EDWIN E. MOISE
Departamento de Matemática
Universidade de Harvard

FLOYD L. DOWNS, Jr.
Colégio Hillsdale

GEOMETRIA MODERNA

MOISE
DOWNS

PARTE II

TRADUTORES:

RENATE G. WATANABE
DORIVAL A. MELLO

Professôres de Matemática
da Universidade de São Paulo,
Universidade Mackenzie e
membros do GEEM.

EDITÔRA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

EDITÔRA EDGARD BLÜCHER LTDA.

Título Original
Geometry

A edição em língua inglêsa foi publicada pela
Addison-Wesley Publishing Company

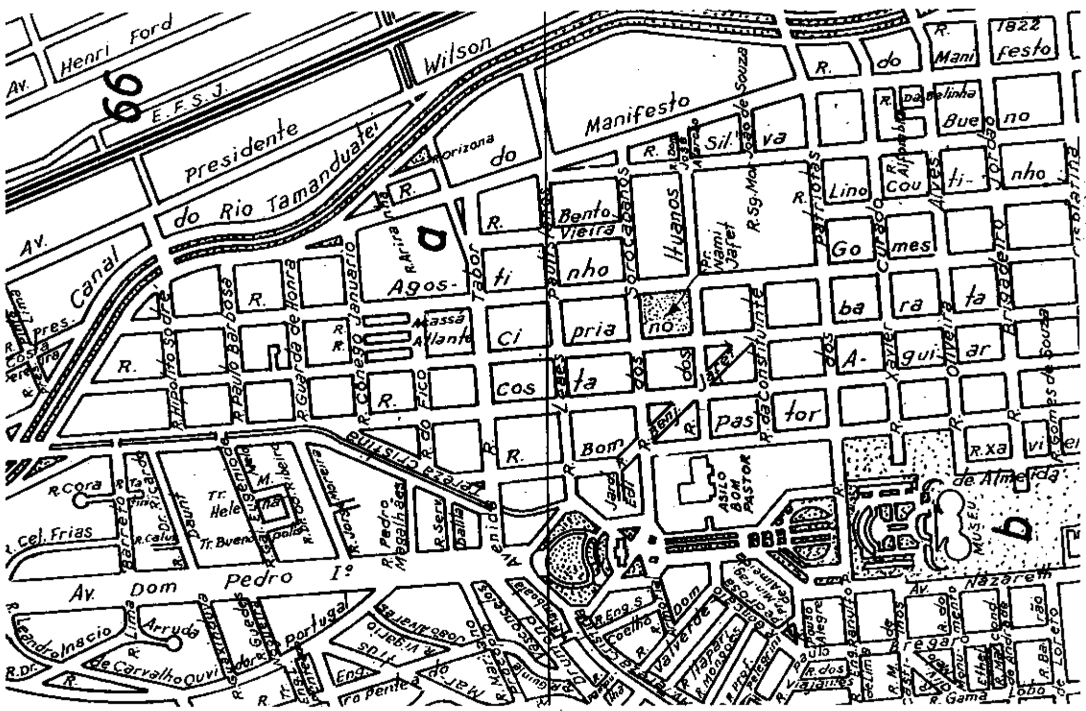
EDITÔRA EDGARD BLÜCHER LTDA.
Rua Peixoto Gomide, 1400
Caixa Postal 5450
Fone: 287-2043
São Paulo — Brasil

ÍNDICE

16 ÁREAS DE CÍRCULOS E SETORES

17 SÓLIDOS E SEUS VOLUMES

13 GEOMETRIA ANALÍTICA NO PLANO



13-1. INTRODUÇÃO

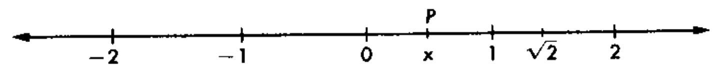
A matemática é, de certa forma, muito diferente das outras ciências: é a única na qual, pràticamente, nada precisa ser jogado fora. Os matemáticos são sêres humanos e, assim sendo, cometem enganos. Mas, em matemática, os erros de alguns indivíduos são, em geral, percebidos muito ràpidamente. Resulta que, quando uma geração descobre alguma coisa em matemática, a geração seguinte pode prosseguir descobrindo mais, sem precisar parar para corrigir erros sérios no que já era suposto conhecido.

Um sintoma desta situação é o fato de que a geometria desenvolvida pelos antigos gregos é tão correta hoje quanto o foi a dois mil anos atrás.

O primeiro grande avanço na geometria, depois dos gregos, foi o desenvolvimento de um nôvo método, chamado *geometria analítica*. Êste método foi descoberto no século dezessete por René Descartes (1596-1650). Como veremos, o que Descartes fêz foi explorar as relações entre a geometria e a álgebra e mostrar como cada uma poderia lançar luz sôbre a outra. Neste capítulo, daremos uma pequena introdução à geometria analítica, para que você possa perceber o que ela é e como funciona.

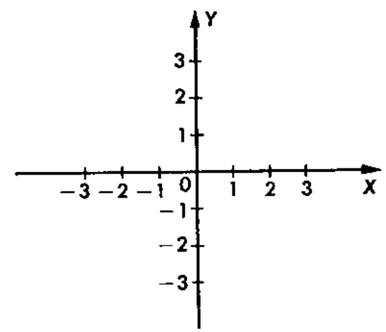
13-2. SISTEMAS DE COORDENADAS EM UM PLANO

Já sabemos, do Cap. 2, como funciona um sistema de coordenadas sôbre uma reta.



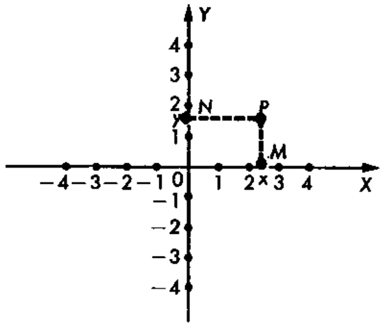
Uma vez estabelecido um sistema de coordenadas sôbre uma reta, a cada ponto corresponde um número e a cada número corresponde um ponto.

Faremos o mesmo agora, em um *plano*. Em um plano, a um ponto corresponderá não um único número, mas um *par* de números. Primeiramente, tomamos uma reta X no plano e fixamos um sistema de coordenadas sôbre X. Esta reta será chamada *eixo-x*. Ao traçar figuras, geralmente colocamos uma ponta de seta no eixo-x para dar ênfase ao sentido positivo sôbre X.



Seja, agora, Y a reta perpendicular ao eixo-x pelo ponto de coordenada 0. Sôbre Y, fixamos um sistema de coordenadas de tal modo que o ponto zero de Y seja o ponto zero de X. (Isto pode ser feito pelo Postulado da Colocação da Régua.) A reta Y será chamada *eixo-y*. Como antes, indicamos o sentido positivo com uma ponta de seta. O ponto onde a reta X intercepta a reta Y é chamado *origem*. A origem é denotada por 0, para que nos lembremos que é o ponto zero de cada um dos eixos.

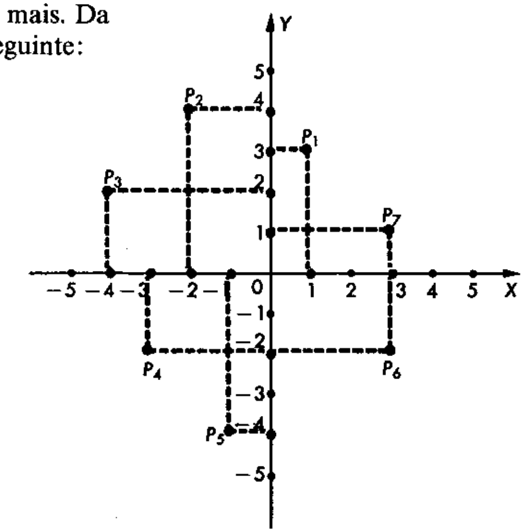
Podemos, agora, identificar qualquer ponto do plano com um par de números da seguinte maneira. Dado um ponto P, traçamos uma perpendicular ao eixo-x. Seja M o pé desta perpendicular, sôbre X. Seja x a coordenada de M na reta X. O número x é chamado *coordenada-x* de P ou abcissa de P. (Na figura, $x = 2\frac{1}{2}$, aparentemente.)



Traçamos, então, uma perpendicular ao eixo y. Seja N o pé desta perpendicular, sôbre Y. Seja y a coordenada de N na reta Y. O número y é chamado *coordenada-y* de P ou ordenada de P. (Na figura, $y = 1\frac{1}{2}$, aparentemente.) De modo resumido, indicaremos que P tem estas coordenadas escrevendo $P(2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$.

Vejamos alguns exemplos mais. Da figura, podemos concluir o seguinte:

$P_1(1, 3)$,
$P_2(-2, 4)$,
$P_3(-4, 2)$,
$P_4(-3, -2)$,
$P_5(-1, -4)$,
$P_6(3, -2)$,
$P_7(3, 1)$.

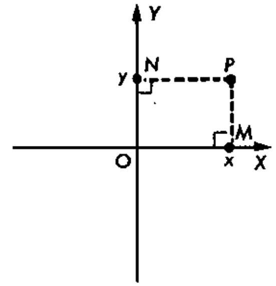


Observe que a ordem na qual as coordenadas são escritas é importante. O ponto com coordenadas (1, 3) é P_1 e êste ponto é diferente de P_7, cujas coordenadas são (3, 1). Assim, as coordenadas de um ponto formam um par *ordenado* de números reais, e você não pode dizer onde um ponto está, a menos que você saiba qual o número que vem em primeiro lugar.

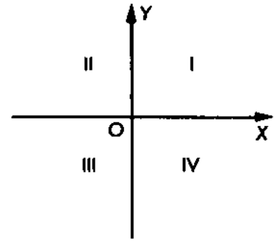
Resumiremos tudo isto acima nas seguintes definições.

Definições

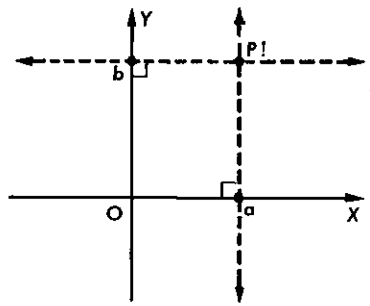
A *coordenada-x* de um ponto P é a coordenada do pé da perpendicular ao eixo-x por P. A *coordenada-y* de P é a coordenada do pé da perpendicular ao eixo-y por P. Se P tem coordenadas x e y, então escrevemos $P(x, y)$.



Da mesma forma que uma reta separa o plano em duas partes (cada uma das quais é chamada semiplano), os dois eixos separam o plano em quatro partes, chamadas *quadrantes*. Os quatro quadrantes são identificados por números:



Mostramos que, pelo esquema fixado, todo ponto P determina um par ordenado de números reais. A recíproca também é verdade? Isto é, todo par ordenado de números reais (a, b) determina um ponto? É fácil ver que a resposta é "Sim".

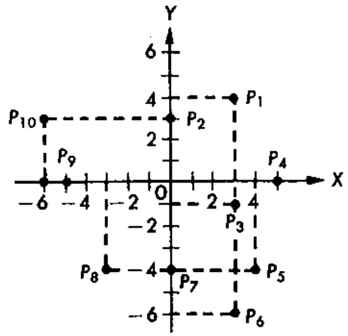


No ponto do eixo-x de coordenada $x = a$, levantamos uma perpendicular. Fazemos o mesmo no ponto do eixo-y com coordenada $y = b$. O ponto onde estas perpendiculares se encontram é o ponto com coordenadas (a, b).

Assim, temos uma correspondência bijetora entre os pontos do plano e os pares ordenados de números reais. Uma correspondência dêste tipo é chamada *sistema de coordenadas*. Para descrever um sistema de coordenadas, precisamos escolher (1) uma reta X (o eixo-x), (2) uma reta Y (o eixo-y) e uma direção positiva em cada um dos eixos. Uma vez que tenhamos feito estas três escolhas, os sistemas de coordenadas em ambos os eixos ficam determinados, determinando, por sua vez, as coordenadas de todos os pontos do plano.

Neste livro, nunca trataremos de dois sistemas de coordenadas ao mesmo tempo. Tendo fixado um sistema de coordenadas, todo ponto P determina um par odernado (a, b) e todo par ordenado (a, b) determina um ponto. Não haverá, portanto, nenhum prejuízo em ignorar a diferença entre pontos e pares de números. Isto nos permitirá usar frases muito convenientes como "o ponto (2, 3)" e "$P = (3, 4)$".

Problemas 13-2

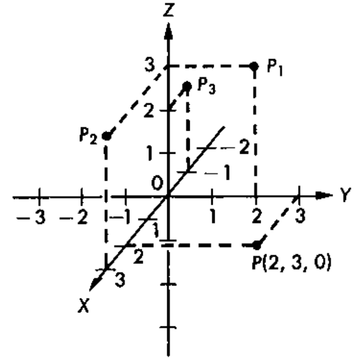


1. (a) Dê as coordenadas de cada ponto P da figura como um par ordenado de números.
   (b) Existem três pontos colineares? Quais são suas coordenadas?
   (c) Dê os pontos do quadrante I; do quadrante IV.
2. Quais são as coordenadas da origem?
3. Qual é a coordenada-y do ponto $(3, -5)$? do ponto $(5, -3)$? do ponto $(-5, 3)$?
4. Considere o ponto $C(4, 7)$. Quais são as coordenadas de sua projeção A, no eixo-x? Quais são suas coordenadas de sua projeção B, no eixo-y?
5. Responda as questões do Problema 4 para o ponto $D(-4, 7)$.
6. Dê o ponto que é projeção do ponto $(0, 6)$ sôbre o eixo-x.
7. Dê o ponto que é projeção do ponto $(-1, 0)$ sôbre o eixo-y.
8. Copie e complete: A coordenada x de todo ponto do eixo-y é ....
9. Copie e complete: A coordenada y de todo ponto do eixo-x é ....
10. Considere os pontos

$$A(5, 2), \quad B(4, -3), \quad C(-4, 4) \quad \text{e} \quad D(-3, -5).$$

   (a) Escreva êstes pontos na ordem (da esquerda para a direita) de suas projeções sôbre o eixo-x.
   (b) Arranje-os na ordem (de baixo para cima) de suas projeções sôbre o eixo-y.
11. As retas por $P(5, 7)$ perpendiculares aos eixos-x e y formam um retângulo com os eixos. Ache o perímetro do retângulo.
12. Ache o perímetro do retângulo formado pelos eixos e perpendiculares aos eixos pelo ponto $(-4, -2)$.
13. Proceda como no Problema 11 para o ponto $P(-\frac{7}{2}, 3)$; para o ponto $P(-\sqrt{2}, \frac{3}{2})$; para o ponto $P(a, b)$, onde a e b são números reais quaisquer.

14. Em qual dos seguintes pares os pontos estão mais próximos: (3, 0) e (7, 0), ou (3, 0) e (– 2,0)?
15. Em qual dos seguintes pares os pontos estão mais próximos: (2, 1) e (1, 2), ou (2, 1) e (2, 0)?



\+ 16. *Um sistema de coordenadas tridimensional.* Se tomarmos uma reta perpendicular aos eixos-x e y na interseção de ambos, poderemos fixar um sistema de coordenadas no espaço. Neste sistema, temos correspondência bijetora entre os pontos do espaço e as triplas ordenadas de números reais. Na figura, as setas indicam a direção positiva em cada eixo e os segmentos de reta pontilhados são os segmentos perpendiculares que projetam cada ponto P nos respectivos eixos. A projeção de um ponto em um eixo é a coordenada dêste ponto naquele eixo. Assim, um ponto fica completamente determinado por suas três coordenadas e escrevemos $P(x, y, z)$.

Na figura, P é um ponto no plano xy, de modo que sua projeção no eixo z (*não* indicada) é 0. Sua projeção no eixo-x é 2 e no eixo-y é 3. Portanto, escrevemos $P(2, 3, 0)$.

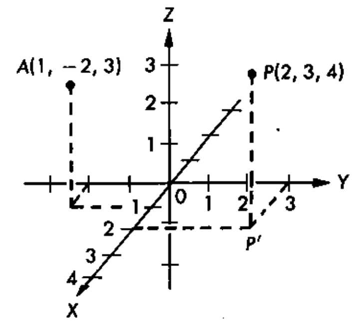
   (a) P_1 é um ponto no plano yz. Escreva suas coordenadas como uma tripla ordenada de números reais.
   (b) Os pontos P_2 e P_3 estão, ambos, no plano xz. Escreva suas coordenadas como triplas ordenadas de números reais.
   (c) Quais pares de pontos estão em um plano paralelo ao plano xy? Você pode demonstrá-lo? O que você observa sôbre as coordenadas dêstes pontos?

\+ 17. Se um ponto P é descrito por $P(x, y, z)$, sôbre que eixo está cada um dos pontos

$$A(0, 3, 0), \quad B(-2, 0, 0), \quad C(0, 0, 5)?$$

\+ 18. Se um ponto P é descrito por $P(x, y, z)$, em que plano está cada um dos seguintes pontos:

$$R(4, 0, 2), \quad S(3, -2, 0) \quad \text{e} \quad T(0, 1, 5)?$$



*+ 19. Ao representar um ponto em um esbôço de um sistema de coordenadas tridimensional, é costume considerar, em primeiro lugar, sua projeção no plano xy. Na figura, P' é a projeção de $P(2, 3, 4)$ no plano xy. Quais são as coordenadas de P'?
   (a) Qual a distância de P ao plano xy? ao plano xz? ao plano yz?
   (b) Qual a distância do ponto A ao plano xy? ao plano xz? ao plano yz?

*+ 20. (a) Qual a distância do ponto $(3, 2, -2)$ ao plano xy? ao plano xz? ao plano yz?
   (b) Responda a parte (a) para o ponto (x, y, z), onde x, y e z são números reais quaisquer.

RENÉ DESCARTES (1596-1650)

Descartes é um homem famoso em dois ramos muito distintos: êle é conhecido entre os filósofos como um grande filósofo e entre os matemáticos como um grande matemático.

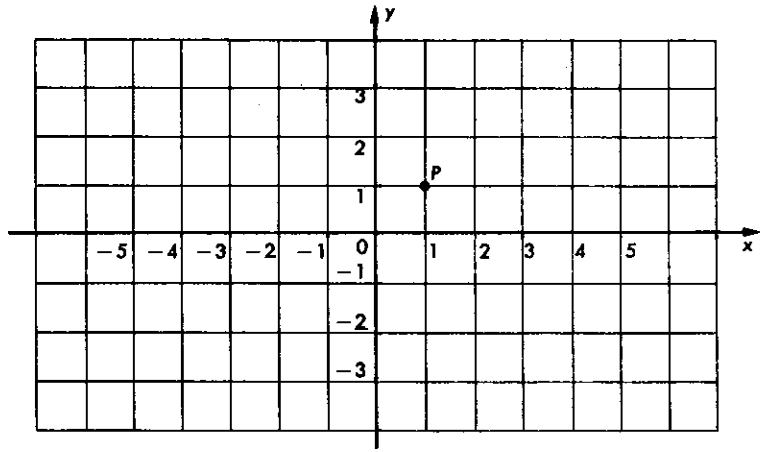
Sua maior contribuição à matemática foi a descoberta dos sistemas de coordenadas e sua aplicação aos problemas de geometria. Desde então, a álgebra e a geometria se desenvolveram juntas, com vantagens para ambas. Até os dias atuais, sistemas de coordenadas como os usados neste livro são chamados de sistemas de coordenadas cartesianas, em honra ao seu inventor. O conceito de coordenadas foi, realmente, a primeira contribuição fundamental à geometria depois dos gregos. (A palavra *cartesiana* vem de *Cartesius*, forma latina do nome de Descartes.)

Parte do mérito da descoberta de Descartes deve ir para Pierre Fermat, que teve muitas idéias semelhantes, mais ou menos ao mesmo tempo. Fermat foi um dos poucos grandes matemáticos amadores. Trabalhava para o govêrno francês e se dedicava à matemática nos momentos de folga. Êle escrevia cartas aos amigos sôbre suas descobertas e nunca as publicou em nenhuma outra forma. Mas o conteúdo das cartas de Fermat é atualmente incluído em todos os textos usuais de teoria dos números.

O desenvolvimento dos sistemas de coordenadas deixou os fundamentos para o desenvolvimento do cálculo, logo depois, por Newton e Leibniz. Desta forma, Descartes deve ser um dos homens que Newton tinha em mente quando disse que se apoiava em ombros de gigantes.

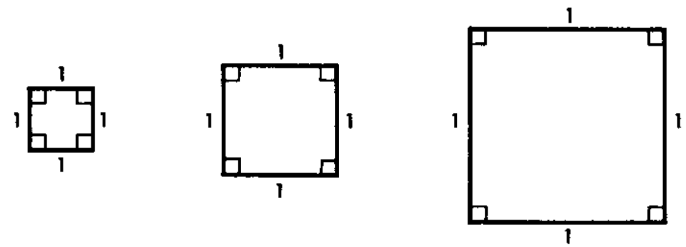
13-3. COMO USAR PAPEL QUADRICULADO NO TRAÇADO DE SISTEMAS DE COORDENADAS

Ao traçar figuras de sistemas de coordenadas, é conveniente usar papel quadriculado. Neste papel, as retas horizontais e verticais estão impressas, mas ainda temos de fazer o resto.

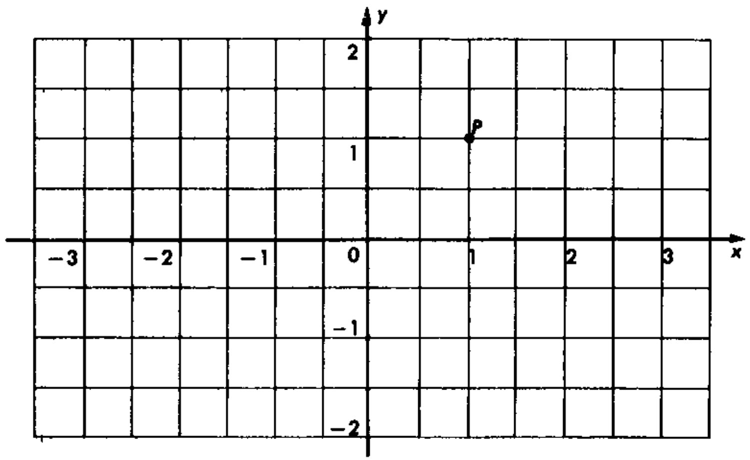


Na figura acima, as retas vermelhas representam as retas que ordinàriamente estão impressas no papel. Tudo o mais deve ser desenhado com uma caneta ou um lápis. Observe que o eixo-x está indicado com x ao invés de X. Isto já é de costume. Aqui, o símbolo x não é nome de coisa alguma; é simplesmente um lembrete para o fato de que as coordenadas sôbre êste eixo estão sendo denotadas pela letra x; valem as mesmas observações para o eixo y.

Lembre-se que, antes de discutirmos sistemas de coordenadas, tínhamos liberdade de traçar figuras em qualquer escala que quiséssemos. Por exemplo, cada uma das figuras abaixo é perfeitamente boa para um quadrado de lado 1.



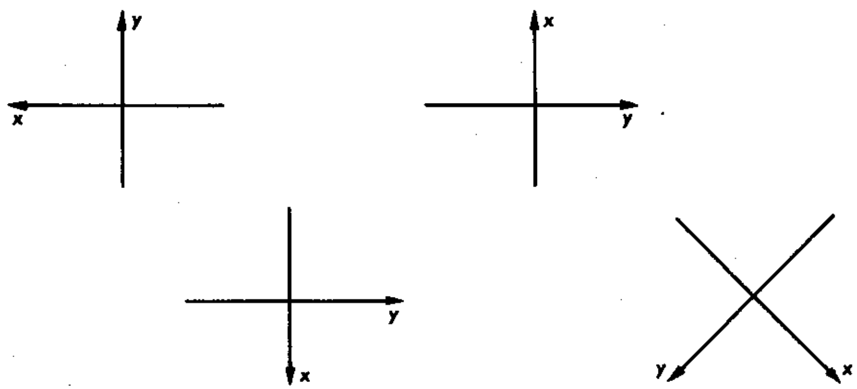
Da mesma forma e pela mesma razão, podemos indicar qualquer escala que quisermos sôbre o papel quadriculado. Por exemplo, poderíamos ter marcado a mesma fôlha de papel da seguinte maneira:



Por têrmos esta liberdade, é absolutamente necessário indicar que escolha foi feita, escrevendo indicações numéricas nos eixos para indicar a escala. Se não tivéssemos feito isto na figura acima, ninguém seria capaz de dizer se P é o ponto $(1, 1)$, o ponto $(2, 2)$ ou o ponto (π, π).

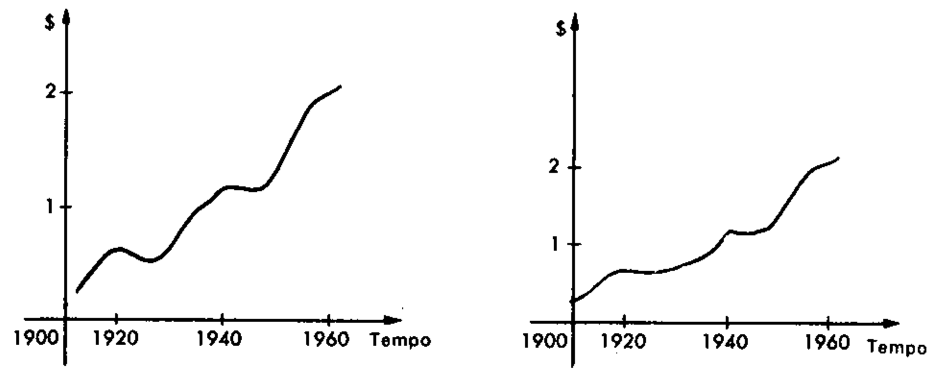
Repetindo: para mostrar um sistema de coordenadas em um papel quadriculado, traçamos os eixos e indicamos a escala.

Observe que podemos traçar eixos em qualquer uma das seguintes posições (ou outras) numa fôlha de papel.



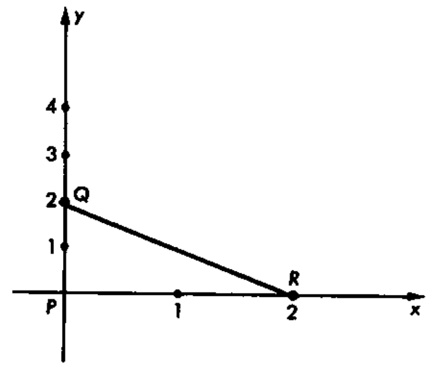
Nenhum dêstes desenhos está lògicamente errado. Mas uma pessoa acha muito mais fácil ler os gráficos feitos por uma outra se elas concordarem, de início, em traçar o eixo-x horizontalmente, com as coordenadas crescendo da esquerda para a direita e o eixo-y verticalmente, com as coordenadas crescendo de baixo para cima.

Uma última precaução: Você já viu, provàvelmente, muitos gráficos nos quais as escalas horizontal e vertical podiam ser escolhidas independentemente uma da outra.



Por exemplo, se você deseja traçar um gráfico mostrando como o preço de queijo (em cruzeiros por quilo) cresceu no período de 1900 a 1960, não há necessidade de nenhuma conexão entre as escalas sôbre os eixos. (As escalas medem espécies diferentes de coisas, de qualquer modo.)

Por outro lado, quando você está traçando um sistema de coordenadas para fins geométricos, a figura ficará destorcida se as escalas sôbre os eixos forem diferentes. A razão é que as escalas serão usadas para medir distâncias.



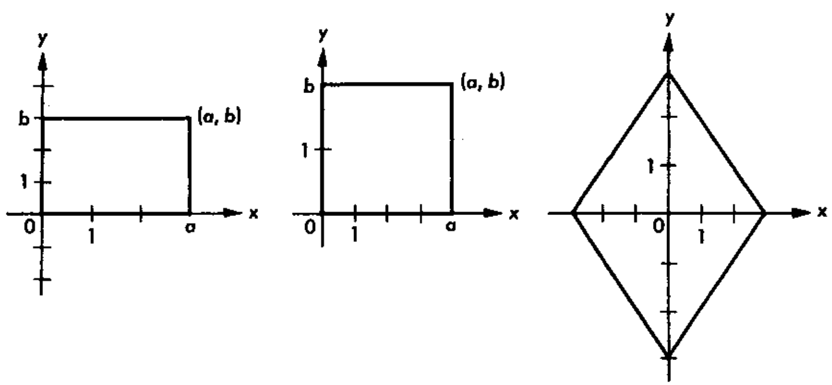
Na figura, as escalas nos dizem que $PQ = 2$ e $PR = 2$. Portanto o triângulo ΔPQR deve ser isósceles. Mas certamente, êle não parece isósceles, e $\angle Q$ e $\angle R$ não parecem congruentes. Isto significa que fizemos uma figura distorcida. Para evitar tais distorções, usamos a mesma escala em cada eixo.

Problemas 13-3

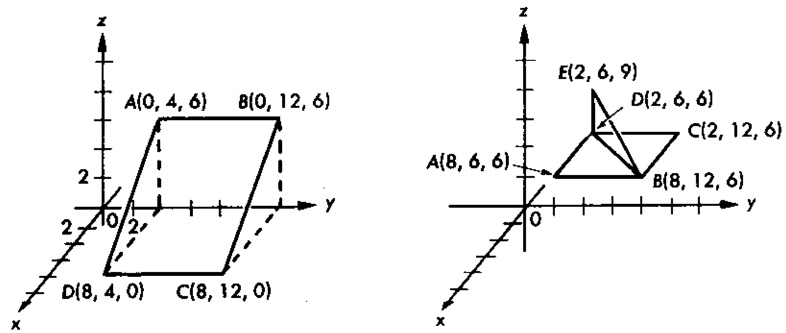
[*Observação:* Em tôda esta série de problemas, você perceberá que o papel quadriculado impresso será útil, ainda que não essencial. Nos Problemas 1 até 12, trace um par de eixos para cada problema.]

1. Escolha uma escala apropriada sôbre um par de eixos e indique os seguintes pontos: $A(2, 3)$, $B(3, 2)$, $C(4, -3)$, $D(-3, -4)$. Em que quadrante está cada ponto?
2. Indique cada um dos pontos $A(0, 0)$, $B(5, 0)$, $C(5, 3)$, $D(0, 3)$. Calcule
(a) o perímetro de $\square ABCD$.
(b) $a\square ABCD$.
3. Indique cada um dos pontos $P(0, 0)$, $Q(3, 0)$ e $R(0, 4)$. Calcule
(a) o perímetro de ΔPQR.
(b) $a\Delta PQR$.
4. Indique cada um dos pontos $F(0, 0$, $G(8, 0)$ e $H(8, -6)$.
(a) Calcule $a\Delta FGH$.
(b) Qual é o comprimento de $\overline{FH}$?
5. Dado que o triângulo ΔABC tem os vértices nos pontos $(0, 1)$, $(0, 6)$ e $(12, 1)$, calcule $a\Delta ABC$ e o perímetro de ΔABC.
6. Indique cada um dos pontos $A(1, 0)$, $B(7, 0)$, $C(10, 4)$ e $D(4, 4)$. Calcule o perímetro e a área de $\square ABCD$.
7. Qual é a área do triângulo cujos vértices são os pontos $(0, 5)$, $(4, 0)$, e $(-4, 0)$?
8. Indique cada um dos pontos $K(-2, 5)$, $M(-2, -3)$ e $L(4, -3)$. Calcule $a\Delta KML$. Qual é o comprimento de $\overline{KL}$?
9. Um triângulo tem os vértices em $(0, 0)$, $(0, 12)$ e $(10, 0)$. Calcule o comprimento da mediana relativa ao lado de menor comprimento.
10. Indique cada um dos pontos $A(-3, -4)$, $B(-3, 6)$ e $C(4, 6)$. Ache as coordenadas do ponto D tal que $\square ABCD$ seja um retângulo.
11. Os vértices de um triângulo são os pontos $(1, 8)$, $(4, 1)$ e $(7, 1)$. Calcule a área do triângulo.
12. As extremidades da base de um triângulo isósceles são os pontos $(3, 0)$ e $(-3, 0)$. Ache as coordenadas do outro vértice de modo que a área do triângulo seja 15.

+ 13. "Quando um quadrado não é um quadrado?" Nas figuras abaixo, a escala sôbre o eixo-x é propositalmente diferente da escala sôbre o correspondente eixo-y, de modo a dar uma visão distorcida da figura pretendida. Qual a figura, em cada caso?



+ 14. Dada a figura a seguir, à esquerda, calcule o perímetro de $\square ABCD$.



*+ 15. No Problema 14, qual é o comprimento da projeção de $\overline{AC}$ no plano xy?

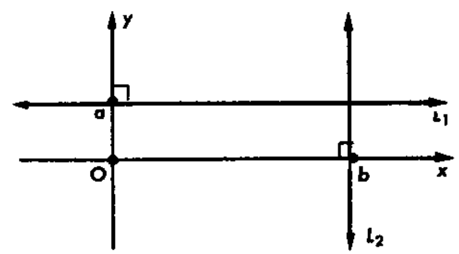
*+ 16. Dada a figura à direita, acima, calcule BE.

*+ 17. Desenhe um sistema de coordenadas tridimensional. Marque a mesma escala sôbre os eixos-y e z. Sôbre o eixo-x (aquêle que vem "em direção" a você) use uma escala que seja 0,7, mais ou menos, da escala dos outros eixos. Localize o ponto $A(1, 3, 2)$ e o ponto $B(1, -3, 2)$. Trace $\overline{AB}$. Qual é o comprimento de $\overline{AB}$? [*Sugestão:* Veja o Problema 19 de Problemas 13-2.]

*+ 18. Trace a figura do Problema 19 de Problemas 13-2, mas, ao invés de projetar P no plano xy em primeiro lugar,
(a) projete P no plano yz. (b) projete P no plano xz.

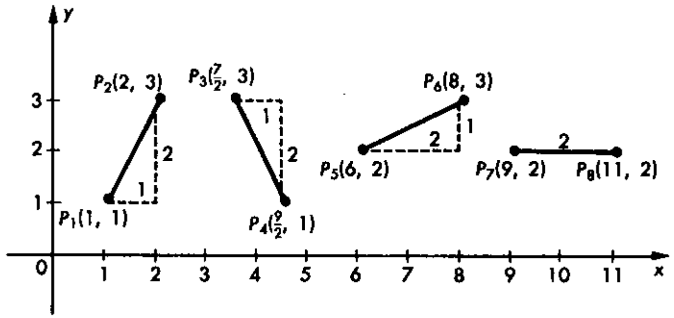
13-4. A DECLIVIDADE DE UMA RETA NÃO VERTICAL

O eixo-x e tôdas as retas a êle paralelas são ditos *horizontais*. O eixo-y e tôdas as retas a êle paralelas são ditos *verticais*.



Na figura, é fácil ver que todos os pontos da reta horizontal L_1 têm a mesma coordenada-y, a, porque o ponto $(0, a)$ é o pé comum a todos os segmentos perpendiculares ao eixo-y por pontos de L_1. Da mesma forma, todos os pontos da reta vertical L_2 têm a mesma coordenada-x, b. Evidentemente, um segmento é dito horizontal se a reta que o contém é horizontal; um segmento é dito vertical se a reta que o contém é vertical.

A idéia de *declividade* (*inclinação*) de um segmento é sugerida pelas seguintes figuras.

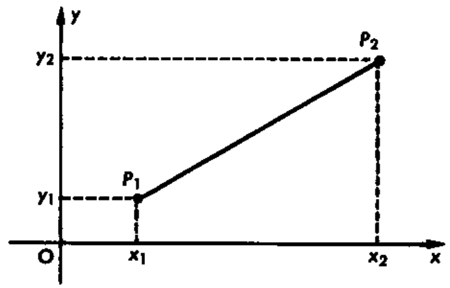


A declividade do primeiro segmento é 2; a declividade do segundo é -2; do terceiro, $\frac{1}{2}$; do quarto, 0. Para ser exato:

Definição

Se $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ e $\overline{P_1P_2}$ é não vertical, então a declividade de $\overline{P_1P_2}$ é

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



Alguns fatos sôbre declividade são óbvios, a partir da definição.

(1) Se os pontos P_1 e P_2 são trocados, a declividade não muda, porque

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_1 - y_2)}{-(x_1 - x_2)}.$$

Em outras palavras, a declividade de um segmento não depende da ordem na qual as extremidades são mencionadas.

(2) Por outro lado, é importante mencionar as coordenadas na mesma ordem no numerador e no denominador. A fórmula

$$\frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}$$

não é uma fórmula correta para a declividade.

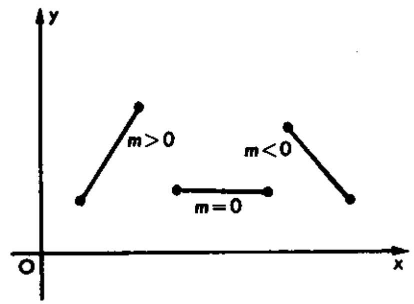
(3) Para segmentos não verticais, a fórmula da declividade sempre nos dá um número, porque o denominador $x_2 - x_1$ não pode ser 0.

