V-A+F=2

MAT 0240 - GEOMETRIA E DESENHO GEOMÉTRICO 2
1° SEMESTRE DE 2021

Estas notas são baseadas em [1] e no Capítulo 10 de [2].

Seja P um poliedro convexo, sejam V, A e F seus números de vértices, arestas e faces, respectivamente.

Seja r uma reta que não seja paralela a nenhuma das faces de P. Consequentemente, r também não é paralela a nenhuma das arestas de P. Seja H um plano perpendicular a r que não intercepte P. Seja P' a projeção ortogonal de P sobre H. Como P é convexo, cada ponto de P' pode ser imagem de um ou de dois pontos de P. Os pontos de P' que são imagem de apenas um ponto de P formam o contorno de P'. Se um ponto de P' é imagem de dois pontos de P, chamamos o mais distante desses dois pontos de ponto iluminado, e o mais próximo de ponto sombreado.

Em particular, o conjunto dos vértices de P é a união disjunta de três subconjuntos disjuntos: os vértices que são projetados no contorno de P', os vértices iluminados e os vértices sombreados. Podemos escrever, portanto,

$$V = V_0 + V_1 + V_2, \tag{1}$$

onde V_0 denota o número dos vértices que são projetados no contorno de P', V_1 o número de vértices iluminados e V_2 o número de vértices sombreados.

Como r não é paralela a nenhuma face, a projeção de cada face de P é um polígono com o mesmo número de vértices. Segue então que a soma dos ângulos internos de cada face é igual à soma dos ângulos internos de sua projeção.

A projeção P' é uma região poligonal que pode ser decomposta de duas maneiras: como a união das projeções das faces iluminadas ou como a união das projeções das faces sombreadas. Seja S_1 a soma dos ângulos internos de todas as faces iluminadas e seja S_2 a soma dos ângulos internos de todas as faces sombreadas. Então S_1 é igual também à soma dos ângulos internos de todas as projeções das faces iluminadas e, por sua vez, S_2 é igual à soma dos ângulos internos de todas as projeções das faces sombreadas.

O contorno de P' é um polígono com V_0 vértices. Logo, a soma dos ângulos internos de P' é $\pi(V_0 - 2)$. Logo,

$$S_1 = \pi(V_0 - 2) + 2\pi V_1 \quad \text{e} \quad S_2 = \pi(V_0 - 2) + 2\pi V_2 \tag{2}$$

(usamos que a soma dos ângulos internos de projeções de faces que têm vértice na projeção de um vértice iluminado é 2π e que, naturalmente, o mesmo vale para vértices sombreados).

Seja agora S a soma de todos os ângulos internos de todas as faces de P. Claro que $S = S_1 + S_2$. Segue portanto de (2) que

$$S = 2\pi(V_0 + V_1 + V_2 - 2) = 2\pi(V - 2) \tag{3}$$

.

Exprimiremos agora S em termos de F e de A.

Sejam $n_1, n_2, \cdots, n_F$ os números de lados de cada face de P. Então

$$S = \sum_{j=1}^{F}(n_j - 2)\pi = \left(\sum_{j=1}^{F} n_j\right)\pi - 2\pi F.$$

Cada aresta comparece em P como lado de duas faces. Daí: $\sum_{j=1}^{F} n_j = 2A$. Logo,

$$S = 2\pi(A - F). \tag{4}$$

Comparando (3) e (4), obtemos a **fórmula de Euler** para poliedros convexos,

$$V - 2 = A - F.$$

Referências

[1] Zoroastro Azambuja Filho. *Demonstração do Teorema de Euler para Poliedros Convexos*. Revista do Professor de Matemática **3**, 1983.

[2] Lima, Carvalho, Wagner & Morgado. A Matemática do Ensino Médio, volume 2. Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.