# MAT 0334 - ANÁLISE FUNCIONAL
# 1° SEMESTRE DE 2022

SEVERINO TOSCANO MELO

## 1. Completamento de Espaços Métricos e de Espaços Normados

Recordemos que um *espaço métrico* $(X, d)$ é um conjunto $X$ munido de uma *métrica* (ou *distância*) $d$. Com isso queremos dizer que $d$ é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ satisfazendo, para todos $x, y, z \in X$: (i) $d(x, x) = 0$, (ii) $d(x, y) > 0$ se $x \neq y$, (iii) $d(x, y) = d(y, x)$ e (iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. O axioma (iv) é chamado de *desigualdade triangular.* Se $(X, d)$ é um espaço métrico, todo subconjunto $Y \subseteq X$ torna-se naturalmente um espaço métrico se tomarmos como métrica a restrição de $d$ a $Y \times Y$.

`Exemplo` **1.1.** A menos que se diga algo em contrário, sempre veremos $\mathbb{R}$ como um espaço métrico com a distância $d(x, y) = |x - y|$.

Problema **1.1.** Seja $(X, d)$ um espaço métrico. Mostre que $|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)$, para todos $x, y, z \in X$.

Problema **1.2.** Sejam $(X_1, d_1)$ e $(X_2, d_2)$ espaços métricos. Defina

$$d : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \to \mathbb{R}$$

por $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$. Mostre que $(X_1 \times X_2, d)$ é um espaço métrico.

A métrica $d$ do Problema 1.2 no produto cartesiano $X_1 \times X_2$ é chamada de *métrica do produto.* A menos que se diga algo em contrário, suporemos sempre que o produto cartesiano de dois espaços métricos está munido da métrica do produto.

Recordemos também que uma norma em um espaço vetorial real ou complexo $V$ é uma função $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ satisfazendo, para todos $u, v \in V$ e para todo escalar $\alpha$: (i) $\|x\| > 0$ se $x \neq 0$, (ii) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$ e (iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$. Segue de (ii) que $\|0\| = 0$. A propriedade (iii) é chamada de *desigualdade triangular.*

Problema **1.3.** Seja $V$ um espaço vetorial e seja $\|\cdot\|$ uma norma em $V$. Mostre que $d(u, v) = \|u - v\|$ define uma métrica em $V$.

Chama-se de *métrica induzida pela norma* a métrica definida no Problema 1.3.

Diz-se que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em um espaço métrico $X$ é *convergente* se existe $a \in X$ tal que $d(x_n, a) \longrightarrow 0$. O elemento $a$ é então chamado de *limite* da sequência, o que se denota por

$$x_n \longrightarrow a \quad \text{ou} \quad \lim_n x_n = a.$$

Problema **1.4.** Seja $V$ um espaço vetorial normado, sejam $(x_n)$ e $(y_n)$ sequências em $V$, sejam $\alpha$ e $\beta$ números complexos.
(a) Mostre que $x_n \to 0$ se e somente se $\|x_n\| \to 0$.
(b) Mostre que, se $x_n \to x$ e $y_n \to y$, então $\alpha x_n + \beta y_n \to \alpha x + \beta y$.

Uma função entre dois espaços métricos $f : X \to Y$ é *contínua em* $a \in X$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ sempre que $d(x, y) < \delta$. Diremos simplesmente que $f$ *é contínua* se $f$ for contínua em todo $a \in X$.

Problema **1.5.** Mostre que uma função entre dois espaços métricos $f : X \to Y$ é contínua em $a \in X$ se e somente se $f(x_n) \longrightarrow f(a)$ sempre que $x_n \longrightarrow a$.

Problema **1.6.** Seja $(X, d)$ um espaço métrico. Mostre que a distância $d : X \times X \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. `Sugestão`: use a desigualdade do Problema 1.1.

Problema **1.7.** Seja $V$ um espaço vetorial normado complexo.
(a) Mostre que $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.
(b) Dados $\alpha \in \mathbb{C}$ e $x \in V$, mostre que a função

$$V \ni y \longmapsto \|x + \alpha y\| \in \mathbb{R}$$

é contínua.

Diz-se que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma *sequência de Cauchy* no espaço métrico $(X, d)$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ sempre que $n, m \geq N$.

Problema **1.8.** Mostre que toda sequência convergente é de Cauchy. Dê exemplo de um espaço métrico no qual exista uma sequência de Cauchy que não converge.

`Definição` **1.2.** *Uma sequência* $(x_n)_n$ *em um espaço métrico é limitada se existem* $a \in X$ *e* $R > 0$ *tais que* $d(x_n, a) < R$ *para todo* $n$*.*

Problema **1.9.** Mostre que uma sequência $(x_n)_n$ em um espaço vetorial normado é limitada se e somente se existe $R > 0$ tal que $\|x_n\| < R$ para todo $n$.

Problema **1.10.** (a) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy no espaço métrico $X$. Mostre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada

Problema **1.11.** Seja $(X, d)$ um espaço métrico, sejam $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ sequências de Cauchy em $X$. Mostre que existe o limite $\lim\limits_n d(x_n, y_n)$.

Uma *subsequência* da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência da forma $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $x'_n = x_{\phi(n)}$ para alguma $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que[1] $\lim\limits_n \phi(n) = +\infty$. A própria sequência é uma subsequência de si própria.

Problema **1.12.** Seja $(x_n)_n$ uma sequência em um espaço métrico. (a) Mostre que, se $x_n \longrightarrow a$, então toda subsequência de $(x_n)_n$ também converge a $a$. (b) Mostre que, se toda subsequência de $(x_n)_n$ é convergente, então os limites de todas as subsequências são iguais entre si.
`Dica`: Dadas duas subsequências de uma sequência, uma terceira subsequência pode ser obtida intercalando as duas subsequências dadas.

Problema **1.13.** Mostre que, se uma sequência de Cauchy $(x_n)$ em um espaço métrico possui uma subsequência convergente, então ela converge.

Problema **1.14.** Seja $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x'_n = x_{\phi(n)}$, uma subsequência da sequência de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Mostre que existe e é nulo o limite $\lim\limits_n d(x_n, x'_n)$.

Problema **1.15.** Mostre que toda sequência de Cauchy $(x_n)$ em um espaço métrico $(M, d)$ possui uma subsequência $(x'_n)$ tal que

$$d(x'_n, x'_m) < 1/n, \text{ se } m \geq n.$$

[1]É comum se exigir também que $\phi$ seja estritamente crescente. Não é o que fazemos aqui.

**Definição 1.3.** *Um espaço métrico $(X, d)$ é* completo *se toda sequência de Cauchy em $X$ é convergente.*

**Definição 1.4.** *Um espaço de Banach é um espaço vetorial (real ou complexo), munido de uma norma $\|\cdot\|$, que se torna um espaço métrico completo quando munido da métrica induzida por $\|\cdot\|$.*

**Definição 1.5.** *Diz-se que duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ em um espaço vetorial $V$ são equivalentes se existirem constantes positivas $c$ e $d$ tais que $c\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq d\|v\|_1$ para todo $v \in V$.*

PROBLEMA **1.16.** Sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ duas normas equivalentes no espaço vetorial $X$. Mostre que $(X, \|\cdot\|_1)$ é completo se e somente se $(X, \|\cdot\|_2)$ é completo.

**Definição 1.6.** *Diz-se que um subconjunto $S$ de um espaço métrico $X$ é fechado em $X$ se, dada qualquer sequência $(x_n)_n$, $x_n \in S$, que converge em $X$, $x_n \longrightarrow a$, então o limite da sequência pertence a $S$, $a \in S$. Chama-se de fecho de um conjunto $S$ o menor fechado que contém $S$. O fecho de $S$ é denotado por $\overline{S}$.*

PROBLEMA **1.17.** Seja $(X, d)$ um espaço métrico, seja $S$ um subconjunto de $X$, seja $d_S$ a restrição de $d$ a $S \times S$. (a) Mostre que, se $(S, d_S)$ for completo, então $S$ é fechado em $X$. (b) Mostre que, se $(X, d)$ for completo e se $S$ for fechado em $X$, então $(S, d_S)$ é completo.

