Os limites laterais de uma família monótona $E(t)$, $t \in \mathbb{R}$, de projeções ortogonais em um espaço de Hilbert H existem em todo ponto, na topologia da convergência ponto-a-ponto. Se H é separável, os limites laterais são iguais exceto em um conjunto enumerável de pontos. Esta nota é baseada na Seção 1.3 de "Spectral Theory of Linear Differential Operators and Comparison Algebras", H. O. Cordes.

Uma projeção ortogonal no espaço de Hilbert H é um operador limitado P satisfazendo $P = P^* = P^2$.

Proposição 1. *Um operador limitado T em H é uma projeção ortogonal se e somente se sua imagem ImT é o completamento ortogonal de seu núcleo.*

Proposição 2. *Dadas projeções ortogonais P e Q em H, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $Im P \subseteq Im Q$

(2) $PQ = QP = P$

(3) $\langle Px, x\rangle \leq \langle Qx, x\rangle$ *para todo* $x \in H$

Definição 1. *Diremos que $P \leq Q$ quando as três condições da Proposição anterior forem satisfeitas.*

Vamos usar sem comentar que, se P e Q são autoadjuntos, $PQ = P$ é equivalente a $QP = P$.

Lema 1. *Se P e Q são projeções ortogonais e $Q \leq P$, então, para todo $x \in H$,*

$$\|(P - Q)x\|^2 = \langle Px, x\rangle - \langle Qx, x\rangle.$$

Seja $E(t)$, $t \in \mathbb{R}$, uma família de projeções ortogonais não-decrescente em H, isto é, $E(t) \leq E(s)$ sempre que $t \leq s$.

Proposição 3. *Para todo $s \in \mathbb{R}$ existem projeções ortogonais $E(s-0)$ e $E(s+0)$ tais que, para todo $x \in H$, temos*

$$\lim_{t\to s^-} E(t)x = E(s-0)x \quad e \quad \lim_{t\to s^+} E(t)x = E(s+0)x.$$

Além disso, se $t_1 < s < t_2$, temos $E(t_1) \leq E(s-0) \leq E(s) \leq E(s+0) \leq E(t_2)$.

`Demonstração`: Segue da afirmação (3) da Proposição 2 que, para todo $x \in H$, a função real $f_x(t) := \langle E(t)x, x\rangle$ é não-decrescente. Logo, para todo $s \in \mathbb{R}$, existem os limites laterais

$$\lim_{t\to s^-} \langle E(t)x, x\rangle \quad \text{e} \quad \lim_{t\to s^+} \langle E(t)x, x\rangle.$$

Segue da identidade de polarização que, para todos x e y em H e $s \in \mathbb{R}$, existem os limites laterais

$$\lim_{t\to s^-} \langle E(t)x, y\rangle =: g^-(x,y,s) \quad \text{e} \quad \lim_{t\to s^+} \langle E(t)x, y\rangle =: g^+(x,y,s).$$

Claramente g^- e g^+ são sesquilineares em x e y, e satisfazem $|g^{\mp}(x,y,s)| \leq \|x\|\|y\|$. Segue do Lema de Riesz que existem operadores limitados $E(s-0)$ e $E(s+0)$ tais que, para todos x e y em H, temos

$$\text{(1)} \qquad \langle E(s-0)x, y\rangle = \lim_{t\to s^-} \langle E(t)x, y\rangle \quad \text{e} \quad \langle E(s+0)x, y\rangle = \lim_{t\to s^+} \langle E(t)x, y\rangle.$$

Os operadores $E(s-0)$ e $E(s+0)$ são autoadjuntos porque, para todos x e y em H, temos

$$\langle E(s\mp 0)x, y\rangle = \lim_{t\to s^{\mp}} \langle E(t)x, y\rangle = \lim_{t\to s^{\mp}} \langle x, E(t)y\rangle =$$
$$\overline{\lim_{t\to s^{\mp}} \langle E(t)y, x\rangle} = \overline{\langle E(s\mp 0)y, x\rangle} = \langle x, E(s\mp 0)y\rangle.$$

O operador $E(s-0)$ satisfaz $E(s-0)^2 = E(s-0)$ por que, para todos x e y em H, temos

$$\langle E(s-0)^2x, y\rangle = \lim_{t\to s^-} \langle E(t)E(s-0)x, y\rangle = \lim_{t\to s^-} \langle E(s-0)x, E(t)y\rangle =$$
$$\lim_{t\to s-} \left(\lim_{t'\to s^-} \langle E(t')x, E(t)y\rangle \right) = \lim_{t\to s^-} \left(\lim_{t'\to s^-,\ t<t'} \langle E(t)E(t')x, y\rangle \right) =$$
$$\lim_{t\to s^-} \left(\lim_{t'\to s^-,\ t<t'} \langle E(t)x, y\rangle \right) = \lim_{t\to s^-} \langle E(t)x, y\rangle = \langle E(s-0)x, y\rangle$$

(na antepenúltima igualdade, usamos a condição (2) da Proposição 2, já que podemos supor que $t < t'$ no limite em t'). Analogamente se prova que $E(s+0)^2 = E(s+0)$.

