LISTA DE EXERCÍCIOS

MAT 0230 - GEOMETRIA E DESENHO GEOMÉTRICO 1
2° SEMESTRE DE 2022
IME - USP
SEVERINO TOSCANO DO REGO MELO

Problema 1. Assumindo apenas os axiomas de incidência mostre que, dado um ponto P, existem pelo menos duas retas que passam que passam por P.

Problema 2. Seja S um conjunto finito, com n elementos, seja R o conjunto dos subconjuntos de dois pontos de R. Chame de pontos os elementos de S, chame de retas os elementos de R e diga que um ponto P está numa reta r se $P \in r$. Mostre que: (a) com essas interpretações, obtemos um modelo da geometria de incidência; (b) se $n = 3$, não existem retas paralelas; (c) se $n = 4$, o Quinto Postulado de Euclides é satisfeito; (d) se $n = 5$, dadas uma reta r e um ponto P que não está em r, existem pelo menos duas paralelas a r passando por P.

Problema 3. Chame de pontos os elementos do conjunto $S := \{A, B, C, D, E, F, G\}$, chame de retas os seguintes subconjuntos de S,

$$\{A, B, D\}, \quad \{A, F, E\}, \quad \{A, C, D\}, \quad \{G, F, B\}, \quad \{G, E, D\}, \quad \{D, F, C\}, \quad \{C, B, E\},$$

diga que um ponto P está numa reta r se $P \in r$. Mostre que: (a) com essas interpretações, obtemos um modelo da geometria de incidência, (b) não existem paralelas, (c) por cada ponto passam três retas.

Problema 4. Dados dois pontos A e B, mostre que $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \{P;\ P \text{ está em } \overleftrightarrow{AB}\}$.

Problema 5. Mostre que as duas condições $A*B*D$ e $A*C*D$ podem ser satisfeitas sem que valha $A*B*C*D$.

Problema 6. Mostre que, se $C \in \overrightarrow{AB}$ e $C \neq A$, então $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Problema 7. Seja D um ponto de $\overleftrightarrow{BC}$. Mostre que D pertence ao interior do ângulo $\angle BAC$ se e somente se $B * D * C$.

Problema 8. Seja D um ponto do interior do ângulo $\angle BAC$. Mostre que todos os pontos da semirreta $\overrightarrow{AD}$ distintos de A também estão no interior de $\angle BAC$.

Problema 9. Considere as semirretas opostas $\overrightarrow{OK}$ e $\overrightarrow{OJ}$ e os pontos H e L fora da reta $\overleftrightarrow{KJ}$. Mostre que, se H está no interior de $\angle KOL$, então L está no interior de $\angle HOJ$.

Problema 10. Mostre que congruência de triângulos é uma relação de equivalência. Isto é, mostre que, dados os triângulos ΔABC, ΔDEF e ΔGHI, valem as afirmações:

(1) $\Delta ABC \cong \Delta ABC$,
(2) $\Delta ABC \cong \Delta DEF \implies \Delta DEF \cong \Delta ABC$,
(3) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ e $\Delta DEF \cong \Delta GHI \implies \Delta ABC \cong \Delta GHI$.

Problema 11. Suponha que são válidos os axiomas de incidência, os axiomas de ordenamento e os cinco primeiros axiomas de congruência. Mostre que, se o seguinte axioma é satisfeito:

(C6h) Se $AB \cong DE$, $AC \cong DF$ e $\angle BAC \cong \angle EDF$, então $\angle ACB \cong \angle DFE$,

então necessariamente vale o sexto axioma de congruência (o caso LAL de congruência de triângulos).
`Sugestão`: (i) mudando de notação, obtenha mais uma congruência de ângulos, (ii) suponha que a terceira congruência de lados não seja satisfeita, transporte o segmento CB para a semirreta $\overrightarrow{FE}$ e note que a unicidade de (C4) terá sido violada.