**Exemplo 1.7.** Todo espaço vetorial normado de dimensão finita é completo. Demonstremos essa afirmação primeiro para $\mathbb{C}^n$ munido da "norma-$\infty$",

$$\|\mathbf{z}\|_\infty = \max\{|z_1|, \cdots, |z_n|\},\ \mathbf{z} = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$|z_j| = \sqrt{x_j^2 + y_j^2},\ z_j = x_j + iy_j,\ x_j, y_j \in \mathbb{R},\ j = 1, \cdots, n.$$

Seja $(\mathbf{z}^k)_k$ uma sequência de Cauchy em $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$, $\mathbf{z^k} = (z_1^k, \cdots, z_n^k) \in \mathbb{R}^n$, $z_j^k = x_j^k + iy_j^k$, $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $j = 1, \cdots, n$. Segue do Problema 1.10 que $(\mathbf{z}^k)_k$ é limitada. Segue da definição da norma $\|\cdot\|_\infty$ que $(x_1^k)_k$, $(y_1^k)_k$, $\cdots$, $(x_n^k)_k$ e $(y_n^k)_k$ são sequências limitadas de números reais. Segue do Teorema de Bolzano-Weierstraß (toda sequência real limitada tem subsequência convergente) que $(x_1^k)_k$ possui uma subsequência convergente $('x_1^k)_k$, $'x_1^k = x_1^{\phi(k)}$. A sequência $('\mathbf{z}^k)_k$, $'\mathbf{z}^k = \mathbf{z}^{\phi(k)}$, é limitada e é tal que $('x_1^k)_k$ converge. Aplicando mais uma vez o Teorema de Bolzano-Weirstraß, podemos passar para uma subsequência $(''\mathbf{z}^k)_k$ tal que $(''x_1^k)_k$ e $(''y_1^k)_k$ sejam convergentes. Assim por diante, depois de aplicar o Teorema de Bolzano-Weirtrass $2n$-vezes, teremos obtido uma subsequência convergente da sequência $(\mathbf{z}^k)_k$. Logo, a sequência de Cauchy $(\mathbf{z}^k)_k$ possui uma subsequência convergente. Segue do Problema 1.13 que $(\mathbf{z}^k)_k$ converge, o que prova que $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$ é completo.

Seja agora $(V, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado complexo de dimensão $n$. Escolhendo uma base qualquer de $V$, a aplicação que manda um elemento de $V$ em suas coordenadas relativas à base escolhida define um isomorfismo linear $T : V \longrightarrow \mathbb{C}^n$. Podemos tomar o *pushforward* por $T$ da norma $\|\cdot\|$ para obter uma nova norma em $\mathbb{C}^n$, $|\!|\!|\mathbf{z}|\!|\!| = \|T^{-1}\mathbf{z}\|$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$. Como todas as normas em $\mathbb{C}^n$ são equivalentes à norma-$\infty$ (veja o Lema 1.8 a seguir), segue que existem constantes postivas $c$ e $d$ tais que

$$c\,|\!|\!|\mathbf{z}|\!|\!| \leq\ \|\mathbf{z}\|_\infty\ \leq\ d\,|\!|\!|\mathbf{z}|\!|\!|,\ \ \text{para todo } \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$$

ou, equivalentemente, fazendo $T^{-1}(z) = v$,

$$c\,\|v\|\ \leq\ \|Tv\|_\infty\ \leq\ d\,\|v\|,\ \ \text{para todo } v \in V. \tag{1}$$

Desta última desigualdade decorre que, se uma dada e arbitrária sequência $(v_n)_n$ é de Cauchy em $(V, \|\cdot\|)$, então $(Tv_n)_n$ é de Cauchy em $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$, que é completo; a sequência $(Tv_n)_n$ possui portanto uma subsequência convergente $(Tv'_n)_n$, $Tv'_n \longrightarrow \mathbf{z}_0$ em $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Aplicando novamente (1), concluímos que $v_n \longrightarrow T^{-1}(\mathbf{z}_0)$. Isto prova que $(V, \|\cdot\|)$ é completo. Para o caso de um espaço vetorial normado real de dimensão finita, a demonstração de que ele é completo é completamente análoga, até um pouco mais simples.

**Lema 1.8.** *Seja $\|\cdot\|$ uma norma qualquer em $\mathbb{C}^n$. Então existem constantes positivas $c$ e $d$ tais que*

$$c\,\|\mathbf{z}\| \;\le\; \|\mathbf{z}\|_\infty \;\le\; d\,\|\mathbf{z}\|, \quad \text{para todo } \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n. \tag{2}$$

`Demonstração`: Denotemos por $\mathbf{e}^1, \cdots, \mathbf{e}^n$, os elementos da base canônica de $\mathbb{C}^n$. Para todo $\mathbf{z} = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, temos

$$\|\mathbf{z}\| = \left\| \sum_{j=1}^n z_j \mathbf{e}^j \right\| \le \sum_{j=1}^n |z_j| \|\mathbf{e}^j\| \le \left( \sum_{j=1}^n \|\mathbf{e}^j\| \right) \max\{|z_1|, \cdots, |z_n|\},$$

o que prova a primeira das desigualdades em (2) para $c = \left( \sum_{j=1}^n \|\mathbf{e}^j\| \right)^{-1}$.

Definamos $\delta \coloneqq \inf\{\|z\|;\, \|z\|_\infty = 1\}$. Existe então uma sequência $(\mathbf{z}^k)_k$ em $\mathbb{C}^n$ tal que $\|\mathbf{z}^k\|_\infty = 1$ e $\|\mathbf{z}^k\| \longrightarrow \delta$. A sequência $(\|\mathbf{z}^k\|_\infty)_k$ é constante, logo $(\mathbf{z}^k)_k$ é limitada em $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$, logo possui subsequência convergente $(\mathbf{z}^{k_l})_l$, $\mathbf{z}^{k_l} \longrightarrow \mathbf{z}_0$ relativamente à norma $\|\cdot\|_\infty$. Segue da continuidade da norma (Problema 1.7a), que $\|\mathbf{z}_0\|_\infty = 1$ e, portanto, que $\mathbf{z}_0 \neq 0$.

Decorre da primeira das desigualdades de (2), que já está demonstrada, e da convergência de $(\mathbf{z}^{k_l})_l$ para $\mathbf{z}_0$ relativamente à norma $\|\cdot\|_\infty$ que $(\mathbf{z}^{k_l})_l$ converge para $\mathbf{z}_0$ também relativamente à norma $\|\cdot\|$. Invocando mais uma vez a continuidade das normas, segue que $\delta = \|\mathbf{z}_0\| \neq 0$ (já vimos que $\mathbf{z}_0 \neq 0$).

Dado $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ arbitrário e não-nulo, temos $\left\| \frac{z}{\|\mathbf{z}\|_\infty} \right\|_\infty = 1$, logo $\left\| \frac{z}{\|\mathbf{z}\|_\infty} \right\| \ge \delta$, logo $\|\mathbf{z}\| \ge \delta \|\mathbf{z}\|_\infty$. Isto prova a segunda das desigualdades em (2) para $d = 1/\delta$. □

Recordemos que um subconjunto $D$ de um espaço métrico $X$ é *denso* em $X$ se todo ponto de $X$ é o limite de uma sequência em $D$. O principal objetivo desta seção é mostrar que todo espaço vetorial normado $V$ "é" (ou seja, em um certo sentido pode ser visto como) um subespaço denso de um espaço de Banach. Esse espaço completo é chamado de *completamento* de $V$. Vamos mostrar isso em duas etapas. Primeiro vamos ver como se pode completar um espaço métrico. Depois veremos que, no caso em que esse espaço métrico é um espaço vetorial normado, o completamento é um espaço de Banach.

`Definição` **1.9.** *Uma isometria entre dois espaços métricos é uma aplicação $I : X \to Y$ que preserva a distância, isto é, $d_Y(I(x), I(y)) = d_X(x, y)$ para todos $x, y \in X$. Se existir uma bijeção isométrica de $X$ em $Y$, diremos que $X$ e $Y$ são isométricos.*

`Exemplo` **1.10.** No caso em que os espaços métricos são espaços vetoriais normados $V$ e $W$, uma aplicação linear $I : V \to W$ é uma isometria se e somente se $\|Iv\|_W = \|v\|_V$ para todo $v \in V$.