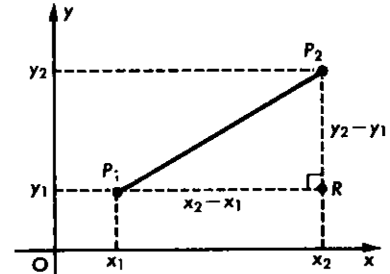
(4) Para segmentos verticais, a fórmula da declividade *nunca* nos dá um número, porque, neste caso, o denominador $x_2 - x_1$ é igual a 0. De fato, não existe declividade de um segmento vertical.

(5) Se um segmento é horizontal, a declividade é 0. (O numerador $y_2 - y_1$ é 0 e o denominador $x_2 - x_1$ não é zero.)

(6) Se um segmento não é horizontal (nem vertical), então a declividade não é 0.

(7) Se um segmento se eleva da esquerda para a direita, a declividade é positiva. Se um segmento se eleva da direita para a esquerda, a declividade é negativa. (Veja a figura à esquerda, abaixo.)



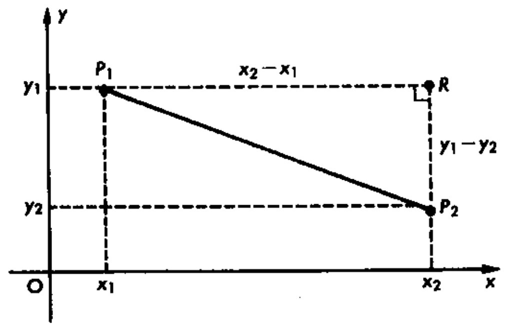


$m > 0.$

Se um segmento tem declividade positiva, então a declividade é a razão de duas distâncias como se vê na figura à direita, acima. Aqui, com $x_1 < x_2$ e $y_1 < y_2$, temos $P_1R = x_2 - x_1$ e $RP_2 = y_2 - y_1$. (Por quê?) Portanto

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{RP_2}{P_1R}.$$

Se um segmento tem declividade negativa, então a declividade é o *oposto* de uma razão de duas distâncias.



Aqui, com $x_1 < x_2$ e $y_2 < y_1$, temos

$$P_1R = x_2 - x_1$$

como antes, mas

$$RP_2 = y_1 - y_2 = -(y_2 - y_1).$$

Portanto

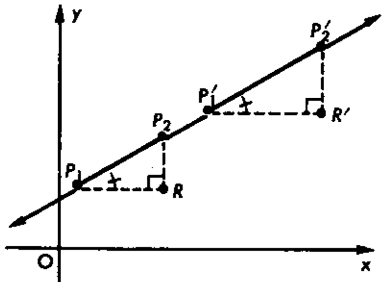
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{RP_2}{P_1R}.$$

Estas idéias relacionam declividade com nossa geometria e tornam simples ver por que o seguinte teorema é verdadeiro.

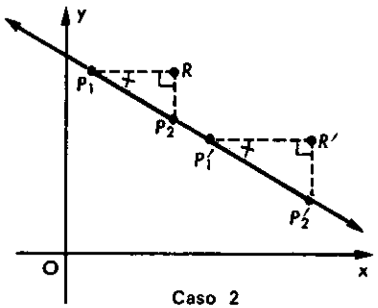
Teorema 13-1

Em uma reta não vertical, todos os segmentos têm a mesma declividade.

Demonstração. Se a reta é horizontal, esta afirmação é óbvia, porque todos os segmentos da reta devem ter declividade igual a 0. Os casos que interessam estão indicados nas seguintes figuras:



Caso 1



Caso 2

No Caso 1, temos

$$\Delta P_1RP_2 \sim \Delta P'_1R'P'_2 .$$

de modo que

$$\frac{RP_2}{R'P'_2} = \frac{P_1R}{P'_1R'},$$

$$\frac{RP_2}{P_1R} = \frac{R'P'_2}{P'_1R'}.$$

Portanto $\overline{P_1P_2}$ e $\overline{P'_1P'_2}$ têm a mesma declividade.

No caso 2, temos também

$$\Delta P_1RP_2 \sim \Delta P'_1R'P'_2 .$$

Isto nos dá, como antes,

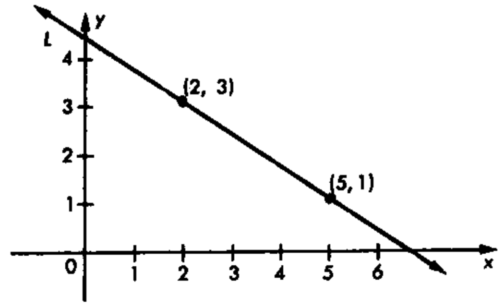
$$\frac{RP_2}{P_1R} = \frac{R'P'_2}{P'_1R'}.$$

Êste resultado é o que queríamos, porque as declividades de nossos dois segmentos são os opostos destas duas razões.

Agora que temos o Teorema 13-1, podemos falar não apenas sôbre declividade de segmentos mas também sôbre declividade de retas.

Definição

A *declividade* de uma reta não vertical é a declividade de qualquer um de seus segmentos.



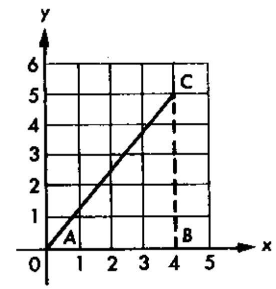
Assim, na figura, a declividade de L é

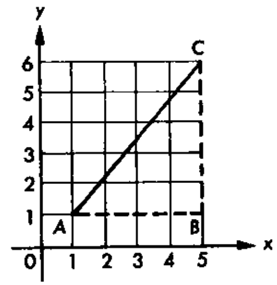
$$\frac{1-3}{5-2} = -\frac{2}{3}.$$

Qualquer outro segmento da mesma reta daria a mesma resposta.

Problemas 13-4

1. Responda as questões abaixo para cada figura.





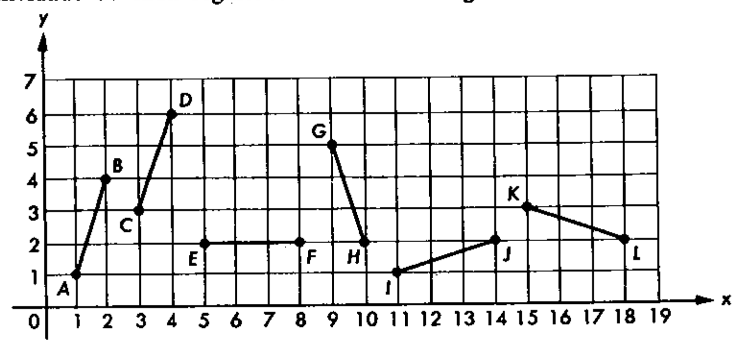
(a) Quais são as coordenadas de A, B e C?

(b) Quanto vale BC? quanto vale AB?

(c) Qual a declividade de $\overline{AC}$?

2. Desenhe um par de eixos de coordenadas. Localize quatro pontos A, B, C e D que tenham a coordenada-$x = 3$. Localize quatro pontos P, Q, R e S que tenham a coordenada-$y = -2$. Indique cada ponto pelas suas coordenadas.

3. Dê a declividade de cada segmento mostrado na figura.



4. Quais pares de pontos dados abaixo determinam retas horizontais? Quais determinam retas verticais?

(a) $(5, 7)$ e $(-3, 7)$. (b) $(2, 4)$ e $(2, -1)$.
(c) $(5, 2)$ e $(-3, 5)$. (d) $(0, -1)$ e $(4, -1)$.
(e) $(3, 3)$ e $(-3, 3)$. (f) $(4, 7)$ e $(-2, 6)$.
(g) $(0, 0)$ e $(0, 5)$. (h) $(0, 6)$ e $(3, 0)$.
(i) (a, b) e (a, c). (j) (a, b) e (c, b).

5. Ache a declividade de cada reta que contém cada um dos pares de pontos dados abaixo.

(a) $(0, 0)$ e $(8, 4)$. (b) $(10, 5)$ e $(6, 8)$.
(c) $(2, -2)$ e $(4, 2)$. (d) $(0, 3)$ e $(-2, 3)$.
(e) $(-2, 0)$ e $(0, 6)$. (f) $(15, 6)$ e $(-2, 23)$.

6. Ache a declividade de cada reta que contém cada um dos pares de pontos dados abaixo.

(a) $(-5, 7)$ e $(3, -8)$.
(b) $(\frac{5}{2}, \frac{4}{3})$ e $(-\frac{13}{2}, \frac{16}{3})$.
(c) $(5\sqrt{2}, 6\sqrt{3})$ e $(\sqrt{8}, \sqrt{12})$.
(d) $(63, 49)$ e $(-7, 9)$.
(e) $(2a, 3b)$ e $(-a, b)$.
(f) $(0, n)$ e $(n, 0)$.

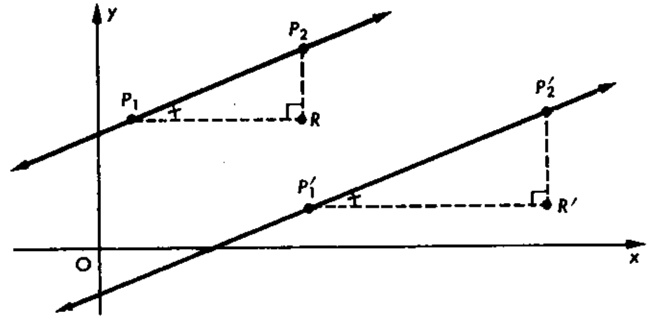
7. Os vértices de um triângulo são os pontos $A(-2, 3)$, $B(5, -4)$ e $C(1, 8)$. Calcule a declividade de cada lado.
8. Os vértices de um paralelogramo são os pontos $R(1, 4)$, $S(3, 2)$, $T(4, 6)$ e $V(2, 8)$. Calcule a declividade de cada lado.
9. Determine a declividade de cada lado do quadrilátero cujos vértices são $A(5, 6)$, $B(13, 6)$, $C(11, 2)$ e $D(1, 2)$. Que espécie de quadrilátero é?
10. Um quadrilátero tem os vértices nos pontos $M(a, b)$, $N(c, b)$, $O(c + d, e)$ e $P(a + d, e)$. Calcule a declividade de cada lado.
11. C é o ponto médio de $\overline{AB}$, A é o ponto $(-3, -2)$ e B é o ponto $(2, 8)$. Qual é a declividade de $\overline{BC}$?
12. Dados os pontos $D(-4, 6)$, $E(1, 1)$ e $F(4, -6)$ calcule as declividades de $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$. Os pontos D, E e F são colineares? Por quê?
13. Trace um sistema de coordenadas e marque o ponto $(2, 0)$. Marque, agora, três outros pontos cujas coordenadas x são maiores que 0 e menores que 8 e que estão sôbre uma reta com declividade igual a 2, contendo $(2, 0)$.
14. Uma reta com declividade -1 passa pelo ponto $(-2, 5)$. Qual é a coordenada-y do ponto, sôbre a reta, cuja coordenada-x é 8?
15. Trace um sistema de coordenadas. Trace a reta que passa pela origem e pelo ponto $(93000000, 62000000)$. Dê três pontos desta reta cujas coordenadas-x são menores que 10.

* 16. Trace um sistema de coordenadas e marque o ponto $(-3, 1)$. Marque, agora, três outros pontos cujas coordenadas-x são maiores que 0 e menores que 10 e que estão sôbre a reta de declividade igual a $-\frac{1}{3}$, que passa por $(-3, 1)$.

13-5. RETAS PARALELAS E PERPENDICULARES

Usando declividade, podemos muito fàcilmente dizer se duas retas não verticais são paralelas.

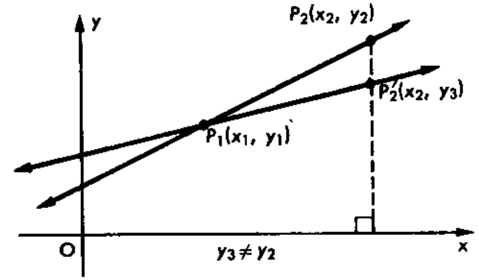
(1) Se duas retas não verticais são paralelas, então têm a mesma declividade.



Isto resulta do fato que

$$\Delta P_1RP_2 \sim \Delta P'_1R'P'_2 .$$

(2) Se duas retas não verticais e distintas se interceptam, então suas declividades são diferentes.



Se as duas retas se interceptam em P_1, como na figura, então as declividades são

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

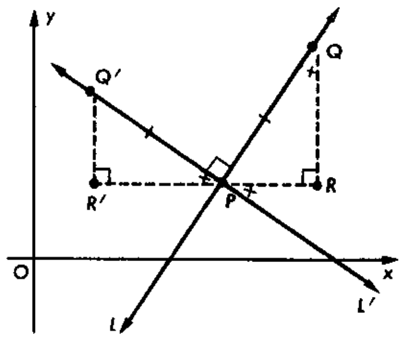
$$m' = \frac{y_3 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Aqui, $m \neq m'$, porque os denominadores são iguais e os numeradores são diferentes.

Combinando êstes dois resultados, obtemos o seguinte teorema:

Teorema 13-2

Duas retas não verticais são paralelas se e sòmente se têm a mesma declividade.



Suponha, agora, que tenhamos duas retas perpendiculares interceptando-se em P. Suponha que nenhuma das duas seja vertical.

Tomamos um ponto Q, sôbre uma das retas, acima e à direita de P, e completamos o triângulo retângulo ΔPRQ. Tomamos, então, um ponto Q', sôbre a outra reta, acima e à esquerda de P, fazendo $PQ' = PQ$. Completamos o triângulo retângulo $\Delta Q'R'P$.

Você deve verificar, agora, que os símbolos na figura nos dizem que

$$\Delta PRQ \cong \Delta Q'R'P.$$

Portanto

$$\frac{RQ}{PR} = \frac{R'P}{Q'R'}.$$

Mas a declividade de L é

$$m = \frac{RQ}{PR},$$

e a declividade de L' é

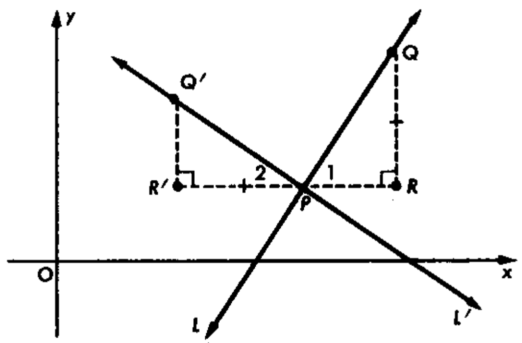
$$m' = -\frac{Q'R'}{R'P}.$$

Portanto

$$m' = -\frac{1}{m}.$$

Isto é, *se duas retas são perpendiculares, a declividade de uma é o oposto do inverso da outra.*

O mesmo esquema funciona ao contrário.



Dado $m' = -1/m$, construímos ΔPRQ como antes. Tomamos, então, R' de modo que $R'P = RQ$ e completamos o triângulo retângulo $\Delta Q'R'P$ com Q' e L'. Temos, então,

$$\Delta PRQ \cong \Delta Q'R'P,$$

como antes. Portanto, $\angle 1$ e $\angle 2$ são complementares e $L \perp L'$.

Resumimos a discussão acima no seguinte teorema:

Teorema 13-3

Duas retas não verticais são perpendiculares se e sòmente se o produto de suas declividades fôr -1.

Nenhum dos dois últimos teoremas se aplica ao caso em que uma das duas retas dadas é vertical. Mas para retas verticais, os fatos são claros. Se L é vertical, então as retas paralelas a L são, simplesmente, outras retas verticais. E as retas perpendiculares a uma reta vertical são, simplesmente, as retas horizontais.

Problemas 13-5

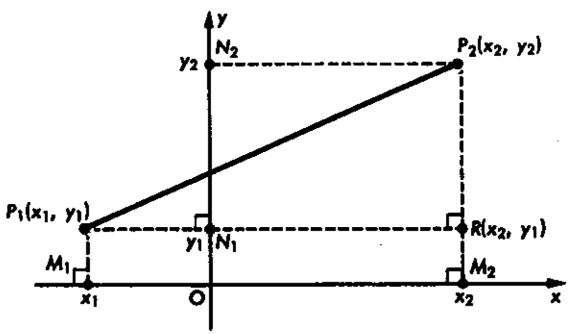
1. As retas L_1, L_2, L_3 e L_4 têm declividades $\frac{2}{3}$, -4, $-1\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, respectivamente. Quais os pares de retas perpendiculares?
2. Considere os pontos $A(-1, 5)$, $B(5, 1)$, $C(6, -2)$ e $D(0, 2)$. Calcule as declividades de $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{AD}$. $\square ABCD$ é um paralelogramo?
3. Sem uso de figura, determine quais dos seguintes quadriláteros, cujos vértices são dados aqui, são paralelogramos.
   (a) $A(-2, -2)$, $B(4, 2)$, $C(9, 1)$, $D(3, -3)$.
   (b) $K(-5, -2)$, $L(-4, 2)$, $M(4, 6)$, $N(3, 1)$.
   (c) $P(5, 6)$, $Q(7, -3)$, $R(-2, -12)$, $S(-4, -3)$.
4. Os vértices de um triângulo são $A(16, 0)$, $B(9, 2)$ e $C(0, 0)$.
   (a) Quais são as declividades dos lados?
   (b) Quais são as declividades das alturas?
5. Dados os pontos $E(-4, 0)$, $G(3, 5)$ e $K(8, -2)$, mostre que o produto das declividades de $\overleftrightarrow{EG}$ e $\overleftrightarrow{GK}$ é -1.
6. Demonstre que o quadrilátero com vértices $A(-2, 2)$, $B(2, -2)$, $C(4, 2)$ e $D(2, 4)$ é um trapézio com diagonais perpendiculares.
7. Considere os pontos $W(0, 3)$, $X(6, 4)$, $Y(12, -3)$ e $Z(-2, -12)$. Quais pares de retas determinadas por êstes pontos são perpendiculares? Demonstre sua resposta.
8. Quatro pontos, tomados aos pares, determinam seis segmentos. Para cada conjunto de quatro pontos dados abaixo, determine os segmentos paralelos. [*Cuidado*! Dois *segmentos* que têm a mesma declividade não são necessàriamente paralelos.]
   (a) $A(3, 6)$, $B(8, 2)$, $C(5, 9)$, $D(6, -1)$.
   (b) $P(0, -8)$, $Q(3, -2)$, $R(4, 0)$, $S(7, 6)$.

9. Demonstre que o triângulo cujos vértices são $H(-12, 1)$, $K(9, 3)$ e $M(11, -18)$ é um triângulo retângulo.
10. Mostre que a reta que passa por $(3n, 0)$ e $(0, 7n)$ é paralela à reta que passa por $(0, 21n)$ e $(9n, 0)$.
11. Se a reta que contém os pontos $(-8, m)$ e $(2, 1)$ é paralela à reta que contém os pontos $(11, -1)$ e $(7, m+1)$, qual deve ser o valor de m?
12. Que valôres de k tornarão a reta que contém os pontos $(k, 3)$ e $(-2, 1)$ paralela à reta que contém os pontos $(5, k)$ e $(1, 0)$?
13. No Problema 12, que valôres de k tornarão as retas perpendiculares?
14. Dados os pontos $P(1, 2)$, $Q(5, -6)$ e $R(b, b)$, determine o valor de b de modo que $\angle PQR$ seja um ângulo reto.
15. Calcule as declividades das seis retas determinadas pelos pontos $A(-5, 4)$, $B(3, 5)$, $C(7, -2)$ e $D(-1, -3)$. Demonstre que $\square ABCD$ é um losango.

* 16. Uma semi-reta $\overrightarrow{PQ}$ faz um ângulo de 30° com o eixo-x. $\overline{QR} \perp \overrightarrow{PQ}$. Se P, Q e R são os pontos $P(-4, 0)$, $Q(5, 3\sqrt{3})$, e $R(x, 0)$, determine o perímetro e a área de ΔPQR.

13-6. A FÓRMULA DA DISTÂNCIA

Se conhecemos as coordenadas dos pontos P_1 e P_2, então os pontos ficam determinados. Portanto, a distância entre êles também fica determinada. (Cap. 2, Postulado da Distância). Veremos, agora, um meio de *calcular* a distância P_1P_2 em têrmos das coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2).



Sejam M_1, N_1, M_2 e N_2 os pés das perpendiculares por P_1 e P_2, como indicado na figura. Seja R o ponto onde a reta horizontal por P_1 intercepta a reta vertical por P_2. Então

$$(P_1P_2)^2 = (P_1R)^2 + (RP_2)^2,$$

pelo Teorema de Pitágoras. $P_1R = M_1M_2$, porque lados opostos de um retângulo são congruentes. $RP_2 = N_1N_2$, pela mesma razão. Portanto, por substituição,

$$(P_1P_2)^2 = (M_1M_2)^2 + (N_1N_2)^2.$$

Mas, sabemos pelo Postulado da Régua que

$$M_1M_2 = |x_2 - x_1|$$

e

$$N_1N_2 = |y_2 - y_1|.$$

Portanto

$$(P_1P_2)^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2.$$

Como o quadrado de um número é o mesmo que o quadrado de seu valor absoluto, esta expressão pode ser escrita na forma

$$(P_1P_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Sendo $P_1P_2 \geq 0$, obtemos

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Esta é a fórmula que estávamos procurando. Ao deduzi-la, demonstramos o seguinte teorema:

Teorema 13-4. A Fórmula da Distância

A distância entre os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é

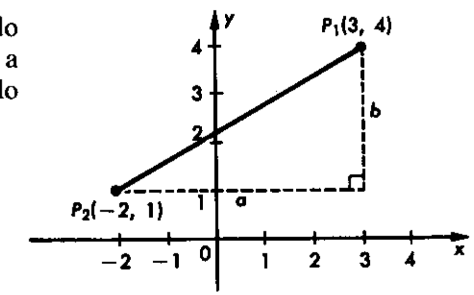
$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Por exemplo, se $P_1 = (3, 4)$ e $P_2 = (-2, 1)$, a fórmula nos diz que

$$\begin{aligned} P_1P_2 &= \sqrt{(-2-3)^2 + (1-4)^2} \\ &= \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{25 + 9} \\ &= \sqrt{34}. \end{aligned}$$

Observe que poderíamos ter tirado êste resultado da figura, sem usar a fórmula. Temos $a = 5$, $b = 6$. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned} P_1P_2 &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \sqrt{5^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{34}. \end{aligned}$$



Observe, entretanto, que, para ver isto, temos que percorrer a mesma linha de raciocínio que usamos ao deduzir a fórmula. A questão central da dedução de fórmulas gerais é que temos que completar um raciocínio apenas uma vez, e então aplicar o resultado sempre que precisemos dêle, ao invés de repetir o mesmo processo de raciocínio a todo instante.

Problemas 13-6

1. Use a fórmula e calcule a distância entre
   (a) (0, 0) e (3, 4). (b) (0, 0) e (3, – 4).
   (c) (1, 2) e (6, 14). (d) (8, 11) e (15, 35).
   (e) (3, 8) e (– 5, – 7). (f) (– 2, 3) e (– 1, 4).
   (g) (5, – 1) e (– 3, – 5). (h) (– 6, 3) e (4, – 2).
2. Ache o perímetro do triângulo cujos vértices são $A(5, 7)$, $B(1, 10)$ e $C(-3, -8)$.
3. O triângulo ΔPQR tem vértices $P(8, 0)$, $Q(-3, 2)$ e $R(10,2)$.
   (a) Calcule o comprimento de cada lado.
   (b) Calcule a área do triângulo.

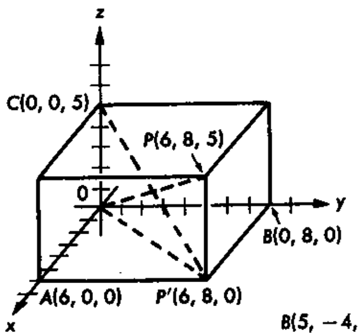
* 4. ΔKLM tem vértices $K(-5, 18)$, $L(10, -2)$ e $M(-5, -10)$.
   (a) Calcule o perímetro de ΔKLM.
   (b) Calcule $a\Delta KLM$.

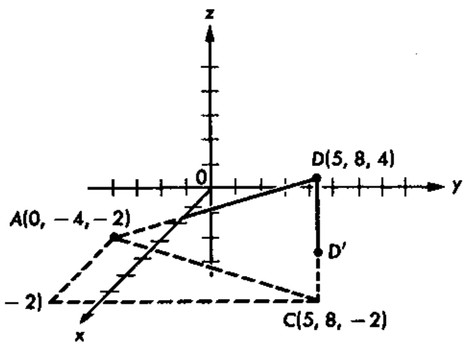
5. Os vértices de um quadrilátero são $D(4, -3)$, $E(7, 10)$, $F(-8, 2)$ e $G(-1, -5)$. Calcule o comprimento de cada diagonal.
6. Demonstre que o triângulo cujos vértices são $A(2, 3)$, $B(-1, -1)$ e $C(3, -4)$ é isósceles.
7. Um triângulo tem vértices $G(0, 7)$, $H(5, -5)$ e $K(10, 7)$. Ache o comprimento da altura em relação ao lado de menor comprimento.
8. Um triângulo tem vértices $M(-6, 0)$, $P(0, 6)$ e $Q(2, -2)$.
   (a) Calcule o perímetro de ΔMPQ.
   * (b) Calcule o comprimento da altura em relação ao lado de maior comprimento.
   * (c) Calcule a área do triângulo.

* 9. Calcule os valôres de b de tal modo que o triângulo de vértices $(-6, 0)$, $(0, 6)$ e $(b, -b)$ seja equilátero.

10. Dados os pontos $A(-1, 6)$, $B(1, 4)$ e $C(7, -2)$, calcule AB e BC. Demonstre que B está entre A e C.
11. Demonstre que, para os pontos $D(-4, -6)$, $E(-1, -2)$ e $F(3, 1)$, E não está entre D e F.

\+ 12. No sólido retangular à esquerda, abaixo, um dos vértices está na origem e A, B e C estão sôbre os eixos x, y e z respectivamente. P' é a projeção de p no plano xy.
   (a) Calcule OP'. (b) Calcule OP. (c) Calcule CP'.





\+ 13. Na figura anterior, à direita,
   (a) Calcule AB, BC, AC, DC, e AD.
   (b) Mostre que $AD^2 = (5-0)^2 + (8+4)^2 + (4+2)^2$.

\+ 14. Calcule a distância da origem ao ponto $P(a, b, c)$. A fórmula resultante muda se a, b, ou c é um número negativo? [*Sugestão:* Use a figura do Problema 13 acima para ajudá-lo.]

*+ 15. Mostre, com um diagrama semelhante à figura do Problema 14 acima, que a distância PQ entre $P(x_1, y_1, z_1)$ e $Q(x_2, y_2, z_2)$ é dada pela fórmula

$$PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

\+ 16. Calcule a distância PQ, sendo as coordenadas de P e Q dadas por:
   (a) $P(4, -1, -5)$; $Q(7, 3, 7)$. (b) $P(0, 4, 5)$; $Q(-6, 2, 3)$.
   (c) $P(3, 0, 7)$; $Q(-1, 3, 7)$. (d) $P(-3, 4, -5)$; $Q(6, -8, 3)$.
   (e) $P(1, 2, 3)$; $Q(2, 3, 4)$.

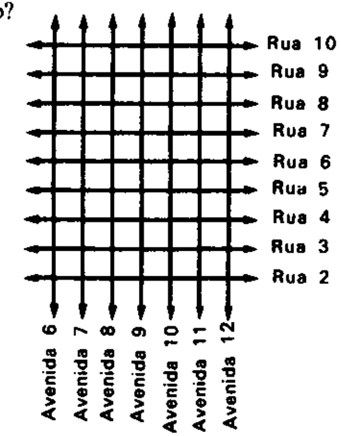
\+ 17. Demonstre que o triângulo com vértices $A(2, 0, 8)$, $B(8, -4, 6)$ e $C(-4, -2, 4)$ é isósceles.

*+ 18. Mostre que ΔABC é um triângulo retângulo se os vértices são

$$A(2, 4, 1), \quad B(11, -8, 1) \quad \text{e} \quad C(2, 4, 21).$$

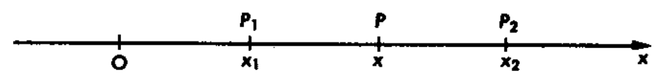
*+ 19. A figura $ABCD$ tem vértices $A(3, 2, 5)$, $B(1, 1, 1)$, $C(4, 0, 3)$ e $D(6, 1, 7)$.
   (a) Mostre que os lados opostos são congruentes.
   (b) $ABCD$ é, necessàriamente, um paralelogramo?

20. Numa cidade cuidadosamente planejada, as ruas são distribuídas com avenidas numeradas percorrendo a direção norte-sul e ruas numeradas percorrendo a direção leste-oeste, como no diagrama ao lado, e de modo a formar quadrados congruentes. Se você toma um táxi no cruzamento da Rua 2 com a Avenida 6 e ordena ao motorista que o leve ao cruzamento da Rua 10 com a Avenida 12, pelo caminho mais curto possível, qual é a distância (em número de quadras) que você percorre? Esta distância é a menor entre os dois pontos? Explique.



13-7. A FÓRMULA DO PONTO MÉDIO. DIVISÃO DE UM SEGMENTO POR UM PONTO NUMA RAZÃO DADA

Considere um segmento $\overline{P_1P_2}$, sôbre o eixo x:



Seja P o ponto médio, sejam as coordenadas dos três pontos como se vê na figura e suponhamos que $x_1 < x_2$. É muito fácil ver como expressar x em têrmos de x_1 e x_2. Queremos que

$$P_1P = PP_2.$$

Como

$$P_1P = |x - x_1| = x - x_1$$

e

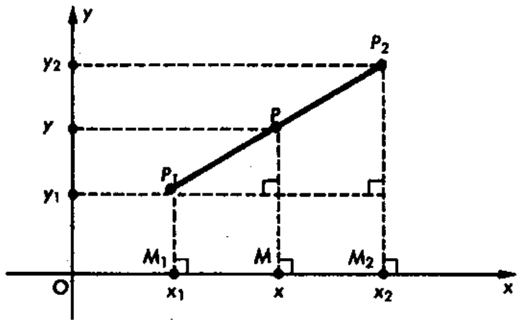
$$PP_2 = |x_2 - x| = x_2 - x,$$

nossa equação significa que

$$x - x_1 = x_2 - x \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Esta fórmula também funciona quando $x_2 < x_1$. (Demonstração? Se trocarmos x_1 e x_2, o problema fica inalterado, do mesmo modo que a fórmula.)

Uma vez que temos a fórmula do ponto médio para segmentos sôbre o eixo-x, é fácil passar para o caso geral.



Aqui, se P é o ponto médio de $\overline{P_1P_2}$, então M é o ponto médio de $\overline{M_1M_2}$. (Por quê?) Portanto

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Do mesmo modo, obtemos

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

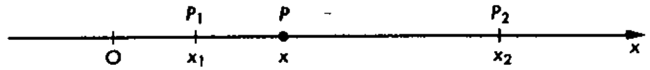
Resumindo, temos o seguinte teorema:

Teorema 13-5. A Fórmula do Ponto Médio

Dados os pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, o ponto médio de $\overline{P_1P_2}$ é o ponto

$$P = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Considere, agora, um problema mais geral. São dados um segmento $\overline{P_1P_2}$ sôbre o eixo-x e um número positivo r.



Queremos encontrar as coordenadas do ponto P que divide P_1P_2 na razão de r para 1. Ou seja, desejamos

$$\frac{P_1P}{PP_2} = r, \qquad \text{ou} \qquad P_1P = rPP_2.$$

Se $x_1 < x_2$, como na figura, isto significa que

$$x - x_1 = r(x_2 - x), \qquad \text{ou} \qquad x + rx = x_1 + rx_2,$$

ou

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}.$$

Note que para $r = 1$, isto nos deve dar as coordenadas do ponto médio. (Dá?)

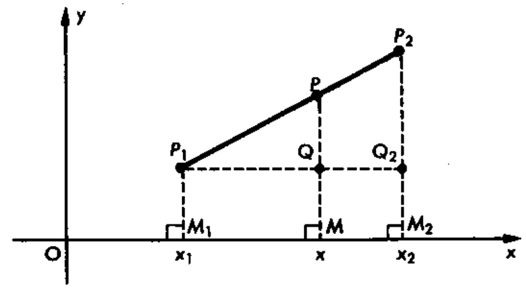
Para o caso $x_2 < x_1$, a fórmula é exatamente a mesma, mas a dedução é ligeiramente diferente. (Usamos $P_1P = x_1 - x$, $PP_2 = x - x_2$ e obtemos a mesma fórmula.)

Como no caso do ponto médio, podemos fàcilmente passar ao caso geral. Se

$$\frac{P_1P}{PP_2} = r,$$

então

$$\frac{M_1M}{MM_2} = r,$$



porque $\Delta P_1PQ \sim \Delta P_1P_2Q_2$. Portanto, segue-se que

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}.$$

Exatamente da mesma forma, obtemos

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}.$$

Assim, temos o seguinte teorema:

Teorema 13-6

Se P é um ponto entre P_1 e P_2 e

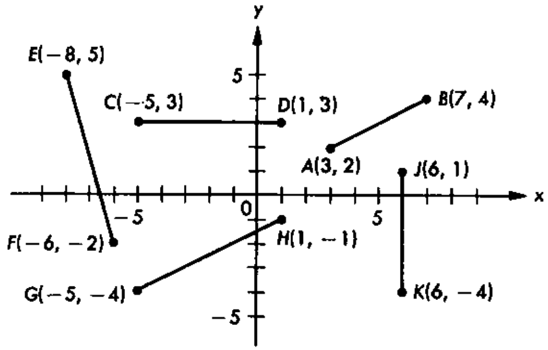
$$\frac{P_1P}{PP_2} = r,$$

então

$$P = \left(\frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} \right).$$

Problemas 13-7

1. Ache as coordenadas do ponto médio de cada segmento na figura.

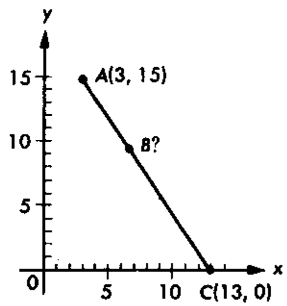


2. Use a fórmula para calcular as coordenadas do ponto médio de cada segmento determinado pelos seguintes pares de pontos.

   (a) (6, 0) e (10, 2). (b) (5, 7) e (11, 17).
   (c) (12, 3) e (3, 2). (d) (−5, 6) e (6, −5).
   (e) $(\sqrt{2}, -\sqrt{3})$ e $(\sqrt{18}, \sqrt{75})$. (f) $(\frac{5}{4}, -\frac{5}{3})$ e $(\frac{3}{4}, \frac{2}{3})$.
   (g) $(a, 0)$ e $(0, b)$. (h) (a, b) e (c, d).

3. Se $A(3, 15)$ e $C(13, 0)$ são as extremidades de um segmento e B é um ponto de $\overline{AC}$, ache as coordenadas de B, dado que a razão AB/BC é igual a

   (a) 4. (b) $\frac{2}{3}$.
   (c) $\frac{1}{4}$. (d) $\frac{3}{2}$.

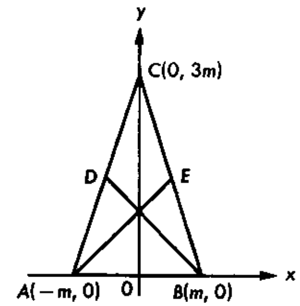


4. São dados os pontos $P(5, 2)$ e $R(20, 14)$ e Q entre P e R. Determine as coordenadas de Q se PQ/QR é igual a

   (a) $\frac{1}{2}$. (b) 2. (c) $\frac{1}{3}$. (d) 4.

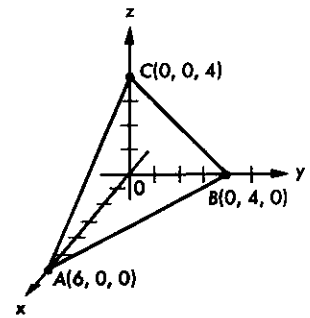
5. Quais são as coordenadas dos pontos que dividem em três partes congruentes o segmento determinado pelos pontos (2, −3) e (8, 9)?
6. Se os vértices de um triângulo são $A(5, -1)$, $B(1, 5)$ e $C(-3, 1)$, quais são os comprimentos das medianas?
7. Os vértices de um quadrilátero são $A(0, 0)$, $B(5, 1)$, $C(7, 4)$ e $D(2, 3)$. Mostre que as duas diagonais têm o mesmo ponto médio. O quadrilátero é um paralelogramo? Por quê?

8. Dados $P(-3, -4)$, $M(b, -1)$ e $Q(7, b)$, calcule b de modo que M seja o ponto médio de $\overline{PQ}$.
9. Dados $G(-5, 8)$, $K(2, a)$ e $H(b, 1)$, calcule a e b de modo que K seja o ponto médio de $\overline{GH}$.
10. Um segmento de reta tem $M(3, -5)$ como ponto médio, e uma das extremidades é $A(2, -4)$. Quais são as coordenadas de B, a outra extremidade?
11. É dado um quadrilátero cujos vértices são $A(3, -2)$, $B(-3, 4)$, $C(1, 8)$ e $D(7, 4)$. W, X, Y e Z são os pontos médios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, respectivamente.
    (a) Calcule as coordenadas de W, X, Y e Z.
    (b) Calcule o perímetro de $\square WXYZ$.
    (c) Calcule as declividades de $\overline{WX}$ e $\overline{YZ}$.
12. Demonstre que as diagonais de $\square PQRS$ têm o mesmo ponto médio e são perpendiculares uma à outra, dado que os vértices são $P(2, 1)$, $Q(7, 4)$, $R(4, 9)$ e $S(-1, 6)$.
13. Usando coordenadas, demonstre que duas das medianas do triângulo de vértices $(m, 0)$, $(-m, 0)$ e $(0, 3m)$ são perpendiculares uma à outra.