Problema 12. Usando que suplementares de congruentes são congruentes (para um enunciado mais preciso, veja a Proposição 6.4 das Notas de Aula), mostre que ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Problema 13. Demonstre a recíproca do Teorema do Triângulo Isósceles. Mais precisamente, dados A, B e C três pontos não-colineares, mostre que, se os ângulos $\angle ABC$ e $\angle ACB$ são congruentes, então os segmentos AB e AC são congruentes. `Sugestão`*:* Imite a demonstração de Papus do Teorema do Triângulo Isósceles (Proposição 5.4), substituindo congruência LAL por congruência ALA.

Problema 14. Mostre que um triângulo é equilátero (seus três lados são dois-a-dois congruentes) se e somente se ele é equiângulo (seus três ângulos são dois-a-dois congruentes).
`Sugestões`: Resolva primeiro o Problema 13. Use também LLL.

Problema 15. Sejam A e B pontos distintos da reta r, seja P um ponto fora de r.
(a) Mostre que existe ponto P' fora de r tal que P e P' estão em lados opostos de r, os ângulos $\angle PAB$ e $\angle P'AB$ são congruentes e os segmentos AP e AP' são congruentes.
Seja Q o ponto de interseção do segmento PP' com a reta r.
(b) Mostre que, se $Q = A$, então os ângulos $\angle PAB$ e $P'AB$ são retos.
(c) Mostre que, se $Q \neq A$, então os triângulos ΔPAQ e $\Delta P'AQ$ são congruentes.
(d) Mostre que, se $Q \neq A$, então os ângulos $\angle PQA$ e $\angle P'QA$ são retos.

Algumas Soluções

Solução do Problema 9

Em primeiro lugar, vamos reformular o enunciado da questão, usando a definição de interior de ângulo e usando que os pontos J, O e K são colineares e, portanto, pelo Axioma I1, $\overleftrightarrow{OJ} = \overleftrightarrow{OK} = \overleftrightarrow{JK}$

São dados 5 pontos J, O, K, L e H tais que $J * O * K$, L e H estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{JK}$, e H e K estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{OL}$. Queremos provar que

(1) L e H estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{JK}$,
(2) J e L estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{OH}$.

O item (1) é satisfeito por hipótese. Vamos demonstrar o item (2) por absurdo. Se (2) for falso, existe J' tal que $J * J' * L$ e $J' \in \overleftrightarrow{OH}$. Pelo Axioma B3 e pela definição de semirreta, segue de $J' \in \overleftrightarrow{OH}$ que um dos três casos seguintes ocorre: (i) $J' = O$, (ii) $J' * O * H$, (iii) $J' \in \overrightarrow{OH}$ e $J \neq O$. Queremos provar que qualquer dessas três possibilidades nos leva a uma contradição.

Se valesse (i), as retas $\overleftrightarrow{JL}$ e $\overleftrightarrow{JK}$ teriam dois pontos em comum, $J' = O$ e J, logo seriam iguais, pelo Axioma I1. Logo L seria um ponto de $\overleftrightarrow{JK}$, o que contradiria a hipótese de L pertencer a um dos lados de $\overleftrightarrow{JK}$.

Se valesse (ii), teríamos: (I) J' e H estariam em lados opostos de $\overleftrightarrow{JK}$ (pois $J' * O * H$), e (II) J' e L estariam do mesmo lado de $\overleftrightarrow{JK}$ (pelo Lema 4.13 das Notas de Aula, pois $J' \in \overrightarrow{JL}$). Seguiria de (I) e (II), pela Proposição 4.4 das Notas de Aula (que é uma consequência quase imediata do Axioma B4), que L e H estariam em lados opostos de $\overleftrightarrow{JK}$, o que contradiria a hipótese que L e H estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{JK}$.