`Exemplo` **1.11.** Considere o intervalo aberto $(-1,1)$ e a reta $\mathbb{R}$ como espaços métricos, ambos munidos da métrica $d(x,y) = |x-y|$. A função $s : \mathbb{R} \to (0,1)$ definida por $s(x) = x/\sqrt{1+x^2}$ é contínua, bijetora, e a inversa de $s$ também é contínua. Dizemos então que $s$ é um homeomorfismo. Mas $s$ não é uma isometria. Uma sequência $(x_n)_n$ em $\mathbb{R}$ é convergente se e somente se $s(x_n)_n$ é convergente em $(-1,1)$. A sequência $t_n = 1 - 1/n$ em $(-1,1)$ é de Cauchy mas não é convergente, e $s^{-1}(t_n)$ não é de Cauchy.

Os espaços métricos $\mathbb{R}$ e $(-1,1)$ são homeomorfos mas não são isométricos, pois $\mathbb{R}$ é completo e $(0,1)$ não é. Além disso, $(-1,1)$ é limitado e $\mathbb{R}$ não é. Essas são duas propriedades que são preservadas por bijeções isométricas.

`Definição` **1.12.** *Um completamento de um espaço métrico $X$ consiste de um espaço métrico completo $\bar{X}$ e de uma isometria $\iota : X \to \bar{X}$ cuja imagem $D = \iota(X)$ é densa em $\bar{X}$.*

O exercício seguinte mostra que o completamento de um espaço métrico é *único a menos de uma isometria.*

Problema **1.18.** Sejam $(\bar{X}, \iota)$ e $(\tilde{X}, \eta)$ completamentos do espaço métrico $X$. Mostre que existe uma bijeção isométrica $I : \bar{X} \longrightarrow \tilde{X}$ tal que $\eta = I \circ \iota$.

Há mais de uma maneira de construir um completamento de um dado espaço métrico $X$. A mais comum talvez seja considerar o conjunto das classes de equivalência de sequências de Cauchy em $X$. É o que faremos aqui. Quase nunca será necessário referir-se à natureza dos elementos do completamento de um espaço métrico, o que é realmente relevante é a existência de um completamento $(X, \iota)$.

Seja $(X,d)$ um espaço métrico. Dadas duas sequências de Cauchy $(x_n)_n$ e $(x'_n)_n$ em $X$, diremos que $(x_n)_n \sim (x'_n)$ se e somente se $d(x_n, x'_n) \longrightarrow 0$.

Problema **1.19.** Mostre que a relação que acabamos de definir no conjunto de todas as sequências de Cauchy em $X$ é uma relação de equivalência.

Segue do Problema 1.14 que uma sequência de Cauchy é equivalente a qualquer uma de suas subsequências.

Problema **1.20.** Sejam $(x_n)_n$, $(x'_n)_n$, $(y_n)_n$ e $(y'_n)_n$ sequências de Cauchy em $X$ tais que $(x_n)_n \sim (x'_n)_n$ e $(y_n)_n \sim (y'_n)_n$. Mostre que $\lim_n d(x_n, y_n) = \lim_n d(x'_n, y'_n)$ (os dois limites existem pelo Problema 1.11).

Denotemos por $\tilde{X}$ o conjunto de todas as classes de equivalência de sequências de Cauchy em $X$. A classe de equivalência de uma sequência de Cauchy $(x_n)_n$ será denotada por $[(x_n)_n]$. O Problema 1.20 nos permite definir

$$\begin{array}{rcl} \tilde{d} : \tilde{X} \times \tilde{X} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ([(x_n)_n], [(y_n)_n]) & \longmapsto & \lim_n d(x_n, y_n) \end{array} \tag{3}$$

Problema **1.21.** Mostre que $(\tilde{X}, \tilde{d})$ é um espaço métrico.

Vamos enunciar como lemas alguns passos mais técnicos necessários para demonstrar o teorema principal desta seção (Teorema 1.15) .

**Lema 1.13.** *Sejam $(x_n^k)_n$, $k \in \mathbb{N}$, sequências de Cauchy no espaço métrico $X$, e seja $(y_n)_n$ uma sequência em $X$ tal que*

$$\lim_k \left( \lim_n d(y_n, x_n^k) \right) \; = \; 0. \tag{4}$$

*Então $(y_n)_n$ é uma sequência de Cauchy.*

`Demonstração`: Para todos índices $m, n, k$, aplicando duas vezes a desigualdade triangular, vem

$$d(y_n, y_m) \ \le \ d(y_n, x_n^k) \ + \ d(x_n^k, x_m^k) \ + \ d(x_m^k, y_m). \tag{5}$$

Como cada uma da parcelas do lado direito fica arbitrariamente pequena, é de se esperar que o lado esquerdo desta desigualdade também fique arbitrariamente pequeno. Para transformar esta ideia intuitiva em uma demonstração, é preciso argumentar cuidadosamente, usando as definições e hipóteses que nos foram dadas.

Tome arbitrariamente $\epsilon > 0$. Segue da hipótese (4) que existe um $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lim_n d(y_n, x_n^{k_0}) \ < \ \frac{\epsilon}{3}.$$

Logo existe $N_1$, que depende de $k_0$, tal que $d(y_n, x_n^{k_0}) < \frac{\epsilon}{3}$ para todo $n \ge N_1$. Como $(x_n^{k_0})_n$ é uma sequência da Cauchy, existe $N_2$, que também depende de $k_0$, tal que $d(x_n^{k_0}, x_m^{k_0}) < \frac{\epsilon}{3}$ sempre que $m, n \ge N_2$. Seja $N = \max\{N_1, N_2\}$. Segue de (5) com $k = k_0$ que $d(y_n, y_m) < \epsilon$ sempre que $n, m \ge N$. □

A técnica que usamos na demonstração do Lema 1.13 é conhecida como "o truque do $\frac{\epsilon}{3}$". É importante observar que o fato de $N$ depender de $k_0$ não invalida o argumento, pois $k_0$ foi produzido a partir apenas das hipóteses e do $\epsilon$ que foi tomado e não depende de $m$ ou de $n$.

**Lema 1.14.** *Seja $X$ um espaço métrico e considere o correspondente espaço métrico $\tilde{X}$ definido pelos Problemas 1.20 e 1.21. Se $[(x_n^k)_n]_k$ é uma sequência de Cauchy em $\tilde{X}$, então existe uma sequência de Cauchy $(y_n)_n$ em $X$ tal que*

$$\lim_k [(x_n^k)_n]_k \ = \ [(y_n)_n].$$

`Demonstração`: Para todos índices $m, n, k$, aplicando duas vezes a desigualdade triangular, vem

$$d(x_n^n, x_n^k) \ \le \ d(x_n^k, x_m^k) \ + \ d(x_m^k, x_m^n) \ + \ d(x_m^n, x_n^n). \tag{6}$$

Como cada uma da parcelas do lado direito fica arbitrariamente pequena, é de se esperar que o lado esquerdo desta desigualdade também fique arbitrariamente pequeno. Mas o argumento aqui precisa ser mais engenhoso do que o do Lema 1.13.

O Problema 1.15 implica que a sequência de Cauchy $[(x_n^k)_n]_k$ em $\tilde{X}$ possui uma subsequência que, por abuso de notação, será também denotada por $[(x_n^k)_n]_k$, tal que

$$l \ge k \implies \tilde{d}([(x_n^k)_n], [(x_n^l)_n]) \ < \ \frac{1}{k} \tag{7}$$

Para cada $k$, apliquemos novamente o Problema 1.15 para a sequência de Cauchy $(x_n^k)_n$ em $X$. Segue que a sequência $(x_n^k)_n$ possui uma subsequência, que será também denotada por $(x_n^k)_n$, satisfazendo

$$m \ge n \implies d(x_m^k, x_n^k) \ < \ \frac{1}{n}. \tag{8}$$

Como uma sequência de Cauchy é equivalente a cada uma de suas subsequências (Problema 1.14), podemos supor que, para cada $k$, o representante de $[(x_n^k)_n]$ satisfaz (8).