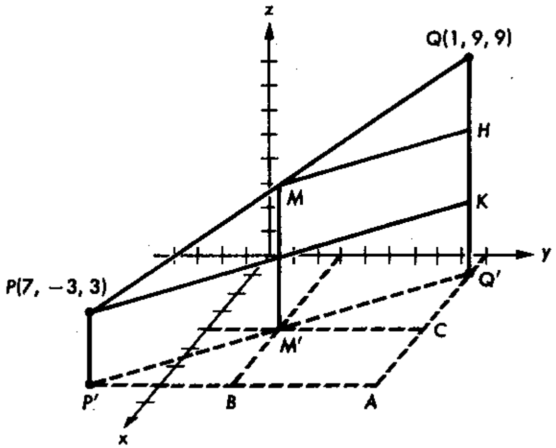


* 14. $A(-3, 2)$ e $B(5, 12)$ são dois dos vértices do ΔABC. Uma reta por G, ponto médio de $\overline{AB}$, e paralela a $\overline{AC}$, intercepta $\overline{BC}$ em $H(10, 2)$. Calcule as coordenadas de C, o terceiro vértice.

\+ 15. Dada a figura, determine as coordenadas do ponto médio de cada um dos segmentos $\overline{AO}$, $\overline{BO}$, $\overline{CO}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$.



\+ 16. Na figura, $\overline{P'Q'}$ é a projeção de $\overline{PQ}$ no plano xy, $\overline{PK} \parallel \overline{P'Q'}$, $\overline{P'A} \parallel$ eixo-y, $\overline{AQ'} \parallel$ eixo-x, M é o ponto médio de $\overline{PQ}$, M' é a projeção de M, H é o ponto médio de $\overline{QK}$ e B e C são os pontos médios de $\overline{AP'}$ e $\overline{AQ'}$, respectivamente.
    (a) Por que $\overline{PP'} \parallel \overline{MM'} \parallel \overline{QQ'}$?
    (b) Por que M' é o ponto médio de $\overline{P'Q'}$?
    (c) Ache as coordenadas de P', Q', A e K.
    (d) Ache as coordenadas de B, C, H e M'.
    (e) Ache as coordenadas de M, o ponto médio de $\overline{PQ}$.



$^{+}$ 17. Escreva uma fórmula geral para as coordenadas do ponto médio M do segmento que liga os pontos $P(x_1, y_1, z_1)$ e $Q(x_2, y_2, z_2)$, baseado nas observações que você fêz ao resolver o Problema 16.

$^{+}$ 18. Ache as coordenadas dos pontos médios dos segmentos que ligam os pontos:

(a) $(3, 5, 0)$ e $(1, 1, 8)$.

(b) $(8, 5, 3)$ e $(0, 0, -5)$.

(c) $(-6, 2, 4)$ e $(6, -2, -4)$.

(d) $(3\sqrt{2}, 2\sqrt{15}, -5\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{27})$.

*$^{+}$ 19. No Problema 16, ache as coordenadas dos dois pontos que dividem $\overline{PQ}$ em três partes congruentes.

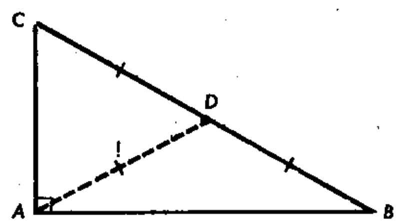
*$^{+}$ 20. No Problema 16, ache os perímetros de $\Delta BMM'$ e $\Delta AQQ'$. É verdade que $\Delta BMM' \sim \Delta AQQ'$?

13-8. O USO DE SISTEMAS DE COORDENADAS NA DEMONSTRAÇÃO DE TEOREMAS DA GEOMETRIA

Veremos, agora, como os sistemas de coordenadas podem ser usados na demonstração de teoremas da geometria. O principal propósito desta seção é ilustrar um certo método de trabalho em geometria. O método será mais fàcilmente compreendido se os primeiros exemplos com os quais lidarmos forem simples. Por esta razão, aplicaremos o método, em primeiro lugar, a alguns teoremas já conhecidos.

Teorema A

O ponto médio da hipotenusa de um triângulo retângulo é equidistante dos vértices.

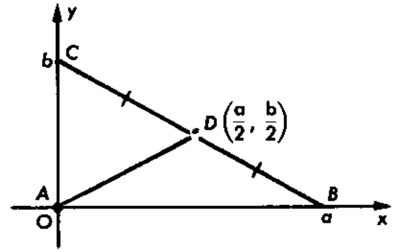


O primeiro passo ao aplicar os métodos de coordenadas é escolher o sistema de coordenadas de tal modo a tornar a parte algébrica tão simples quanto possível. Uma boa escolha para êste problema é o visto na figura abaixo. Isto é, colocamos a origem em A, com B e C nas partes positivas dos dois eixos. Assim, $B = (a, 0)$, $C = (0, b)$, como na figura. Portanto, pela Fórmula do Ponto Médio, $D = (a/2, b/2)$. Ora,

$$AD = \sqrt{\left(\frac{a}{2}-0\right)^2 + \left(\frac{b}{2}-0\right)^2},$$

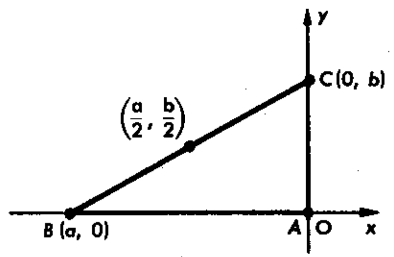
e

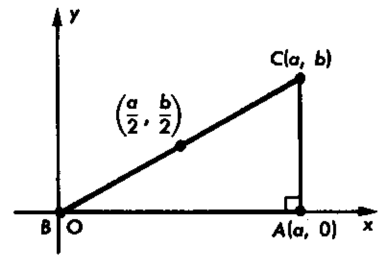
$$BD = \sqrt{\left(a-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(0-\frac{b}{2}\right)^2}.$$



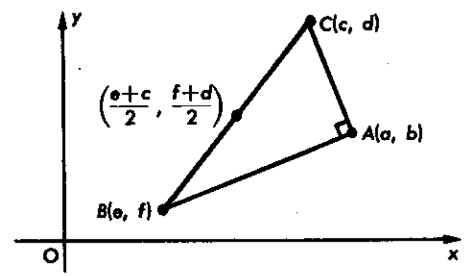
Portanto, $AD = BD$. Isto demonstra o teorema porque $BD = CD$, pela definição de ponto médio.

A nossa escolha dos eixos não é a única boa escôlha possível. As seguintes figuras sugerem esquemas que são igualmentes bons.



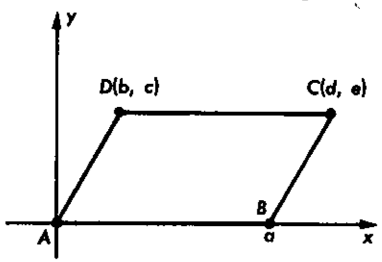


Entretanto, se você toma os eixos ao acaso, você pode transformar um problema simples em um problema complicado.

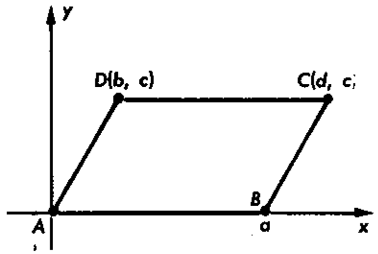


Para iniciar a demonstração, com base nesta figura, você deve encontrar um meio de dizer, *algèbricamente*, que ΔABC tem um ângulo reto em A. Isto pode ser feito, mas não parece nem muito simples nem muito cômodo.

Ao usar sistemas de coordenadas para demonstrar fatos sôbre paralelogramos, quase sempre colocamos os eixos como se vê à direita. Dado um paralelogramo $\square ABCD$, colocamos a origem em A, com B na parte positiva do eixo-x, e C e D no semiplano superior. Ora, a declividade de $\overline{AB}$ é 0 e $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Portanto, a declividade de $\overline{CD}$ é 0. Isto nos dá



$$\frac{e-c}{d-b} = 0.$$



Portanto, podemos trocar e por c na figura. (Por quê?) Afirmamos, também, que

$$d = a + b.$$

Se $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ não são verticais, então têm declividade, e a declividade dos dois segmentos é a mesma. Assim,

$$\frac{c-0}{b-0} = \frac{c-0}{d-a},$$

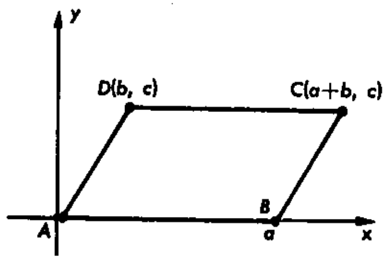
$b = d-a$, e $d = a + b$. Se $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são verticais, então

$$b = 0, \qquad d = a, \qquad \text{e} \qquad d = a + 0 = a + b,$$

como antes.

Podemos, portanto, denominar os pontos de nossa figura da maneira vista ao lado.

Conhecendo êste esquema, vários teoremas sôbre paralelogramos se tornam muito simples.



Teorema B

Se as diagonais de um paralelogramo são congruentes, então o paralelogramo é um retângulo.

Demonstração: Na notação da figura acima, temos que $AC = BD$. Pela Fórmula da Distância, isto nos diz que

$$\sqrt{(a+b-0)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{(a-b)^2 + (0-c)^2},$$

ou $$(a+b)^2 + c^2 = (a-b)^2 + c^2,$$

ou $$a^2 + 2ab + b^2 + c^2 = a^2 - 2ab + b^2 + c^2.$$

Portanto $$4ab = 0.$$

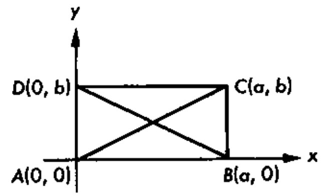
Sendo $a > 0$, segue-se que $b = 0$; isto significa que D está sôbre o eixo-y. Portanto, $\angle DAB$ é um ângulo reto e $\square ABCD$ é um retângulo.

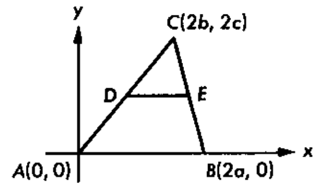
A série seguinte de problemas pretende dar a você alguma prática no uso de sistemas de coordenadas. Ao resolver êstes problemas, portanto, você deve tentar fazer a álgebra se incumbir da maior parte do trabalho, usando os exemplos ilustrativos desta seção como modêlo.

Problemas 13-8

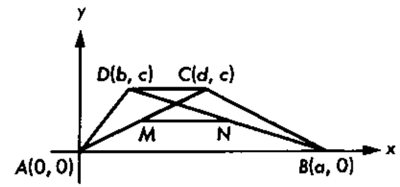
Demonstre os seguintes teoremas usando os métodos de coordenadas.

1. As diagonais do retângulo à esquerda, abaixo, são iguais em comprimento.

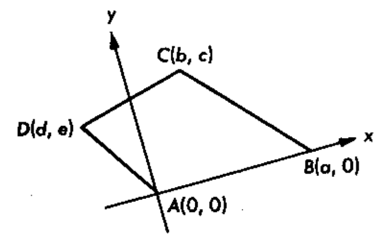




2. O segmento entre os pontos médios dos dois lados do triângulo à direita, acima, é paralelo ao terceiro lado e seu comprimento é metade do comprimento do terceiro lado. [*Sugestão:* Uma vez que vamos calcular as coordenadas dos pontos médios e metade do comprimento da base, é conveniente, mas não necessário, tomar as coordenadas de A, B e C como na figura.]
3. As diagonais de um losango são perpendiculares entre si. [*Sugestão:* Sejam $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(a + b, c)$ e (b, c) os vértices. Verifique que a declividade de uma é o oposto do inverso da declividade da outra.]
4. A mediana de um trapézio é paralela às bases e seu comprimento é a metade da soma dos comprimentos das bases.
5. O segmento entre os pontos médios das diagonais de um trapézio é paralelo às bases e seu comprimento é metade da diferença entre os comprimentos das bases.



6. Os segmentos que ligam, ordenadamente, os pontos médios de lados consecutivos de um quadrilátero formam um paralelogramo. [*Observação:* Podemos selecionar nossos eixos de modo que um vértice seja $(0, 0)$ e um lado da figura fique ao longo do eixo x, não importa quão "pontuda" a figura possa ser.]

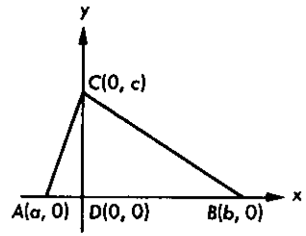


7. Os segmentos que ligam, em ordem, os pontos médios de lados consecutivos de um trapézio isósceles formam um losango.
8. No triângulo ΔABC, se $\overline{CM}$ é a mediana em relação a $\overline{AB}$, então

$$AC^2 + BC^2 = \tfrac{1}{2}AB^2 + 2CM^2.$$

[*Sugestão:* Escolha (0, 0) como ponto médio de $\overline{AB}$.]

9. Num triângulo, o quadrado de um lado oposto a um ângulo agudo é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados menos duas vêzes o produto de um dêstes lados pela projeção do outro lado sôbre êste. Ou seja: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot DB$. Em que ponto da demonstração você necessita da hipótese de que $\angle B$ é agudo?



10. A soma dos quadrados dos lados de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados das diagonais.
* 11. Em um quadrilátero, a soma dos quadrados dos lados é igual à soma dos quadrados das diagonais mais quatro vêzes o quadrado do comprimento do segmento que une os pontos médios das diagonais.
\+ 12. Demonstre que as quatro diagonais de um sólido retangular são congruentes e se interceptam em um ponto médio comum.

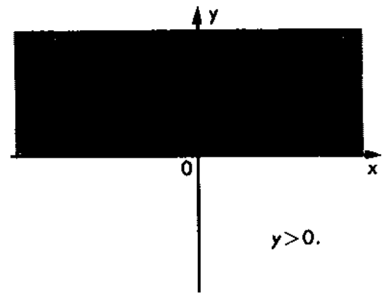
13-9. O GRÁFICO DE UMA CONDIÇÃO

Por um *gráfico* entendemos uma figura no plano, isto é, um conjunto de pontos. Assim, ângulos, triângulos e semiplanos são gráficos, da mesma forma que segmentos, retas e semi-retas.

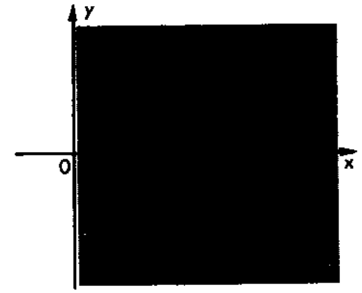
O têrmo "gráfico" é geralmente usado quando estamos descrevendo uma figura através de uma condição que é satisfeita pelos pontos da figura dada, e por nenhum outro ponto. Aqui estão alguns exemplos.

Condição	*Gráfico*
1. $y > 0$.	Semiplano acima do eixo-x.
2. $x > 0$.	Semiplano à direita do eixo-y.
3. $x = 0$.	O eixo-y.
4. $x > 0$ e $y > 0$.	O primeiro quadrante.
5. $x = 1$.	A reta vertical por (1, 0).
6. $x = 3$.	A reta vertical por (3, 0).
7. $1 < x < 3$.	A faixa infinita entre as retas descritas pelas condições 5 e 6.

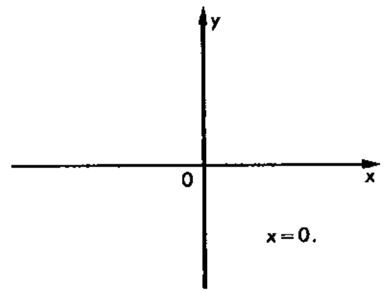
Os sete gráficos são vistos na página seguinte.



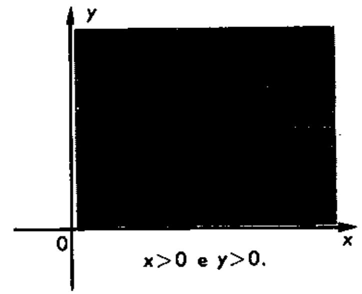
1.



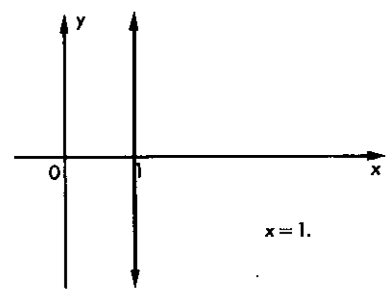
2.



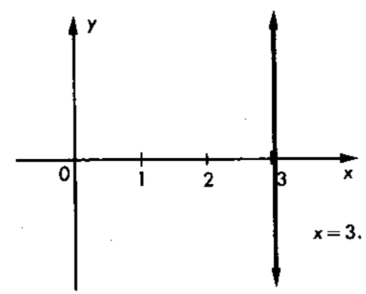
3.



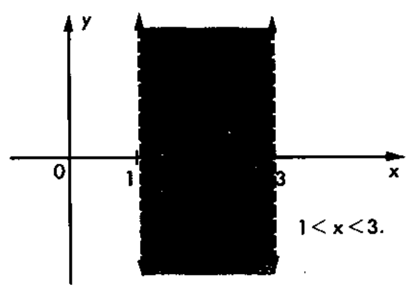
4.



5.



6.



7.

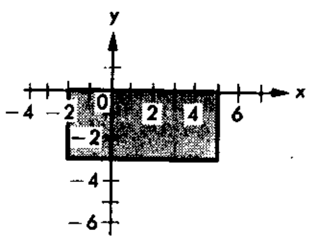
Em cada um dêstes casos, dizemos que a figura é o *gráfico* da condição que a descreve. Assim, cada uma das sete figuras da página 377 é o *gráfico* da condição indicada.

Repetindo: o gráfico de uma condição é o conjunto de todos os pontos que satisfazem a condição.

Êste têrmo é mais freqüentemente usado quando à condição é enunciada algèbricamente, em têrmos de coordenadas, como nos exemplos acima. Quando a condição é enunciada em forma de uma equação, falamos, naturalmente, da figura como gráfico da equação. Por exemplo, a reta vertical por $(1, 0)$ é o gráfico da equação $x = 1$. Da mesma forma, a primeira das sete figuras é o gráfico da desigualdade $y > 0$.

Problemas 13-9

1. No mesmo par de eixos, esboce o gráfico das seguintes condições:
(a) $x = 5$. (b) $x < -2$. (c) $y \geq 4$. (d) $y = 0$.
2. Esboce em um par de eixos os conjuntos de pontos descritos pelas seguintes condições:
(a) $|x| = 2$. (b) $|y| < 1$. (c) $|x| \geq 3$.
3. Esboce a reunião dos gráficos de $x = 3$ e $y = 2$. Qual é a interseção?
4. São dadas as condições: (i) x é um número positivo e (ii) y é um número positivo.
(a) Esboce a reunião dos gráficos.
(b) Esboce a interseção dos gráficos.
5. Esboce a interseção dos gráficos destas quatro condições:
$$x \geq 0, \qquad x \leq 6, \qquad y \geq 0, \qquad y \leq 4.$$
Descreva a interseção em palavras.
6. Enuncie as condições que descrevem a região esboçada à direita.



7. Esboce o gráfico e calcule a área da interseção dos conjuntos de todos os pontos satisfazendo as condições
$$-1 \leq x \leq 3 \quad \text{e} \quad -2 \leq y \leq 5.$$
8. A distância de um ponto $P(x, y)$ ao ponto $A(1, 0)$ é igual à distância do ponto P ao ponto $B(7, 0)$. Escreva uma equação que expresse esta condição. Quantos pontos P existem? Esboce o conjunto de todos êstes pontos.
9. Escreva uma equação para o conjunto de todos os pontos que são equidistante de $A(0, 6)$ e $B(6, 0)$. Esboce o gráfico.

* 10. Esboce o gráfico de $y = |x|$.

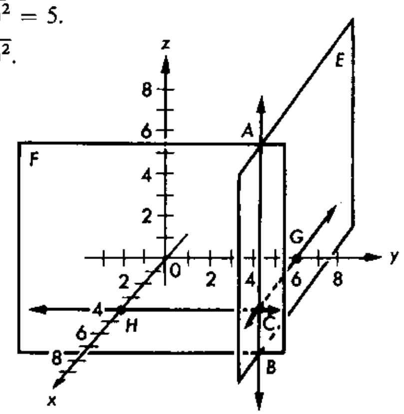
* 11. Esboce o gráfico de $y = -|x|$.

+ 12. Um ponto $P(x, y)$ está entre os pontos $A(1, 3)$ e o ponto $B(8, 6)$. Use a fórmula da distância e a definição de "entre" para escrever uma equação expressando esta condição sôbre P.

*+ 13. Se $P = (x, y)$, $A = (a, c)$ e $B = (b, d)$, qual é condição sôbre os pontos P, A e B que é expressa por
$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-c)^2} + \sqrt{(x-b)^2 + (y-d)^2} = \sqrt{(a-b)^2 + (c-d)^2}\,?$$

*+ 14. No mesmo par de eixos, esboce o conjunto de todos os pontos $P(x, y)$ satisfazendo as condições:
(a) $\sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2} + \sqrt{(x-7)^2 + (y-1)^2} = 5$.
(b) $\sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y-1)^2}$.

*+ 15. Na figura, o plano E é paralelo ao plano xz e o plano F é paralelo ao plano yz. E e F se interceptam em $\overleftrightarrow{AB}$. $\overleftrightarrow{CG}$ está no plano E, $\overleftrightarrow{CH}$ está no plano F e ambas as retas estão no plano xy.
(a) Quais são as coordenadas de C?
(b) Qual a equação que dá a condição da qual o plano E é o gráfico? Da qual o plano F é o gráfico?
(c) $\overleftrightarrow{AB}$ é o gráfico de que condição?
(d) O ponto C é gráfico de que condição?

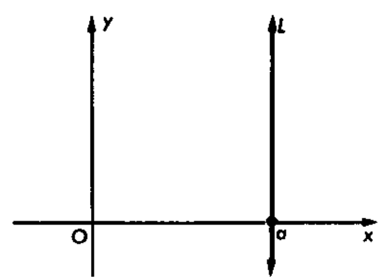


*+ 16. Em um sistema de coordenadas tridimensional, quais são os gráficos das seguintes condições?
(a) $z = 0$. (b) $x = 0$. (c) $y = 0$.
(d) $y = 3$. (e) $z = 5$. (f) $|y| = 2$.
(g) $x = 0$ e $y = 0$. (h) $x = 3$ e $z = 0$.
(i) $|y| = 2$ e $z = 0$. (j) $x = 3$ e $y = 2$.

13-10. COMO DESCREVER UMA RETA COM UMA EQUAÇÃO

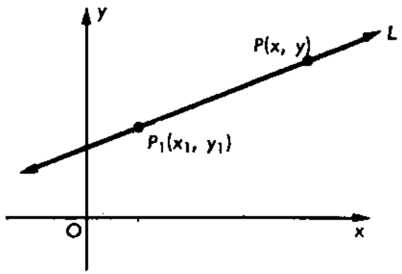
É fácil descrever uma reta vertical com uma equação.

Se a reta intercepta o eixo x em $(a, 0)$, então ela é o gráfico de $x = a$.



Para retas não verticais, precisamos usar a declividade. Suponhamos que a reta L passe pelo ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ e tenha declividade m. Se $P = (x, y)$ é um *outro* ponto de L, então
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m,$$

porque todos os segmentos de L têm declividade m. Evidentemente, esta equação não é satisfeita quando $x = x_1$ e $y = y_1$, porque, neste caso, a fração à esquerda se transforma na expressão sem sentido 0/0, que não é igual a m (nem igual a qualquer outro número). Mas, isto se arranja fàcilmente: Multiplicando por $x - x_1$, obtemos



$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Esta operação *junta um ponto ao gráfico:* a nova equação é satisfeita por todo ponto de L diferente de P_1, porque a outra equação também o era. E a nova equação é, também, satisfeita pelo próprio P_1, porque quando $x = x_1$ e $y = y_1$, obtemos $0 = m \cdot 0$, que é uma afirmação verdadeira.

Escrevemos êste resultado como um teorema:

Teorema 13-7

Seja L uma reta com declividade m, passando pelo ponto (x_1, y_1). Então todo ponto de L satisfaz a equação

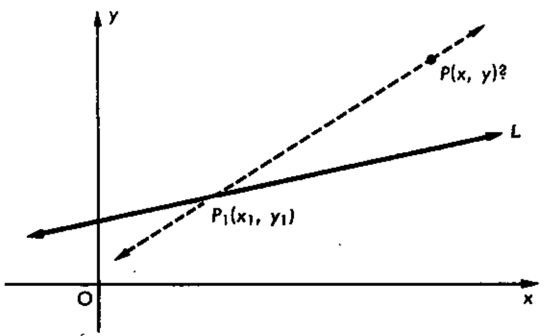
$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Note que êste teorema *não* diz que L é o gráfico da equação. E, de fato, não demonstramos isto ainda; demonstramos apenas metade disso. Quando dizemos que L é o gráfico da equação, isto significa duas coisas:

(1) todo ponto de L satisfaz a equação, e

(2) todo ponto que satisfaz a equação está sôbre L.

Até aqui, demonstramos (1). Demonstraremos, agora, (2).



Suponha que $P(x, y)$ é um ponto para o qual

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Se $x = x_1$, então $y = y_1$, de modo que P está em L. Se $x \neq x_1$, então $\overline{P_1P}$ não é vertical, e sua declividade é

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m.$$

Portanto, $\overleftrightarrow{P_1P}$ e L têm a mesma declividade. Portanto, estas retas são paralelas ou idênticas. Elas não podem ser paralelas porque (x_1, y_1) pertence a ambas. Portanto, $\overleftrightarrow{P_1P}$ é L, e P está em L.

Isto nos dá um teorema que é mais simples e também diz mais que o precedente.

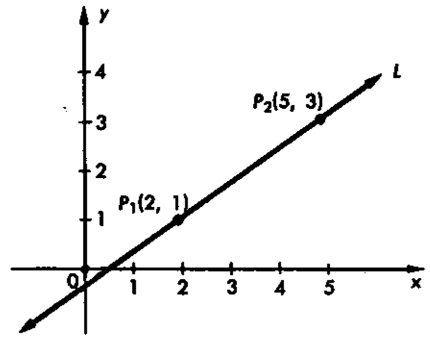
Teorema 13-8

O gráfico da equação

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

é a reta que passa pelo ponto (x_1, y_1) e tem declividade m.

Se conhecermos as coordenadas de dois pontos de uma reta, é fácil achar uma equação para ela.



Suponha, por exemplo, que a reta passe pelos pontos

$$P_1(2, 1) \quad \text{e} \quad P_2(5, 3).$$

Então a declividade é

$$m = \frac{3-1}{5-2} = \frac{2}{3}.$$

Usando P_1 (2, 1) e $m = \frac{2}{3}$, na equação dada pelo Teorema 13-8, obtemos

(1) $$y - 1 = \tfrac{2}{3}(x - 2).$$

Podemos simplificar, obtendo uma equação equivalente:

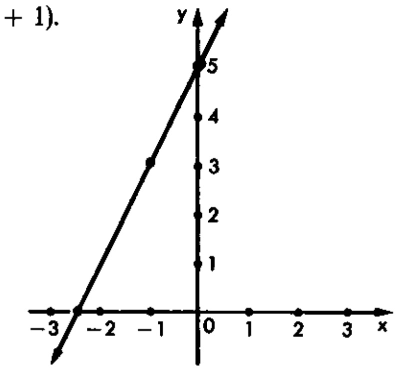
$$3y - 3 = 2x - 4,$$

(2) $$2x - 3y = 1.$$

Observe, entretanto, que, embora a equação (2) seja "mais simples" que a equação (1), não é mais fácil de interpretar. Usando o Teorema 13-8, podemos dizer, imediatamente, que o gráfico de (1) é a reta por (2, 1) com declividade $\frac{2}{3}$. Isto não é tão óbvio para a forma simplificada (2).

Dada uma equação na forma do Teorema 13-8, é fácil traçar o gráfico. Tome, por exemplo,

$$y-3 = 2(x+1).$$



Você pode ver, imediatamente, que o gráfico contém o ponto $(-1, 3)$. Para traçar a reta, precisamos, simplesmente, conhecer mais um ponto dela. (Por quê?) Pondo $x = 0$, obtemos

$$y-3 = 2(0+1),$$

ou

$$y = 5.$$

Portanto, (0, 5) está no gráfico. Podemos, agora, usar uma régua porque sabíamos, de início, que o gráfico teria de ser uma reta. Do ponto de vista prático, entretanto, é uma boa idéia testar nosso trabalho calculando as coordenadas de um terceiro ponto. Por exemplo, fazendo $y = 0$, obtemos

$$0-3 = 2(x+1),$$

o que nos dá

$$x = -\tfrac{5}{2}.$$

Portanto, $(-\frac{5}{2}, 0)$ está no gráfico exatamente como a figura sugere.

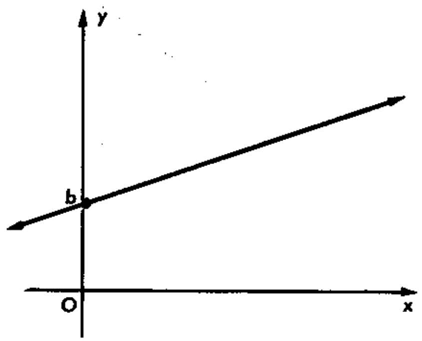
O seguinte teorema é uma conseqüência simples do Teorema 13-8.

Teorema 13-9

O gráfico da equação

$$y = mx + b$$

é a reta que passa pelo ponto $(0, b)$ e tem declividade m.



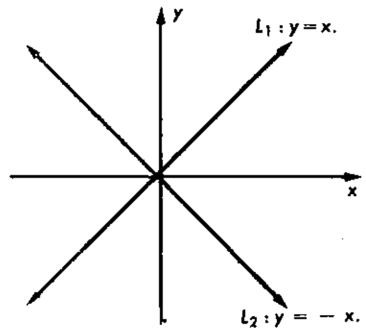
A razão é que nossa equação pode ser escrita na forma

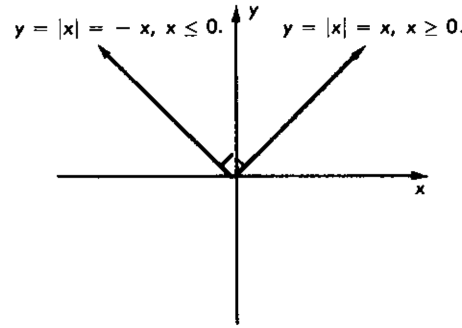
$$y-b = m(x-0).$$

Podemos, agora, traçar o gráfico da equação

$$y = |x|$$

pelo seguinte método. Traçamos, primeiramente, a seguir, à esquerda, os gráficos das equações $y = x$ e $y = -x$.





Lembramos que $|x|$ é definido pelas seguintes condições:

(1) Para $x \geq 0$, $|x| = x$.

(2) Para $x \leq 0$, $|x| = -x$.

Isto significa que à direita do eixo-y, nosso gráfico está sôbre a reta L_1, mas não em L_2. À esquerda do eixo-y, o gráfico está sôbre a reta L_2 mas não em L_1. O gráfico, portanto, é como o que está à direita, acima.

É fácil ver que as duas semi-retas são perpendiculares. Portanto, o gráfico de $y = |x|$ é um ângulo reto.

Problemas 13-10

1. As equações abaixo estão escritas na forma dada pelo Teorema 13-8. Para cada equação, determine a declividade e as coordenadas de dois pontos do gráfico e faça um esbôço dêste último.
   (a) $y-3 = 2(x-4)$. (b) $y-1 = \frac{2}{3}(x-6)$.
   (c) $y+6 = -\frac{1}{4}(x-8)$. (d) $y-5 = 3x$.
   (e) $y = -2(x+3)$.
2. Escreva uma equação para a reta que passa pelo ponto P e tem declividade m, sendo dado que
   (a) $P = (4, 1)$ e $m = 3$. (b) $P = (\frac{1}{2}, -4)$ e $m = -2$.
   (c) $P = (8, 2)$ e $m = \frac{3}{4}$. (d) $P = (-4, 0)$ e $m = \frac{5}{4}$.
   (e) $P = (-6, 5)$ e $m = 0$.
3. Para cada par de pontos, calcule a declividade e escreva a equação da reta que os contém.
   (a) (5, 2) e (2, 8).
   (b) (2, 4) e (4, 5).
   (c) (0, 0) e (1, 5).
   (d) (2, 7) e (−8, 5).
   (e) (−6, 0) e (0, 4).
   (f) (9, −15) e (12, −18).
   (g) (−4, −13) e (19, 33).
   (h) $(\sqrt{2}, \sqrt{8})$ e $(-\sqrt{8}, -\sqrt{2})$.

4. João e Maria estavam comparando as respostas de suas tarefas para casa. O problema era:

   "Escreva uma equação para a reta que passa pelos pontos $(2, -5)$ e $(8, 7)$".

   João obteve a equação $y + 5 = 2(x - 2)$ e Maria, a equação $y - 7 = 2(x - 8)$. Qual resposta é a correta? Explique.

5. Para cada uma das equações dadas abaixo, escrita na forma dada pelo Teorema 13-9, determine a declividade e a interseção com o eixo-y fazendo, depois, um esbôço do gráfico.

   (a) $y = 2x + 6$. (b) $y = -2x + 6$.
   (c) $y = \frac{2}{3}x$. (d) $y = 2x - 6$.
   (e) $y = \frac{2}{3}x - 6$.

6. Ache uma equação para a reta que passa pelo ponto $(0, 4)$ cuja declividade é -5.

7. Escreva uma equação para a reta que passa pelo ponto $(7, -6)$ e paralela à reta dada pela equação
$$y = \tfrac{1}{2}x + 1.$$

8. Escreva uma equação da reta que passa pelo ponto $(-2, 0)$ e perpendicular à reta dada pela equação
$$y = -\tfrac{2}{3}x + 6.$$

9. Em um par de eixos, trace os gráficos das equações
$$y = 3, \qquad y = x + 3, \qquad y - 3 = -\tfrac{5}{3}(x - 8).$$
   (a) Quais são as coordenadas dos três pontos nos quais as retas se interceptam?
   (b) Calcule a área da região triangular limitada pelas três retas.

* 10. Em um par de eixos, trace os gráficos das equações
$$y = -\tfrac{1}{2}x + 4, \qquad y = \tfrac{3}{4}x + 4, \qquad y + 1 = -\tfrac{4}{3}(x - 10).$$
   (a) Quais são as coordenadas dos três pontos nos quais as retas se interceptam?
   (b) Calcule a área da região triangular limitada pelas três retas.

* 11. Esboce o gráfico de $x = |y|$.

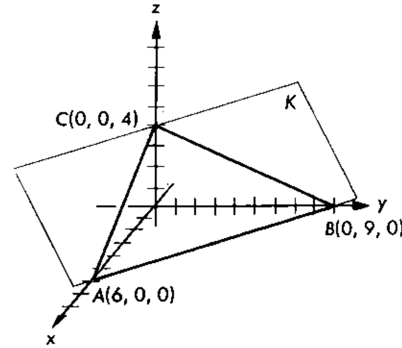
* 12. Esboce o gráfico de $|x| + |y| = 4$.

+ 13. Usando a forma da equação de uma reta dada pelo Teorema 13-8, demonstre que a equação de uma reta pelos pontos $(a, 0)$ e $(0, b)$ pode ser escrita na forma
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (a, b \neq 0).$$

+ 14. Use o Problema 13 para escrever uma equação da reta cuja interseção com o eixo-x é o ponto $(5, 0)$ e cuja interseção com o eixo-y é o ponto $(0, 3)$. Faça uma verificação da resposta, usando a forma dada pelo Teorema 13-8, da equação de uma reta.

*+ 15. Num sistema de coordenadas tridimensional,
$$3x + 6y + 2z = 12$$
é a equação de um plano que intercepta os três eixos. Quais são as coordenadas destas três interseções?