Se valesse (iii), teríamos: (α) J e J' estariam do mesmo lado de $\overleftrightarrow{OL}$, pelo Lema 4.13, pois $J' \in \overrightarrow{LJ}$, e ($\beta$) J' e H estariam do mesmo lado de $\overleftrightarrow{OL}$, pelo Lema 4.13, pois $J' \in \overrightarrow{OH}$. Seguiria de ($\alpha$) e ($\beta$), pelo Axioma B4, que J e H estariam do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{OL}$. Mas, segue das hipóteses $J * O * K$ e "H e K estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{OL}$", pela Proposição 4.4, que J e H estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{OL}$. Teríamos então um absurdo: J e H não podem estar, simultaneamente, do mesmo lado e em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{OL}$.

Solução do Problema 15

(a) Aplicando o Axioma C4 para o ângulo $\angle PAB$, a semirreta $\overrightarrow{AB}$ e o semiplano delimitado pela reta $\overleftrightarrow{AB}$ que não contém o ponto P, obtemos uma semirreta $\overrightarrow{AX}$, com X e P em lados opostos de $\overleftrightarrow{AB}$ tal que $\angle PAB \cong \angle XAB$. Aplicando o axioma C1 para os pontos A e P e a semirreta $\overrightarrow{AX}$, obtemos um ponto $P' \in \overrightarrow{AX}$ tal que $AP \cong AP'$. O ponto P' satisfaz as exigências do enunciado, pois, como $P' \in \overrightarrow{AX}$, $\angle XAB = \angle P'AB$.

(b) Segue da definição de Q e da hipótese $Q = A$ que $P * A * P'$, ou seja, as semirretas $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{AP'}$ são opostas e, portanto, os ângulos $\angle PAB$ e $\angle P'AB$ são suplementares. Pela construção do item (a), os ângulos $\angle PAB$ e $\angle P'AB$ são congruentes. Um ângulo reto é, por definição, um ângulo que é congruente a seu suplementar. Logo, os ângulos $\angle PAB$ e $\angle P'AB$ são retos.

(c) Se $Q \neq A$, então A não é um ponto da reta $\overleftrightarrow{PP'}$ (se fosse, as retas $\overleftrightarrow{PP'}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ passariam por dois pontos distintos, daí seriam iguais pelo Axioma I1, daí P seria um ponto de $\overleftrightarrow{AB}$, contrariando a hipótese). Podemos portanto considerar os triângulos ΔAPQ e $\Delta AP'Q$.

Pelo Axioma B3 e pela definição de semirreta, um dos dois casos ocorre: (i) $Q \in \overrightarrow{AB}$ ou (ii) $Q * A * B$. No caso (i), $\angle PAQ = \angle PAB$ e $\angle P'AQ = \angle P'AB$. Segue portanto da construção do item (a) que $\angle PAQ \cong \angle P'AQ$. No caso (ii), temos que $\angle PAQ$ é suplementar a $\angle PAB$ e $\angle P'AQ$ é suplementar a $\angle P'AB$. Logo, $\angle PAQ \cong \angle P'AQ$, pois suplementares de congruentes são congruentes. Ou seja, em qualquer caso temos $\angle PAQ \cong \angle P'AQ$.

Os triângulos ΔAPQ e $\Delta AP'Q$ têm em comum o lado AQ, os lados AP e AP' são congruentes pela construção do item (a), e os ângulos $\angle PAQ$ e $\angle P'AQ$ são congruentes. Por LAL (Axioma C6), ΔAPQ e $\Delta AP'Q$ são congruentes.

(d) É uma consequência imediata do item (c) que os ângulos $\angle PAQ$ e $\angle P'AQ$ são congruentes. Segue da definição de Q que $P * Q * P'$, ou seja, as semirretas $\overrightarrow{QP}$ e $\overrightarrow{QP'}$ são opostas, ou seja, os ângulos $\angle PAQ$ e $\angle P'AQ$ são congruentes e suplementares, ou seja, são retos.