Note que podemos tomar $k = n$ em (8), pois a desigualdade vale para todo $k$. Segue de (6) e (8) que, para todos $n, k$, se $m \geq n$, temos:

$$d(x_n^n, x_n^k) \;\leq\; \frac{1}{n} \,+\, d(x_m^k, x_m^n) \,+\, \frac{1}{n}. \tag{9}$$

Segue de (7) que $\lim_m d(x_m^k, x_m^n) < \dfrac{1}{k}$ se $n \geq k$. Dados $k$ e $n$, escolha $m_0$ tal que $d(x_{m_0}^k, x_{m_0}^n) < \frac{1}{k}$. Substituindo $m$ por $m_0$ em (9), vem

$$n \geq k \implies d(x_n^k, x_n^n) < \frac{2}{n} + \frac{1}{k}.$$

Dado $\epsilon > 0$, para todo $k > \frac{3}{\epsilon}$ e para todo $n \geq k$, temos $d(x_n^k, x_n^n) < \epsilon$. Isto prova que

$$\lim_k \left( \lim_n d(x_n^k, x_n^n) \right) = 0$$

Segue do Lema 1.13 que a sequência $(x_n^n)_n$ é de Cauchy em $X$. Definindo $y_n = x_n^n$, $n \in \mathbb{N}$, segue da definição da métrica em $\tilde{X}$ que $[(y_n)_n]$ é o limite em $\tilde{X}$ da sequência $[(x_n^k)_n]_k$. □

O leitor que se sentir incomodado com as mudanças de notação que fizemos ao longo da demonstração do Lema 1.14 é convidado a reescrever a demonstação com uma notação mais detalhada, de modo que se possa definir $y_n$ em termos da sequência de Cauchy arbitrária $[(x_n^k)_n]_k$ inicialmente dada no enunciado. Uma maneira de exibir mais explicitamente a dependência de $y_n$ do dado inicial seria dizer existe $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ com $\lim_k \psi(k) = \infty$ e, para cada $k$, existe $\phi_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ com $\lim_n \phi_k(n) = \infty$, tais que $y_n = x_{\phi_n(n)}^{\psi(n)}$ para todo $n$. Diz-se então que a sequência $(y_n)_n$ é a *diagonal* da sequência de sequências $\left( (x_{\phi_k(n)}^{\psi(k)})_n \right)_k$. Este *truque da diagonal* é muito usado para demonstrar teoremas sobre sequências de sequências.

Todo o trabalho duro para demonstrar o próximo teorema já foi feito. Resta só concatenar as definições.

**Teorema 1.15.** *Dado $(X, d)$ um espaço métrico, considere o espaço métrico $(\tilde{X}, \tilde{d})$ do Problema 1.21 e defina $\iota : X \longrightarrow \tilde{X}$ atribuindo a cada $x \in X$ a classe de equivalência da sequência constante, $x_n = x$ para todo $n$, ou seja, $\iota(x) = [(x)_n]$. Então $(\tilde{X}, \iota)$ é um completamento de $X$.*

`Demonstração`: Segue do Lema 1.14 que $(\tilde{X}, \tilde{d})$ é um espaço métrico completo. Que a aplicação $\iota$ é uma isometria segue imediatamente da definição de $\tilde{d}$. Resta provar que a imagem de $\iota$ é densa em $\tilde{X}$. Dado $\mathbf{x} := [(x_n)_n] \in \tilde{X}$, a sequência $(\iota(x_k))_k$ converge a $\mathbf{x}$ em $\tilde{X}$. □

Mais importante do que conhecer a natureza dos elementos do completamento é simplesmente saber que todo espaço métrico pode ser completado:

**Corolário 1.16.** *Todo espaço métrico $X$ possui um completamento $(X, \iota)$ (que é único a menos de isometria, pelo Problema 1.18).*

Na prática, frequentemente identificaremos $X$ com a imagem de $\iota$ e diremos que todo espaço métrico "é" denso em seu completamento.

O objetivo principal desta seção é o teorema seguinte, que vamos demonstrar usando apenas o enunciado do Corolário 1.16. Este teorema também pode ser obtido usando a consequência do Teorema de Hahn-Banach enunciada na Proposição **??**.

**Teorema 1.17.** *Seja $V$ um espaço vetorial normado (real ou complexo). Existe um espaço de Banach $X$ e uma aplicação linear isométrica com imagem densa $\iota : V \to X$.*

`Demonstração`: Seja $(X, \tilde{d})$ um completamento do espaço métrico $(V, d)$, sendo $d$ a métrica induzida pela norma de $V$, seja $\iota : V \to X$ a isometria com imagem densa que vem junto com o completamento. Como $\iota$ é injetiva, sua imagem automaticamente herda a estrutura de espaço vetorial de $V$, bastando definir $\alpha\,\iota(v) + \iota(w) \coloneqq \iota(\alpha v + w)$ para todo escalar $\alpha$ e para todos $v, w \in V$. Para simplificar a notação, suporemos sem perda de generalidade que $V \subset X$ e que $\iota$ é a inclusão. Temos portanto um espaço métrico completo $(X, \tilde{d})$ possuindo um subconjunto denso $V$ com estrutura de espaço vetorial normado, e que em $V$ a métrica $\tilde{d}$ é induzida pela norma. Queremos mostrar que $X$ inteiro pode ser munido de uma estrutura de espaço vetorial normado compatível com a métrica.

Dados $x, y \in X$, tome sequências $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ em $V$ tais que $x_n \to x$ e $y_n \to y$ em $X$. Sendo convergentes, as duas sequências são de Cauchy em $X$. Daí a sequência $(x_n + y_n)_n$ também é de Cauchy em $X$, pois, para todos $m, n$, temos

$$\tilde{d}(x_m + y_m, x_n + y_n) = \|(x_m + y_m) - (x_n + y_n)\| = \|(x_m - x_n) + (y_m - y_n)\| \leq$$
$$\|x_m - x_n\| + \|y_m - y_n\| = \tilde{d}(x_m, x_n) + \tilde{d}(y_m, y_n)$$

Seja $s$ o limite de $(x_n + y_n)_n$. Para definir $x + y$ como sendo igual a $s$, precisamos provar que $s$ não se modifica se aproximarmos $x$ e $y$ por outras sequências em $V$, $(x'_n)_n$ e $(y'_n)_n$. Chame de $s'$ o limite de $(x'_n + y'_n)$. Considere agora as sequências $(z_n)_n$ e $(w_n)_n$ em $V$ definidas por

(10)
$$(z_1, z_2, z_3, z_4, \cdots) = (x_1, x'_1, x_2, x'_2, \cdots) \text{ e } (w_1, w_2, w_3, w_4, \cdots) = (y_1, y'_1, y_2, y'_2, \cdots).$$

Temos $z_n \to x$ e $w_n \to y$. Pelo argumento inicial, sabemos que $(z_n + w_n)_n$ converge em $X$, chamemos de $S$ seu limite. Ocorre que $(x_n + y_n)_n$ e $(x'_n + y'_n)_n$ são subsequências convergentes de $(z_n + w_n)_n$, sendo seus limites iguais a $s$ e a $s'$. Logo $S = s = s'$ (veja o Problema 1.12) e portanto podemos definir, para $x, y \in X$,

$$x + y \coloneqq \lim_n (x_n + y_n), \quad x_n, y_n \in V,\ x_n \to x,\ y_n \to y.$$

Um argumento análogo, mas menos trabalhoso, permite-nos definir, para $x \in X$ e $\alpha$ um escalar,

$$\alpha x \coloneqq \lim_n (\alpha x_n), \quad x_n \in V,\ x_n \to x. \tag{11}$$

Estando $X$ munido da estrutura de um espaço vetorial, com respeito à qual $V$ é um subespaço de $X$, verifiquemos que uma norma em $X$ pode ser definida por

$$\|x\| = \lim_n \|x_n\|, \quad x_n \in V,\ x_n \longrightarrow x,\ x \in X. \tag{12}$$

Em primeiro lugar, segue de $|\|x_n\| - \|x_m\|| \leq \|x_n - x_m\| = d(x_n, x_m)$ que $(\|x_n\|)_n$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$, logo convergente. Pode-se provar que o limite não depende da sequência escolhida para aproximar $x$ intercalando duas sequências dadas e argumentando como logo após (10). Logo vem (veja o Problema 1.6), se $x_n \longrightarrow x$ e $y_n \longrightarrow y$, $x, y \in X$, $x_n, y_n \in V$,

$$d(x, y) = \lim_n d(x_n, y_n) = \lim_n \|x_n - y_n\| = \|x - y\|.$$

Resta apenas verificar que $\|\cdot\|$ é uma norma em $X$. Segue imediatamente das definições que, para todos $x, y \in X$ e $\alpha$ escalar, $\|x\| \geq 0$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ e

$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$. Segue do item (a) do Problema 1.4 que $\|\cdot\|$ só se anula no vetor nulo. $\square$

Problema **1.22.** Preencha os detalhes omitidos na definição da multiplicação por escalar em $X$, equação (11).