*+ 16. Na figura à direita, o plano K intercepta os eixos nos pontos indicados. A equação do plano K é
$$6x + 4y + 9z = 36.$$
   (a) Ache as equações das interseções do plano K com cada plano coordenado.
   (b) Mostre que a equação de K pode ser escrita na forma
$$\frac{x}{6} + \frac{y}{9} + \frac{z}{4} = 1.$$



*+ 17. Escreva uma equação para o plano determinado pelos três pontos:

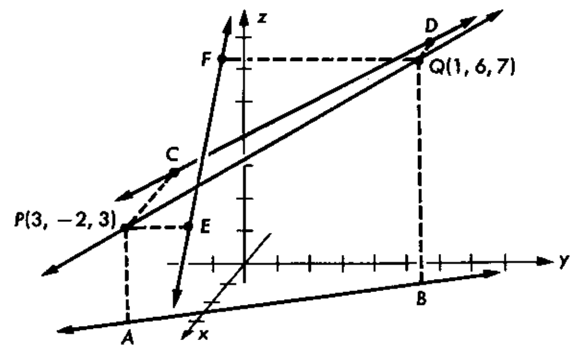
   (a) $(5, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, e $(0, 0, 4)$.
   (b) $(12, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$, e $(0, 0, -3)$.
   (c) $(5, 0, 0)$, $(0, -3, 0)$, e $(0, 0, 10)$.

   [*Sugestão:* Veja os Problemas 13 e 16 acima. Você não precisa demonstrar que as equações estão corretas.]

*+ 18. Para cada uma das equações seguintes, determine as interseções com os três eixos. Esboce o gráfico tridimensional de cada equação.

   (a) $4x + 3y + 2x = 12$.
   (b) $14x + 35y + 10z = 70$.
   (c) $9x - 7y + 21z = 63$.
   (d) $6x + 5z = 30$.

*+ 19. Na figura, $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ são as projeções de $\overleftrightarrow{PQ}$ nos planos xy, yz e xz, respectivamente.

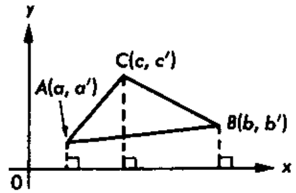


   (a) Calcule as coordenadas de A, B, C, D, E e F.
   (b) Ache as equações de $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ nos seus respectivos planos coordenados.

Problema Magno

Dado o triângulo ΔABC com vértices $A(a, a')$, $B(b, b')$ e $C(c, c')$ tais que

$$0 < a < c < b \text{ e } 0 < a' < b' < c'.$$



Demonstre que

$$a\Delta ABC = \tfrac{1}{2}[a(b' - c') + b(c' - a') + c(a' - b')].$$

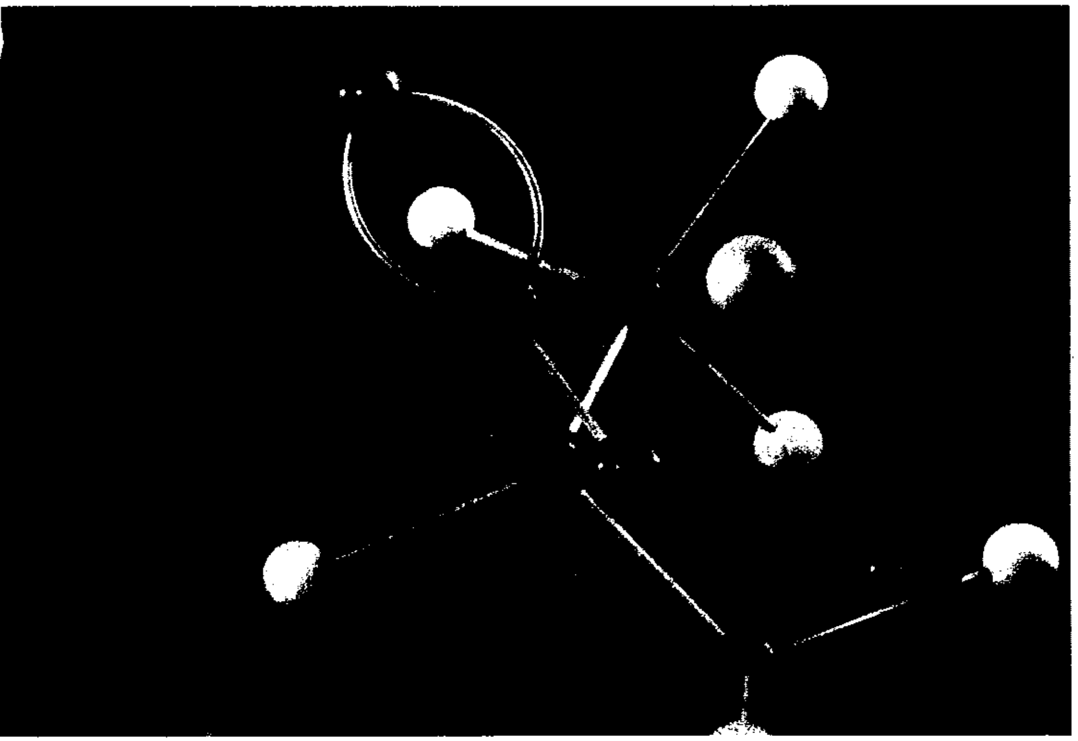
O que acontece à fórmula à direita se A e B são trocados? A e C? B e C?

Revisão do Capítulo

1. Quais são as coordenadas da projeção do ponto (5, 2) sôbre o eixo-x? E sôbre o eixo-y?
2. Qual é o quarto vértice de um retângulo cujos três primeiros vértices são (– 1, – 1), (3, – 1) e (3, 5)?
3. Ache o perímetro e a área do triângulo cujos vértices são (3, 2), (3, – 4) e (9, – 4).
4. É dado o triângulo ΔABC com vértices $A(-3, -5)$, $B(3, 3)$ e $C(13, -9)$.
   (a) Calcule as coordenadas do ponto médio de cada lado.
   (b) Calcule o comprimento de cada mediana.
   (c) Escreva a equação da reta que contém cada mediana, na forma dada pelo Teorema 13-8.
5. Os vértices de um quadrilátero são os pontos $A(-1, 1)$, $B(4, 3)$, $C(6, -2)$ e $D(1, -4)$.
   (a) Demonstre que $\square ABCD$ é um paralelogramo.
   (b) Demonstre que as diagonais são perpendiculares.
   (c) As diagonais são congruentes?
6. Uma reta tendo declividade $\frac{2}{3}$ contém o ponto (0, – 6). Qual é a coordenada-y do ponto da reta cuja coordenada-x é 12?
7. Usando os métodos de coordenadas, demonstre que as diagonais de um trapézio isósceles são congruentes, se o trapézio não fôr um paralelogramo.
8. Demonstre que o triângulo cujos vértices são $A(-3, 7)$, $B(2, -2)$ e $C(11, 3)$ é um triângulo retângulo isósceles.
9. Uma extremidade de um segmento é o ponto (– 1, 8) e o ponto médio do segmento é (4, 2). Calcule as coordenadas da outra extremidade.
10. Um triângulo tem vértices $A(5, 7)$, $B(2, 0)$ e $C(5, -3)$. Ache a altura relativa ao lado mais longo. Calcule a área do triângulo.
11. As extremidades de um segmento são (4, – 2) e (13, 13). Calcule as coordenadas dos pontos que dividem êste segmento em três partes congruentes.

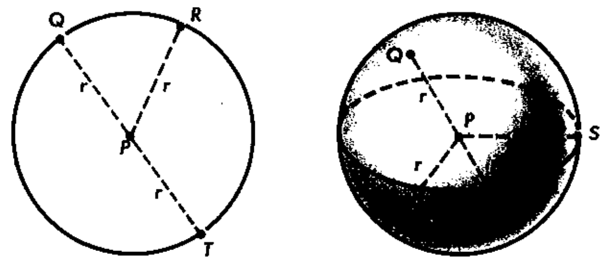
12. Escreva uma equação para o conjunto de todos os pontos que são equidistantes de $A(0, 8)$ e $B(12, -8)$.
13. Escreva uma equação para a reta que passa pelo ponto (0, 5) e é paralela à reta $y = 2x - 13$.
14. Escreva uma equação para a reta que passa pelo ponto (6, – 1) e é perpendicular à reta $y = 3x + 1$.
15. Em um par de eixos, trace os gráficos das equações $x = 9$, $y = x$ e $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$.
    (a) Calcule as coordenadas dos pontos da interseção das retas.
    (b) Calcule a área da região triangular limitada pelas retas.

14 CIRCUNFERÊNCIAS E SUPERFÍCIES ESFÉRICAS



14-1. DEFINIÇÕES BÁSICAS

A grosso modo, uma circunferência é o contôrno de uma região redonda no plano; e a superfície esférica é a superfície de uma bola redonda no espaço.



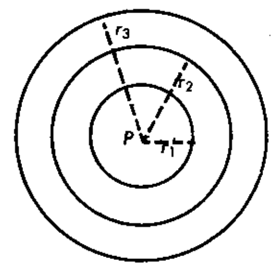
As seguintes definições expressam as mesmas idéias numa linguagem mais precisa.

Definição

Seja P um ponto num plano dado e seja r um número positivo. A *circunferência de centro P e raio r* é o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância a P é igual a r.

Definição

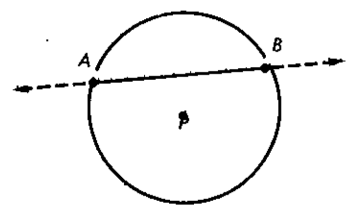
Seja P um ponto e seja r um número positivo. A *superfície esférica de centro P e raio r* é o conjunto de todos os pontos do espaço cuja distância a P é igual a r.



Duas ou mais superfícies esféricas ou circunferências de mesmo centro, chamam-se *concêntricas*.

Na figura, P é o centro comum de três circunferências concêntricas.

Uma *corda* de uma circunferência é um segmento cujas extremidades estão na circunferência.

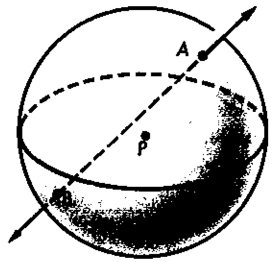


Na figura, $\overline{AB}$ é uma corda.

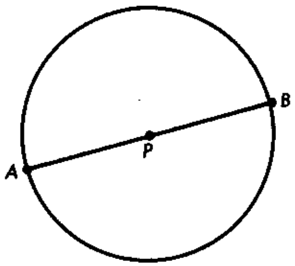
Uma reta que intercepta a circunferência em dois pontos é chamada uma *secante* à circunferência.

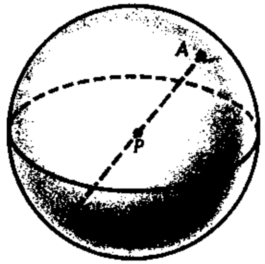
Assim, tôda corda determina uma secante e tôda secante contém uma corda.

Anàlogamente, uma *corda* de uma superfície esférica é um segmento cujas extremidades estão na superfície esférica. E uma *secante* a uma superfície é uma reta que intercepta a superfície esférica em dois pontos.

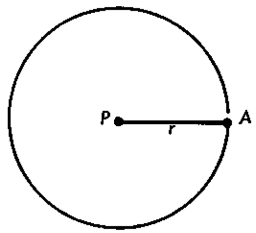


Um *diâmetro* de uma circunferência ou superfície esférica é uma corda que contém o centro



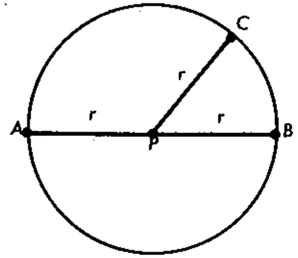


Um *raio* de uma circunferência é um segmento do centro a um ponto da circunferência. (Anàlogamente para superfícies esféricas.) O ponto A é chamado *extremidade final* do raio $\overline{PA}$.



Observe que estamos usando a palavra *raio* com dois sentidos, significando um segmento ou um número, mas deve ficar claro no contexto qual o significado desejado. Anàlogamente, se uma circunferência tiver raio r, falaremos do número $2r$ como sendo o *diâmetro* da circunferência. É claro que o número $2r$ é o comprimento de qualquer corda passando pelo centro.

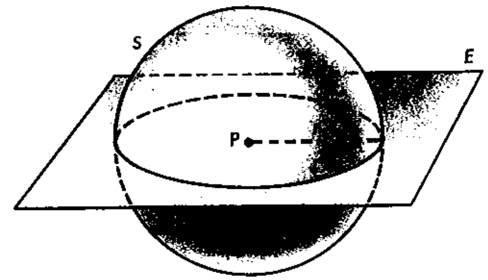
Repetindo: Na figura à direita, r é o *raio;* $\overline{PB}$ *é um raio;* $\overline{PA}$ *é um raio;* $2r$ *é o diâmetro;* $\overline{AB}$ *é um diâmetro;* e $\overline{PC}$ *é um raio* sendo C sua *extremidade final.*



Teorema 14-1

A interseção de uma superfície esférica com um plano passando pelo seu centro é uma circunferência de mesmo centro e mesmo raio.

Para se ver porque isso é assim, basta lembrar a definição de superfície esférica e a definição de circunferência. Dada uma superfície esférica S com centro P e raio r e um plano E, S é o conjunto de todos os pontos do espaço cuja distância a P é igual a r. A interseção de S e E é o conjunto de todos os pontos de E cuja distância a P é igual a r. Isso é uma circunferência com o mesmo centro P e o mesmo raio r.

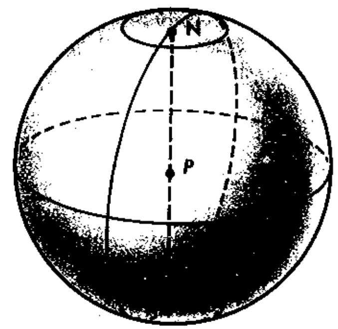


Conhecendo êste fato, podemos dar a seguinte definição.

Definição

A interseção de uma superfície esférica com um plano passando pelo seu centro é chamada *circunferência máxima* da superfície esférica.

Há uma outra razão para êsse nome: as circunferências máximas são as *maiores* circunferências contidas na superfície esférica. Por exemplo, se desenharmos meridianos e paralelos da maneira usual, como nos globos terrestres, então o equador é uma circunferência máxima mas os outros paralelos de latitude não o são. Os outros paralelos de latitude são menores que o equador, tornando-se muito pequenos perto dos Pólos Norte e Sul.



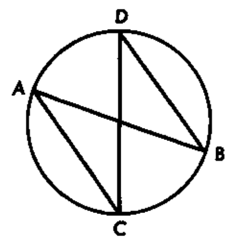
Problemas 14-1

1. Copie e complete: O conjunto de todos os pontos .... a uma dada distância de um ponto dado chama-se ....
2. Copie e complete: Um diâmetro de uma circunferência é .... que contém o .... da circunferência.
3. A sentença abaixo contém a palavra "diâmetro" duas vêzes. Explique como "diâmetro" é usado em cada situação:

   Apesar de uma circunferência poder ter apenas um diâmetro, uma circunferência na realidade tem infinitos diâmetros.

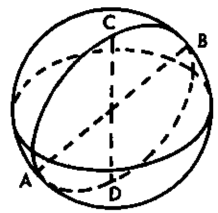
4. No enunciado do Teorema 14-1, qual o significado da palavra "raio"?
5. Indique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.
   (a) Um diâmetro de uma circunferência é uma secante à circunferência.
   (b) Todos os raios de uma superfície esférica são congruentes.
   (c) Todo diâmetro de uma superfície esférica é o diâmetro de uma circunferência máxima.
   (d) Um raio é uma corda de uma circunferência.
   (e) Uma secante a uma superfície esférica a intercepta em exatamente um ponto.
   (f) Uma corda de uma circunferência contém exatamente dois pontos da circunferência.
   (g) Uma superfície esférica e uma circunferência máxima da superfície esférica têm o mesmo centro e o mesmo raio.
6. Quais dentre as afirmações abaixo você julga serem verdadeiras?
   (a) Se um raio divide ao meio a corda de uma circunferência, então êle é perpendicular à corda.
   (b) A interseção de uma reta com uma circunferência pode ser vazia.
   (c) Duas circunferências podem se interceptar em exatamente três pontos.
   (d) Uma reta pode interceptar uma circunferência em exatamente um ponto.
   (e) Duas superfícies esféricas podem se interceptar em exatamente um ponto.
   (f) A interseção de duas superfícies esféricas pode ser uma circunferência.
   (g) A secante que é mediatriz de uma corda de uma circunferência contém o centro da circunferência.
   (h) Se uma reta intercepta uma circunferência em um ponto, ela intercepta a circunferência em dois pontos.

7. Se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são dois diâmetros de uma circunferência, então $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ e $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$.



8. Demonstre que os diâmetros de uma circunferência são as maiores cordas da circunferência. [*Sugestão:* Se c é o comprimento de uma outra corda qualquer, $c < 2r$?]

9. Se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são dois diâmetros de uma superfície esférica, então a figura $ACBD$ é um retângulo.



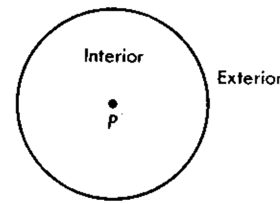
10. Demonstre: Se duas cordas congruentes de uma circunferência têm, cada uma, um ponto comum com um diâmetro e interceptam a circunferência em lados opostos do diâmetro, então as cordas determinam ângulos congruentes com o diâmetro.

14-2. RETAS TANGENTES A CIRCUNFERÊNCIAS

Em tôda esta seção estaremos falando de circunferências num plano fixado.

Definições

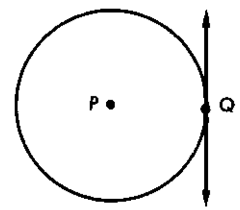
O *interior* de uma circunferência é o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância ao centro é menor que o raio. O *exterior* de uma circunferência é o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância ao centro é maior que o raio.



Assim, todo ponto do plano está no interior ou no exterior ou na circunferência. Freqüentemente diremos, abreviadamente, que o ponto está *dentro* da circunferência ou *fora* da circunferência. (Lembre-se que $0 < r$ porque $r > 0$. Portanto o centro está automàticamente no interior).

Definições

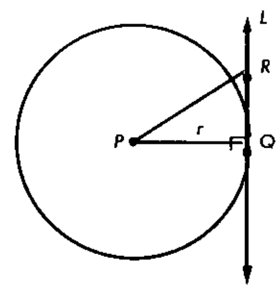
Uma *tangente* a uma circunferência é a reta (no mesmo plano) que intercepta a circunferência em um e um só ponto. Êsse ponto é chamado o *ponto de tangência* ou *ponto de contato.* Dizemos que a reta e a circunferência se *tangenciam* nesse ponto.



Tôda circunferência tem uma tangente em cada um de seus pontos. Podemos ver isso a partir do seguinte teorema:

Teorema 14-2

Uma reta perpendicular a um raio pelo seu ponto de interseção com a circunferência é tangente à mesma.



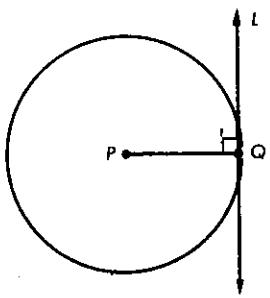
Demonstração. Seja L a perpendicular ao raio $\overline{PQ}$ em Q. Precisamos mostrar que nenhum outro ponto de L está na circunferência.

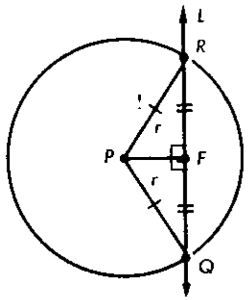
Seja R um outro ponto de L. Pelo Teorema 7-7, o menor segmento de P a L é o segmento perpendicular. Portanto $PR > PQ$. Portanto $PR > r$ e R não está na circunferência; R está no exterior.

A recíproca também é verdadeira.

Teorema 14-3

Tôda tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio que contém o ponto de tangência.



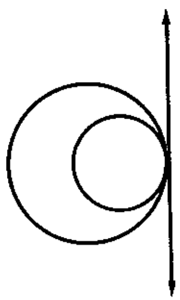


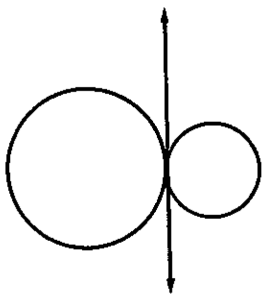
A figura à esquerda mostra a situação como ela realmente acontece. A figura à direita ilustra a demonstração indireta que daremos abaixo.

Demonstração. A reta L é tangente à circunferência C no ponto Q. Suponha não ser L perpendicular a $\overline{PQ}$. Vamos mostrar que essa hipótese leva a uma contradição.

Seja F o pé da perpendicular de P a L. Então $F \neq Q$. Seja R um ponto da semi-reta oposta a $\overrightarrow{FQ}$, tal que $FR = FQ$. Então $\Delta PFR \cong \Delta PFQ$. (Por quê?) Portanto $PR = PQ = r$ e R está na circunferência. Portanto L intercepta a circunferência em dois pontos e não em um. Isso é impossível porque L é uma reta tangente. Portanto nossa hipótese é falsa e $L \perp \overline{PQ}$ em Q, como queríamos demonstrar.

Na figura à esquerda, abaixo, as duas circunferências se *tangenciam internamente.* Na figura à direita as duas circunferências se *tangenciam externamente.*





Definição

Duas circunferências são *tangentes* se elas são tangentes à mesma reta no mesmo ponto. Se duas circunferências tangentes são coplanares e seus centros estão num mesmo semiplano determinado pela sua tangente comum, então elas se *tangenciam internamente.* Se duas circunferências tangentes são coplanares e seus centros estão em semiplanos opostos relativamente à tangente comum, então elas se *tangenciam externamente.*

Problemas 14-2A

1. Desenhe uma circunferência com centro P e raio $PQ = 1{,}5$ cm. Localize um ponto A tal que $PA = 2$ cm e um ponto B tal que $PB = 1$ cm. Agora copie e complete as seguintes afirmações:

   (a) A está no .... da circunferência porque ....

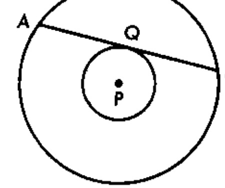
   (b) B está no .... da circunferência porque ....

   (c) As circunferências de raios $\overline{PA}$, $\overline{PQ}$ e $\overline{PB}$ são chamadas ....

2. Descreva como você pode construir uma tangente a uma circunferência em um ponto dado da mesma se lhe fôr dado o centro da circunferência.

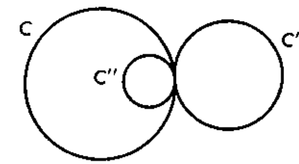
3. E é um ponto no exterior de uma circunferência. Quantas tangentes à circunferência contém E? Faça um desenho.

4. Demonstre: Dadas duas circunferências concêntricas, tôda corda da circunferência maior, que é tangente à circunferência menor, é dividida ao meio no ponto de tangência. [*Sugestão:* Desenhe $\overline{PA}$, $\overline{PQ}$ e $\overline{PB}$.]



5. Demonstre que as tangentes a uma circunferência nas extremidades de um diâmetro são paralelas.

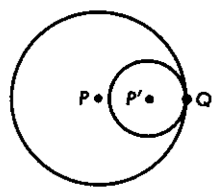
6. Na figura, vê-se um arranjo de três circunferências tendo raios diferentes e tais que qualquer uma é tangente às outras duas. Faça desenhos mostrando pelo menos três outros arranjos.



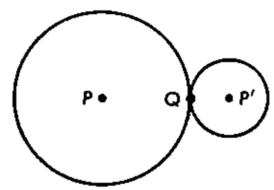
7. Demonstre o seguinte teorema:

   Se duas circunferências são tangentes, seus centros e o ponto de tangência são colineares.

   [*Sugestão:* Desenhe sua tangente comum.]



caso 1

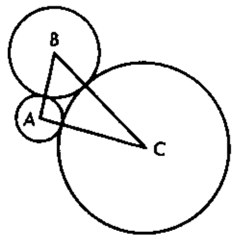


caso 2

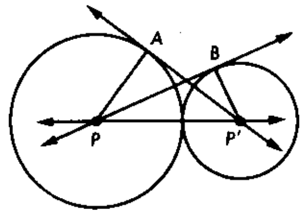
8. Demonstre que se duas circunferências congruentes se tangenciam externamente, qualquer ponto equidistante de seus centros está na sua tangente comum.

9. A distância de um ponto E do centro A de uma circunferência é 20. O raio da circunferência é 5. Uma reta por E é tangente à circunferência em B. Determine EB.

10. Na figura, cada uma das circunferências de centros A, B e C é tangente às outras duas. Se $AB = 10$, $AC = 14$ e $BC = 18$, determine o raio de cada circunferência. [*Sugestão:* Iguale o raio de uma circunferência a x.]

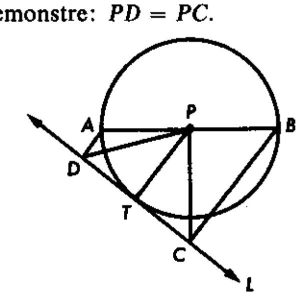


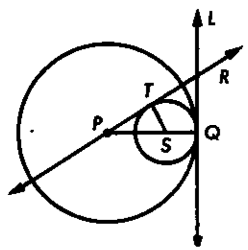
11. É dada a figura, na qual as circunferências são tangentes, P e P' são seus centros e $\overleftrightarrow{PB}$ e $\overleftrightarrow{P'A}$ são as tangentes em B e A respectivamente. Sabendo-se que os raios são 9 e 6, determine PB e $P'A$.



12. Duas circunferências concêntricas têm diâmetros 10 e 26. Tangentes à circunferência menor passam pelas extremidades de um diâmetro da circunferência maior. Determine o comprimento do segmento ao longo de cada tangente que tem uma extremidade em cada circunferência.

* 13. Dados: Na figura à esquerda, abaixo, $\overline{AB}$ é um diâmetro da circunferência de centro P. L é tangente à circunferência em T. $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são, cada um, perpendiculares a L. Demonstre: $PD = PC$.

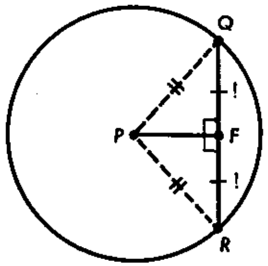




* 14. Na figura, à direita, acima, as circunferências com centros P e S são ambas tangentes à reta L em Q. Uma secante à circunferência maior passa por P, é tangente à circunferência menor em T, e intercepta L em R. Dado que os raios das circunferências são 8 e 3, determine QR.

* 15. Numa circunferência de centro P, $\overline{AB}$ é um diâmetro e $\overline{AC}$ é uma outra corda qualquer. Uma secante por P, paralela a $\overline{AC}$, intercepta a tangente em C num ponto D. Demonstre que $\overleftrightarrow{DB}$ é tangente à circunferência em B. [*Sugestão:* Introduza $\overline{PC}$.]

Os seguintes teoremas são fáceis de demonstrar.

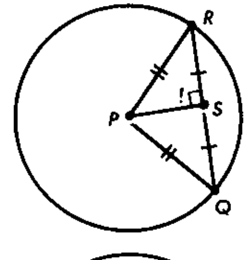


Teorema 14-4

A perpendicular pelo centro de uma circunferência a uma corda divide a corda ao meio.

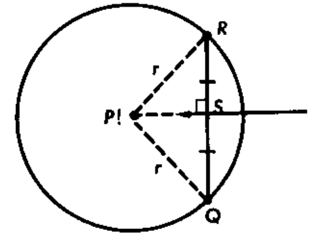
Teorema 14-5

O segmento do centro de uma circunferência ao ponto médio de uma corda é perpendicular à corda.



Teorema 14-6

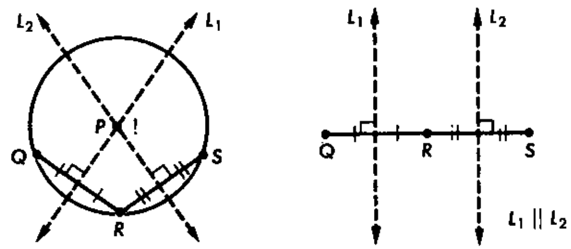
No plano de uma circunferência, a mediatriz de uma corda passa pelo centro.



Demonstração? (Se você não vê como usar algum dos teoremas anteriores, tente usar o Teorema 6-2).

Corolário 14-6.1

Nenhuma circunferência contém três pontos colineares.



Demonstração. Se três pontos Q, R, S da circunferência fôssem colineares, então a mediatriz das cordas $\overline{QR}$ e $\overline{RS}$ seriam paralelas. Isso é impossível pois ambas as mediatrizes passam pelo centro.

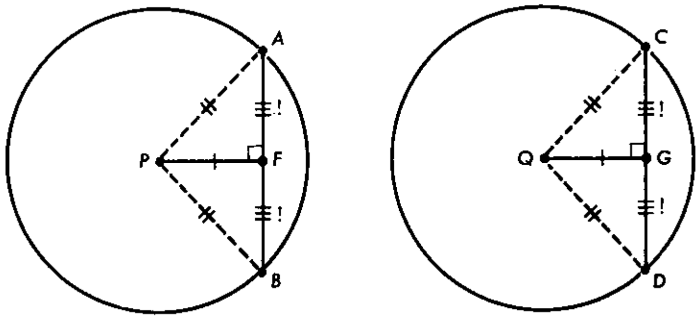
Definição

Circunferências com raios congruentes se dizem *congruentes.*

Observe que essa definição de *circunferências congruentes* está de acôrdo com o uso da palavra congruente para segmentos, ângulos e triângulos. A idéia fundamental, em cada caso, é que duas figuras são congruentes se elas tiverem a mesma forma e mesmo tamanho.

Teorema 14-7

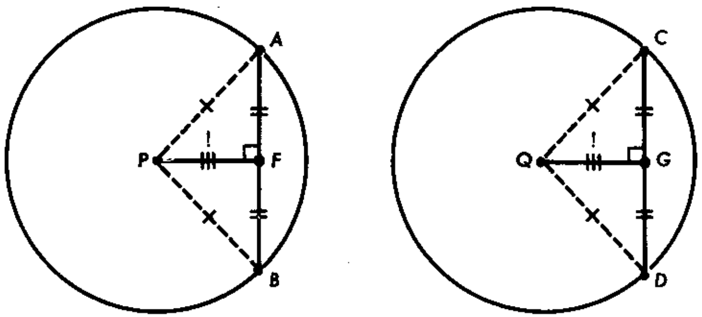
Na mesma circunferência ou em circunferências congruentes, cordas equidistantes do centro são congruentes.



Demonstração? (Nas figuras acima algumas das indicações são baseadas no Teorema 14-4.)

Teorema 14-8

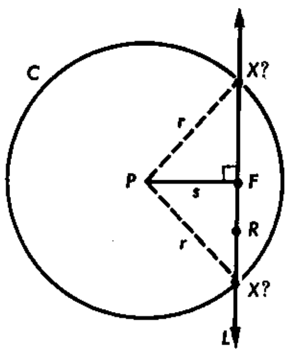
Na mesma circunferência ou em circunferências congruentes, duas cordas congruentes quaisquer são equidistantes do centro.



Demonstração?

Finalmente observamos:

Teorema 14-9



Se uma reta intercepta o interior de uma circunferência, então ela intercepta a circunferência em dois e sòmente dois pontos.

Demonstração. Como na figura, seja C uma circunferência de raio r, seja L uma reta e seja R um ponto de L no interior de C. Então $PR < r$. Seja F o pé da perpendicular de P a L e seja $PF = s$.

(1) Se X está em L e C, então o ΔPFX tem um ângulo reto em F, e assim

$$r^2 = s^2 + FX^2.$$

Portanto

$$FX = \sqrt{r^2 - s^2}.$$

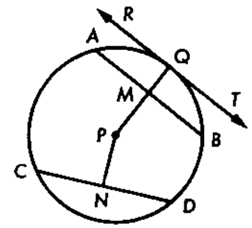
(2) Se X é um ponto de L e $FX = \sqrt{r^2 - s^2}$, então X está em C. A razão é que

$$\begin{aligned} PX^2 &= PF^2 + FX^2 \\ &= s^2 + (r^2 - s^2) \\ &= r^2. \end{aligned}$$

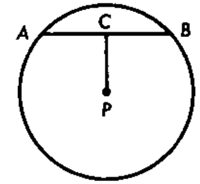
Mas $r^2 - s^2 > 0$, pois $r > s$. Assim, pelo Teorema 2-1, existem exatamente dois pontos X de L tais que $FX = \sqrt{r^2 - s^2}$. Portanto exatamente dois pontos de L estão em C, como queríamos demonstrar.

Problemas 14-2B

1. Enuncie os teoremas ou corolários que justificam as conclusões abaixo. Consulte a figura na qual P é o centro da circunferência.



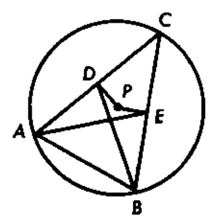
   (a) Se $\overline{PN} \perp \overline{CD}$, então $CN = ND$.
   (b) Pontos A, Q e B são não-colineares.
   (c) Se $PM = PN$, $\overline{PM} \perp \overline{AB}$ e $\overline{PN} \perp \overline{CD}$, então $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.
   (d) Se $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{PM} \perp \overline{AB}$ e $\overline{PN} \perp \overline{CD}$, então $PM = PN$.
   (e) Se $\overleftrightarrow{RT}$ é uma tangente, $\overleftrightarrow{RT} \perp \overline{PQ}$.
   (f) Se M está no interior de uma circunferência, então $\overleftrightarrow{MQ}$ intercepta a circunferência exatamente em um ponto distinto de Q.



2. Numa circunferência com 10 cm de raio, uma corda está a 6 cm do centro. Qual o comprimento da corda?

3. Um diâmetro e uma corda têm uma extremidade comum. Se o comprimento do diâmetro é 40 e o comprimento da corda é 24, a que distância está a corda do centro da circunferência?

4. Uma corda tem comprimento 16 cm e está a 15 cm do centro de uma circunferência. Qual é o raio da circunferência?



5. Na figura, P é o centro da circunferência,

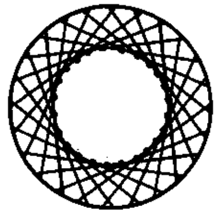
$$\overline{PD} \perp \overline{AC}, \qquad \overline{PE} \perp \overline{BC},$$

e

$$PD = PE.$$

Demonstre que $\angle DBA \cong \angle EAB$.

6. Demonstre: Em qualquer circunferência, os pontos médios de tôdas as cordas congruentes a uma corda dada formam uma circunferência concêntrica com a circunferência dada e de raio igual à distância de de qualquer uma das cordas ao centro.



7. Demonstre: Numa circunferência, se duas cordas têm uma mesma extremidade e determinam ângulos congruentes com um diâmetro no mesmo ponto, então as cordas são congruentes.

8. Dado um arco de circunferência, como na figura à direita, explique como você poderia achar o centro e o raio da circunferência.

9. Numa circunferência, uma corda de comprimento 12 cm é paralela a uma tangente e divide ao meio o raio desenhado ao ponto de tangência. Qual o comprimento do raio?

10. Uma corda de comprimento 18 cm é perpendicular a um raio de uma circunferência. A distância da interseção da corda e o raio à extremidade final do raio é 3 cm. Determine o comprimento do raio.

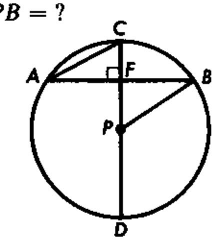
11. Responda cada parte dêsse problema da seguinte maneira:

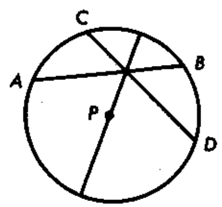
    Escreva "extra" se é dada mais informação que a necessária para obter uma resposta numérica. Escreva "não suficiente" se a informação dada fôr não suficiente. Escreva "OK" se a informação dada é justamente a necessária para permitir uma solução numérica. Escreva "contraditória" se a informação dada fôr contraditória.

    [*Observação:* Você não precisa resolver o problema; só decidir se é ou não possível resolvê-lo.]

    Na figura, P é o centro da circunferência e $\overline{AB} \perp \overline{CD}$.

    (a) $AF = 5$, $AB = ?$ (b) $PB = 7$, $CD = ?$ (c) $AC = 9$, $PB = ?$
    (d) $CF = 3$, $FP = 2$, $PD = 6$, $CD = ?$
    (e) $PB = 13$, $PF = 5$, $AB = ?$
    (f) $AB = 16$, $CD = 20$, $CF = 4$, $PB = ?$
    (g) $CF = 7$, $PB = 17$, $FB = 10$, $CD = ?$
    (h) $CD = 30$, $AB = 24$, $AC = ?$
    (i) $PB = 25$, $FB = 20$, $CF = 10$, $AC = ?$
    (j) $PD = 12$, $CF = 6$, $AB = ?$





* 12. Demonstre: Se duas cordas congruentes (não diâmetros) de uma circunferência se interceptam num diâmetro, elas determinam ângulos congruentes com o diâmetro.

* 13. Duas circunferências de raios desiguais se interceptam nos pontos R e S. M é o ponto médio de $\overline{PP'}$, o segmento entre os centros das circunferências. Uma reta por R é perpendicular a $\overline{MR}$ e intercepta as circunferências novamente em A e B. Demonstre que $AR = BR$.

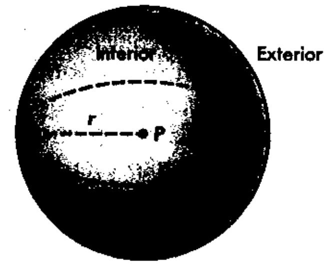
14. Demonstre o seguinte teorema.