Se $t_1 < s$, temos, para todos x e y em H,

$$\langle E(s-0)E(t_1)x, y\rangle = \lim_{t\to s^-,\ t_1<t} \langle E(t)E(t_1)x, y\rangle = \lim_{t\to s^-,\ t_1<t} \langle E(t_1)x, y\rangle = \langle E(t_1)x, y\rangle,$$

logo $E(s-0)E(t_1) = E(t_1)$, logo $E(t_1) \leq E(s-0)$. Por outro lado, se $s < t_2$, temos, para todos x e y em H,

$$\langle E(s+0)E(t_2)x, y\rangle = \lim_{t\to s^+,\ t<t_2} \langle E(t)E(t_2)x, y\rangle = \lim_{t\to s^+,\ t<t_2} \langle E(t)x, y\rangle = \langle E(s+0)x, y\rangle,$$

logo $E(s+0)E(t_2) = E(s+0)$, logo $E(s+0) \leq E(t_2)$.

Além disso, como para todo $t < s$ e para todo $x \in H$ temos $\langle E(t)x, x\rangle \leq \langle E(s)x, x\rangle$, segue que

$$\langle E(s-0)x, x\rangle = \lim_{t\to s^-} \langle E(t)x, x\rangle \leq \langle E(s)x, x\rangle,$$

logo $E(s-0) \leq E(s)$. Analogamente se prova que $E(s) \leq E(s+0)$.

Resta provar o que o enunciado afirma sobre os limites. Se $t < s$, segue de $E(t) \leq E(s-0)$ e do Lema 1 que, para todo x em H,

$$\|(E(s-0) - E(t))x\|^2 = \langle E(s-0)x, x\rangle - \langle E(t)x, x\rangle$$

Segue portanto de (1) que $\lim_{t \to s^-} E(t)x = E(s-0)x$. Analogamente se prova que $\lim_{t \to s^+} E(t)x = E(s+0)x$. □

Esta demonstração pode ser facilmente adaptada para provar que existem projeções ortogonais $E(-\infty)$ e $E(+\infty)$ satisfazendo

$$\lim_{t \to -\infty} E(t)x = E(-\infty)x \quad \text{e} \quad \lim_{t \to +\infty} E(t)x = E(+\infty)x$$

para todo x em H, e $E(-\infty) \leq E(t) \leq E(+\infty)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Proposição 4. *No caso em que H é separável, o conjunto dos pontos s nos quais $E(s-0) \neq E(s+0)$ é enumerável.*

`Demonstração`: Para cada x em H, defina $S_x = \{s \in \mathbb{R};\, t \mapsto E(t)x$ é contínua em $s\}$. Queremos provar que $\bigcap_{x \in H} S_x$ tem complementar enumerável.

Não é difícil mostrar (usando o truque do $\frac{\epsilon}{3}$) que, se x é o limite de uma sequência $(x_k)_{k=1}^{\infty}$, então $\bigcap_{k=1}^{\infty} S_{x_k} \subseteq S_x$.

Como o espaço H é separável, ele possui um subconjunto enumerável B tal que todo x em H é o limite de uma sequência de elementos de B. Em vista da observação do parágrafo precedente, para provar que $\bigcap_{x \in H} S_x$ tem complementar enumerável basta portanto provar que, para todo $y \in B$, S_y tem complementar enumerável. Logo basta provar que cada S_x, $x \in H$, tem complementar enumerável.

Dado $x \in H$, segue do Lema 1 que, para todos s e t em $\mathbb{R}$,

$$\|(E(t) - E(s))x\| = |\langle E(t)x, x\rangle - \langle E(s)x, x\rangle|.$$

Logo, a função $t \mapsto E(t)x$ é contínua num ponto s se e somente se a função $f_x(t) = \langle E(t)x, x\rangle$, $t \in \mathbb{R}$, é contínua em s. Já observamos, na demonstração da Proposição 3, que f_x é não decrescente. Logo, f_x é contínua exceto em um conjunto de pontos enumerável. □