`Definição` **1.18.** *Seja $V$ um espaço vetorial normado. Um completamento de $V$ é um par $(X, \iota)$, em que $X$ é um espaço de Banach, e $\iota : V \longrightarrow X$ é uma aplicação linear isométrica cuja imagem é densa em $X$ ("isométrica" significa que $\|\iota(v)\|_X = \|v\|_V$ para todo $v \in V$).*

O enunciado do Teorema 1.17 pode ser resumido portanto na afirmação de que todo espaço vetorial normado possui um completamento. A unicidade do completamento, a menos de isometria, é enunciada no problema seguinte.

Problema **1.23.** Seja $V$ um espaço vetorial normado e sejam $(X_1, \iota_1)$ e $(X_2, \iota_2)$ completamentos de $V$. Mostre que existe um único isomorfismo linear isométrico $I : X_1 \longrightarrow X_2$ tal que $I \circ \iota_1 = \iota_2$.

## 2. Espaços com Produto Interno

Nossos espaços vetoriais continuam sendo reais ou complexos. Quando não falarmos nada, subentende-se que o espaço é complexo.

`Definição` **2.1.** *Um produto interno em um espaço vetorial complexo $V$ é uma função $\langle\, , \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ satisfazendo, para quaisquer $x$, $y$ e $z$ pertencentes a $V$ e para todos escalares $\alpha$:*

*(i)* $\langle x, x\rangle \geq 0$,
*(ii)* $\langle x, x\rangle = 0$ *somente se* $x = 0$,
*(iii)* $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$,
*(iv)* $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$,
*(v)* $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.
*Diz-se que* $(V, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ *é um* espaço vetorial com produto interno.

Segue de (*iii*), (*iv*) e (*v*) acima que

$$\langle \alpha x, y\rangle = \bar{\alpha}\langle x, y\rangle \quad \text{e} \quad \langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle. \tag{13}$$

No caso de espaços vetoriais reais, o produto interno toma valores em $\mathbb{R}$ e o complexo conjugado em (v) e em (13) é dispensável.

Se os axiomas (iii), (iv) e (v) forem satisfeitos, diz-se que $\langle\, , \rangle$ é uma *forma sesquilinear hermitiana*, no caso complexo. No caso real, que é uma *forma bilinear simétrica*. Se os axiomas (i), (iii), (iv) e (v) forem satisfeitos, diz-se que $\langle\, , \rangle$ é uma *forma sesquilinear hermitiana positiva*, no caso complexo, ou que é uma *forma bilinear simétrica positiva*, no caso real. Um sinônimo de "produto interno" é *forma sesquilinear hermitiana positiva-definida*, no caso complexo, ou *forma bilinear simétrica positiva-definida*, no caso real.

Na literatura matemática contemporânea, a convenção quase universal é requerer-se que o produto interno satisfaça $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ e $\langle x, \alpha y\rangle = \bar{\alpha}\langle x, y\rangle$. Os físicos costumam seguir a convenção adotada aqui, que é usada também em [3].

`Exemplo` **2.2.** $\mathbb{C}^n = \{(x_1, \cdots, x_n);\, x_i \in \mathbb{C}\}$, munido do *produto interno euclidiano*

$$\langle (x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)\rangle = \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j y_j$$

`Exemplo` **2.3.** O espaço de todas as sequências complexas $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ com $x_j = 0$ exceto para finitos valores de $j$, munido de

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{x}_j y_j,$$

$\mathbf{x} = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $\mathbf{y} = (y_j)_{j\in\mathbb{N}}$.

`Exemplo` **2.4.** O espaço $C([a,b])$ de todas as funções complexas contínuas definidas no intervalo fechado $[a,b]$, munido de

$$\langle f, g \rangle \ = \ \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx.$$

`Exemplo` **2.5.** Seja $\Omega$ um aberto de $\mathbb{R}^n$. Denote por $C_c(\Omega)$ o espaço das funções contínuas de $\Omega$ em $\mathbb{C}$ que se anulam fora de um compacto contido em $\Omega$. Defina em $C_c(\Omega)$

$$\langle f, g \rangle \ = \ \int_\Omega \overline{f(x)} g(x) dx.$$

`Exemplo` **2.6.** Seja $\Omega$ um aberto de $\mathbb{R}^n$. Denote por $C_c^1(\Omega)$ o espaço das funções de classe $C^1$ de $\Omega$ em $\mathbb{C}$ que se anulam fora de um compacto contido em $\Omega$. Defina em $C_c^1(\Omega)$

$$\langle f, g \rangle^1 \ = \ \int_\Omega \langle \nabla \overline{f(x)}, \nabla g(x) \rangle dx,$$

onde $\nabla$ indica gradiente.

Problema **2.1.** Verifique que os cinco exemplos precedentes são de fato espaços vetoriais com produto interno.

`Definição` **2.7.** *Seja $V$ um espaço vetorial com produto interno. Diremos que dois elementos $x$ e $y$ de $V$ são* ortogonais*, e denotaremos isso por $x \perp y$, se $\langle x, y \rangle = 0$. Um subconjunto $S \subset V$ será* ortonormal *se quaisquer dois elementos distintos de $S$ forem ortogonais e se, além disso, $\langle x, x \rangle = 1$ para todo $x \in S$. Denotaremos por $\|\cdot\|$ a função*

$$\|x\| \ = \ \sqrt{\langle x, x \rangle}, \ \ x \in V \tag{14}$$

*(bem definido como real não-negativo devido ao item (i) na Definição 2.1).*

A equação (14) deve ser encarada, por enquanto, apenas como notação. Logo definiremos norma e veremos que $\|\cdot\|$ é, de fato, uma norma.

**Teorema 2.8.** *Seja $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço vetorial com produto interno, seja $\|\cdot\|$ dada por* (14) *e seja $S \subset V$ um subconjunto ortonormal finito, $S = \{x_1, \cdots, x_N\}$. Para cada $x \in V$, vale:*

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{N} |\langle x_j, x \rangle|^2 + \|x - \sum_{j=1}^{N} \langle x_j, x \rangle x_j \|^2 \tag{15}$$

`Demonstração`: Definindo

$$y_1 = \sum_{j=1}^{N} \langle x_j, x \rangle x_j \quad \text{e} \quad y_2 = x - y_1$$

temos:

$$\langle y_1, y_2\rangle \;=\; \langle\sum_{j=1}^{N}\langle x_j, x\rangle x_j, x - \sum_{k=1}^{N}\langle x_k, x\rangle x_k\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\langle\langle x_j, x\rangle x_j, x - \sum_{k=1}^{N}\langle x_k, x\rangle x_k\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\overline{\langle x_j, x\rangle}\langle x_j, x\rangle - \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\overline{\langle x_j, x\rangle}\langle x_k, x\rangle\langle x_j, x_k\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{N}|\langle x_j, x\rangle|^2 - \sum_{j=1}^{N}|\langle x_j, x\rangle|^2 \;=\; 0.$$

Daí:

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle y_1 + y_2, y_1 + y_2\rangle = \|y_1\|^2 + \|y_2\|^2.$$

A segunda parcela do segundo membro de (15) é, por definição, $\|y_2\|^2$. Além disso,

$$\|y_1\|^2 \;=\; \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\langle\, \langle x_j, x\rangle x_j, \langle x_k, x\rangle x_k\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\overline{\langle x_j, x\rangle}\langle x_k, x\rangle\langle x_j, x_k\rangle \;=\; \sum_{j=1}^{N}|\langle x_j, x\rangle|^2,$$

como queríamos. $\square$

A aplicação $x \mapsto y_1$ definida na demonstração acima é chamada *projeção ortogonal* sobre o espaço gerado por $\{x_1, \cdots, x_N\}$. Boa parte do nosso esforço nas próximas aulas será dirigido a dar um sentido à equação (15) no caso em que o conjunto ortonormal $S$ é infinito e a construir projeções ortogonais sobre certos espaços de dimensão infinita.

O corolário seguinte decorre imediatamente de (15).