    Três pontos quaisquer não-colineares pertencem a uma circunferência.

14-3. PLANOS TANGENTES A SUPERFÍCIES ESFÉRICAS

Se realmente você aprendeu o conteúdo da seção anterior, você não terá dificuldades com esta. O motivo é que a relação entre superfícies esféricas e planos no espaço é muito parecida com a relação entre circunferências e retas num plano. Existe, portanto, uma estreita analogia entre as definições e teoremas da seção anterior e as definições e teoremas desta.

Definições



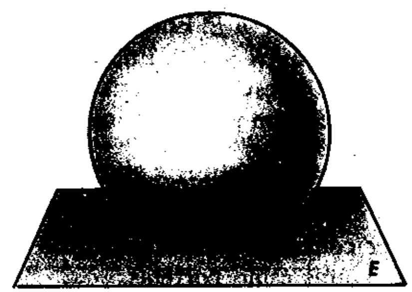
O *interior* de uma superfície esférica é o conjunto de todos os pontos do espaço cuja distância ao centro é menor que o raio. O *exterior* de uma superfície esférica é o conjunto de todos os pontos do espaço cuja distância ao centro é maior que o raio.

Assim, cada ponto do espaço está no interior ou no exterior ou na superfície esférica. Freqüentemente, diremos, abreviadamente, que um ponto está *dentro* da superfície esférica ou *fora* da superfície esférica.

(Lembre-se que $0 < r$ porque $r > 0$. Portanto o centro está automàticamente no interior.)

Definições

Um *plano tangente* a uma superfície esférica é o plano que intercepta a superfície esférica em exatamente um ponto. Êsse ponto é chamado *ponto de tangência* ou *ponto de contato*. Dizemos que o plano e a superfície esférica se tangenciam nesse ponto.

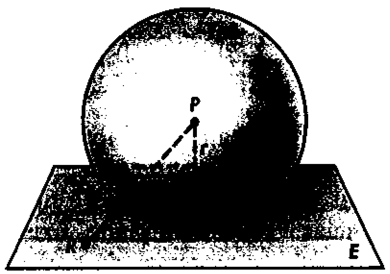


Na figura anterior, o plano E é tangente à superfície esférica em Q. Observe que o ponto Q não parece estar na "ponta" da superfície esférica. (Quando uma bola redonda está numa mesa e a olhamos de cima, não podemos ver o ponto onde ela está se apoiando na mesa.)

Tôda superfície esférica tem um plano tangente em cada um de seus pontos. Podemos ver isso a partir do seguinte teorema.

Teorema 14-10

Um plano perpendicular a um raio, pelo ponto de interseção do raio e a superfície esférica, é tangente à mesma.



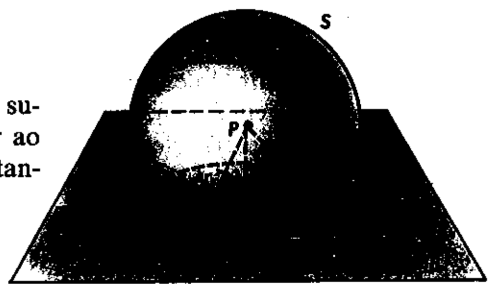
Demonstração. Seja E perpendicular ao raio $\overline{PQ}$ em Q. Precisamos mostrar que nenhum outro ponto de E está na superfície esférica.

Seja R qualquer outro ponto de E. Pelo Teorema 8-10, o menor segmento de P a E é o segmento perpendicular. Portanto $PR > PQ$. Portanto $PR > r$ e R não está na superfície esférica; êle está no exterior.

A recíproca também é verdadeira.

Teorema 14-11

Todo plano tangente a uma superfície esférica é perpendicular ao raio que contém o ponto de tangência.



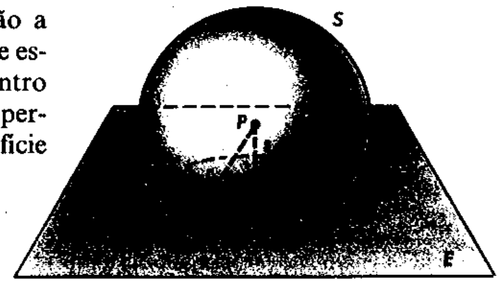
Demonstração. E é tangente a S no ponto Q. Suponha que E não é perpendicular a $\overline{PQ}$. Vamos mostrar que essa hipótese leva a uma contradição. A figura ilustra a demonstração indireta.

Seja F o pé da perpendicular de P a E. Então $F \neq Q$. Seja R um ponto na semi-reta oposta a $\overrightarrow{FQ}$, tal que $FR = FQ$. Então $\Delta PFR \cong \Delta PFQ$. (Por quê?) Portanto $PR = PQ = r$ e R está na superfície esférica. Portanto E intercepta a superfície esférica em um ponto distinto de Q. Isso é impossível pois E é um plano tangente.

Nessa demonstração e muitas vêzes antes, desenhamos figuras em que a interseção de um plano e uma superfície esférica parecia ser uma circunferência. Antes de proceder com nossa investigação de planos tangentes, vamos mostrar que essas figuras estão corretas.

Teorema 14-12

Se um plano intercepta o interior de uma superfície esférica, então a interseção do plano e a superfície esférica é uma circunferência. O centro dessa circunferência é o pé da perpendicular do centro da superfície esférica ao plano.



Demonstração. A notação é a da figura. Dado que o plano E intercepta o interior da superfície esférica S em um ponto R, seja F o pé da perpendicular de P a E. Precisamos mostrar que a interseção de E e S é uma circunferência com centro em F.

$PR < r$ porque R está no interior. Pelo Teorema 8-10, $PF < PR$. Portanto $PF < r$. Seja $PF = s$.

(1) Seja X um ponto qualquer na interseção de E e S. Então o ΔPFX tem um ângulo reto em F. Portanto

$$s^2 + FX^2 = r^2 \qquad \text{e} \qquad FX = \sqrt{r^2 - s^2}.$$

Portanto X está na circunferência de centro F e raio $t = \sqrt{r^2 - s^2}$.

Portanto a interseção de E e S *está na* circunferência de centro F e raio $t = \sqrt{r^2 - s^2}$.

Isso não significa necessàriamente que a interseção é a circunferência. Para completar a demonstração, precisamos mostrar que todo ponto da circunferência pertence à interseção.

(2) Seja X um ponto qualquer da circunferência em E com centro F e raio $t = \sqrt{r^2 - s^2}$. Pelo Teorema de Pitágoras,

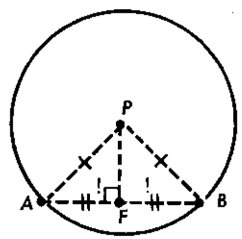
$$\begin{aligned} PX^2 &= t^2 + s^2 \\ &= (r^2 - s^2) + s^2 \\ &= r^2. \end{aligned}$$

Portanto $PX = r$ e X pertence à superfície esférica.

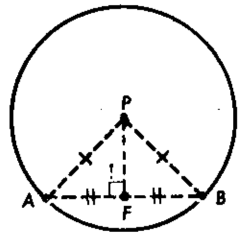
Teorema 14-13

A perpendicular do centro de uma superfície esférica a uma corda divide a corda ao meio.

Demonstração? (É a mesma demonstração que a do Teorema 14-4.)



Teorema 14-14

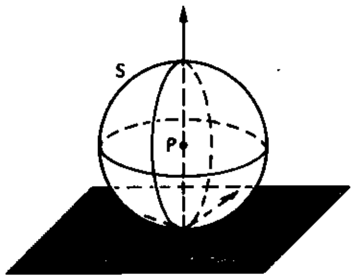


O segmento do centro de uma superfície esférica ao ponto médio de uma corda é perpendicular à corda.

A demonstração é como a do Teorema 14-5.

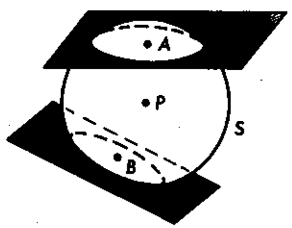
Problemas 14-3

1. Copie e complete: Se um plano intercepta uma superfície esférica, a interseção é ou .... ou ....
2. Copie e complete: Se uma reta intercepta uma superfície esférica, a interseção é .... ou ....
3. Três pontos de uma superfície esférica podem ser colineares? Explique.



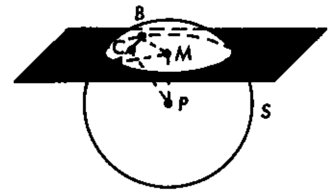
4. A superfície esférica S é tangente ao plano E em A. P é o centro de S e B, C, e D estão em E. Que relação existe entre $\overleftrightarrow{PA}$ e $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{AD}$? Explique.
5. Numa superfície esférica de raio 15, a distância de uma corda ao centro é 9. Qual o comprimento da corda?
6. A corda de uma superfície esférica é 12 cm e está a 6 cm do centro da superfície esférica. Determine o raio da superfície esférica.
7. Demonstre: Se dois diâmetros de uma superfície esférica são perpendiculares, a figura formada pelos segmentos que ligam suas extremidades em sucessão é um quadrado.
8. Calcule o raio de uma circunferência determinada por um plano a 4 cm do centro de uma superfície esférica cujo diâmetro é 10 cm.
9. Dada uma superfície esférica e três de seus pontos, explique como determinar o centro e o raio da circunferência que contém os três pontos. Explique como determinar o centro e o raio da superfície esférica.
10. Explique porque duas circunferências máximas quaisquer de uma superfície esférica se interceptam nas extremidades de um diâmetro da superfície esférica.
11. Demonstre o seguinte teorema:

    Se dois planos interceptam uma superfície esférica e suas distâncias ao centro são iguais, então as interseções são ou dois pontos ou circunferências congruentes.



* 12. Dados: Plano E intercepta a superfície esférica S. P é o centro de S. A, B, C e M estão em E. A e B estão em S.

$\overline{PM} \perp E$.
$\overline{AM} \perp \overline{MB}$.
$AC = BC$.
$AM = PM$.
$AB = 5$



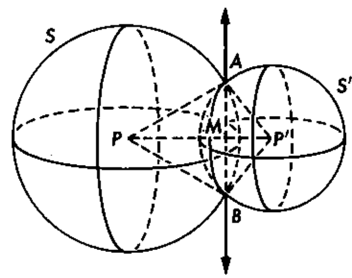
Determine: O raio da superfície esférica, $m\angle APB$ e PC.

*+ 13. Duas circunferências máximas se dizem perpendiculares se estiverem em planos perpendiculares. Mostre que para cada duas circunferências máximas existe uma circunferência máxima perpendicular a ambas. Se duas circunferências máximas na terra são meridianos (pelos pólos), que circunferência máxima é perpendicular a ambas?

*+ 14. Na figura P e P' são os centros das superfícies esféricas S e S'. A e B são dois pontos da interseção das duas superfícies esféricas. $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{PP'}$ se interceptam em M. $\overleftrightarrow{PA}$ é tangente a S' em A.

(a) Descreva a interseção das superfícies esféricas S e S'.

(b) Se o raio de S é 12 e $PA = AB$, calcule o raio de S' e a distância entre os centros das superfícies esféricas.



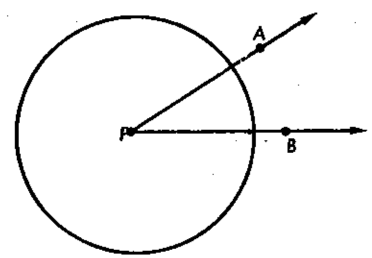
14-4. ARCOS DE CIRCUNFERÊNCIAS

Começamos êste capítulo com uma discussão de circunferências e prosseguimos dando uma discussão análoga para superfícies esféricas. No resto do capítulo, no entanto, vamos trabalhar apenas com circunferências, porque a teoria correspondente para superfícies esféricas é demasiadamente difícil para um primeiro curso em geometria.

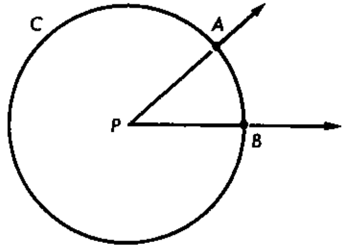
Na figura abaixo, $\angle APB$ é um *ângulo central* da circunferência C.

Definição

Um *ângulo central* de uma circunferência é um ângulo cujo vértice é o centro da circunferência.



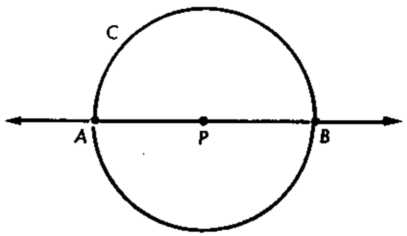
Na figura seguinte, a curva colorida é um *arco menor* $\widehat{AB}$ e a curva preta é o *arco maior* $\widehat{AB}$. Em ambos os casos A e B são as *extremidades* do arco.



Definições

Seja C uma circunferência de centro P e sejam A e B pontos em C que não sejam extremidades de um diâmetro. Então o *arco menor* $\widehat{AB}$ é a reunião de A, B e todos os pontos de C que estão no interior do $\angle APB$. O *arco* maior $\widehat{AB}$ é a reunião de A, B e todos os pontos de C que estão no exterior do $\angle APB$. Em cada caso A e B são as *extremidades* do arco $\widehat{AB}$.

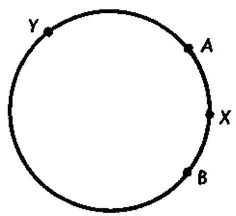
Se A e B são extremidades de um diâmetro, obtemos dois arcos, cada um dos quais é chamado *semicircunferência*.



Definição

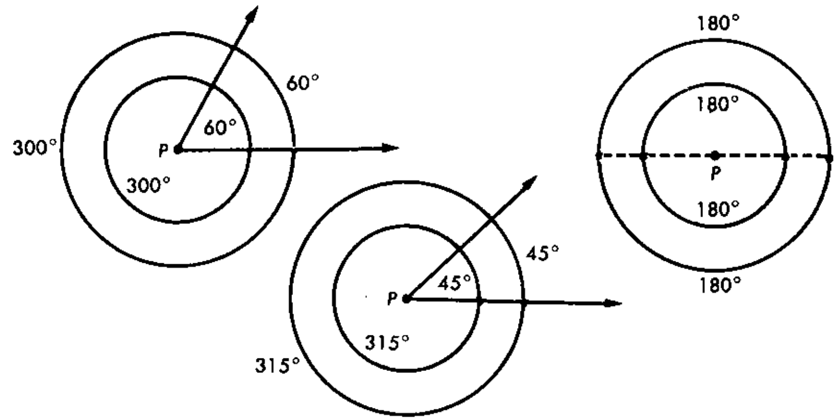
Seja C uma circunferência e sejam A e B as extremidades de um diâmetro. Uma *semicircunferência* $\widehat{AB}$ é a reunião de A, B e dos pontos de C que estão num dado semiplano de origem $\overleftrightarrow{AB}$. Os pontos A e B são chamados *extremidades* da semicircunferência.

Observe que a notação $\widehat{AB}$ para arcos é sempre ambígua, porque todo par de pontos A e B de uma circunferência é formado por pontos que são extremidades de dois arcos distintos da circunferência. A maneira mais simples de evitar essa ambiguidade é escolher um outro ponto X do arco e representar o arco por $\widehat{AXB}$.



Por exemplo, na figura acima, $\widehat{AXB}$ é o arco menor, desenhado em côr e $\widehat{AYB}$ é o arco maior, desenhado em prêto. Quando pelo contexto está claro a que arco estamos nos referindo, podemos simplesmente escrever $\widehat{AB}$.

Queremos agora definir *medida em graus* de arcos, na maneira sugerida pelas indicações nas seguintes figuras:

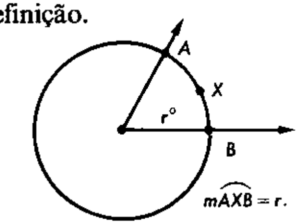


Observe que a medida em graus de um arco não depende do tamanho da circunferência. Nos pares de circunferências concêntricas acima, arcos correspondentes têm mesma medida. Observe também que à medida que o arco fica mais comprido (numa circunferência fixa) a sua medida torna-se maior. Assim um arco maior sempre tem medida maior que 180.

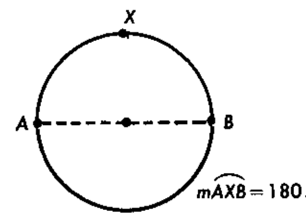
Essas idéias são elucidadas pela seguinte definição.

Definição

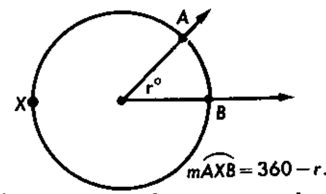
(1) A *medida em graus* de um arco menor é a medida do ângulo central correspondente.



(2) A *medida em graus* de uma semicircunferência é 180.



(3) A *medida em graus* de um arco maior é igual a 360 menos a medida do arco menor correspondente.

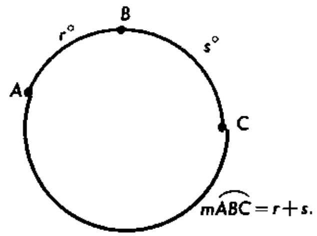


Daqui para frente, nos referiremos à medida em graus de um arco simplesmente como sua medida. A medida de um arco $\widehat{AB}$ será representada por $m\widehat{AB}$.

O seguinte teorema parece razoável mas sua demonstração é surpreendentemente monótona.

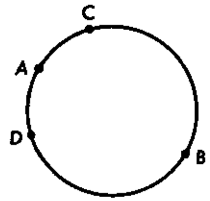
Teorema 14-15. Teorema da Adição de Arcos

Se B é um ponto de $\widehat{AC}$, então
$m\widehat{ABC} = m\widehat{AB} + m\widehat{BC}$.



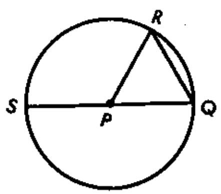
Vamos omitir a demonstração dessa afirmação e considerá-la para fins práticos como um postulado. Observe que, quando $\widehat{ABC}$ é um arco menor, nossa fórmula é conseqüência direta do Postulado da Adição de Ângulos. Existem, no entanto, outros casos que precisariam ser considerados numa demonstração completa.

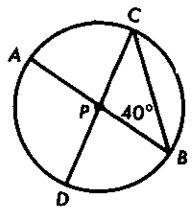
Problemas 14-4



1. Na figura, A e B são extremidades de um diâmetro.
   (a) Nomeie as semicircunferências.
   (b) Nomeie os arcos menores.
   (c) Nomeie os arcos maiores.

2. Na figura, à esquerda, abaixo, P é o centro da circunferência e $RQ = PS$. Determine $m\widehat{RQ}$; $m\widehat{RS}$; $m\widehat{SRQ}$; $m\widehat{RSQ}$.

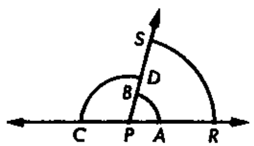




3. Na figura à direita, acima, os diâmetros $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ se interceptam em P. Se $m\angle ABC = 40$, determine a medida de cada um dos arcos menores da circunferência.

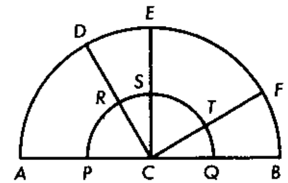
4. Demonstre: Se $\overline{GH}$ e $\overline{MK}$ são dois diâmetros de uma circunferência, então $m\widehat{GK} = m\widehat{HM}$.

5. Nessa figura, qual arco tem a maior medida?



6. Demonstre: A bissetriz de um ângulo central de uma circunferência divide ao meio o arco menor correspondente.

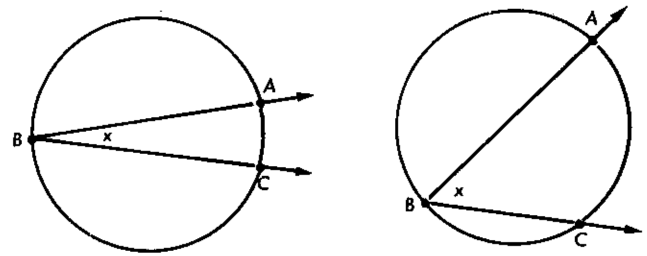
7. Dado: $\widehat{AB}$ é uma semicircunferência de centro C.
   $\widehat{PQ}$ e $\widehat{AB}$ são concêntricas.
   $\overline{EC} \perp \overline{AB}$ e $\overline{DC} \perp \overline{CF}$.
   Demonstre: $m\widehat{AD} + m\widehat{QT} = m\widehat{EF} + m\widehat{RS}$.



8. Dois pontos numa circunferência determinam um arco menor e um arco maior. Se a medida do arco maior é 40 a menos que 4 vêzes a medida do arco menor, determine a medida de cada arco.

14-5. ÂNGULOS INSCRITOS E ARCOS INTERCEPTADOS

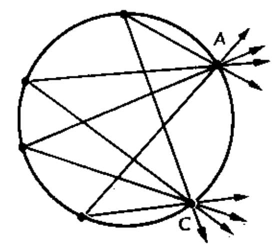
Nas figuras abaixo, $\angle x$ se diz *inscrito* no arco desenhado em côr.



Essa idéia pode ser descrita fàcilmente em palavras.

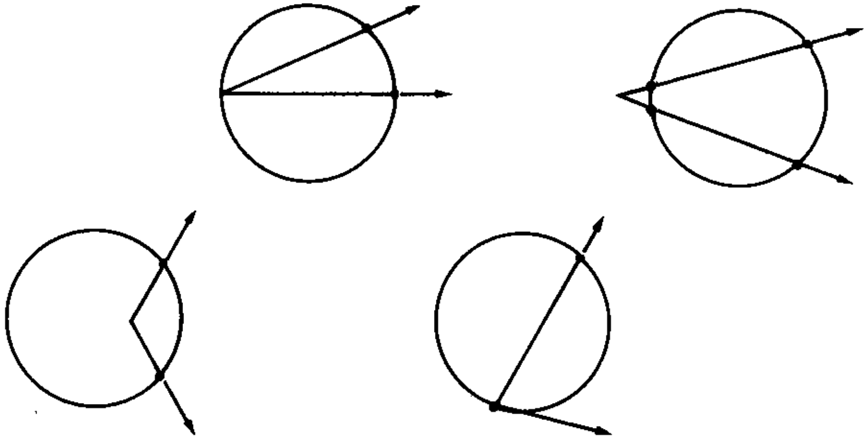
Definição

Um ângulo é inscrito num arco se
(1) os lados do ângulo contêm as extremidades do arco e
(2) o vértice do ângulo é um ponto, mas não uma extremidade do arco.

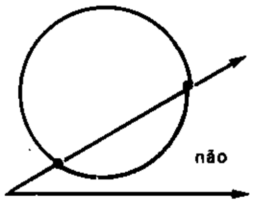


É claro que se D é um ponto qualquer de $\widehat{ABC}$, distinto de A e C, então $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ e assim $\angle ADC$ também está inscrito no mesmo arco. Na figura à direita, todos os ângulos vistos estão inscritos no arco AC que é desenhado em côr. Pela figura parece que todos êsses ângulos são congruentes, e de fato, isso é sempre o caso, como veremos logo.

Nas figuras seguintes, o ângulo *intercepta* o arco ou arcos desenhados em côr.



Mas na figura seguinte, *não* dizemos que o ângulo intercepta o arco desenhado em côr.



Na definição seguinte, vamos permitir os quatro primeiros casos mas o quinto não.

Definição

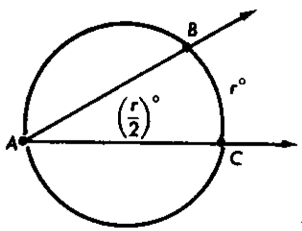
Um ângulo *intercepta* um arco se
(1) as extremidades do arco estão no ângulo,
(2) todos os outros pontos do arco estão no interior do ângulo e
(3) cada lado do ângulo contém uma extremidade do arco.

Teorema 14-16

A medida de um ângulo inscrito é a metade da medida do arco interceptado.

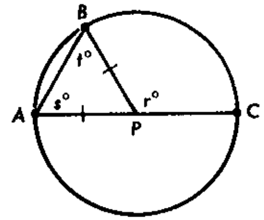
Re-enunciado. Seja $\angle A$ inscrito num arco $\widehat{BAC}$ de uma circunferência, interceptando o arco $\widehat{BC}$. Então

$$m\angle A = \tfrac{1}{2}m\widehat{BC}.$$



Demonstração. Caso 1. Vamos considerar primeiramente o caso em que $\angle A$ contém um diâmetro da circunferência. Pelo Corolário 9-13.3,

$$r = s + t.$$

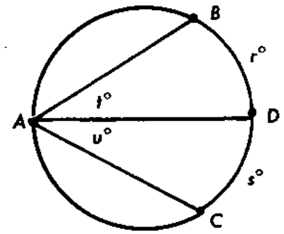


Pelo Teorema do Triângulo Isósceles, $t = s$. Portanto

$$s = \frac{r}{2}.$$

Isso prova o teorema no Caso 1, porque $s = m\angle A$ e $r = m\widehat{BC}$.

Sabemos agora que o teorema é válido no Caso 1. Vamos usar êsse fato para mostrar que êle vale sempre.



Caso 2. Suponha que B e C estão em semiplanos opostos relativamente ao diâmetro por A, assim

Sabemos pelo Caso 1 que

$$t = \frac{r}{2}, \qquad u = \frac{s}{2}.$$

Portanto, por adição

$$t + u = \tfrac{1}{2}(r + s).$$

Mas

$$t + u = m\angle A \qquad \text{e} \qquad r + s = m\widehat{BDC}.$$

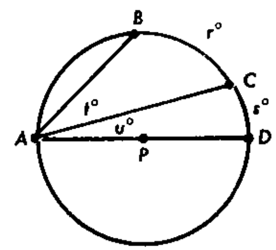
(Justificação, em cada caso?) Portanto $m\angle A = \frac{1}{2}m\widehat{BC}$, como antes.

Caso 3. Suponha finalmente que B e C estão no mesmo semiplano determinado pelo diâmetro por A. Então

$$r + s = m\widehat{BCD}$$

e

$$t + u = m\angle BAD.$$



Pelo Caso 1,

$$t + u = \tfrac{1}{2}(r + s),$$

e

$$u = \tfrac{1}{2}s.$$

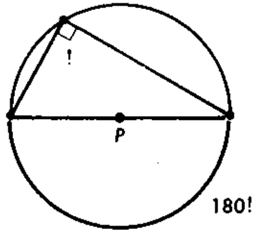
Portanto

$$t = \tfrac{1}{2}r,$$

e $m\angle A = \frac{1}{2}m\widehat{BC}$, como antes. (Justificação, para cada passagem?)

Teorema 14-16 tem dois corolários importantes.

Corolário 14-16.1



Qualquer ângulo inscrito numa semicircunferência é um ângulo reto.

A demonstração é óbvia: um tal ângulo sempre *intercepta* uma semicircunferência e $90 = \frac{1}{2} \cdot 180$.

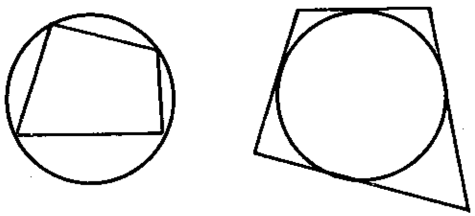
Corolário 14-16.2

Dois ângulos quaisquer inscritos no mesmo arco são congruentes.

Novamente, isso é óbvio: êles interceptam o mesmo arco.

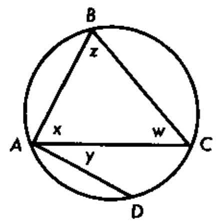
Definições

Um quadrilátero é *inscrito* numa circunferência se os vértices do quadrilátero estão na circunferência. Se os lados do quadrilátero são tangentes à circunferência, então o quadrilátero é circunscrito à circunferência.

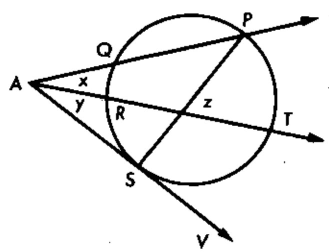


Problemas 14-5

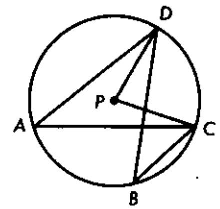
1. É dada a figura.
   (a) Nomeie o arco no qual $\angle z$ está inscrito.
   (b) Nomeie o arco que $\angle x$ intercepta.
   (c) Nomeie o arco que $\angle z$ intercepta.
   (d) Nomeie o ângulo inscrito em $\widehat{BCA}$.
   (e) Nomeie o arco que $\angle BAD$ intercepta.
   (f) Nomeie o ângulo inscrito em $\widehat{CBD}$.

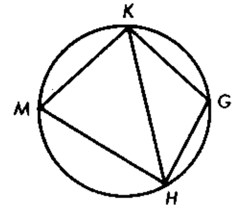


2. É dada a figura com $\overrightarrow{AS}$ tangente em S.
   (a) Nomeie o(s) arco(s) interceptado(s) pelo $\angle x$.
   (b) Nomeie o(s) arco(s) interceptado(s) pelo $\angle z$.
   (c) Nomeie o(s) arco(s) interceptado(s) pelo $\angle y$.



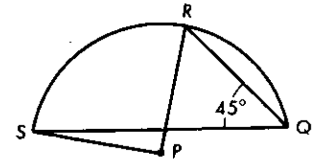
3. Na figura à esquerda, P é o centro da circunferência. Se $m\angle B = 35$, determine $m\angle A$ e $m\angle P$.



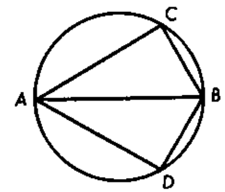


4. Na figura à direita, acima, se $m\angle M = 75$, $m\widehat{MK} = 90$ e $m\widehat{GH} = 70$, determine as medidas de todos os outros arcos e ângulos.

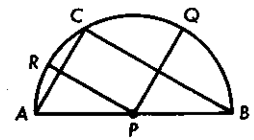
5. Se $m\angle RQS = 45$ e P é o centro, demonstre que $\overline{RP} \perp \overline{SP}$.



6. $\overline{AB}$ é um diâmetro de uma circunferência e C e D são pontos de uma circunferência em semiplanos opostos de $\overline{AB}$ tais que $BC = BD$. Demonstre que
$$\Delta ABC \cong \Delta ABD.$$

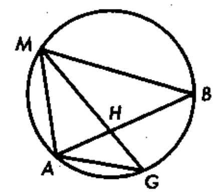


7. Dados: P é o centro da semicircunferência $\widehat{AB}$; $\overline{PR}$ divide $\overline{AC}$ ao meio e $\overline{PQ}$ divide $\overline{BC}$ ao meio.
   Demonstre: $\overline{PR} \perp \overline{PQ}$.



8. Demonstre: Se duas circunferências se tangenciam internamente e são tais que a circunferência menor contém o centro da circunferência maior, então qualquer corda da circunferência maior, tendo uma extremidade no ponto de tangência, é dividida ao meio pela circunferência menor.

9. Dada a figura com $m\widehat{AG} = m\widehat{BG}$, demonstre que
$$\Delta MHB \sim \Delta MAG.$$



10. Demonstre: Em qualquer circunferência, cordas paralelas interceptam arcos de mesma medida.
11. Demonstre o seguinte teorema:
    Numa circunferência, um diâmetro perpendicular a uma corda divide ao meio os arcos determinados pelas extremidades da corda.

12. Demonstre: Se um ângulo inscrito num arco circular é um ângulo reto, o arco é uma semicircunferência.
13. Numa semicircunferência $\widehat{ACB}$, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ em D. Demonstre que CD é a média geométrica de AD e DB.
14. Dado que
    (a) $AD = 9$ e $DB = 4$, determine CD.
    (b) $AB = 25$ e $AD = 5$, determine CD.
    (c) $AD = 32$ e $CD = 8$, determine DB.
    (d) $AD = 3$ e $DB = 1$, determine CD.
    (e) $AB = 25$ e $CD = 12$, determine AD e DB.

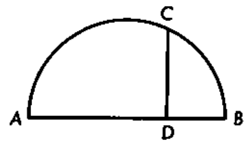


Figura para os Problemas 13 e 14

* 15. Numa circunferência, se o diâmetro $\overline{AB}$ é perpendicular à corda $\overline{CD}$ em E, demonstre que $CD^2 = 4AE \cdot BE$.
16. Demonstre o seguinte teorema:
    Os ângulos opostos de um quadrilátero inscrito são suplementares.
17. Na figura, se $m\angle P = 60$ e $m\widehat{PSR} = 128$, o que é $m\angle Q$, $m\angle R$ e $m\angle S$?

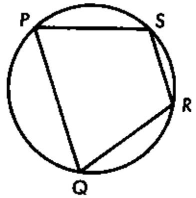
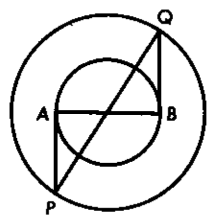
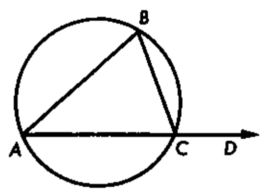


Figura para os Problemas 16 e 17

* 18. Na figura, $\overline{AB}$ é um diâmetro da menor de duas circunferências concêntricas. $\overline{AP}$ e $\overline{BQ}$ são tangentes à circunferência menor em A e B respectivamente. Demonstre que $\overline{AB}$ e $\overline{PQ}$ se interceptam no centro das circunferências.



* 19. Se um triângulo isósceles é inscrito numa circunferência, a medida do arco interceptado pelo ângulo do vértice é o dôbro da diferença das medidas do ângulo externo na base do triângulo e do ângulo da base.



* 20. ΔABC está inscrito numa circunferência. A corda $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ e corda $\overline{CD} \perp \overline{AB}$. Demonstre que $\widehat{BD} \cong \widehat{BE}$.
* 21. Duas circunferências congruentes se tangenciam externamente em T. O diâmetro $\overline{PQ}$ é paralelo ao diâmetro $\overline{SR}$ com S e Q em semiplanos opostos determinados por $\overleftrightarrow{PR}$. Demonstre que $\square PQRS$ é um losango.

14-6. ARCOS CONGRUENTES

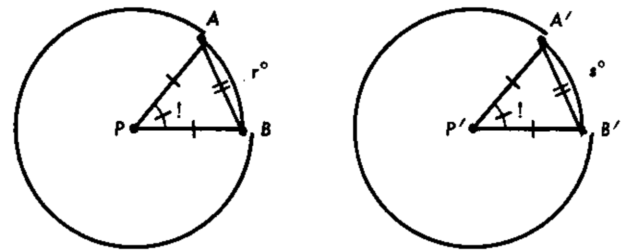
Definição

Na mesma circunferência ou em circunferências congruentes. dois arcos se dizem *congruentes* se êles têm a mesma medida.

Observe que também aqui, o significado intuitivo da palavra *congruente* é que as duas figuras têm o mesmo tamanho e forma; uma pode ser transportada de modo a coincidir com a outra.

Teorema 14-17

Na mesma circunferência ou em circunferências congruentes, se duas cordas são congruentes então também o são os arcos menores.



Demonstração. A notação da demonstração é a da figura. Precisamos mostrar que $r = s$. Por LLL,

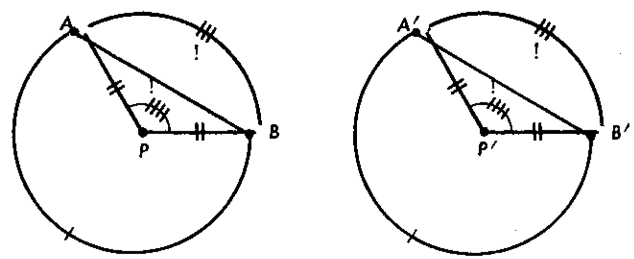
$$\Delta APB \cong \Delta A'P'B'.$$

Portanto $m\angle APB = m\angle A'P'B'$. Como $m\widehat{AB} = m\angle APB$ e $m\widehat{A'B'} = m\angle A'P'B'$, temos $r = s$ e $\widehat{AB} \cong \widehat{A'B'}$.

Teorema 14-18

Na mesma circunferência ou em circunferências congruentes, se dois arcos são congruentes, as cordas correspondentes também o são.

Na demonstração, há três casos a considerar porque dois arcos congruentes podem ser arcos menores, arcos maiores ou semicircunferências. A seguinte figura sugere a demonstração para o segundo dêsses casos.



Obtemos $AB = A'B'$, usando LAL.

Teorema 14-19

Dado um ângulo com o vértice numa circunferência, formado por uma semi-reta secante e uma semi-reta tangente, a medida do ângulo é a metade da medida do arco interceptado.

