

MAT 0240 - GEOMETRIA E DESENHO GEOMÉTRICO 2

1º SEMESTRE DE 2021

LISTA DE PROBLEMAS

1) [Baseado no Problema 11-1-3 do Moise-Downs] Sejam R_1 o retângulo de vértices ABCD e R_2 o retângulo de vértices EFGH (os vértices são listados em sentido anti-horário). Os lados AB e DC são paralelos aos lados EF e HG. Os lados EF e HG interceptam o lado BC e os pontos de interseção não são vértices de R_1 nem de R_2 . Os lados EF e HG não interceptam o lado AD. Mostre que a soma das áreas de R_1 e de R_2 é maior do que a área da região poligonal formada pela reunião de R_1 e R_2 . Em sua solução, você deve citar os postulados ou o teorema da Seção 11.1 do Moise & Downs que porventura sejam utilizadas.

2) [Problema 11-3-20 do Moise-Downs] Considere os triângulos retângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ABD$, $AB=5$, $AD=3$, $BC=3$. São retos os ângulos em D e C. É dado também que C e D estão em um mesmo dos dois semiplanos determinados pela reta que passa por A e B.

(a) Mostre que o segmento $\overline{DC}$ é paralelo a $\overline{AB}$.

(b) Calcule a área do trapézio $\square ABCD$.

3) [Problema Magno da Seção 11-3 do Moise-Downs] $\square ABCD$ é um quadrado. H, I, J e K são os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, respectivamente. Sejam P a interseção dos segmentos $\overline{AI}$ e $\overline{DH}$, Q a interseção de $\overline{AI}$ e $\overline{BJ}$, R a de $\overline{BJ}$ e $\overline{CK}$. Finalmente, seja S a interseção de $\overline{CK}$ e $\overline{DH}$.

Calcule a razão entre a área de $\square ABCD$ e a área de $\square PQRS$.

4) [Exercício 2.6.6 do Elon] Por um ponto arbitrário da diagonal maior de um paralelogramo, traçam-se duas paralelas aos lados, decompondo-o assim em quatro paralelogramos menores. Dois deles têm áreas iguais. Identifique-os e prove a afirmação.

5) Suponha que, no triângulo $\triangle ABC$, D está em $\overline{BC}$ e a semirreta $\overrightarrow{AD}$ é a bissetriz do ângulo $\angle BAC$. Seja E a interseção da reta $\overleftrightarrow{AB}$ com a reta paralela a $\overline{AD}$ que passa por C .

(a) Mostre que, no triângulo $\triangle ACE$, são iguais os ângulos adjacentes ao lado $\overline{CE}$.

Sugestão: use os Teoremas 9.8 e 9.9 do Moise-Downs.

(b) Mostre que $\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA}$.

Sugestão: use o Teorema 5.4 do Moise-Downs e o Corolário do Teorema 3.2 do Elon.

Comentário: Este problema é uma versão um pouco reformulada do Problema 12.3.9 do Moise-Downs.

Sua conclusão pode ser informalmente reenunciada na frase: *a bissetriz de um ângulo de um triângulo separa o lado oposto em segmentos cujos comprimentos são proporcionais aos lados adjacentes.*

6) Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle ADE$ dois triângulos semelhantes, seja H o comprimento da altura de $\triangle ABC$ relativa à base $\overline{BC}$, seja h o comprimento da altura de $\triangle ADE$ relativa a $\overline{DE}$. Mostre que $\frac{h}{H} = \frac{DE}{BC}$.

7) Sejam D um ponto do segmento $\overline{AC}$ e E um ponto de $\overline{AB}$. Suponha que $\overline{DE}$ e $\overline{BC}$ sejam paralelos. Seja h_1 a distância entre as retas $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{CB}$, seja h_2 a distância entre o ponto A e $\overleftrightarrow{DE}$. Defina ainda $b_1 = BC$ e $b_2 = DE$.

(a) Sem usar a existência da função área, mostre que $b_2 h_2 + (b_1 + b_2) h_1 = b_1 (h_1 + h_2)$.

Sugestão: manipule algebricamente a equação que você deseja mostrar que é verdadeira e verifique que ela é equivalente a uma outra equação que decorra do problema precedente.

(b) Usando a existência da função área e fórmulas para áreas deduzidas em aula, mostre que a fórmula demonstrada no item precedente é equivalente à afirmação de que a área do triângulo $\triangle ABC$ é igual à soma das áreas do triângulo $\triangle ADE$ e do trapézio $\square DEBC$.

8) Seja Π um plano e seja O um ponto de Π . Defina $\phi : \Pi \rightarrow \Pi$ determinando que $X' = \phi(X)$ é tal que O é o ponto médio de $\overline{XX'}$. Mostre que ϕ é uma isometria (ou seja, mostre que $X'Y' = XY$ se $X' = \phi(X)$ e $Y' = \phi(Y)$).

9) Seja l_n o lado do polígono regular de n lados inscrito no círculo de raio 1. Mostre que

$$l_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - l_n^2}.$$

10) Seja P um ponto do plano. Mostre que $\{P\}$ é mensurável e tem área (medida) igual a 0.

11) Sejam r uma reta e P um ponto fora dela. Descreva detalhadamente, justificando cada passo, uma construção com régua e compasso euclidianos que forneça

(a) a reta paralela a r passando por P ,

(b) a reta perpendicular a r passando por P .

Sugestão: invoque como se fossem sub-rotinas as construções feitas em aula.

12) Um poliedro convexo de 20 arestas e 10 vértices só possui faces triangulares e quadrangulares. Quantas faces são triangulares e quantas são quadrangulares?

13) (a) Calcule o volume de um octaedro regular de aresta a . (b) Calcule o volume do octaedro cujos vértices são os centros das faces de um cubo de volume 1.