**Corolário 2.9.** (`Desigualdade de Bessel`) *Sob as hipóteses do teorema anterior, temos*

$$\sum_{j=1}^{N}|\langle x_j, x\rangle|^2 \le \|x\|^2.$$

**Corolário 2.10.** (`Desigualdade de Cauchy-Schwarz`) *Para quaisquer elementos $x$ e $y$ de um espaço vetorial com produto interno, temos:*

$$|\langle x, y\rangle| \;\le\; \|x\| \cdot \|y\|. \tag{16}$$

`Demonstração`: Se $y = 0$, então são nulos ambos os membros da desigualdade que queremos demonstrar. Se $y \neq 0$, aplique o Corolário 2.9 ao conjunto ortonormal unitário $S = \{y/\|y\|\}$, e use que $|\langle x, y\rangle| = |\langle y, x\rangle|$. $\square$

Só na demonstração do Corolário 16, fizemos uso do do axioma (ii) da Definição 2.1. Mas é possível demonstrar também (16) sem fazer uso de (ii) (veja o Problema 2.2). Ou seja, o Teorema 2.8 e seus dois corolários valem também para formas hermitianas sesquilineares (ou para formas bilineares simétricas) para as quais $\|x\| := \langle x, x\rangle$ se anule para algum $x \in V$.

PROBLEMA **2.2.** Seja $V$ um espaço vetorial complexo (ou real) munido de uma forma hermitiana sesquilinear (ou, respectivamente, de uma forma bilinear simétrica). Dados $x, y \in V$, defina $f_{x,y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f_{x,y}(t) = \|x+ty\|^2$, $t \in \mathbb{R}$. (a) Escreva $f_{x,y}$ como um polinômio de segundo grau em $t$. (b) Use que $f_{x,y}(t) \geq 0$ para todo $t$ para mostrar que vale (16).

**Teorema 2.11.** *Seja $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço vetorial com produto interno. A função definida em* (14) *é uma norma em $V$.*

`Demonstração`: Já sabemos que $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in V$. Segue do item (ii) da Definição 2.1 que $\|x\|$ só se anula se $x = 0$. Segue de (iv) e (v) que $\|\alpha x\|\|^2 = \langle \alpha x, \alpha x\rangle = \|\alpha\|^2 \langle x, x\rangle$ e portanto $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ para todo escalar $\alpha$ e para todo $x \in V$. A desigualdade triangular decorre da desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\|x+y\|^2 = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Re\langle x, y\rangle$$

$$\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

como queríamos. □

Diz-se da norma definida em (14) que é *induzida* pelo produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, ou ainda que *provém* de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Diz-se que um espaço vetorial normado *é* um espaço com produto interno, se sua norma provém de um produto interno.

PROBLEMA **2.3.** Seja $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço vetorial (complexo) com produto interno. Mostre que a função $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ é contínua.

**O espaço das sequências de quadrado somável.**

Denotemos por $\ell^2$ o espaço de todas as sequências $\mathbf{x} = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $x_j \in \mathbb{C}$, tais que $\sum_j |x_j|^2$ é finito. Denotemos a raiz quadrada desta soma por $\|\mathbf{x}\|$. Nesta sub-seção provamos que $\ell^2$ é um espaço vetorial com produto interno e que $\|\cdot\|$ é a norma induzida por esse produto interno.

Dados $\mathbf{x} = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e $\mathbf{y} = (y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em $\ell^2$, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq (\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2)^{1/2} \cdot (\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2)^{1/2} \tag{17}$$

(esta é a desigualdade de Cauchy-Schwarz para o produto interno do Exemplo 2.2, aplicada aos vetores $(|x_1|, \cdots, |x_n|)$ e $(|y_1|, \cdots, |y_n|)$). O segundo membro de (17) é limitado por por $\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$. Logo temos, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|.$$

Donde segue que a série

$$\sum_{j=1}^{\infty} \bar{x}_j y_j \tag{18}$$

é absolutamente convergente.

Temos ainda, também para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^2)^{1/2} \leq (\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2)^{1/2} + (\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2)^{1/2} \tag{19}$$

(esta é a desigualdade triangular para a norma induzida pelo produto interno do Exemplo 2.2, aplicada aos vetores $(x_1, \cdots, x_n)$ e $(y_1, \cdots, y_n)$). O segundo membro de (17) é limitado por $\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$. Logo temos, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^2 \leq (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2. \tag{20}$$

Segue de (20) que se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ pertencem a $\ell^2$, então a soma

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^2$$

é finita. Logo $\ell^2$ é invariante pela adição de vetores, e portanto é um subespaço do espaço vetorial de todas as sequências complexas (claro que $\ell^2$ é invariante também por multiplicação escalar). Dado que a série em (18) converge, é fácil verificar que ela define um produto interno em $\ell^2$ e que $\|\cdot\|$ é a norma induzida por ele. Em particular, vale a desigualdade $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, que também pode ser obtida diretamente de (20).

**As normas $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$.**

`Exemplo` **2.12.** Para cada $p \geq 1$ real, define-se uma norma $\|\cdot\|_p : \mathbb{C}^n \to [0, \infty)$ por

$$\|(x_1, \cdots, x_n)\|_p = \left( \sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p}.$$

Define-se ainda $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{C}^n \to [0, \infty)$ por

$$\|(x_1, \cdots, x_n)\|_\infty = \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\}.$$

É fácil provar que $\|\cdot\|_p$ é uma norma se $p = 1$ ou se $p = \infty$. $\|\cdot\|_2$ é a norma induzida pelo produto interno canônico de $\mathbb{C}^n$ (Exemplo 2.2). Para um $p$ qualquer, $1 < p < \infty$, a desigualdade triangular para $\|\cdot\|_p$ é conhecida como a *Desigualdade de Minkowski* [2, Teorema II.1.3].

Problema **2.4.** Dado $p \geq 1$, seja $\ell^p$ os conjunto de todas as sequências complexas $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tais que a soma

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_n|^p$$

é finita. Denote por $\|\mathbf{x}\|_p$ o valor desta soma elevado à potência $1/p$. Usando que $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$ é um espaço vetorial normado, mostre que $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ é um espaço vetorial normado.

`Exemplo` **2.13.** Para cada $p \geq 1$,

$$\|f\|_p = \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

é uma norma em $C[a, b]$. O caso $p = 1$ é fácil. Para $p = 2$, isso decorre de $\|\cdot\|_2$ provir de um produto interno (veja o Exemplo 2.4). Para os demais valores de $p$, de uma versão mais geral da Desigualdade de Minkowski (veja a página 17).

É fácil ver que $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|; x \in [a, b]\}$ também é uma norma em $C[a, b]$.

**Paralelogramo e polarização.**

PROBLEMA **2.5.** (a) Seja $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço vetorial complexo com produto interno, e seja $\|\cdot\|$ a norma induzida. Demonstre a *identidade de polarização*:

$$\langle x, y\rangle \;=\; \frac{1}{4}\,[\,(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) - i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)\,].$$

(b) Demonstre que um espaço vetorial normado é um espaço com produto interno se e somente se a norma satisfaz a *lei do paralelogramo*:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \;=\; 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

(c) O que muda nos itens (a) e (b) no caso de espaços reais?
(d) Decida se são ou não espaços com produto interno $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$, $p \neq 2$.
Dica: A parte difícil deste problema é o "se" do item (b). Os Problemas 1.7 e 3.1 podem ser úteis aí.