Demonstração. Na notação da figura, temos

$$x + y = 90, \qquad 2y + z = 180;$$

e queremos mostrar que

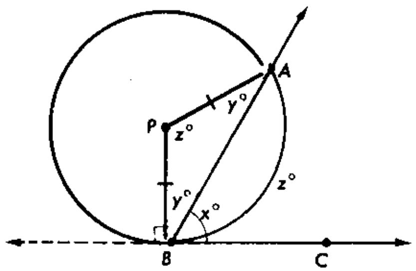
$$x = \tfrac{1}{2}z.$$

Isso é fácil, porque

$$x = 90 - y$$

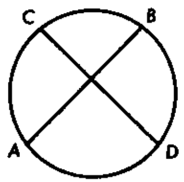
e

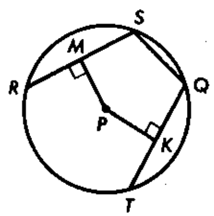
$$z = 180 - 2y.$$



Problemas 14-6

1. Na figura à esquerda, abaixo, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Demonstre que $AC \cong BD$.



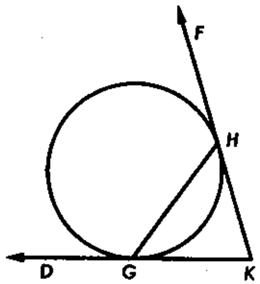


2. Na circunferência à direita, acima, com centro P, $PM = PK$ e $\overline{PM}$ e $\overline{PK}$ são perpendiculares às cordas $\overline{RS}$ e $\overline{QT}$ respectivamente. Demonstre que $\widehat{RS} \cong \widehat{QT}$.

3. $\overleftrightarrow{KH}$ e $\overleftrightarrow{KG}$ são tangentes à circunferência em H e G. Se a medida do arco maior $\widehat{GH}$ é 242, determine $m\angle DGH$ e $m\angle GHK$.

4. Na figura do Problema 3, por que $\angle KHG \cong \angle KGH$?

5. Na figura do Problema 3, se $m\angle K = 60°$, mostre que a medida do arco maior $\widehat{GH}$ é duas vêzes a medida do arco menor $\widehat{GH}$.

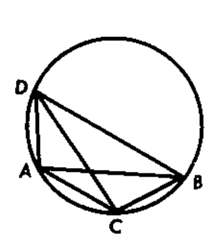


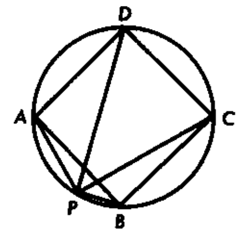
6. Demonstre: Se duas tangentes a uma circunferência se interceptam, elas formam um triângulo isósceles com a corda ligando os pontos de tangência.

7. Demonstre o seguinte teorema:

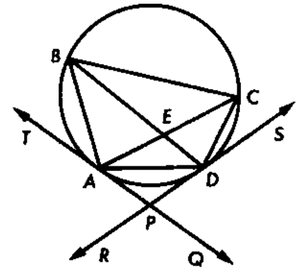
   Se dois arcos são congruentes, então qualquer ângulo inscrito em um dos arcos é congruente a qualquer ângulo inscrito no outro arco.

8. Na figura a seguir, à esquerda, $\widehat{AD} \simeq \widehat{CB}$. Demonstre que $\square ADBC$ é um trapézio isósceles.





9. Na figura à direita, acima, o quadrado $\square ABCD$ é inscrito na circunferência e P é um ponto qualquer de $\widehat{AB}$ distinto de A e B. Demonstre que $\overline{PC}$ e $\overline{PD}$ dividem o ângulo $\angle APB$ em três ângulos congruentes.



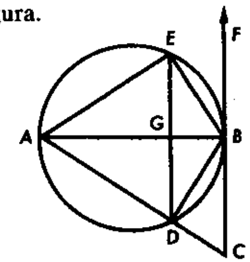
10. Na figura $\overleftrightarrow{PA}$ e $\overleftrightarrow{PD}$ são tangentes em A e D, respectivamente. Se

$$m\widehat{AD} = 70, \qquad m\widehat{BC} = 170$$

e

$$m\angle TAB = 40,$$

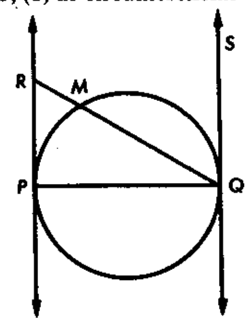
determine a medida dos ângulos e arcos menores da figura.



11. $\overline{AB}$ é um diâmetro da circunferência na qual a corda $\overline{DE}$ é paralela à tangente $\overleftrightarrow{CB}$.
    (a) Dado $m\widehat{BD} = 64$, determine a medida dos ângulos e arcos menores da figura.
    (b) Dado que $\widehat{AE} = 16$ e que o raio da circunferência é 10, determine o comprimento dos segmentos.
    (c) Usando a informação da parte (b), determine a área do $\square ADBE$.

12. Dado um ângulo com o vértice numa circunferência, formado por uma semi-reta secante e uma semi-reta tangente, demonstre que o ponto médio do arco interceptado é equidistante dos lados do ângulo.

* 13. Duas circunferências não congruentes são tangentes em um ponto T. Uma secante, L, por T, intercepta a circunferência maior em A e a circunferência menor em B. Demonstre que as tangentes em A e B são paralelas. [*Observação:* Existem dois casos: (a) as circunferências se tangenciam internamente; (b) as circunferências se tangenciam externamente.]



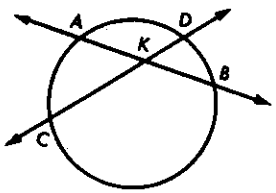
14. Na figura, $\overleftrightarrow{PR}$ e $\overleftrightarrow{QS}$ são tangentes e $\overline{PQ}$ é um diâmetro. Dado que

$$m\widehat{MQ} = 120 \quad \text{e} \quad RQ = 8,$$

determine o raio da circunferência.

15. Demonstre o seguinte teorema:

A medida de um ângulo, formado por duas secantes a uma circunferência que se interceptam em um ponto interior da mesma, é a metade da soma das medidas dos arcos interceptados pelo ângulo e o ângulo oposto pelo vértice.

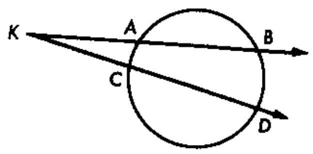


[*Sugestão:* Demonstre $m\angle DKB = \frac{1}{2}(m\widehat{DB} + m\widehat{AC})$. Primeiramente introduza $\overline{BC}$.]

16. Na figura do Problema 15, dado que
(a) $m\widehat{DB} = 40$ e $m\widehat{AC} = 90$, determine $m\angle AKC$.
(b) $m\widehat{AD} = 100$ e $m\widehat{BC} = 170$, determine $m\angle BKC$.
(c) $m\widehat{AC} = 130$ e $m\angle DKB = 75$, determine $m\widehat{DB}$.
(d) $m\widehat{ACD} = 310$ e $m\widehat{BC} = 200$, determine $m\angle AKC$.
(e) $m\widehat{BAC} = 180$ e $m\angle DKB = 57$, determine $m\widehat{AD}$.

17. Demonstre o seguinte teorema:

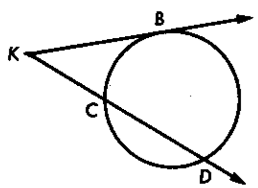
A medida de um ângulo formado por duas secantes a uma circunferência, que se interceptam no exterior da circunferência, é a metade da diferença das medidas dos arcos interceptados.

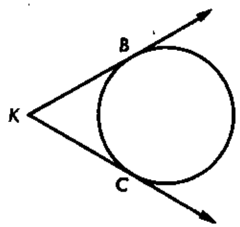


[*Sugestão:* Demonstre $m\angle K = \frac{1}{2}(m\widehat{BD} - m\widehat{AC})$. Primeiramente introduza $\overline{BC}$.]

18. Na figura do Problema 17, dado que
(a) $m\widehat{BD} = 70$ e $m\widehat{AC} = 30$, determine $m\angle K$.
(b) $m\widehat{BD} = 126$ e $m\widehat{AC} = 18$, determine $m\angle K$.
(c) $m\widehat{AC} = 50$ e $m\angle K = 22$, determine $m\widehat{BD}$.
(d) $m\widehat{AB} = 80$, $m\widehat{BD} = 80$, e $m\widehat{CD} = 190$, determine $m\angle K$.
(e) $m\angle K = 28$, $m\widehat{ABD} = 166$, e $m\widehat{ACB} = 290$, determine $m\widehat{CD}$.

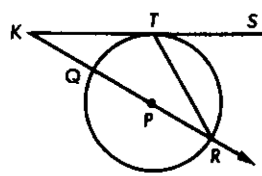
19. Verifique que o teorema do Problema 17 é válido se a expressão "duas secantes" fôr substituída por "uma secante e uma tangente" ou por "duas tangentes".





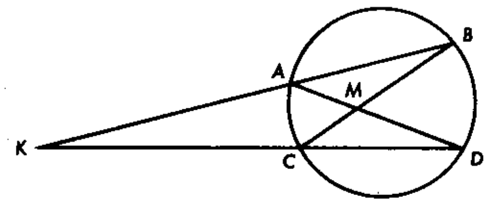
20. Duas tangentes a uma circunferência formam um ângulo cuja medida é 72. Qual é o número de graus nos arcos interceptados?

21. Dado que $\overleftrightarrow{KS}$ é tangente à circunferência em T e que a secante $\overleftrightarrow{KR}$ contém P, o centro da circunferência, se $m\angle K = 35$, determine $m\widehat{QT}$ e $m\angle STR$.



22. São dadas duas tangentes a uma circunferência que se interceptam em K. Se a medida de um dos arcos interceptados é 4 vêzes a medida do outro arco, qual é a medida do $\angle K$?

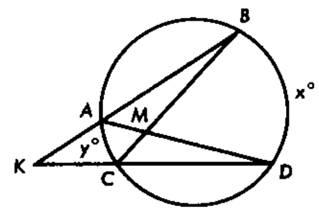
*+ 23.



Na figura, se $m\widehat{BD} = 70$ e $m\angle DMB = 4m\angle K$, determine $m\widehat{AC}$ e $m\angle K$.

*+ 24. Dada a figura, determine a razão de x para y para a qual

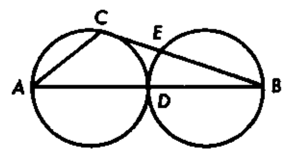
$$m\angle DMB = 2m\angle K.$$



* 25. É dada uma circunferência e um ponto P no seu exterior. Uma reta por P é tangente à circunferência em T. Uma secante contendo P intercepta a circunferência em Q e R, com Q entre R e P. A bissetriz do $\angle QTR$ intercepta $\overline{RQ}$ em S. Demonstre que

$$PT = PS.$$

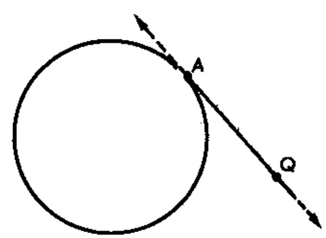
* 26. Dado: $\overline{AD}$ e $\overline{DB}$ são diâmetros de circunferências tangentes congruentes. $\overleftrightarrow{BC}$ é uma tangente em C. Demonstre: $m\widehat{AC} = m\widehat{DC} + m\widehat{DE}$.



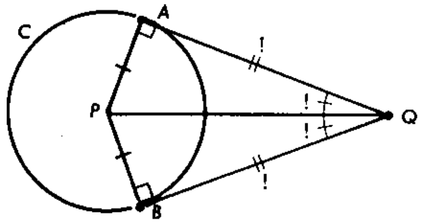
14-7. SEGMENTOS SECANTES E TANGENTES. POTÊNCIA DE UM PONTO EM RELAÇÃO A UMA CIRCUNFERÊNCIA

Definição

Se $\overline{QA}$ é tangente a uma circunferência em A, então $\overline{QA}$ é chamado um segmento tangente à circunferência a partir de Q.



Teorema 14-20



Os dois segmentos tangentes a uma circunferência a partir de um ponto do exterior são congruentes e determinam ângulos congruentes com o segmento do ponto exterior ao centro.

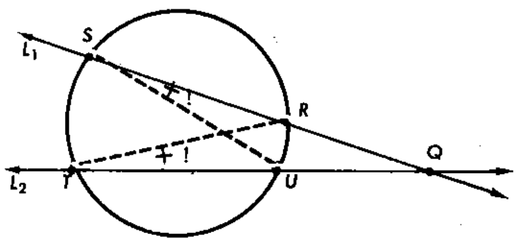
Re-enunciado. Dada uma circunferência C com centro P e um ponto Q do exterior de C, se $\overline{QA}$ e $\overline{QB}$ são tangentes a C em A e B, então $QA = QB$ e $\angle PQA \cong \angle PQB$.

Demonstração. $PA = PB$ porque A e B estão na circunferência; e $PQ = PQ$. Pelo Teorema 14-3, $\angle A$ e $\angle B$ são ângulos retos. Pelo Teorema 7-4, temos

$$\Delta PQA \cong \Delta PQB.$$

Portanto $QA = QB$ e $\angle PQA \cong \angle PQB$, como queríamos demonstrar.

Considere agora o caso de duas retas *secantes* a uma circunferência, pelo mesmo ponto do exterior.



Na figura, $\overline{QS}$ e $\overline{QT}$ são chamados *segmentos secantes* à circunferência. Para sermos exatos:

Definições

Se um segmento intercepta uma circunferência em dois pontos e exatamente um dêles é uma extremidade do segmento, então o segmento é chamado um *segmento secante* à circunferência.

O teorema seguinte diz que na figura acima sempre temos

$$QR \cdot QS = QU \cdot QT.$$

Isto é, o produto das "duas distâncias" de Q à circunferência é completamente determinado pela circunferência dada e o ponto Q não mudando quando escolhemos retas secantes diferentes.

Teorema 14-21. O Teorema da Potência

Dada uma circunferência C e um ponto Q do seu exterior, seja L_1 uma reta secante por Q, interceptando C nos pontos R e S; seja L_2 uma outra reta secante passando por Q, interceptando C nos pontos U e T. Então

$$QR \cdot QS = QU \cdot QT.$$

Demonstração. Considere os triângulos ΔQSU e ΔQTR. Êles tem o $\angle Q$ em comum. E $\angle QSU \cong \angle QTR$ porque são inscritos no mesmo arco $\widehat{RSU} = \widehat{RTU}$. Pelo Corolário AA (12-3.1), temos

$$\Delta QSU \sim \Delta QTR$$

Portanto

$$\frac{QS}{QT} = \frac{QU}{QR},$$

e

$$QR \cdot QS = QU \cdot QT,$$

como queríamos demonstrar.

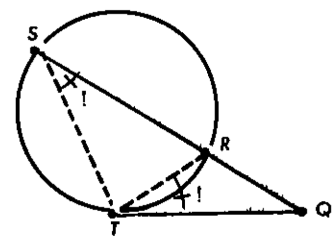
Assim o produto $QR \cdot QS$ fica determinado quando a circunferência C e o ponto exterior Q são dados. Êsse número é chamado a *potência de Q em relação a C.*

O Teorema 14-22 vai dizer que na figura abaixo, na qual $\overline{QT}$ é um segmento tangente, temos

$$QR \cdot QS = QT^2.$$

Essa equação diz que

$$QT = \sqrt{QR \cdot QS}.$$



Assim QT é a média geométrica de QR e QS. O teorema é mais fácil de se enunciar que o anterior.

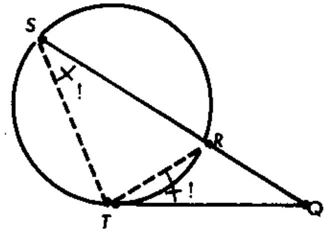
Teorema 14-22

Dado um segmento tangente $\overline{QT}$ a uma circunferência e uma reta secante pelo ponto Q, interceptando a circunferência nos pontos R e S, temos

$$QR \cdot QS = QT^2.$$

Em outras palavras, o quadrado do comprimento de um segmento tangente é a potência de sua extremidade exterior em relação à circunferência.

Demonstração. $\widehat{TR}$ é o arco interceptado pelo $\angle QST$ e $\angle QTR$. As passagens principais na demonstração são como se seguem:



(1) $m\angle QST = \frac{1}{2}m\widehat{TR}$.

(2) $m\angle QTR = \frac{1}{2}m\widehat{TR}$.

(3) $\angle QST \cong \angle QTR$.

(4) $\angle Q \cong \angle Q$.

(5) $\Delta QST \sim \Delta QTR$.

(6) $\dfrac{QS}{QT} = \dfrac{QT}{QR}$.

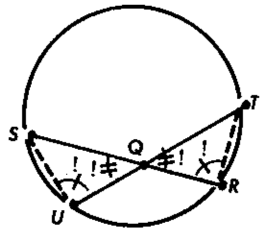
(7) $QR \cdot QS = QT^2$.

Quais as justificações para cada passagem?

O teorema seguinte afirma que na figura abaixo temos

$$QR \cdot QS = QU \cdot QT.$$

Teorema 14-23



Sejam $\overline{RS}$ e $\overline{TU}$ cordas duma mesma circunferência, interceptando-se em Q. Então

$$QR \cdot QS = QU \cdot QT.$$

Novamente daremos apenas as passagens principais da demonstração:

(1) $\angle U \cong \angle R$.

(2) $\angle SQU \cong \angle TQR$.

(3) $\Delta SQU \sim \Delta TQR$.

(4) $\dfrac{QS}{QT} = \dfrac{QU}{QR}$.

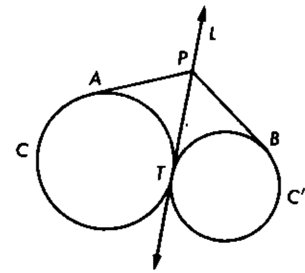
(5) $QR \cdot QS = QU \cdot QT$.

Êsse teorema nos permite definir potência de um ponto em relação a uma circunferência no caso em que o ponto está no interior da circunferência. Vimos que o produto $QR \cdot QS$ fica determinado quando são dados a circunferência C e o ponto Q; êsse número não muda quando escolhemos cordas diferentes contendo Q. Podemos portanto definir a *potência de Q em relação a C* como o número $QR \cdot QS$.

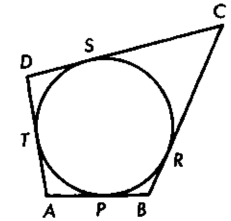
Problemas 14-7

1. Demonstre: Se a medida do ângulo determinado por dois segmentos tangentes a uma circunferência, de um ponto do exterior, é 60, então os segmentos tangentes formam um triângulo equilátero com a corda que liga os pontos de tangência.

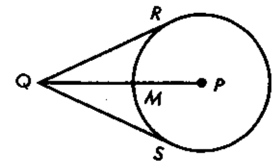
2. Um ponto P está a 13 cm do centro de uma circunferência de diâmetro igual a 10 cm. Qual o comprimento dos segmentos tangentes do ponto P?
3. A soma dos comprimentos de dois segmentos tangentes a uma circunferência de um mesmo ponto exterior é igual ao diâmetro da circunferência. Determine a medida do ângulo determinado pelos segmentos tangentes.



4. Dados: Circunferências C e C', ambas tangentes a L em T. P é um ponto qualquer de L (distinto de T). $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são segmentos tangentes. Demonstre $PA = PB$.

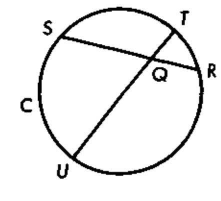


5. Os lados do $\square ABCD$ são tangentes à circunferência, como é visto na figura. Demonstre que
$$AB + DC = AD + BC.$$
6. Dois segmentos tangentes a uma circunferência de um ponto exterior determinam um ângulo de 60°. Se o diâmetro da circunferência é 10, qual o comprimento dos segmentos tangentes?
7. Se os segmentos tangentes do Problema 6 determinam um ângulo de 120°, qual o comprimento dos segmentos tangentes?

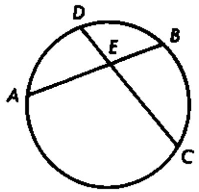


8. Na figura, $\overline{QR}$ e $\overline{QS}$ são segmentos tangentes à circunferência de centro P. $\overline{QP}$ intercepta a circunferência em M. Demonstre que M é equidistante dos segmentos tangentes.
9. Duas cordas de uma circunferência se interceptam. Os segmentos de uma corda têm comprimentos 4 e 6. Se o comprimento de um segmento da outra corda é 3, determine o comprimento do segmento restante.
10. Determine a potência de Q (veja figura) em relação a C, dado que

(a) $QS = 9$ e $QR = 5$.
(b) $QS = 3$ e $SR = 12$.
(c) $QU = 7$ e $QT = 5$.
(d) $QT = 1$ e $TU = 13$.
(e) $QR = 4$ e $SR = 14$.

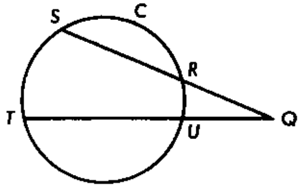


11. O diâmetro de uma circunferência é 37 cm. A 1 cm da extremidade de um diâmetro, êle intercepta uma corda a 4 cm da extremidade desta. Qual o comprimento da corda?



12. Na figura, $AB = 25$, $AE = 18$ e $DC = 27$. Determine EB, DE e EC.

13. Determine a potência de Q (veja a figura) em relação a C, dado que:
   (a) $QR = 4$ e $QS = 13$.
   (b) $QR = 6$ e $RS = 8$.
   (c) $QT = 17$ e $UT = 9$.
   (d) $QU = \sqrt{14}$ e $QT = \sqrt{56}$.
   (e) $QS = 23$ e $RS = 17$.



14. Na figura, se $PA = 6$, $PB = 15$ e $PC = 8$, qual o valor de PD?
15. Na figura, se $PB = 24$, $AB = 16$ e $PD = 16$, qual o valor de PC?
16. Na figura, se $PD = 20$, $CD = 12$ e $AB = 27$, qual o valor de PB?

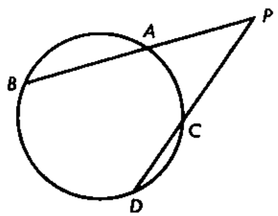
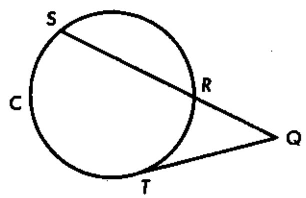


Figura para os Problemas 14, 15, 16

17. Na figura, $\overline{QT}$ é um segmento tangente. Determine a potência de Q em relação a C, dado que
   (a) $QR = 4$, $QS = 9$, e $QT = 6$.
   (b) $QS = 13$ e $RS = 9$.
   (c) $QT = 8$ e $RS = 12$.
   (d) $QR = \sqrt{6}$ e $QS = \sqrt{54}$.
   (e) $QS = \sqrt{17}$ e $QT = \sqrt{13}$.



18. Na figura abaixo, $\overline{PA}$ é um segmento tangente. Dado que $PB = 5$ e $PC = 20$, determine PA.

19. $\overline{PA}$ é um segmento tangente. Se $PA = 8$ e $PB = 7$, determine PC?
20. $\overline{PA}$ é um segmento tangente. Dado $PA = 16$ e $BC = 24$, determine PC.

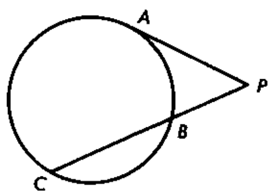
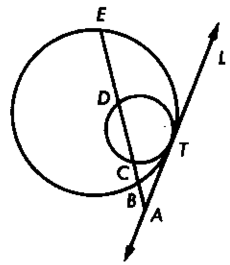
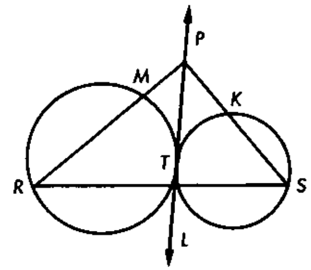


Figura para os Problemas 18, 19, 20

21. Dada a figura à direita, abaixo, com as duas circunferências tangentes a L em T, sendo P um ponto qualquer de L, distinto de T, demonstre que

$$PM \cdot PR = PK \cdot PS.$$

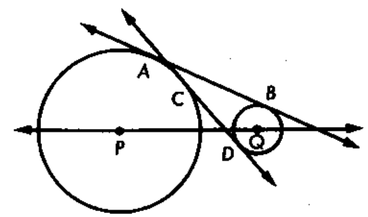




22. Na figura à esquerda, acima, A é um ponto qualquer de L distinto de T, o ponto de tangência comum das circunferências. Demonstre que

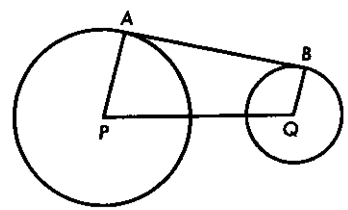
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

23. Se uma tangente comum a duas circunferências intercepta a reta dos centros, em um ponto entre os centros, ela é chamada *tangente interna comum*. Se ela não intercepta a reta dos centros, em um ponto entre os centros, ela é chamada *tangente externa comum*.
   Nessa figura, $\overleftrightarrow{AB}$ é uma tangente externa comum e $\overleftrightarrow{CD}$ é uma tangente interna comum.
   Dadas duas circunferências, quantas tangentes internas comuns e quantas tangentes externas comuns existem se
   (a) as circunferências não se interceptam como na figura?
   (b) as circunferências se tangenciam externamente?
   (c) as circunferências se interceptam em dois pontos?
   (d) as circunferências se tangenciam internamente?
   (e) as circunferências são concêntricas?

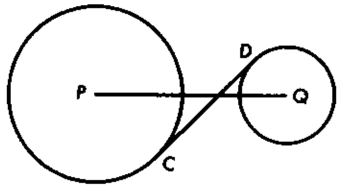


24. Duas circunferências de raios 5 e 17, respectivamente, têm um segmento tangente externo comum de comprimento 16. Qual a distância entre seus centros?

25. Os raios de duas circunferências são 3 e 8, e a distância entre seus centros é 13. Determine o comprimento do segmento tangente externo comum.
   [*Sugestão:* Introduza a reta por Q perpendicular a $\overline{AP}$.]

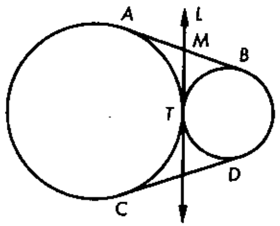


26. A distância entre os centros de duas circunferências de raios 3 e 6 é 18. Qual o comprimento do segmento tangente interno comum?

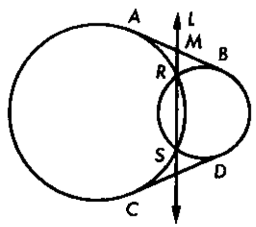


+ 27. Demonstre que os segmentos tangentes externos comuns a duas circunferências são congruentes.

* 28. Demonstre: Se duas circunferências e uma reta se interceptam no mesmo ponto, ou pontos, então a reta divide ao meio todo segmento tangente externo comum às circunferências.

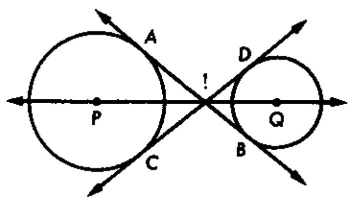


Caso 1



Caso 2

*+ 29. Demonstre: As tangentes internas comuns a duas circunferências que não se interceptam e a reta dos centros das circunferências se interceptam num mesmo ponto. [*Sugestão:* Faça uma demonstração indireta. Desenhe os raios. Use semelhança e proporções.]



+ 30. Demonstre que os segmentos tangentes internos comuns a duas circunferências que não se interceptam são congruentes.

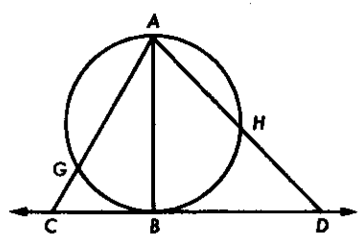
* 31. $\overline{DB}$ é um diâmetro de uma circunferência. Uma tangente por D e uma secante por B se interceptam num ponto A. A secante também intercepta a circunferência em C. Demonstre que $DB^2 = AB \cdot BC$.

* 32. $\overline{RS}$ é um diâmetro de uma circunferência. L_1 é a tangente à circunferência em R e L_2 é a tangente em S. Uma reta, contendo Q, ponto qualquer de L_1 distinto de R, é tangente à circunferência em P e intercepta L_2 em T. Demonstre que

$$a\square QRST = \tfrac{1}{2} RS \cdot QT.$$

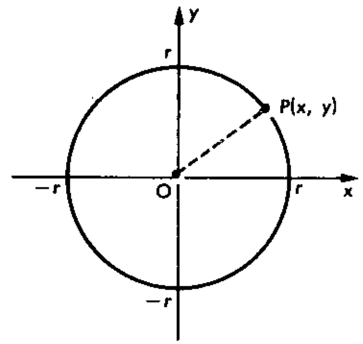
*+ 33. Na figura, $\overline{AB}$ é um diâmetro e $\overleftrightarrow{CD}$ é a tangente em B. Demonstre que

$$AC \cdot AG = AD \cdot AH.$$



14-8. CIRCUNFERÊNCIAS EM UM PLANO CARTESIANO

Se construirmos um sistema de coordenadas no plano, é fácil ver o que será a equação de uma circunferência. Considere primeiramente o caso em que o centro está na origem.



A circunferência com centro em O e raio r é definida pela condição.

$$OP = r.$$

Sejam (x, y) as coordenadas de P. Vamos usar a fórmula da distância e escrever nossa equação algèbricamente como

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r,$$

ou

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Se o centro é o ponto $Q(a, b)$, então a circunferência é definida pela condição

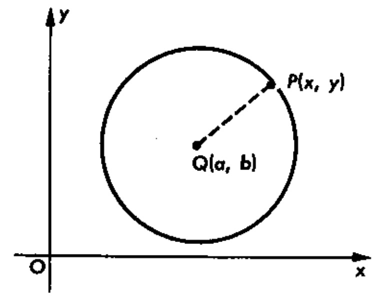
$$QP = r.$$

Algèbricamente, temos

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r,$$

ou

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$



Teorema 14-24

O gráfico da equação

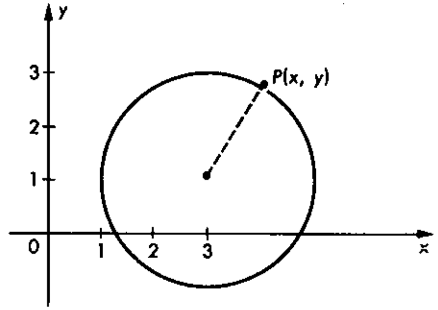
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

é a circunferência de centro (a, b) e raio r.

Podemos aplicar êsse teorema de frente para trás e de trás para frente.

(1) Se conhecemos o centro e o raio, podemos escrever a equação da circunferência. Por exemplo, a circunferência de centro (3, 1) e raio 2 é o gráfico da equação

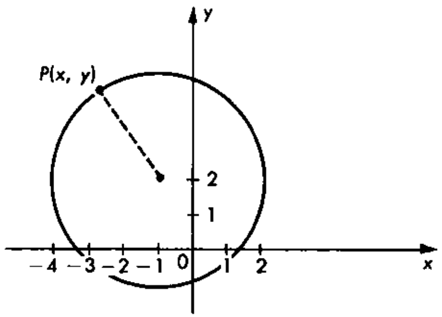
$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4.$$



(2) Dada uma equação do tipo tratado no Teorema 14-24, podemos dizer qual deve ser o centro e o raio da circunferência. Por exemplo, dado

$$(x + 1)^2 + (y-2)^2 = 9,$$

sabemos que o centro é (– 1, 2) e o raio é 3.



Até aqui, está tudo muito bem. Mas suponhamos que nossa segunda equação para circunferências tivesse caído nas mãos de alguém que gosta de "simplificar" tôda equação que vê. Êle teria "simplificado" a forma padrão, obtendo

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 9,$$

e em seguida

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$$

Algumas vêzes encontramos equações de circunferências nessa forma. Para descobrir como é seu gráfico, precisamos "dessimplificar" para voltar à forma padrão

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

O método é o de completar o quadrado. Primeiramente rearranjamos os têrmos de modo a deixar juntos os têrmos em x e aquêles em y e transportamos os têrmos constantes para o outro lado do sinal de igualdade. Isso dá

$$x^2 + 2x \qquad + y^2 - 4y \qquad = 4$$

Queremos agora adicionar algum têrmo aos dois primeiros para completar um quadrado perfeito. Isto é, queremos

$$x^2 + 2x + (?) = (x-a)^2$$

Como

$$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

devemos ter $a = -1$, $a^2 = 1$. Portanto o que precisamos adicionar é 1. (A regra é simples: tomamos a metade do coeficiente de x e o elevamos ao quadrado). Da mesma maneira, vemos que para obter um quadrado perfeito, devemos adicionar 4 aos têrmos que envolvem y.

Como estamos adicionando um total de 5 à esquerda, devemos também adicionar um total de 5 à direita. Isso dá

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 4 + 5$$

ou

$$(x + 1)^2 + (y-2)^2 = 9,$$

que é a forma padrão. Podemos então dizer que o gráfico é uma circunferência de centro em (– 1, 2) e raio 3.

Se na forma padrão, $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, desenvolvermos tudo e rearranjarmos os têrmos, obtemos

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

Isso tem a forma

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0,$$

onde

$$A = -2a, \qquad B = -2b, \qquad C = a^2 + b^2 - r^2.$$

Assim, temos o seguinte teorema:

Teorema 14-25

Tôda circunferência é o gráfico de uma equação da forma

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0.$$

Parece razoável supor que a recíproca também é verdadeira. Isto é, podemos pensar que o gráfico de uma equação dessa forma é sempre uma circunferência. Mas isso, absolutamente, não é verdade. Considere, por exemplo, a equação

$$x^2 + y^2 = 0.$$

Aqui $A = B = C = 0$. Se x e y satisfazem essa equação então x e y são ambos zero. Portanto o gráfico contém apenas um único ponto, a saber, a origem.

Considere em seguida a equação

$$x^2 + y^2 + 1 = 0.$$

Aqui $A = B = 0$ e $C = 1$. Como $x^2 \geq 0$ e $y^2 \geq 0$, para todo x e y, segue-se que $x^2 + y^2 + 1 \geq 1$ para todo x e y. Portanto, $x^2 + y^2 + 1$ nunca é igual a 0 para nenhum x e y. Portanto, o gráfico de nossa equação *não contém nenhum ponto;* o gráfico é o conjunto vazio.

O teorema seguinte nos diz, de fato, que os únicos gráficos possíveis são a circunferência que normalmente esperaríamos e as duas possibilidades peculiares que acabamos de discutir.

Teorema 14-26

O gráfico da equação

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

é (1) uma circunferência, (2) um ponto ou (3) o conjunto vazio.

Demonstração. Em nossa equação geral, vamos completar o quadrado para os têrmos que envolvem x e também para os têrmos que envolvem y, como fizemos no exemplo acima. Isso dá

$$x^2 + Ax \qquad + y^2 + By \qquad = -C,$$

$$x^2 + Ax + \left(\frac{A}{2}\right)^2 + y^2 + By + \left(\frac{B}{2}\right)^2 = -C + \left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2,$$

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}.$$

Existem agora três possibilidades.

(1) Se a fração à direita é positiva, então ela tem uma raiz quadrada. O gráfico é então uma circunferência de centro

$$(a,\ b) = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$$

e raio

$$r = \tfrac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}.$$

(2) Se a fração à direita é 0, então o gráfico é o ponto

$$\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right).$$

(3) Se a fração à direita é negativa, então o gráfico é o conjunto vazio, porque o lado esquerdo nunca pode ser negativo.

Problemas 14-8

[*Observação:* Os problemas dêsse grupo, quando existir uma escolha de método, devem ser resolvidos pelo processo das coordenadas.]

