MAT0334-MAT5721 Análise Funcional

1^a Prova - 17 de maio de 2022

Nome : ______________________________

Número USP : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Professor: Severino Toscano do Rego Melo

1	
2	
3	
4	
Total	

Questão 1) (2 pts) Seja $T : X \to Y$ uma transformação linear contínua entre os espaços normados X e Y, seja D um subespaço denso de X. Suponha que $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in D$. Mostre que $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in X$.

Questão 2) (2 pts) Seja V um espaço vetorial com produto interno e seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ um conjunto ortonormal em V. Mostre que, para todo $x \in V$, $\lim\limits_{n\to\infty} \langle x_n, x\rangle = 0$.

`Sugestão`: use a desigualdade de Bessel.

Questão 3) (3 pts) Sejam M e N dois subespaços fechados do espaço de Hilbert H. Suponha que M e N sejam ortogonais um ao outro, isto é, que $\langle x, y \rangle = 0$ sempre que $x \in M$ e $y \in N$. Mostre que $M + N$ é fechado.

`Sugestão`: mostre que, se $(x_n + y_n)_n$ em $M + N$ é convergente, então $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ são de Cauchy.

Questão 4) (3 pts) Considere o espaço $C_c(\mathbb{R})$ das funções contínuas de suporte compacto de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$, munido da norma $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx$. Mostre que

(a) o subespaço $\{f \in C_c(\mathbb{R});\ f(0) = 0\}$ não é fechado em $(C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$,

(b) o subespaço $\{f \in C_c(\mathbb{R});\ f(x) = f(-x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$ é fechado em $(C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$.