**Espaços de Hilbert e completamento de espaços com produto interno.** Espaços com produto interno são casos especiais de espaços normados e portanto os conceitos e teoremas que vimos sobre espaços normados se aplicam também a espaços com produto interno. Em particular, faz sentido definir:

`Definição` **2.14.** *Um espaço de Hilbert é um espaço com produto interno completo*

Seja $V$ um espaço com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$, e considere o seu completamento $X$. Isto é (veja o Teorema 1.17), $X$ é um espaço de Banach e existe $\iota : V \to X$ linear com imagem densa tal que $\|\iota(v)\| = \|v\|$ para todo $v \in V$. Como a norma de $V$ provém de um produto interno, ela satisfaz a identidade do paralelogramo. Dados $x, y \in X$, tome sequências $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ em $V$ tais que $\iota(x_n) \longrightarrow x$ e $\iota(y_n) \longrightarrow y$. Usando o Problema 1.7 e o Problema 2.5-a, temos:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \;=\; \lim_n(\|\iota(x_n) + \iota(y_n)\|^2 + \|\iota(x_n) - \iota(y_n)\|^2) \;=$$

$$\lim_n(\|x_n + y_n\|^2 + \|x_n - y_n\|^2) \;=\; 2\,\lim_n(\|x_n\|^2 + \|y_n\|^2) \;=$$

$$2\,\lim_n(\|\iota(x_n)\|^2 + \|\iota(y_n)\|^2) \;=\; 2\,(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Logo, a norma do espaço de Banach $X$ satisfaz a lei do paralelogramo. Pelo Problema 2.5-b, a norma de $X$ provém de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$. Segue do Problema 2.5-a que esse produto interno satisfaz, para $u, v \in V$,

$$\langle u, v\rangle_V \;=\; \langle \iota(u), \iota(v)\rangle_X\,.$$

Em outras palavras, encarando a aplicação $\iota$ como uma inclusão e $V$ como subespaço de $X$, podemos dizer que o produto interno em $V$ se estende a um produto interno em $X$ que induz em $X$ a norma do completamento.

Podemos resumir essa discussão no seguinte enunciado.

**Teorema 2.15.** *O completamento de um espaço com produto interno é um espaço de Hilbert.*

## 3. Operadores Limitados

Problema **3.1.** Seja $V$ um espaço vetorial normado (complexo) e seja $T : V \to V$ uma função contínua tal que, para todos $x$ e $y$ em $V$, temos

$$T(x + y) = T(x) + T(y) \quad \text{e} \quad T(ix) = iT(x).$$

Mostre que $T$ é linear.
Sugestões: Use que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$. Use o Problema 1.5.

**Teorema 3.1.** *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear entre espaços vetoriais normados. São equivalentes:*
(i) *$T$ é contínua em algum ponto de $V$.*
(ii) *$T$ é contínua em todos os pontos de $V$.*
(iii) *Existe $C \geq 0$ tal que $\|Tx\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in V$.*

`Demonstração`: Suponha que $T$ é contínua em $a$, e seja $b \in V$. Dada sequência $x_n \to b$, segue do Problema 1.4-b que $x_n - b + a \to a$. Como $T$ é contínua em $a$, vem que $T(x_n - b + a) = Tx_n - Tb + Ta \to Ta$. Segue do Problema 1.4-b, então, que $Tx_n = T(x_n - b + a) + Tb - Ta \to Ta + Tb - Ta = Tb$. Logo, $T$ é contínua em $b$, pelo Problema 1.5. Isto prova que (i) implica (ii).

Suponha que vale (iii) e seja $(x_n)$ sequência em $V$ convergindo a 0. Pelo Problema 1.4-b, $\|x_n\| \to 0$. Como $\|Tx_n\| \leq C\|x_n\|$, vem que $\|Tx_n\| \to 0$ e, portanto, $Tx_n \to 0$ (de novo pelo Problema 1.4-b). Isto prova que $T$ é contínua em 0, logo que (iii) implica (i).

Suponha que não vale (iii). Logo, para todo $C \geq 0$, existe $x \in V$ tal que $\|Tx\| > C\|x\|$. Tomando $C = n \in \mathbb{N}$ na afirmação precedente, obtemos sequência $x_n \in V$ tal que $\|Tx_n\| > n\|x_n\|$. Em particular, $\|Tx_n\| > 0$, logo $Tx_n \neq 0$, logo $x_n \neq 0$. Tome

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{x_n}{\|x_n\|}.$$

Então $\|y_n\| = 1/\sqrt{n}$ e, portanto, $y_n \to 0$. Todavia,

$$\|Ty_n\| = \frac{1}{\sqrt{n}} T(\frac{x_n}{\|x_n\|}) > \frac{n\|x_n\|}{\sqrt{n}\|x_n\|} = \sqrt{n},$$

logo $Ty_n$ não tende a 0. Logo, $T$ não é contínua em 0. Isto prova a contra-positiva de (ii)$\Rightarrow$(iii). □

`Exemplo` **3.2.** $C[a, b]$ com a norma $\|\cdot\|_\infty$ do Exemplo 2.13 é um espaço de Banach. Isso vale também se pusermos no lugar de $[a, b]$ qualquer espaço topológico de Hausdorff compacto [1, Proposition 1.2].

`Exemplo` **3.3.** Para cada $p \geq 1$ real, o espaço $\ell^p$ introduzido no Exemplo 2.4 é completo. Veja [2, Exemplo H.6 da Seção I.5] para o caso $p = 2$. O caso $p$ qualquer real é análogo. Essas afirmações podem ser obtidas, também, como casos particulares de [4, Theorem 3.11] (aplicado a $\mathbb{N}$ com a medida da contagem).

É bem mais fácil provar que o espaço $\ell^\infty$ de todas as sequências complexas limitadas é um espaço de Banach, se munido da norma $\|(c_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_n |c_n|$.

Problema **3.2.** (a) Mostre que $\ell^p \subset \ell^q$ se $1 \leq p < q \leq \infty$.
(b) Mostre que $\ell^p$ é denso em $\ell^q$ se $1 \leq p < q < \infty$.
(c) Seja $\mathsf{c}_0$ o espaço de todas as sequências complexas $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $x_n \to 0$, seja $\mathsf{c}_c$ o espaço de todas as sequências complexas $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $x_n$ só é diferente de

zero para finitos valores de $n$. Mostre que $\mathsf{c}_0$ é um subespaço fechado de $\ell^\infty$ e que $\mathsf{c}_c$ denso em $\mathsf{c}_0$.
(d) Mostre que, se $p < \infty$, o fecho de $\ell^p$ em $\ell^\infty$ (com respeito à norma $\|\cdot\|_\infty$) é igual a $\mathsf{c}_0$.
(e) Conclua que $\ell^p$ não é denso nem fechado em $\ell^\infty$ se $p < \infty$.
Dica: O item (a) decorre de [2, Exercício II.1.8-e], mas é mais fácil que ele.

Problema **3.3.** Mostre que $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$ não é completo se $1 \leq p < \infty$ (veja o Exemplo 2.13).

Problema **3.4.** Sejam $X$ e $Y$ espaços vetoriais normados, sendo $X$ completo, e seja $T : X \to Y$ uma transformação linear contínua. Mostre que, se existe $C > 0$ tal que $\|Tx\| \geq C\|x\|$ para todo $x \in X$, então a imagem de $T$ é fechada.

**Teorema 3.4.** *Sejam $X$ e $Y$ espaços vetoriais normados, sendo $Y$ completo, e seja $D \subseteq X$ um subespaço denso de $X$. Dada uma transformação linear contínua $T : D \to Y$ ($D$ visto como um espaço vetorial normado com a norma herdada de $X$), existe uma única transformação linear contínua $\tilde{T} : X \to Y$ cuja restrição a $D$ é igual a $T$. Além disso, se $C \geq 0$ é tal que $\|Tx\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in D$, então $\|\tilde{T}x\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in X$.*

`Demonstração`: Como $T$ é contínua em $D$, segue do Teorema 3.1 que existe $C \geq 0$ tal que

$$\|Tx\| \leq C\|x\| \tag{21}$$

para todo $x \in D$. Dado $a \in X$, seja $(x_n)$ uma sequência em $D$ convergindo para $a$. Segue de (21) que

$$\|T(x_n) - T(x_m)\| = \|T(x_n - x_m)\| \leq C\|x_n - x_m\|.$$

Usando que $(x_n)$ é de Cauchy (pois converge), decorre então que $(Tx_n)$ também é de Cauchy. Como $Y$ é completo, $(Tx_n)$ é convergente, $Tx_n \to b$.

Seja $(y_n)$ uma outra sequência em $D$ convergindo para $a$, e chamemos de $\hat{b}$ o limite de $Ty_n$ (que existe, como acabamos de provar). Como a norma é contínua,

$$\|b - \hat{b}\| = \lim_n \|Tx_n - Ty_n\| \leq C \lim_n \|x_n - y_n\| = C\|a - a\| = 0.$$

Isto mostra que $b$ não depende da sequência escolhida. Obtemos assim aplicação $\tilde{T} : X \to Y$, $\tilde{T}a = b$.