1. Escreva a equação da circunferência cujo centro está na origem e cujo raio é
   (a) 4. (b) 7. (c) $\frac{2}{3}$.
   (d) 11. (e) $\sqrt{15}$. (f) π.
2. Dada a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 25$, entre os seguintes pontos quais são os da circunferência?
   (a) $(0, -5)$ (b) $(3, -4)$ (c) $(3, 2)$
   (d) $(24, 1)$ (e) $(\sqrt{8}, -\sqrt{17})$ (f) $(2\sqrt{3}, \sqrt{13})$
3. É dada uma circunferência de equação $x^2 + y^2 = 36$. Entre os seguintes pontos quais estão no interior, quais no exterior e quais estão na circunferência?
   (a) $(3, 3\sqrt{3})$ (b) $(4, -5)$ (c) $(-6, 0)$ (d) $(5, -3)$
   (e) $(-4, -4)$ (f) $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{7})$ (g) $(\frac{9}{2}, \frac{7}{4})$ (h) $(-2\sqrt{6}, 4)$
4. Determine o raio e escreva a equação da circunferência de centro na origem e que contém o ponto
   (a) $(0, -4)$. (b) $(3, 5)$. (c) $(-2, 7)$. (d) $(2, \sqrt{17})$
5. Escreva as equações das circunferências com centro e raio dados abaixo.
   (a) $(2, 5); 4$ (b) $(-3, 0); 6$
   (c) $(-4, -6); \sqrt{21}$ (d) $(0, 7); \frac{5}{3}$
6. Uma circunferência, cujo centro é o ponto $(2, 3)$, contém o ponto $(6, 6)$. Escreva sua equação.
7. Uma circunferência, com centro em $(-4, 0)$, passa pelo ponto $(2, -1)$. Escreva sua equação.
8. Os extremos de um diâmetro de uma circunferência são $(-6, 2)$ e $(6, -2)$. Determine seu centro, seu raio e escreva sua equação.
9. Escreva a equação da circunferência que tem por diâmetro um segmento de extremidades $(5, 8)$ e $(-1, -4)$.
10. Determine o centro e o raio de cada uma das circunferências:
    (a) $x^2 + y^2 = 16$. (b) $x^2 + y^2 - 9 = 0$.
    (c) $(x-3)^2 + (y-7)^2 = 8$. (d) $(x + 4)^2 + (y-5)^2 = 36$.
    (e) $(x-2)^2 + y^2 = 13$. (f) $4x^2 + 4y^2 = 36$.
    (g) $9x^2 + 9y^2 - 25 = 0$. (h) $3x^2 + 3(y-1)^2 = 12$.
    (i) $2(x + 5)^2 + 2(y-4)^2 - 14 = 0$. (j) $5x^2 + 5y^2 - 7 = 0$.
11. Determine o centro e o raio de uma circunferência cuja equação é
    $$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 4.$$
12. Determine o centro e o raio de uma circunferência cuja equação é
    $$x^2 + y^2 + 8x - 2y - 8 = 0.$$

13. Faça o gráfico da equação
$$x^2 + y^2 - 8x + 6y = 11.$$
14. Faça o gráfico da equação
$$x^2 + y^2 - 4x + 8y + 4 = 0.$$
15. Faça o gráfico da equação
$$x^2 + y^2 + 6x - 2y = -10.$$
16. Escreva a equação da circunferência com centro em $(-3, 4)$, que é tangente ao eixo-x.
17. Escreva a equação da circunferência tangente aos eixos x e y, sabendo-se que seu raio é 3 e que o centro está no quarto quadrante.
18. Identifique as figuras geométricas caracterizadas pelas seguintes equações:
    (a) $x^2 + y^2 = 15$.
    (b) $x^2 + y^2 + 14x - 16y + 104 = 0$.
    (c) $x^2 + 6x - 2y - x^2 + 2 = 0$.
    (d) $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 33 = 0$.
    (e) $2x^2 + 2y^2 + 12x + 9 = 0$.
    (f) $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 29 = 0$.
19. Na circunferência de equação $x^2 + y^2 = 49$, uma corda é perpendicular a um diâmetro no ponto $(0, 4)$. Determine o comprimento da corda e determine as coordenadas das suas extremidades.
20. Demonstre que a mediatriz do segmento de extremidades $(a, 0)$ e $(0, a)$ contém o centro da circunferência cuja equação é $x^2 + y^2 = a^2$.
21. Dada a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 225$ e os pontos $A(-15, 0)$ e $B(9, 12)$,
    (a) Mostre que $\overline{AB}$ é uma corda da circunferência.
    (b) Determine o ponto médio de $\overline{AB}$.
    (c) Determine a equação da mediatriz de $\overline{AB}$.
    (d) Mostre que a mediatriz de $\overline{AB}$ contém o centro da circunferência.

* 22. Dada a circunferência cuja equação é $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$ e os pontos $D(-1, 2)$ e $E(8, 5)$,
    (a) Mostre que $\overline{DE}$ é uma corda da circunferência.
    (b) Mostre que a mediatriz de $\overline{DE}$ contém o centro da circunferência.
    (c) Determine a distância do centro da circunferência a $\overline{DE}$.

23. Determine a área do quadrado inscrito na circunferência de equação $x^2 + y^2 = 144$.

* 24. Determine a área do quadrado inscrito na circunferência de equação
$$x^2 + y^2 + 8x - 10y + 5 = 0.$$
25. Uma corda da circunferência $x^2 + y^2 = 72$ é tangente à circunferência $x^2 + y^2 = 18$. Ache o comprimento da corda.

*+ 26. Se a corda do Problema 25 é tangente à circunferência menor no ponto $(-3, -3)$, determine a equação da reta que contém a corda e determine as coordenadas das extremidades da corda.

27. Determine o comprimento dos segmentos tangentes do ponto $(13, 0)$ à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 25$.
28. Determine o comprimento dos segmentos tangentes do ponto $(16, 12)$ à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 100$.

* 29. Determine o comprimento dos segmentos tangentes do ponto $(-8, 3)$ à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 14x + 10y + 10 = 0$.

*+ 30. Dada a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 36$, para que valôres de a está o ponto $(a, a + 4)$ no interior da circunferência?

*+ 31. Mostre que as duas circunferências cujas equações são $x^2 + y^2 = 16$ e $x^2 + y^2 - 20x + 64 = 0$ se tangenciam externamente. Quais são as coordenadas do seu ponto de tangência?

*+ 32. Mostre que as duas circunferências de equações $x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0$ e $x^2 + y^2 - 16x - 12y = 0$ se tangenciam externamente. Determine a equação da reta que passa pelo ponto de contato e que é a tangente comum.

*+ 33. Dada a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 16x + 12y = 125$,
    (a) determine a equação da circunferência de raio 5 que é internamente tangente à circunferência dada em $(4, 3)$,
    (b) determine a equação da tangente comum.

*+ 34. Determine a equação da circunferência que é tangente às quatro circunferências caracterizadas pelas quatro equações:
$$x^2 + y^2 + 10x = 0.$$
$$x^2 + y^2 - 10x = 0.$$
$$x^2 + y^2 + 10y = 0.$$
$$x^2 + y^2 - 10y = 0.$$

*+ 35. Usando uma escala de cêrca de 1 cm = 1 unidade, desenhe cuidadosamente as circunferências de equações:
$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$
$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$
$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1.$$
$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1.$$
    (a) Determine a equação da circunferência que tem cada uma das circunferências dadas como circunferência tangente interna.
    (b) Determine a equação da circunferência que tem cada uma das circunferências dadas como circunferência tangente externa.

Revisão do Capítulo

1. Verifique se você sabe definir cada um dos seguintes têrmos:

Circunferência	Circunferência máxima	Arco interceptado
Superfície esférica	Extremo final	Ângulo central
Corda	Ponto de contato	Arco maior
Secante	Interior de uma circunferência	Arco menor
Tangente	Internamente tangentes	Semicircunferência
Raio	Externamente tangentes	Segmento tangente
Diâmetro	Ângulo inscrito.	

2. Copie e complete: Duas circunferências ou duas superfícies esféricas de mesmo centro são chamadas ....
3. Como pode ser a interseção de um plano com uma superfície esférica?
4. Como pode ser a interseção de uma reta e uma circunferência?
5. Em que condições se pode afirmar que um ponto é exterior a uma circunferência?
6. O que se pode afirmar sôbre um ângulo inscrito num arco maior? num arco menor? numa semicircunferência?
7. Se duas cordas se interceptam no interior de uma circunferência, o que se pode afirmar sôbre a potência do ponto de interseção em relação à circunferência?
8. Na figura, $\overleftrightarrow{AB}$ é tangente à circunferência. Se $m\widehat{BD} = 128$, $m\widehat{DE} = 38$ e $m\widehat{CE} = 104$, quais são as medidas dos seis ângulos?
9. Na figura, $\overleftrightarrow{AB}$ é tangente à circunferência. Se $AC = 9$ e $CE = 7$, determine AB.

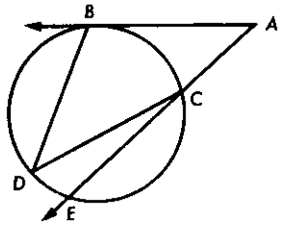


Figura para os Problemas 8, 9, 10

10. Na figura, se $BD = CD = 15$ e $m\widehat{BC} = 120$, qual o valor do raio da circunferência?
11. Na figura, se $RP = 8$, $MP = 6$ e $PQ = 3$, qual o valor de KQ?
12. Na figura, se $MR = MK$, $m\widehat{MK} = 140$ e $m\widehat{MQ} = 26$, qual o valor de $m\angle RPK$?

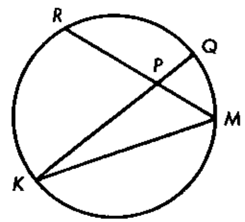
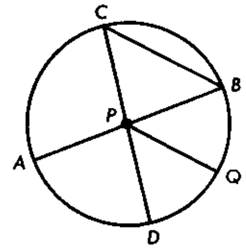


Figura para os Problemas 11 e 12

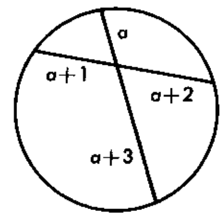
13. Indique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.
   (a) A medida de um ângulo central é igual a medida do arco que êle intercepta.
   (b) Se dois arcos são congruentes, um ângulo inscrito num dos arcos é congruente ao ângulo inscrito no outro arco.
   (c) Se dois ângulos inscritos em dois arcos são congruentes, então os arcos são congruentes.
   (d) Um ponto que é ponto médio de duas cordas de uma circunferência é o centro dessa circunferência.
   (e) Numa circunferência, se $m\widehat{AB} = \frac{1}{2}m\widehat{AC}$, a corda de $\widehat{AB}$ tem por comprimento a metade da corda de $\widehat{AC}$.
   (f) Uma secante que divide ao meio duas cordas de uma circunferência é perpendicular a cada uma das cordas.
   (g) Se uma reta divide ao meio uma corda de uma circunferência, então ela divide ao meio o arco menor da corda.
   (h) Se duas cordas de uma circunferência são não-congruentes, a corda menor está mais próxima do centro.

   (i) Uma tangente a uma circunferência no ponto médio de um arco é paralela à corda do arco.
   (j) O centro de um arco é o ponto que divide o arco ao meio.
   (k) Duas tangentes a uma circunferência nas extremidades de um diâmetro são paralelas.
   (l) Duas tangentes a uma mesma circunferência podem ser perpendiculares entre si.

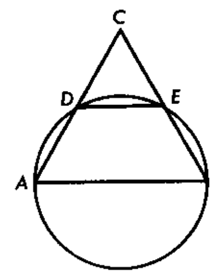
14. Dada uma circunferência de centro P e $\overline{CB} \parallel \overline{PQ}$, se $m\angle BCP = 55$, qual o valor de $m\widehat{BQ}$ e $m\widehat{AD}$?

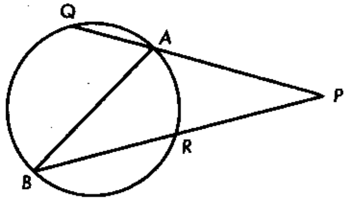


15. Se $\overline{AB}$ é um diâmetro de uma circunferência com centro P e X e Y são pontos da circunferência tais que $\overline{XY}$ divide ao meio o $\angle AXB$, demonstre que $\overline{PY} \perp \overline{AB}$.
16. Demonstre ser impossível que os comprimentos dos segmentos de duas cordas de uma circunferência que se interceptam sejam 4 inteiros consecutivos.



17. Na exploração de uma ruína antiga, um arqueólogo encontrou uma peça do arco de uma roda. Para reconstruir a roda êle precisava do diâmetro. Marcou três pontos A, B e C no arco de modo que a corda $\overline{AB}$ fôsse congruente à corda $\overline{AC}$. Se $AB = 15$ cm e $BC = 24$ cm, qual era o diâmetro da roda?
18. Escreva a equação da circunferência de centro em $(0, 0)$ e raio 4.
19. Dê o centro e o raio de uma circunferência cuja equação é $x^2 + 10x + y^2 + 16 = 0$.
20. Um quadrilátero está inscrito numa circunferência. Se as medidas de dois de seus ângulos são 68 e 143, quais são as medidas dos outros dois ângulos?
21. Um furo circular de 40 cm de diâmetro é recortado numa fôlha de madeira compensada e um globo esférico de 50 cm de diâmetro é colocado no furo. Quanto abaixo da fôlha de madeira o globo penetrará?
22. Uma circunferência tem por diâmetro o lado $\overline{AB}$ de um triângulo equilátero ΔABC e intercepta os outros dois lados do ΔABC em D e E. Se o diâmetro da circunferência é 16, determine a área do quadrilátero inscrito $\square ABED$.

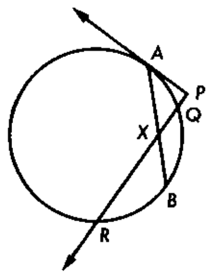




* 23. Na figura, $\overline{AB}$ é um diâmetro de uma circunferência. Se $AB = 8$, $AQ = 4$ e $PQ = 12$, determine PB e PR.

24. Consideremos tôdas as circunferências tangentes a uma reta no mesmo ponto. Demonstre que os segmentos tangentes traçados de um outro ponto da reta a tôdas as circunferências são congruentes.

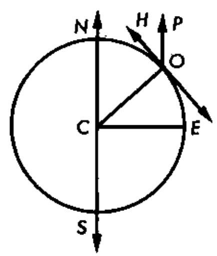
* 25. Dado que A, B, C são pontos de uma circunferência, tais que $m\widehat{AB} = m\widehat{AC} = m\widehat{BC} = 120$, P é um ponto qualquer de $\widehat{AB}$, demonstre que $PA + PB = PC$. [*Sugestão:* Introduza a reta por A paralela a $\overline{PB}$.]



* 26. Na figura, $\overrightarrow{PA}$ é tangente à circunferência em A. $AP = PX = XB$. Se $PQ = 1$ e $QR = 8$, determine AX.

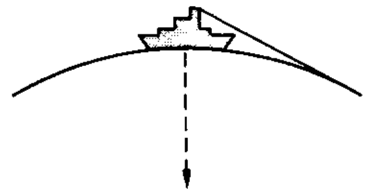
Problemas Magnos

(a) Um dos primeiros fatos que um estudante de astronomia aprende é que a latitude de um ponto na terra é igual ao ângulo que Polaris (a Estrêla do Norte) forma com a linha do horizonte, quando observada daquele ponto. Mostre porque isso acontece, demonstrando o seguinte teorema: A situação física é descrita pelo seguinte simbolismo: $\overleftrightarrow{NS}$ é o eixo da terra, a circunferência é um meridiano, C é o centro, E está no equador, O é o observador, $\overrightarrow{OH}$ é o horizonte e $m\angle POH$ é a elevação de Polaris.



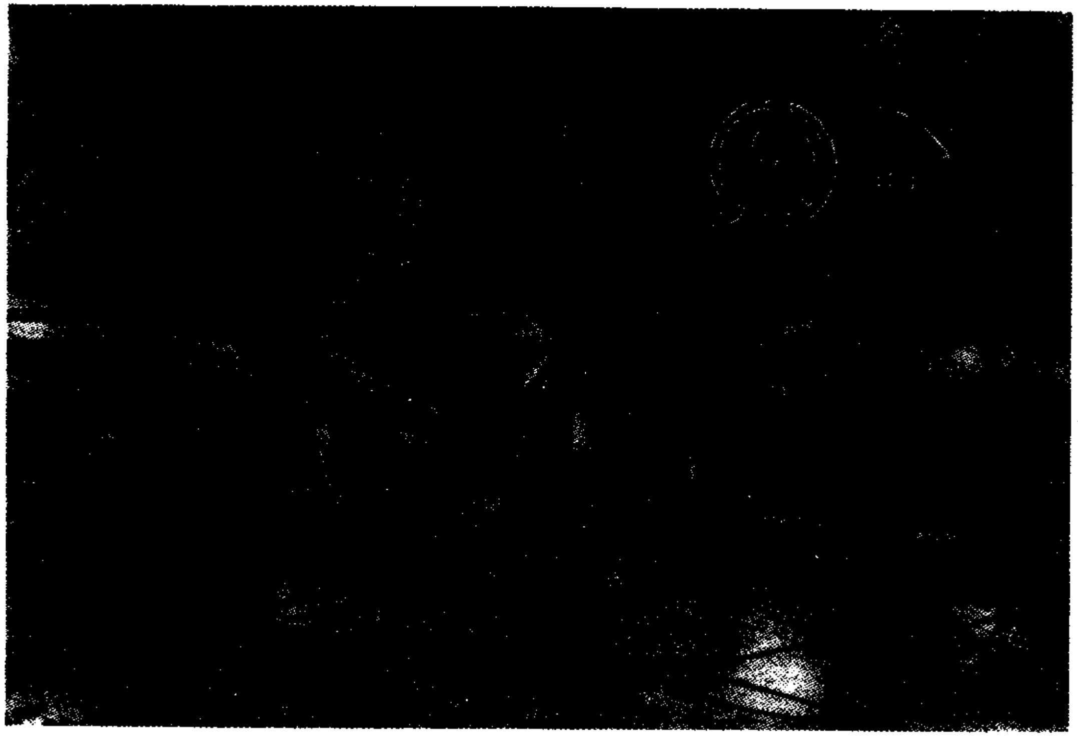
Dados: A circunferência de centro C.
Raio $\overline{CE} \perp \overleftrightarrow{NS}$.
$\overrightarrow{OH}$ é tangente em O.
$\overrightarrow{OP} \parallel \overleftrightarrow{NS}$.
Demonstre: $m\widehat{OE} = m\angle POH$.

(b) Duas circunferências não-congruentes se interceptam em dois pontos X e Y. Uma secante por X intercepta a circunferência maior em A e a menor em B. Uma secante por Y intercepta a circunferência maior em C e a menor em D. Demonstre que $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$.



(c) Na plataforma de um navio em alto mar, o capitão pediu a um jovem oficial que estava ao seu lado que determinasse a distância ao horizonte. O oficial pegou papel e lápis e em poucos instantes deu uma resposta. No papel êle havia escrito a fórmula $d = \frac{8}{5}\sqrt{5h}$. Mostre que essa fórmula é uma boa aproximação da distância em quilômetros, ao horizonte, se h é a altura, em metros, do observador, acima da água. (Suponha que o raio da terra seja 6.400 km.) Se a ponte está a 30 metros acima da água, qual é a distância ao horizonte?

15 CARACTERIZAÇÕES E CONSTRUÇÕES

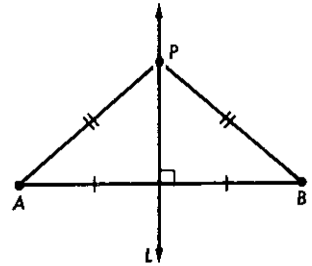


15-1. CARACTERIZAÇÕES

Você se lembrará de que, no Cap. 6, demonstramos um teorema que caracterizava a mediatriz de um segmento em um plano.

Teorema 6-2

A mediatriz de um segmento, em um plano, é o conjunto de todos os pontos do plano que são equidistantes das extremidades do segmento.



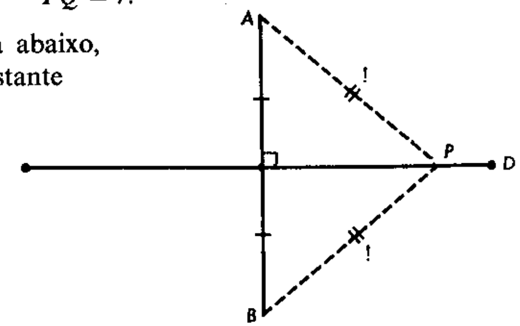
De modo resumido, dizemos que os pontos da mediatriz L são *caracterizados* pela condição $PA = PB$. Com isto, queremos dizer que (1) todo ponto de L satisfaz à condição $PA = PB$ e (2) que todo ponto do plano que satisfaz à condição $PA = PB$ está em L.

Da mesma forma, demonstramos, no Cap. 8, que o plano perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ pelo seu ponto médio é caracterizado pela condição $PA = PB$. (Aqui, evidentemente, P pode ser qualquer ponto no espaço.)

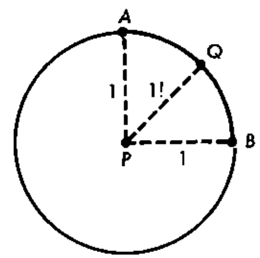
Caracterizações aparecem não apenas em teoremas, mas também em definições. Por exemplo, a superfície esférica de centro em P e raio r é, por definição, o conjunto de todos os pontos Q tais que $PQ = r$. Assim, dizemos que a superfície esférica é caracterizada pela condição

$$PQ = r.$$

Cuidado: Na figura plana abaixo, todo ponto de $\overline{CD}$ é equidistante de A e B.



Mas o segmento $\overline{CD}$ *não* é caracterizado pela condição $PA = PB$, porque esta condição é satisfeita por muitos outros pontos que não estão em $\overline{CD}$, a saber, todos os pontos de $\overleftrightarrow{CD}$. Da mesma forma, na figura seguinte, todo ponto de $\widehat{AB}$ se acha a uma distância 1 de P. Mas $\widehat{AB}$ não é caracterizado por $PQ = 1$, porque todos os pontos da circunferência satisfazem à mesma condição.



Esta é a razão por que o re-enunciado de um teorema de caracterização aparece, geralmente, em duas partes:

(1) Todo ponto do conjunto dado satisfaz à condição dada.

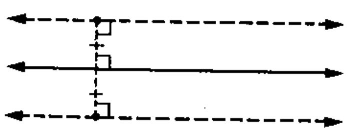
(2) Recìprocamente, todo ponto que satisfaz à condição dada está no conjunto dado.

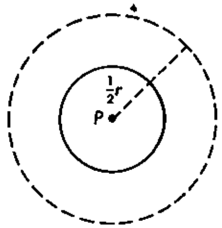
Veja, por exemplo, os re-enunciados dos Teoremas 6-2 e 8-6.

Problemas 15-1

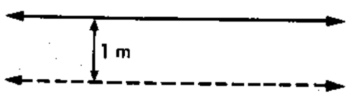
Nos problemas de 1 a 8, uma afirmação de caracterização é acompanhada de um esbôço que a representa. Você deve decidir quando, de fato, cada afirmação é uma caracterização. Caso seja, responda "verdadeiro". Caso não o seja, escreva uma afirmação correta e faça um esbôço também correto. Nos esboços, os referidos conjuntos de pontos são figuras sólidas, enquanto que as figuras sombreadas são aquelas contidas nas condições dadas ou necessárias às justificações.

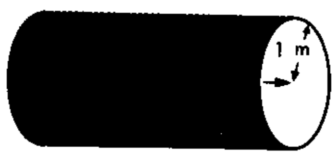
1. O conjunto de todos os pontos de um plano E, que são equidistantes de duas retas paralelas em E, é a mediatriz, em E, de qualquer segmento perpendicular às duas retas e tendo uma extremidade em cada reta.



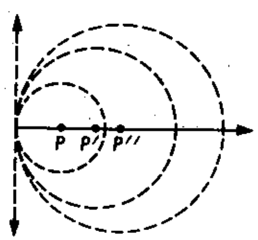


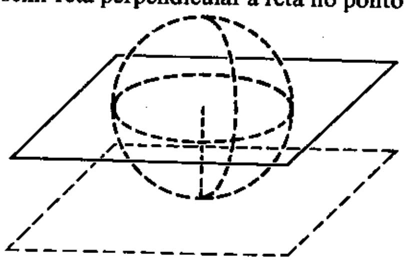
2. O conjunto de todos os pontos que são pontos médios dos raios de uma circunferência é uma circunferência concêntrica à circunferência dada e com raio igual à metade do raio da mesma circunferência.
3. O conjunto de todos os pontos de um plano, que estão a 1 m de uma reta, é uma reta paralela à reta dada, à distância de 1 m desta.



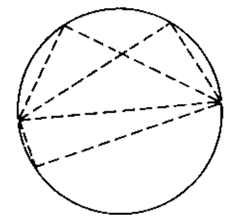


4. O conjunto de todos os pontos que estão à distância de 1 m de uma reta é uma superfície cilíndrica com 1 m de raio e tendo a reta dada como eixo.
5. O conjunto de todos os pontos que são centros de circunferências tangentes a uma reta em um ponto dado da reta é uma semi-reta perpendicular à reta no ponto dado.

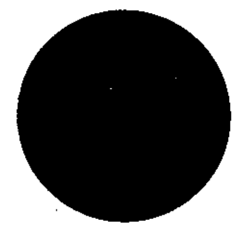




6. O conjunto de todos os pontos que são centros de esferas de raio r, tangentes a um plano é um plano paralelo ao plano dado a uma distância r do mesmo.
7. O conjunto de todos os pontos que são vértices de ângulos retos de triângulos retângulos, tendo o mesmo segmento como hipotenusa, é uma circunferência com a hipotenusa como diâmetro menos as extremidades do diâmetro.



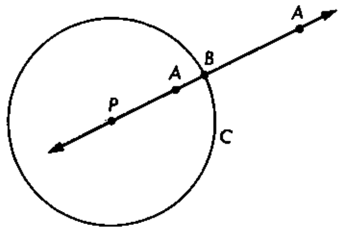
8. O conjunto de todos os pontos de um plano cuja distância a um ponto dado é menor que 2 m é um círculo, com centro no ponto dado e raio de 2 m.



Nos problemas de 9 a 20, faça um esbôço e descreva o referido conjunto de pontos.

9. O conjunto de todos os pontos equidistantes de dois pontos dados.
10. O conjunto de todos os pontos que são pontos médios de tôdas as cordas de uma circunferência, tendo um comprimento dado.
11. O conjunto de todos os pontos que são pontos médios de cordas de uma circunferência, tendo um ponto dado da circunferência como uma extremidade comum.
12. O conjunto de todos os pontos que estão a 1 m de um segmento dado de 4 m de comprimento e, também, a 2 m do ponto médio do segmento.
13. O conjunto de todos os pontos A, em um plano, para os quais ΔABC, que tem um segmento dado, $\overline{BC}$, como base, tem uma área dada.
14. O conjunto de todos os pontos de um plano que são centros de circunferências tangentes a uma dada circunferência, em um dado ponto desta.
15. O conjunto de todos os pontos no exterior de uma circunferência de diâmetro 6 que são extremidades de segmentos tangentes de comprimento 4.
16. O conjunto de todos os pontos de um plano que estão a $\frac{1}{2}$ m de um segmento, $\overline{AB}$, de comprimento 2 m.
17. O conjunto de todos os segmentos que estão a $\frac{1}{2}$ m de um segmento, $\overline{AB}$, de comprimento 2 m.
18. O conjunto de todos os pontos em um plano que são centros de circunferências com um raio dado e que contém um ponto dado.
19. O conjunto de todos os pontos de um plano que estão a 3 m de cada um de dois pontos dados, separados pela distância de 5 m.
20. O conjunto de todos os pontos que estão a 3 m de um plano dado e também estão a 5 m de um ponto dado do plano.

21. É dada uma circunferência C com centro em P e um ponto A no plano de C. Seja B o ponto interseção de $\overleftrightarrow{AP}$ e C, de tal modo que P não está entre A e B. Então AB é a *distância do ponto A à circunferência C.*

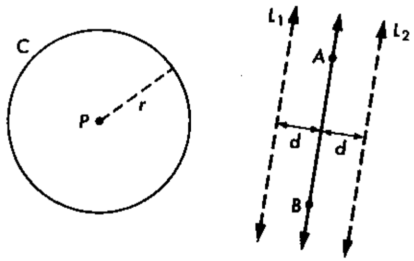


Descreva o conjunto de todos os pontos de um plano cujas distâncias a uma circunferência dada é igual ao raio da mesma.

22. Descreva o conjunto de todos os pontos de um plano cuja distância a uma circunferência dada é uma distância fixada menor que o raio.

23. Algumas vêzes, a solução de um problema de caracterização requer uma discussão de vários casos. Considere, por exemplo, o problema seguinte e sua solução; você deve copiar em seu caderno e completar os espaços em branco.

Descreva o conjunto de todos os pontos de um plano que estão a uma dada distância de um ponto dado e equidistantes de duas retas paralelas dadas.



Solução

(1) O conjunto de todos os pontos a uma distância r de um ponto P é a .... C de centro em P e raio r.

(2) O conjunto de todos os pontos equidistantes das retas paralelas L_1 e L_2 é $\overleftrightarrow{AB}$, a .... de qualquer segmento entre L_1 e L_2, perpendicular a ambas.

(3) O conjunto referido é a interseção de $\overleftrightarrow{AB}$ e C.
   (i) Se C e $\overleftrightarrow{AB}$ não se interceptam, o conjunto é ....
   (ii) Se C e $\overleftrightarrow{AB}$ são ...., o conjunto tem exatamente um ponto.
   (iii) Se $\overleftrightarrow{AB}$ contém um ponto no .... de C, o conjunto tem exatamente .... pontos.

+ 24. Descreva o conjunto de todos os pontos de um plano, equidistantes de dois pontos dados e de duas retas paralelas dadas.

+ 25. Descreva o conjunto de todos os pontos de um plano a uma dada distância de um ponto dado e a uma dada distância de uma reta dada.

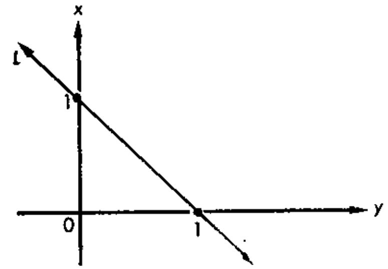
+ 26. Descreva o conjunto de todos os pontos de um plano que são centros de circunferências tangentes a uma reta dada em um ponto dado desta reta e que são centros de circunferências com um certo raio dado tangentes à mesma reta dada.

+ 27. Descreva o conjunto de todos os pontos que estão a uma dada distância de um plano dado e a uma dada distância de um ponto dado no referido plano.

15-2. O USO DE CARACTERIZAÇÕES NA GEOMETRIA ANALÍTICA

Na geometria analítica, usamos caracterizações contìnuamente. Por exemplo, na figura, a reta L é o gráfico da equação

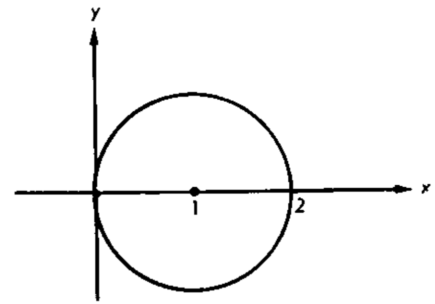
$$x + y = 1.$$



(Por quê?) Isto significa que a reta é *caracterizada* pela condição $x + y = 1$; todo ponto (x, y) de L satisfaz esta condição e nenhum outro ponto a satisfaz.

Da mesma forma, na próxima figura, a circunferência é caracterizada pela condição

$$(x-1)^2 + y^2 = 1.$$



(Por quê?) De fato, tôda vez que dissermos que uma figura é o gráfico de uma certa equação, isto significa que a equação é a caracterização do gráfico. Na maioria das vêzes, o nosso trabalho em geometria analítica depende de serem as figuras com que estamos lidando caracterizadas por equações simples.

Problemas 15-2

[*Observação:* A notação seguinte é freqüentemente usada para descrever conjuntos em geometria analítica.

$$\{(x, y) \mid x + y = 1 \text{ e } x = 1\}.$$

Isto significa "O conjunto de todos os pares ordenados (x, y) tais que $x + y = 1$ e $x = 1$". Neste caso, evidentemente, é o conjunto formado pelo único par $(1, 0)$. Portanto, podemos escrever $\{(x, y) \mid x + y = 1 \text{ e } x = 1\} = \{(1, 0)\}$.]

1. Esboce cada um dos seguintes conjuntos (isto é, esboce os gráficos):
   (a) $\{(x, y) \mid x = 3\}$ (b) $\{(x, y) \mid y = -2\}$
   (c) $\{(x, y) \mid y = x - 2\}$ (d) $\{(x, y) \mid x + y = 0\}$

2. Esboce cada um dos seguintes conjuntos:
   (a) $\{(x, y) \mid x > -1\}$ (b) $\{(x, y) \mid y \leq 0\}$
   (c) $\{(x, y) \mid x < y\}$ (d) $\{(x, y) \mid x + y \geq 1\}$

3. Faça um esbôço e descreva por uma equação o conjunto de todos os pontos $P(x, y)$ que são equidistantes de $A(5, 0)$ e $B(1, 0)$.

4. Faça um esbôço e descreva por uma equação o conjunto de todos os pontos $P(x, y)$ que são equidistantes de $C(2, 2)$ e $D(2, -8)$.
5. Faça um esbôço e descreva por uma equação o conjunto de todos os pontos $P(x, y)$ que são equidistantes das retas $x = -3$ e $x = 7$.
6. Esboce cada um dos seguintes conjuntos:
   (a) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 25\}$ (b) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 8\}$
   (c) $\{(x, y) \mid (x-1)^2 + y^2 = 4\}$ (d) $\{(x, y) \mid x^2 + (y+1)^2 = 9\}$
7. Esboce e descreva o conjunto de todos os pontos $P(x, y)$ que são equidistantes dos pontos $A(0, 5)$ e $B(5, 0)$.
8. Esboce e descreva, do modo mais breve possível, os seguintes conjuntos:
   (a) $\{(x, y) \mid x = 3 \text{ e } y = 6\}$
   (b) $\{(x, y) \mid x = y \text{ e } x = 5\}$
   (c) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 16 \text{ e } x = -4\}$
   (d) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 25 \text{ e } y = 3\}$
   (e) $\{(x, y) \mid y = -2 \text{ e } |x| = 7\}$
   (f) $\{(x, y) \mid |x| = 3 \text{ e } |y| = 5\}$

$^+$ 9. Qual a diferença entre os seguintes conjuntos?
   (a) $\{(x, y) \mid x = 4 \text{ e } y = 5\}$ (b) $\{x, y) \mid x = 4 \text{ ou } y = 5\}$

$^{*+}$ 10. Faça um esbôço e descreva com uma equação o conjunto de todos os pontos $P(x, y)$ tais que a distância ao ponto $(8, 0)$ seja duas vêzes a distância ao ponto $(2, 0)$.

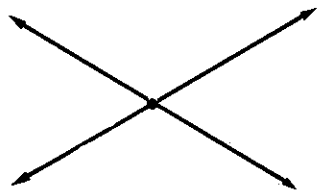
$^{*+}$ 11. Esboce o seguinte conjunto: $\{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 5 \text{ e } 0 \leq y \leq 4\}$.

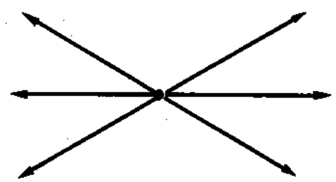
$^{*+}$ 12. Esboce o seguinte conjunto: $\{(x, y) \mid (x-3)^2 + y^2 = 25 \text{ ou } (x+6)^2 + y^2 = 52\}$.

15-3. TEOREMAS SÔBRE CONCORRÊNCIA

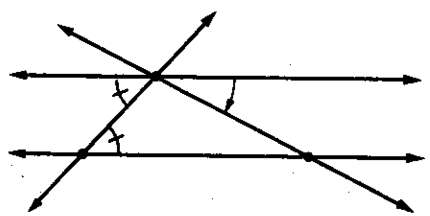
Definição

Duas ou mais retas são *concorrentes* se existe um único ponto que pertence a tôdas elas. O ponto comum é chamado *ponto de concorrência.*

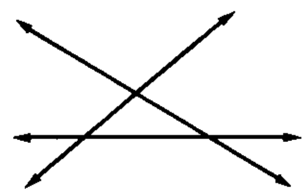


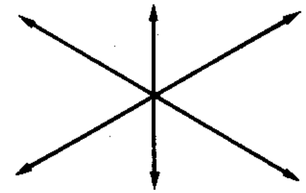


Evidentemente, é fácil que *duas* retas, no mesmo plano, sejam concorrentes. Isto é o que esperamos, quando traçamos duas retas ao acaso: se duas retas são paralelas e imprimimos uma rotação a uma delas, mesmo pequena, as retas se tornam concorrentes.



Mas, para *três* retas serem concorrentes, é muito diferente. De modo geral, esperamos que três retas em um plano determinem um triângulo.



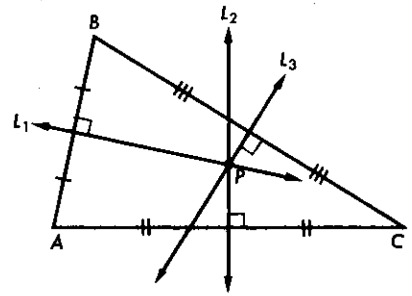


Se acontecer serem elas concorrentes, e se movemos uma delas um pouquinho, as chances são de que elas não continuem concorrentes.

Sob certas condições, entretanto, podemos mostrar que três retas são concorrentes. Nosso primeiro teorema dêste tipo é o seguinte:

Teorema 15-1. O Teorema sôbre a Concorrência das Mediatrizes.

As mediatrizes dos lados de um triângulo são concorrentes. O ponto de concorrência é equidistante dos vértices do triângulo.



Demonstração. Suponhamos dado o triângulo ΔABC. Sejam L_1, L_2 e L_3 as mediatrizes de $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$. Se L_1 e L_2 fôssem paralelas, então $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ seriam paralelas. (Por quê?) Mas $\overleftrightarrow{AB}$ intercepta $\overleftrightarrow{AC}$. Logo L_1 e L_2 se interceptam em um ponto P.

Pelo teorema de caracterização das mediatrizes (Teorema 6-2), temos $PA = PB$, porque P está em L_1. Pelo mesmo teorema, $PA = PC$, porque P está em L_2. Portanto, $PB = PC$. Pelo mesmo teorema, isto significa que P está em L_3.

Desta forma, as mediatrizes são concorrentes e o ponto de concorrência é equidistante dos vértices.

Corolário 15-1.1

Três pontos não-colineares quaisquer estão sôbre uma circunferência.

(Estão sôbre a circunferência de centro P e raio $PA = PB = PC$.)

