchic, defendem que os problemas apresentados em aulas de matemática devem ir além de um mero instrumento de consolidação de conceitos, mas sim como um ponto de partida para a construção de um novo conteúdo. Nesse contexto, alguns autores propõem uma série de etapas para abordar um problema dessa forma. Allevato e Onuchic (2014) propõem dez encaminhamentos para as aulas guiadas pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAM-RP).

Figura 4.1 - 10 encaminhamentos propostos por Allevato e Onuchic (2014) para a MEAAM-RP



Fonte: Marcatto e Onuchic (2025, pág. 4)

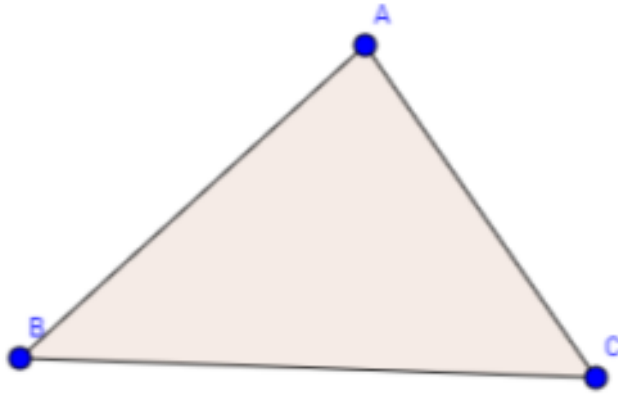
Desta forma, usando como base os encaminhamentos propostos por Allevato e Onuchic, os planos de aula elaborados pela Aline C. Freitas e a breve introdução ao assunto e exemplificação de alguns casos onde a geometria de dobraduras se mostra útil, será desenvolvido agora um possível plano de aula onde esses conhecimentos seriam aplicados para facilitar o ensino e aprendizagem da geometria plana em turmas do ensino

4.1 Introdução

Para introduzir os alunos ao uso de dobraduras na resolução de problemas da geometria plana será utilizada a demonstração visual que a soma dos ângulos internos de um triângulo resulta em 180° . Sua simplicidade ajuda a engajar os alunos e facilitar o entendimento.

Passo 1. Dado um triângulo qualquer, nomeie seus vértices como A, B e C, de modo que A é o vértice com o maior ângulo.

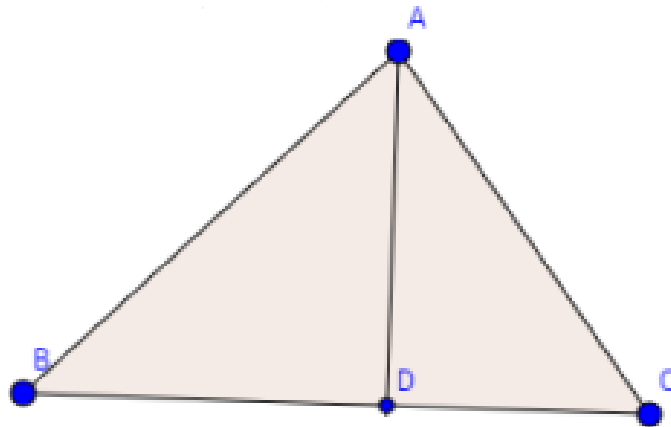
Figura 4.2 - Visualização Introdução Passo 1



Fonte: Freitas (2016, pág. 38)

Passo 2. Marque a altura relativa ao vértice A e nela faça uma dobra. Marque o ponto D como a intersecção da altura relativa a A e a semirreta CB.

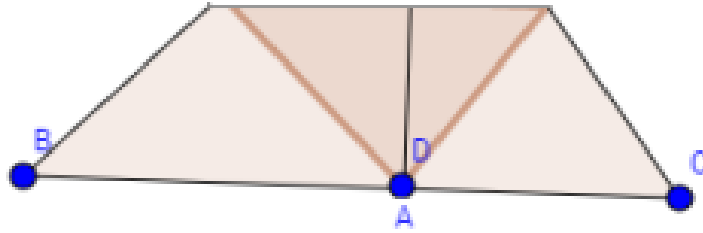
Figura 4.3 - Visualização Introdução Passo 2



Fonte: Freitas (2016, pág. 38)

Passo 3. Realize uma dobra de modo a deixar o ponto A sobre o ponto D.

Figura 4.4 - Visualização Introdução Passo 3



Fonte: Freitas (2016, pág. 38)

Passo 4. Dobre agora os pontos B e C sobre D.

Figura 4.5 - Visualização Introdução Passo 4



Fonte: Freitas (2016, pág. 38)

4.2 Problema 1

Feita a introdução para os estudantes, será proposto para que, sem o uso de régua, demarquem um terço da medida do lado de um quadrado de papel o qual será distribuído para todos, dando então tempo o suficiente para que explorem suas possibilidades e busquem caminhos próprios para resolver o problema. Por fim o docente responsável deve enunciar o processo aqui demonstrado para a classe.

4.3 Problema 2

Revisitando agora o estudo sobre ângulos, serão distribuídos pequenos quadrados de papel para os estudantes e será pedido que construam um ângulo em um de seus vértices, para que depois o dividam em três partes iguais sem utilizar esquadros. Dado tempo suficiente para que explorem o problema, o professor deve então mostrar para a classe o processo aqui desenvolvido, mostrando uma possível solução.

5 Bibliografia

- [1] National Geographic Brasil, 2022. *Qual a origem do origami?*. Disponível em: <https://www.nationalgeographicbrasil.com/historia/2022/11/qual-a-origem-do-origami>. Acesso em: 13 de dez. de 2025.
- [2] FREITAS, Aline C. *ORIGAMI: O uso como instrumento alternativo no ensino da geometria*, 2016. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/entities/publication/d2665b87-6be4-4a92-8f2d-36ca78266040>. Acesso em: 04 de dez. de 2025.
- [3] CAVACAMI, Eduardo e FURUYA, Yolanda K. S. *Explorando Geometria com Origami*, 2010. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 10 de dez. de 2025.
- [4] ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. *Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas*, 2004. Disponível em: ONUCHIC, L. R. et al. *Educação matemática: pesquisa em movimento*. Campinas: Autores Associados, 2004.
- [5] MARCATTO, Flavia Sueli Fabiani; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. *O Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas no Ensino Remoto*, 2025. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8665339>. Acesso em: 24 dez. 2025.