

# INVERSÍVEIS E FREDHOLMS SÃO ABERTOS

OPERADORES DE FREDHOLM E TOPOLOGIA

2º SEMESTRE DE 2021

Uma álgebra de Banach  $A$  é um espaço de Banach munido de uma forma bilinear associativa

$$A \times A \ni (a, b) \longmapsto ab \in A$$

satisfazendo ademais que a norma é *submultiplicativa*:  $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$  para todos  $a, b \in A$ .

**Proposição 1.** *Seja  $A$  uma álgebra de Banach com unidade.  $GL(A) = \{a \in A; a \text{ é inversível}\}$  é aberto em  $A$ .*

**Demonstração:** Suponha que  $a \in A$  é inversível. Se  $\|b\| < \|a^{-1}\|^{-1}$ , então  $\|ba^{-1}\| < 1$ , e portanto a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (ba^{-1})^n$$

é absolutamente convergente. Para todo  $N$  natural,

$$(1 - ba^{-1}) \sum_{n=0}^N (ba^{-1})^n = \sum_{n=0}^N (ba^{-1})^n (1 - ba^{-1}) = 1 - (ba^{-1})^{N+1} \longrightarrow 1, \quad N \rightarrow \infty.$$

Ou seja,  $1 - ba^{-1} \in GL(A)$ ,  $(1 - ba^{-1})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (ba^{-1})^n$ . Logo  $(a - b) = (1 - ba^{-1})a$  é inversível se  $a \in GL(A)$  e  $\|b\| < \|a^{-1}\|^{-1}$ .  $\square$

**Corolário 1.** *Seja  $E$  um espaço de Banach. Então  $\{T \in \mathcal{B}(E); T \text{ é inversível}\}$  é aberto em  $\mathcal{B}(E)$ .*

**Demonstração:** A composição de operadores faz de  $\mathcal{B}(E)$  uma álgebra de Banach.  $\square$

**Corolário 2.** *Seja  $E$  e  $F$  espaços de Banach. Então  $\{T \in \mathcal{B}(E, F); T \text{ é inversível}\}$  é aberto em  $\mathcal{B}(E, F)$ .*

**Demonstração:** Suponha que o conjunto que queremos mostrar que é aberto seja não vazio e tome  $T_0 \in \mathcal{B}(E, F)$  inversível. Então a aplicação

$$\mathcal{B}(E) \ni T \longmapsto T_0 T \in \mathcal{B}(E, F)$$

é um isomorfismo de espaços de Banach. O conjunto que queremos mostrar que é aberto é a imagem por este isomorfismo de  $GL(\mathcal{B}(E))$ , que é aberto pelo Corolário 1.  $\square$

Sabemos que o quociente  $E/M$  de um espaço de Banach  $E$  por um subespaço fechado  $M$  torna-se um espaço de Banach se munido da norma

$$\|[x]\| = \inf_{m \in M} \|x + m\|, \quad x \in E.$$

Segue imediatamente da definição da norma que a projeção canônica  $x \mapsto [x]$  de  $E$  em  $E/M$  é um operador limitado, de norma menor do que ou igual a 1. No caso em que o espaço de Banach é uma álgebra de Banach  $A$  e o subespaço é um ideal bilateral fechado  $I$ , o quociente é uma álgebra de Banach (veja por exemplo [2, Theorem 1.1.1]).

Seja agora  $H$  um espaço de Hilbert. O conjunto  $\mathcal{K}(H)$  dos operadores compactos em  $H$  é um ideal bilateral fechado de  $\mathcal{H}$ . Segue do Teorema de Atkinson que um dado  $T \in \mathcal{B}(H)$  é um operador de Fredholm se e somente se  $[T]$  é inversível no quociente  $\mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H)$ . Como o conjunto dos elementos inversíveis de uma álgebra de Banach é aberto e a projeção canônica é contínua, segue que o conjunto dos operadores de Fredholm em  $\mathcal{B}(H)$  é aberto.

Sejam agora  $H_1$  e  $H_2$  espaços de Hilbert e seja  $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$  um operador limitado de imagem fechada. Seja  $P \in \mathcal{B}(H_2)$  a projeção ortogonal sobre  $\text{Im } T$ , seja  $T_0$  a restrição de  $PT$  a  $(\ker T)^\perp$ . Então  $T_0$  é um isomorfismo de espaços de Banach entre os espaços de Hilbert  $(\ker T)^\perp$  e  $\text{Im } T$ . Segue do Teorema 8.9 de [1] e das observações que se seguem que as dimensões (hilbertianas) de  $(\ker T)^\perp$  e  $\text{Im } T$  são iguais. Suponha, ademais, que  $H_1$  e  $H_2$  têm dimensão infinita e que  $T$  é um operador de Fredholm. Como as dimensões de  $(\ker T)^\perp$  e  $\text{Im } T$  são iguais e eles têm codimensão finita em  $H_1$  e  $H_2$ , respectivamente, segue que as dimensões de  $H_1$  e  $H_2$  são iguais. Daí segue que existe um operador unitário entre os dois espaços,  $U : H_1 \rightarrow H_2$ . Provamos:

**Proposição 2.** *Sejam  $H_1$  e  $H_2$  espaços de Hilbert de dimensão infinita. Suponha que existe um operador de Fredholm entre os dois espaços,  $T : H_1 \rightarrow H_2$ . Então existe um operador unitário entre os dois espaços,  $U : H_1 \rightarrow H_2$ .*

Vimos acima que segue do Teorema de Atkinson que o conjunto dos operadores de Fredholm em  $\mathcal{B}(H_2)$  é aberto. Deste fato e da proposição imediatamente precedente, decorre:

**Proposição 3.** *Sejam  $H_1$  e  $H_2$  espaços de Hilbert de dimensão infinita. Então o conjunto dos operadores de Fredholm em  $\mathcal{B}(H_1, H_2)$  é aberto.*

**Demonstração:** Como o conjunto vazio é aberto, basta provar a proposição supondo que existe um operador de Fredholm entre  $H_1$  e  $H_2$ . Segue da Proposição 2 que existe um operador unitário  $U : H_1 \rightarrow H_2$ . A aplicação  $T \mapsto U^{-1}T$  é uma isometria que leva o espaço de Banach  $\mathcal{B}(H_1, H_2)$  no espaço de Banach  $\mathcal{B}(H_1)$ . A imagem do conjunto dos operadores de Fredholm  $T : H_1 \rightarrow H_2$  por esta aplicação coincide com o conjunto dos operadores de Fredholm  $T : H_1 \rightarrow H_1$ , que é aberto.  $\square$

## REFERÊNCIAS

- [1] S. T. Melo. Notas de Análise Funcional, 2004. (<https://www.ime.usp.br/~toscano/disc/af.pdf>)
- [2] G. J. Murphy. *C\*-algebras and Operator Theory*.