Dados $x$ e $y$ em $X$ e $\alpha$ em $\mathbb{C}$, sejam $(x_n)$ e $(y_n)$ sequências em $D$ convergindo a $x$ e $y$, respectivamente. Segue do Problema 1.4 que $x_n + \alpha y_n \to x + \alpha y$. Segue da definição de $\tilde{T}$ e, de novo, do Problema 1.4 que

$$\tilde{T}(x + \alpha y) = \lim_n T(x_n + \alpha y_n) = \lim_n (Tx_n + \alpha T y_n) = \tilde{T}x + \alpha \tilde{T}y,$$

o que prova que $\tilde{T}$ é linear. Além disso, segue de (21) que

$$\|\tilde{T}x\| = \lim_n \|Tx_n\| \leq C\|x_n\| = C\|x\|,$$

o que prova que $\tilde{T}$ é contínua e que toda $C$ que faz o serviço em (21) para $T$ serve também para $\tilde{T}$.

A unicidade é consequência imediata da densidade de $D$ em $X$ □

**Os espaços $L^p$.**

O fato de $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$ não ser completo se $1 \le p < \infty$ (veja o Problema 3.3) coloca naturalmente a pergunta: será que se pode dar uma descrição de seu completamento mais concreta do que a oferecida pela demonstração do Teorema 1.17? A resposta é sim, mas para tanto precisamos da integral de Lebesgue.

Dado $p > 1$, denotemos por $L^p[a,b]$ o quociente do espaço vetorial

$$\{f : [a,b] \to \mathbb{C}; f \text{ é mensurável à Lebesgue e } \int_a^b |f(x)|^p dx < \infty\}$$

pela relação de equivalência

$$f \sim g \iff f(x) = g(x) \text{ q.t.p.}$$

Um abuso de notação comum, que também vamos cometer, é não distinguir entre uma função e sua classe de equivalência. A *Desigualdade de Hölder-Minkowski* [4, Theorem 3.5] nos diz que

$$\|f\|_p = \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

é uma norma em $L^p[a,b]$. O *Teorema de Riesz-Fisher* [4, Theorem 3.11] nos diz que $L^p[a,b]$ é um espaço de Banach para todo $p \ge 1$ e que $L^2[a,b]$ é um espaço de Hilbert com produto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx.$$

$C[a,b]$ é denso em $L^p[a,b]$ se $1 \le p < \infty$ (veja [3, Problem I.18] ou [4, Theorem 3.14]). Isto é, $L^p[a,b]$ é uma possível solução para o problema de achar-se um espaço de Banach contendo $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$ como subespaço denso. Segue da última parte do Teorema 1.17 que $L^p[a,b]$ é isometricamente isomorfo (isto é, é isomorfo por um isomorfismo que preserva norma) ao espaço $(C[a,b], \|\cdot\|_p)\tilde{}$ construído na demonstração do Teorema 1.17. Falando livremente, podemos dizer que esse isomorfismo "deixa fixo o subespaço denso $C[a,b]$" (a afirmação precisa é dada no enunciado do teorema). Ou ainda mais livremente, $L^p[a,b]$ *é* o completamento de $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$.

Os Teoremas de [4] que usamos na discussão precedente, na verdade, são enunciados e demonstrados para espaços muito mais gerais que $[a,b]$. Eles implicam também que, para cada $1 \le p < \infty$ e para cada aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, o completamento de

$$C_c(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C};\ f \text{ é contínua}$$
$$\text{e se anula fora de um compacto } K \subset \Omega\}$$

com respeito à norma

$$\|f\|_p = \left( \int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

é *igual* ao espaço $L^p(\Omega)$ das (classes de equivalência das) funções de $\Omega$ em $\mathbb{C}$ mensuráveis a Lebesgue tais que $\|f\|_p < \infty$. O *suporte* de uma $f \in C_c(\Omega)$ é o menor compacto fora do qual $f$ se anula. Chama-se $C_c(\Omega)$ de *o espaço das funções contínuas de suporte compacto.*

Para algumas aplicações, esta descrição de $L^p(\Omega)$, como sendo o completamento de $(C_c(\Omega), \|\cdot\|_p)$, é perfeitamente satisfatória. Mas resultados [2] que envolvam algo além da estrutura de espaço de Banach de $L^p(\Omega)$, ou da estrutura de espaço de Hilbert de $L^2(\Omega)$, em geral não fazem sentido no completamento abstrato.

O completamento de $C_c(\Omega)$ com respeito à norma $\|\cdot\|_\infty$ ($\Omega$ um aberto de $\mathbb{R}^n$ arbitrário) é o espaço $C_0(\Omega)$ de todas as funções contínuas $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tais que, para todo $\epsilon > 0$, existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $|f(x)| < \epsilon$ para todo $x \notin K$. Vejam [4, Theorem 3.17] para uma demonstração deste fato (enunciado e demonstrado para espaços topológicos de Hausdorff e localmente compactos, classe que inclui os abertos de $\mathbb{R}^n$).

No caso de $\Omega$ ser um aberto limitado, $C_0(\Omega)$ coincide com o espaço das funções complexas contínuas em $\Omega$ que admitem extensão contínua ao fecho de $\Omega$ que se anula na fronteira de $\Omega$. No caso de $\Omega$ não ser limitado, requeremos ademais que $f(x)$ tenda a zero quando $|x| \to \infty$. A demonstração da equivalência dessas duas definições de $C_c(\Omega)$ é um belo exercício de topologia do $\mathbb{R}^n$, que vamos omitir.

Problema **3.5.** Dado $\Omega$ um aberto limitado em $\mathbb{R}^n$, denote por $C(\bar{\Omega})$ o espaço das funções complexas contínuas definidas no fecho de $\Omega$. Mostre que a restrição a $\Omega$, $f \mapsto f|_\Omega$, define uma aplicação linear contínua injetora de $C(\bar{\Omega})$ em $L^2(\Omega)$.

Problema **3.6.** (a) Mostre que o funcional linear

$$C[a,b] \ni f \;\longmapsto\; f(a) \in \mathbb{C}$$

é contínuo em $C[a,b]$ munido da norma $\|\cdot\|_\infty$, mas não admite extensão linear contínua a $L^1[a,b]$ nem a $L^2[a,b]$.
(b) Mostre que o funcional linear

$$C[a,b] \ni f \;\longmapsto\; \int_a^b f(x)dx \in \mathbb{C}$$

é contínuo em $C[a,b]$ munido da norma $\|\cdot\|_\infty$, e admite extensões lineares contínuas a $L^1[a,b]$ e a $L^2[a,b]$.

Problema **3.7.** (a) Mostre que o funcional linear

$$C_c(\mathbb{R}) \ni f \;\longmapsto\; f(0) \in \mathbb{C}$$

admite extensão linear contínua a $(C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, mas não a $L^1(\mathbb{R})$ nem a $L^2(\mathbb{R})$.
(b) Mostre que o funcional linear

$$C_c(\mathbb{R}) \ni f \;\longmapsto\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \in \mathbb{C}$$

admite extensão linear contínua a $L^1(\mathbb{R})$, mas não a $L^2(\mathbb{R})$ nem a $C_0(\mathbb{R})$.
(c) Fixada $g \in C_c(\mathbb{R})$ não-nula, mostre que o funcional linear

$$C_c(\mathbb{R}) \ni f \;\longmapsto\; \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)} f(x)dx \in \mathbb{C}$$

admite extensão linear contínua a $L^2(\mathbb{R})$, a $L^1(\mathbb{R})$ e a $C_0(\mathbb{R})$.

[2] Por exemplo, a afirmação de que toda sequência convergente em $L^p(\Omega)$ possui uma subsequência convergente ponto-a-ponto em quase toda parte.

(d) Seja $g$ a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x^{-1/4} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ x^{-1} & \text{se } x > 1 \end{cases} .$$

Mostre que o funcional linear

$$C_c(\mathbb{R}) \ni f \longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx \in \mathbb{C}$$

está bem definido, admite extensão linear contínua a $L^2(\mathbb{R})$, mas não a $L^1(\mathbb{R})$, nem a $C_0(\mathbb{R})$.

## Referências

[1] R. G. Douglas, Banach Algebra Techniques in Operator Theory, Academic Press, 1972.
[2] C. S. Hönig, Análise Funcional e Aplicações, IME-USP, 1970.
[3] M. Reed & B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics I (Functional Analysis), Academic Press, 1980.
[4] W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, 1978.