Corolário 15-1.2

Duas circunferências podem se interceptar, no máximo, em dois pontos.

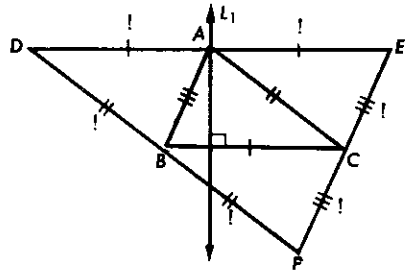
(Na demonstração, você precisa dos Corolários 14-6.1 e 15-1-1.)

Até aqui, usamos o têrmo *altura* (para um triângulo) em dois sentidos: pode significar (1) um segmento perpendicular a um lado do triângulo, a partir do vértice oposto ou (2) o comprimento de um segmento dêste tipo. No teorema seguinte, usaremos a palavra altura com um terceiro sentido: aqui, significa (3) a *reta* por um vértice do triângulo, perpendicular ao lado oposto.

Teorema 15-2. O Teorema sôbre a Concorrência das Alturas

As três alturas de um triângulo são sempre concorrentes.

A demonstração é simples, desde que você use o artifício mostrado à direita.



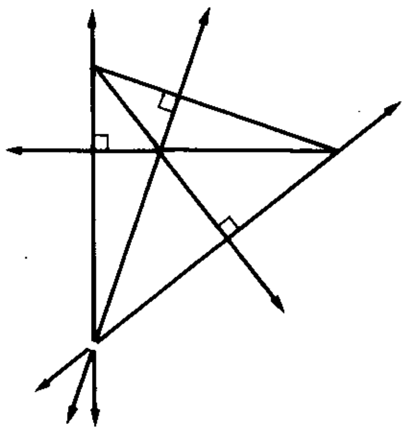
Demonstração. Dado o triângulo ΔABC, pelos seus vértices, traçamos retas paralelas aos lados opostos. Duas quaisquer destas retas não são paralelas. (Por quê?) Portanto, elas determinam um triângulo ΔDEF.

Sabemos que lados opostos de um paralelogramo são congruentes. Com duas aplicações sucessivas do mesmo teorema, obtemos

$$AD = BC = AE.$$

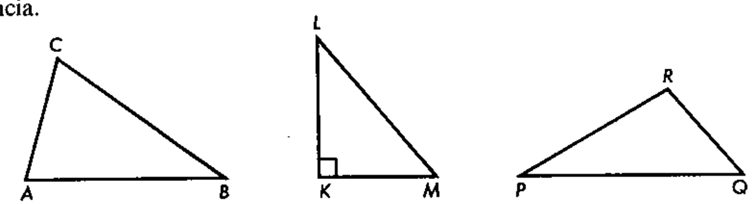
Portanto, *a altura por A, perpendicular a* $\overleftrightarrow{BC}$, *é a mediatriz de* $\overline{DE}$. Pelas mesmas razões, as outras duas alturas do ΔABC são mediatrizes dos outros dois lados do ΔDEF. Pelo Teorema 15-1, estas três retas são concorrentes.

Observe que êste teorema seria falso se interpretássemos a palavra *altura* com o sentido antigo, significando um segmento. Os *segmentos* perpendiculares não se interceptam, necessàriamente. São as *retas* que sempre são concorrentes.



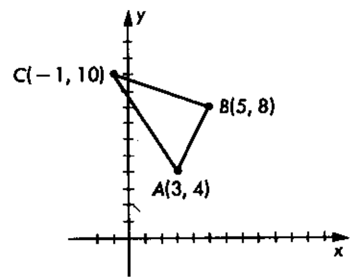
Problemas 15-3

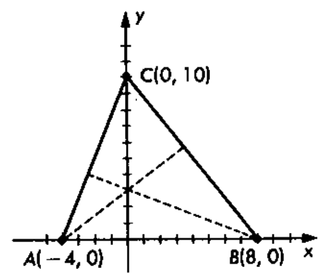
1. Copie cada um dos seguintes triângulos em seu caderno e construa as três alturas e as três mediatrizes dos lados, para cada triângulo, mostrando os pontos de concorrência.



2. O ponto de concorrência das alturas de um triângulo é chamado *ortocentro.*
   (a) Em que tipo de triângulo o ortocentro é um vértice do triângulo?
   (b) Em que tipo de triângulo o ortocentro coincide com o ponto de concorrência das três mediatrizes?
3. Três pontos estão sôbre uma circunferência. Os pontos são ligados por segmentos que formam um triângulo. Onde as mediatrizes dos segmentos se encontram?
4. Dados três pontos não-colineares, onde se encontra o ponto, do plano determinado por êles, que é equidistante dos três pontos dados?
5. Esboce e descreva o conjunto de todos os pontos equidistantes de cada um de três pontos dados, não-colineares.
6. Dado um triângulo, qual é o ponto de seu plano equidistante dos três vértices?
7. A altura perpendicular à hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles mede 7 cm. Qual é a área do triângulo?
8. Dado um ângulo qualquer $\angle BAC$, descreva o conjunto de todos os pontos interiores que são equidistantes dos lados do ângulo. Você deve demonstrar a resposta. (Cuidado: êste conjunto não é nem uma reta nem uma semi-reta.)
9. Um quadrilátero é *cíclico* se os quatro vértices estão em uma circunferência. Demonstre que as mediatrizes dos quatro lados e as mediatrizes das diagonais de um quadrilátero cíclico são concorrentes.

*+ 10. Ache equações para as mediatrizes dos lados do triângulo ΔABC. (Veja a figura à esquerda) e mostre que são concorrentes, dados $A(3, 4)$, $B(5, 8)$ e $C(-1, 10)$.





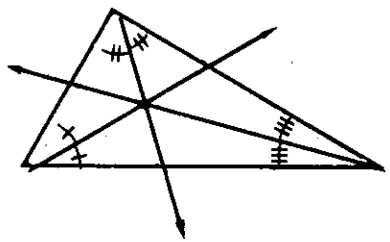
*+ 11. Dada a figura à direita, acima, ache equações para as alturas por A e B do triângulo ΔABC e mostre que elas se interceptam sôbre o eixo-y.

Problema Magno

Foram encontradas as seguintes instruções em um velho mapa:
"Parta do cruzamento da Estrada do Rei com a Estrada da Rainha. Prossiga em direção norte, pela Estrada do Rei, até encontrar um grande pinheiro e, depois, uma figueira. Volte ao cruzamento. Na direção oeste, pela Estrada da Rainha, existe uma paineira e na direção leste, na mesma estrada, existe um jacarandá. Um ponto mágico é o encontro da reta determinada pela paineira e pelo pinheiro com a reta determinada pela figueira e pelo jacarandá. Um outro ponto mágico é o encontro das retas determinadas pelo jacarandá e pinheiro, com a reta figueira--paineira. O tesouro está onde a reta determinada pelos pontos mágicos se encontra com a Estrada do Rei."
Uma equipe de exploradores encontrou a paineira a 400 m do cruzamento, o jacarandá a 200 m do mesmo cruzamento e o pinheiro a 300 m, também do cruzamento, mas não encontraram nenhum sinal da figueira. No entanto, êles conseguiram localizar o tesouro, a partir das instruções do mapa. Mostre como êles fizeram isto. Um membro da equipe observou que êles tiveram muita sorte em encontrar o pinheiro ainda em pé. O chefe da equipe sorriu e disse: "Não precisamos do pinheiro." Mostre que êle tinha razão.

15-4. AS BISSETRIZES DE UM TRIÂNGULO

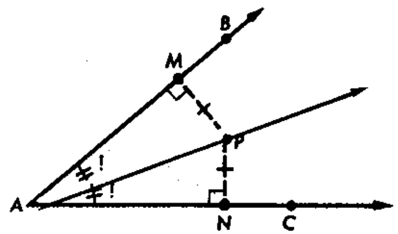
O próximo fato que desejamos demonstrar é que as bissetrizes de um triângulo são sempre concorrentes.



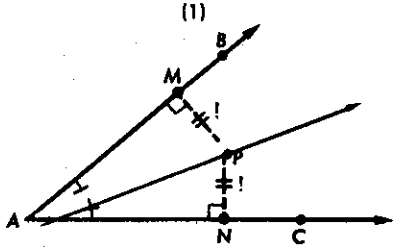
Para chegar a êste resultado, entretanto, precisamos, primeiramente, aprender alguma coisa mais sôbre bissetrizes. O que precisamos é de uma caracterização. Isto é dado no próximo teorema.

Teorema 15-3

A bissetriz de um ângulo, menos sua extremidade, é o conjunto de todos os pontos do interior do ângulo que são equidistantes dos lados.



(1)



(2)

Re-enunciado. (1) Se P está no interior de $\angle BAC$ e P é equidistante de $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, então P está na bissetriz de $\angle BAC$.

(2) Se P está na bissetriz de $\angle BAC$ e $P \neq A$, então P está no interior de $\angle BAC$ e é equidistante de $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$.

As figuras ilustram as duas partes do re-enunciado. A notação das demonstrações é a mesma das figuras.

Demonstração de (1)

Afirmações	*Justificações*
1. P está no interior do $\angle BAC$.	Dado.
2. $\overline{PM} \perp \overleftrightarrow{AB}$ e $\overline{PN} \perp \overleftrightarrow{AC}$.	Definição de distância de um ponto a uma reta.
3. $\angle M$ e $\angle N$ são ângulos retos.	Dado.
4. $\angle M \cong \angle N$.	Ângulos retos são congruentes.
5. $PM = PN$.	Dado.
6. $\Delta AMP \cong \Delta ANP$.	Teorema 7-4.
7. $\angle PAM \cong \angle PAN$.	Partes correspondentes.
8. $\overrightarrow{AP}$ é bissetriz de $\angle BAC$.	Passagens 1 e 7 e a definição de bissetriz de um ângulo.

Demonstração de (2)

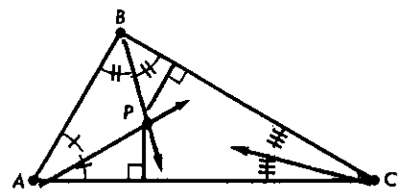
Afirmações	*Justificações*
1. P está na bissetriz de $\angle ABC$ e $P \neq A$.	Dado.
2. P está no interior de $\angle BAC$.	Passagem 1 e definição de bissetriz de um ângulo.
3. $\angle PAM \cong \angle PAN$.	Definição de bissetriz.
4. $\angle M \cong \angle N$.	Ângulos retos são congruentes.
5. $PA = PA$.	Identidade.
6. $\Delta AMP \cong \Delta ANP$.	Teorema LAA.
7. $MP = NP$.	Partes correspondentes.

As afirmações 2 e 7 são as conclusões que queríamos.

Agora, podemos demonstrar nosso teorema sôbre concorrência:

Teorema 15-4. O Teorema sôbre a Concorrência das Bissetrizes

As bissetrizes de um triângulo são concorrentes em um ponto que é equidistante dos três lados.

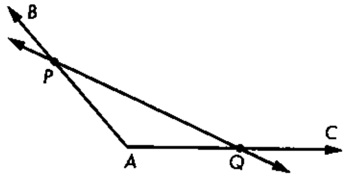


Demonstração. Dado o triângulo ΔABC, seja P a interseção das bissetrizes de $\angle A$ e $\angle B$. Então P está no interior de $\angle A$ e no interior de $\angle B$, e, portanto, está no interior de $\angle C$. Assim,

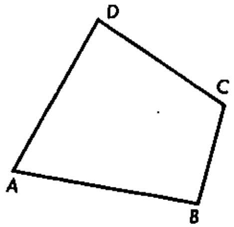
(1) P é equidistante de $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{AB}$;
(2) P é equidistante de $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$;
(3) P é equidistante de $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$;
(4) P está na bissetriz de $\angle C$.

Justificações?

Problemas 15-4



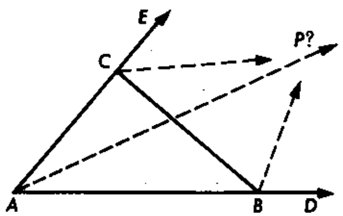
1. Uma reta intercepta os lados de $\angle BAC$ em P e Q. Localize os pontos de $\overleftrightarrow{PQ}$ que são equidistantes de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.



2. $\square ABCD$ é um quadrilátero convexo.
   (a) Diga como encontrar um ponto que é equidistante de $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ e que também é equidistante de D e C.
   (b) Diga como achar um ponto que é equidistante de $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{DC}$.
   (c) Os pontos da parte (a) e (b) coincidem?
3. Descreva o conjunto de todos os pontos que são centros de circunferências tangentes a ambos os lados de um ângulo dado.
4. Descreva o conjunto de todos os pontos que são equidistantes de duas retas que se interceptam.
5. Descreva o conjunto de todos os pontos que são equidistantes de duas retas que se interceptam e que estão a 2 cm do ponto de interseção.

+ 6. Descreva o conjunto de todos os pontos que são equidistantes de dois planos que se interceptam.
+ 7. Descreva o conjunto de todos os pontos do interior de um ângulo que são equidistantes dos lados do ângulo e que estão a uma dada distância de uma reta dada.

8. Demonstre que as bissetrizes de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo se interceptam em um ponto que é equidistante de um par de lados opostos.



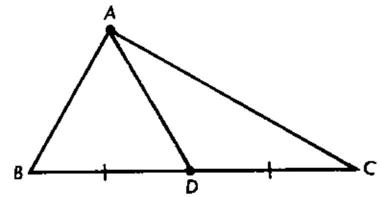
9. Demonstre o seguinte teorema:
   É dado o ângulo $\angle DAE$, com A-C-E e A-B-D. Então as bissetrizes dos ângulos $\angle DAE$, $\angle DBC$ e $\angle ECB$ são concorrentes.

* 10. Descreva o conjunto de todos os pontos que são equidistantes das três retas determinadas pelos lados de um triângulo.

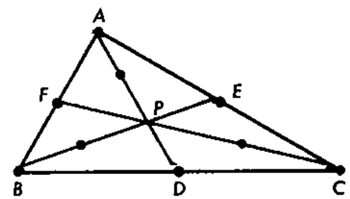
\+ 11. Faça vários esboços de quadriláteros convexos diferentes e trace, cuidadosamente, as bissetrizes dos ângulos. As quatro bissetrizes, em cada quadrilátero, são concorrentes? Em que tipo especial de quadrilátero as bissetrizes são concorrentes? Existe um processo geral de descrever todos os quadriláteros cujas bissetrizes são concorrentes?

*+ 12. Dado um par de eixos coordenados, mostre que o conjunto de todos os pontos equidistantes dos dois eixos é
$$\{(x, y) \mid y = x \text{ ou } y = -x\}.$$

15-5. O TEOREMA SÔBRE A CONCORRÊNCIA DAS MEDIANAS



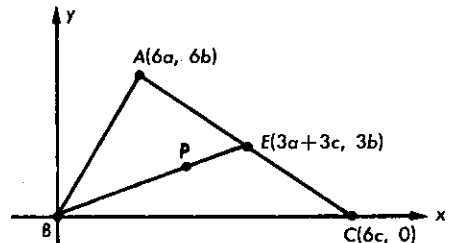
Uma *mediana* de um triângulo é um segmento que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto. Na figura, D é o ponto médio de $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ é chamada *mediana de A a $\overline{BC}$*.



Uma figura cuidadosamente traçada sugere que as três medianas de um triângulo são, sempre, concorrentes. É muito mais fácil demonstrar isto, entretanto, se usarmos uma figura para fazer uma previsão de *onde* o ponto de interseção deve estar. Na figura, tudo se passa como $AP = 2PD$, $BP = 2PE$ e $CP = 2PF$. E, de fato, isto é verdade.

Teorema 15-5. O Teorema sôbre a Concorrência das Medianas. As medianas de um triângulo são concorrentes. O ponto de concorrência está a dois terços ao longo de cada mediana, a partir do vértice ao lado oposto.

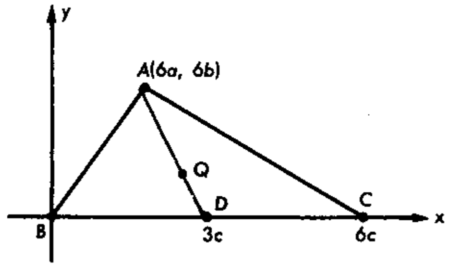
Na demonstração, será conveniente usar um sistema de coordenadas.



Demonstração. Tomamos os eixos como está indicado na figura. Usamos $6a$, $6b$ e $6c$ para evitar frações, mais tarde. E é o ponto médio de $\overline{AC}$; obtemos suas coordenadas pela fórmula do ponto médio (Teorema 13-5).

Seja, agora, P o ponto da mediana $\overline{BE}$ tal que $BP = 2PE$. Pelo Teorema 13-6 (que você deve rever), obtemos

$$P = \left(\frac{0 + 2(3a + 3c)}{3}, \frac{0 + 2 \cdot 3b}{3}\right)$$
$$= (2a + 2c,\ 2b).$$



Seja, agora, Q o ponto da mediana $\overline{AD}$, a partir do vértice A até o lado $\overline{BC}$, tal que $AQ = 2QD$. Sendo $D = (3c, 0)$, temos

$$Q = \left(\frac{6a + 2 \cdot 3c}{3}, \frac{6b + 2 \cdot 0}{3}\right)$$
$$= (2a + 2c,\ 2b).$$

Isto significa que $P = Q$, porque um ponto fica determinado pelas suas coordenadas.

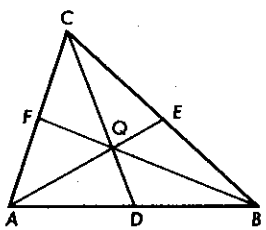
Da mesma forma, segue-se que o ponto correspondente da mediana de C a $\overline{AB}$ é o mesmo ponto P. Isto demonstra o teorema.

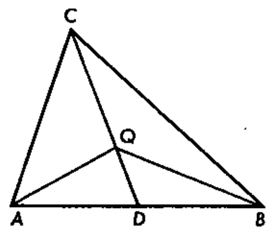
Definição

O ponto de concorrência das medianas é chamado *baricentro* de um triângulo.

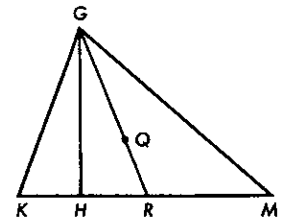
Problemas 15-5

1. Na figura abaixo, à esquerda, as medianas $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ e $\overline{CD}$ são concorrentes em Q.
   (a) Se $AE = 9$, quanto vale AQ? (b) Se $QD = 5$, quanto vale CD?
   (c) Se $BQ = 12$, quanto vale QF? (d) Se $QE = 4$, quanto vale AQ?

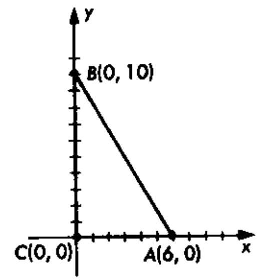




2. Dados: A figura anterior, à direita, com a mediana $\overline{CD}$ e Q o baricentro de ΔABC. Demonstre: A altura por Q até $\overline{AB}$ é um têrço da altura por C até $\overline{AB}$.
3. Usando a figura do Problema 1, demonstre que $a\Delta AQB = a\square CEQF$.



4. No triângulo ΔGKM, o baricentro Q está sôbre a mediana $\overline{GR}$ e $\overline{GH}$ é uma altura. Dado que $QR = 4$ e $HR = 6$, quanto vale $\overline{GH}$?



\+ 5. É dado o triângulo ΔABC com os vértices $A(6, 0)$, $B(0, 10)$ e $C(0, 0)$.
   (a) Ache as coordenadas dos pontos de concorrência das mediatrizes dos lados.
   (b) Ache as coordenadas do ortocentro.
   (c) Ache a distância do ortocentro ao ponto de concorrência das mediatrizes.

\+ 6. Dado o triângulo ΔABC do Problema 5, ache as coordenadas do baricentro e a distância do baricentro ao ortocentro.

+* 7. Dado o triângulo ΔPQR com vértices $P(-6, 0)$, $Q(2, 0)$ e $R(0, 6)$, ache a distância entre o baricentro e o ponto de concorrência das mediatrizes dos lados.

+* 8. Dado o triângulo ΔPQR do Problema 7, ache as coordenadas do ortocentro e a distância do ortocentro ao baricentro.

15-6. CONSTRUÇÕES COM RÉGUA E COMPASSO

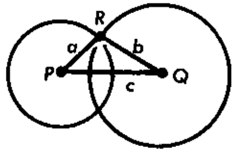
Até agora, fizemos geometria com uma régua graduada e um transferidor. Com efeito, nossos postulados nos diziam que temos uma régua infinitamente longa, com símbolos numéricos sôbre ela. Usamos esta "régua" para traçar retas e medir distâncias. Temos, também, um transferidor. Com êste, podemos medir ângulos e também traçar ângulos com uma medida dada, a partir de uma semi-reta dada.

Êste é, provàvelmente, o processo mais simples de se fazer geometria. Existe, entretanto, um outro processo muito importante. É a geometria com régua sem graduação, e compasso. Neste esquema, não temos uma régua com símbolos sôbre ela, mas apenas uma barra reta (infinitamente longa, evidentemente), de modo que, embora possamos traçar linhas retas, não podemos medir distâncias, de modo algum. Também temos um compasso. Com êle, podemos traçar circunferências, com um dado ponto como centro e passando por um outro ponto dado qualquer. Mas não podemos medir ângulos da mesma forma que não podemos medir distâncias.

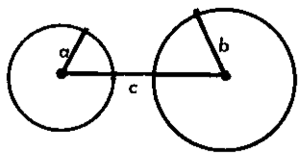
Êste é o esquema desenvolvido pelos geômetras gregos da antiguidade. (Realmente, distância e medida angular não são mencionadas nos *Elementos* de Euclides.) Êste esquema tem um considerável interêsse matemático nos dias de hoje e leva a alguns problemas curiosos, quando tentamos descobrir que tipo de figuras podemos traçar com uma régua não graduada e um compasso. A solução de alguns desses problemas é de grande valor prático em desenho mecânico, razão pela qual é conhecida pelos desenhistas profissionais.

Independentemente de como fazemos geometria, temos certos instrumentos de desenho e uma teoria matemática correspondente. A teoria matemática é exata sempre mas os resultados obtidos com os instrumentos são apenas aproximados.

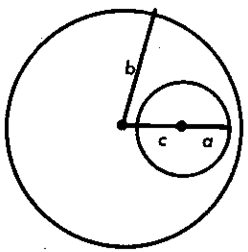
Para justificar nossas construções com régua e compasso, precisamos de um teorema que descreva o modo pelo qual as circunferências se interceptam. Suponha que são dadas duas circunferências de raios a e b, sendo c a distância entre os centros.



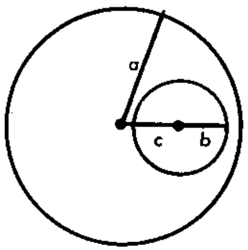
$a+b>c$.
$a+c>b$.
$b+c>a$.



$a+b<c$.

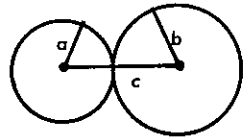


$a+c<b$.

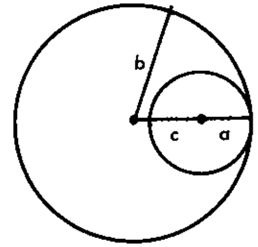


$b+c<a$.

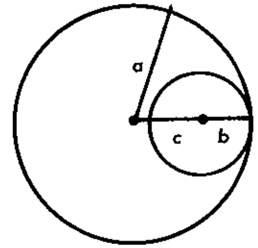
Se as circunferências se interceptam em dois pontos, como na figura superior, à esquerda, então cada um dos números a, b e c é menor que a soma dos outros dois. Chegamos a estas três desigualdades aplicando a Desigualdade Triangular (Teorema 7-8) ao triângulo ΔPQR, de três modos. Por outro lado, se uma destas desigualdades funciona ao contrário, as circunferências não se interceptam, como mostram as outras três figuras. E se a soma de dois daqueles números é *igual* ao terceiro, então as circunferências são tangentes.



$a+b=c$.



$a+c=b$.

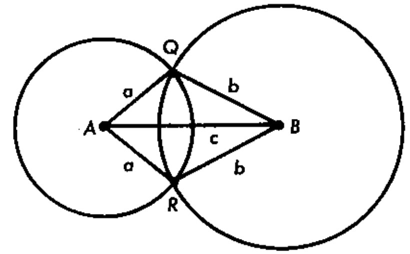


$b+c=a$.

Esta situação é descrita no seguinte teorema:

Teorema 15-6. O Teorema das Duas Circunferências

São dadas duas circunferências de raios a e b, sendo c a distância entre os centros. Se cada um dos números a, b e c é menor que a soma dos outros dois, então as circunferências se interceptam em dois pontos em lados opostos da reta que passa pelos centros.



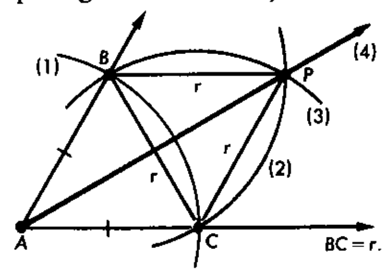
Isto é um teorema porque pode ser demonstrado, desde que se queira ter um trabalho longo e árduo. No capítulo presente, entretanto, omitimos a demonstração e consideramos a afirmação como um postulado.

15-7. CONSTRUÇÕES ELEMENTARES

Nesta seção e na próxima, mostraremos como se fazem as construções mais simples. Tôdas estas, evidentemente, serão executadas em um plano dado. Elas aparecerão, mais tarde, como passagens de construções mais difíceis.

Construção 1. Como dividir um ângulo em dois ângulos congruentes.

É dado o ângulo $\angle A$.



1. Usando A como centro, trace uma circunferência. A circunferência interceptará os lados de $\angle A$ nos pontos B e C. Òbviamente, $AB = AC$, como indicam os símbolos da figura.

2. Trace uma circunferência de centro B e raio $r = BC$.

3. Trace uma circunferência de centro C e mesmo raio $r = BC$.

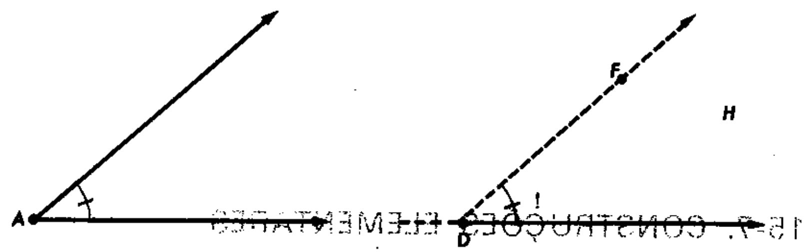
Pelo Teorema das Duas Circunferências, estas duas circunferências se interceptam em dois pontos, que estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{BC}$. (As hipóteses do Teorema das Duas Circunferências estão satisfeitas porque cada um dos números r, r e r é menor que a soma dos outros dois.) Seja P o ponto interseção que está no lado oposto de $\overleftrightarrow{BC}$, em relação a A, como na figura.

4. Trace $\overrightarrow{AP}$.

Por LLL, temos $\Delta PAB \cong \Delta PAC$. Portanto, $\angle PAB \cong \angle PAB$, de modo que $\overrightarrow{AP}$ é a bissetriz.

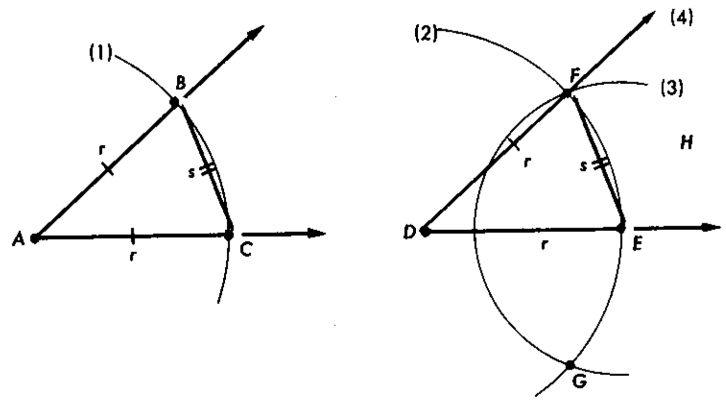
(Ao traçar as duas circunferências, nas passagens 2 e 3, poderíamos ter usado qualquer raio maior que $\frac{1}{2}BC$. Não há perigo de ficarmos em dúvida, a menos que usemos um raio tão pequeno que as circunferências não se cruzem.)

Construção 2. Como reproduzir um ângulo dado em um lado dado de uma semi-reta dada.



São dados o ângulo $\angle A$, uma semi-reta com extremidade D e um semiplano H, com a semi-reta dada contida na sua origem. Desejamos construir uma semi-reta $\overrightarrow{DF}$, com F em H, de modo a obter um segundo ângulo que seja congruente ao primeiro.

1. Trace uma circunferência com centro em A e um raio r, qualquer. A circunferência interceptará os lados de $\angle A$ nos pontos B e C.



2. Trace a circunferência com centro em D e raio $r = AB = AC$. Esta circunferência interceptará a semi-reta dada num ponto E.

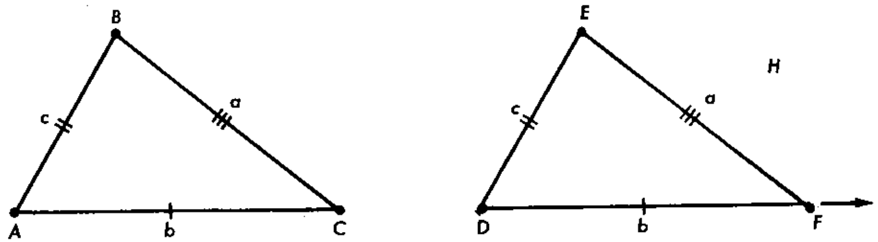
3. Trace a circunferência de centro E e raio $s = BC$.

Estas duas circunferências se interceptarão em dois pontos F e G, em lados opostos de $\overleftrightarrow{DE}$. (*Pergunta:* Como sabemos que cada um dos números r, s e r é menor que a soma dos outros dois? Esta é a condição que precisamos para aplicar o Teorema das Duas Circunferências.) Seja F o ponto interseção que está em H, como na figura.

4. Trace $\overrightarrow{DF}$.

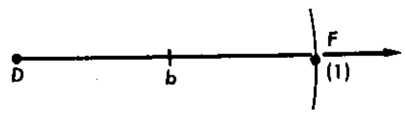
Esta é a semi-reta que estamos procurando. Por LLL, $\Delta FDE \cong \Delta BAC$. Portanto, $\angle FDE \cong \angle BAC$, como queríamos.

Construção 3. Como reproduzir um triângulo dado em um lado dado de uma semi-reta dada.

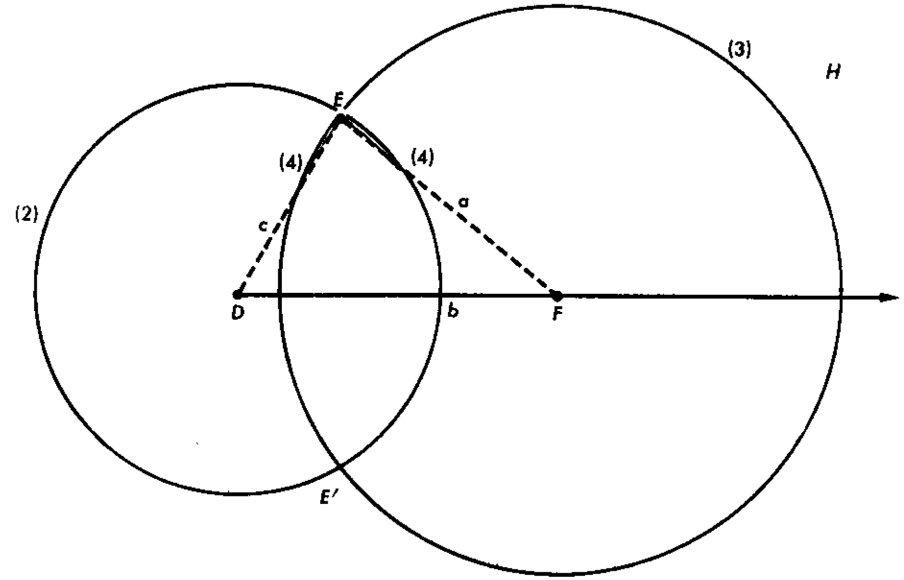


É dado o triângulo ΔABC. Também são dados uma semi-reta com extremidade D e um semiplano H contendo a semi-reta na sua origem. Desejamos construir o triângulo ΔDEF, com F na semi-reta dada e E em H, de modo que $\Delta DEF \cong \Delta ABC$.

1. Primeiramente, traçamos uma circunferência com centro em D e raio $b = AC$. Esta circunferência intercepta a semi-reta num ponto F e $DF = AC$.



2. Trace uma circunferência com centro em D e raio c.



3. Trace uma circunferência de centro F e raio A. Estas duas circunferências devem se encontrar, como na figura, em dois pontos em lados opostos de $\overleftrightarrow{DF}$. E pelo Teorema das Duas Circunferências, elas se *interceptam* dêste modo, porque cada um dos números a, b e c é menor que a soma dos outros dois. (Por quê?) Como está indicado na figura, seja E o ponto de interseção que está em H.

4. Agora, trace os segmentos $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$. Por LLL, temos $\Delta DEF \cong \Delta ABC$, que é o que queríamos.

Se você olhar novamente para a Seção 6-7, verá que na demonstração de LLL, tínhamos o mesmo problema da Construção 3, a saber, o problema de reproduzir um dado triângulo em um lado dado de uma semi-reta dada. Vale a pena comparar os dois métodos. (Na Seção 6-7, usamos régua graduada e transferidor ao invés de uma régua simples e um compasso. E usamos, também, LAL ao invés de LLL, para mostrar que nossa construção funcionava.)

Problemas 15-7

[*Observação:* Os problemas desta série devem ser resolvidos com régua não graduada e compasso.]

1. Trace uma reta horizontal no alto de uma fôlha de seu caderno. Usando o comprimento do segmento $\overline{AB}$ abaixo, marque (com o compasso) uma escala de pelo menos 10 unidades de comprimento. Use esta escala sempre que precisar ao resolver os problemas que se seguem.

A ——— B

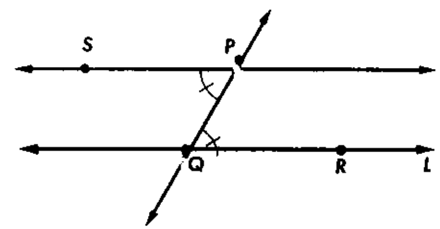
Construa triângulos cujos lados têm os comprimentos dados abaixo.
(a) 5, 6, 8 (b) 3, 5, 7 (c) 4, 4, 5 (d) 6, 10, 8

2. Desenhe um triângulo obtuso e construa as bissetrizes dos ângulos.
3. Desenhe um triângulo escaleno ΔABC. Reproduza êste triângulo, em um dado lado de uma semi-reta dada, por um método que dependa do Postulado ALA.
4. Construa um triângulo equilátero com um lado de comprimento 5.
5. Construa um triângulo isósceles tendo a base de comprimento 8 e dois lados congruentes de comprimento 5.
6. Demonstre que é sempre possível construir um triângulo equilátero que tenha um segmento dado como um de seus lados.
7. São dados os comprimentos a e b para os lados congruentes e a base, respectivamente, de um triângulo isósceles a ser construído. Que condições sôbre a e b são necessárias para que a construção seja possível?
8. Desenhe um quadrilátero convexo. Reproduza-o em um lado dado de uma semi-reta dada.

15-8. CONSTRUÇÕES ELEMENTARES (CONTINUAÇÃO)

Construção 4. Como construir a paralela a uma reta dada por um ponto externo.

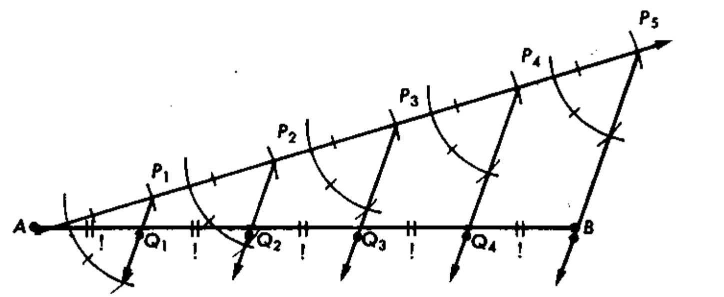
São dados a reta L e o ponto externo P. Sejam Q e R dois pontos quaisquer de L.



1. Trace $\overleftrightarrow{PQ}$.

2. Pela Construção 2, trace $\angle QPS$ congruente a $\angle PQR$, com S no lado oposto de $\overleftrightarrow{PQ}$, em relação a R. Então, $\angle QPS$ e $\angle PQR$ são ângulos alternos-internos. Logo, $\overleftrightarrow{PS} \parallel \overleftrightarrow{QR}$, que é o que queríamos.

Construção 5. Como dividir um segmento em um número dado de segmentos congruentes.



É dado $\overline{AB}$, que queremos dividir em n segmentos congruentes. (A figura mostra o caso $n = 5$.)

1. A partir de A, trace uma semi-reta que não esteja contida em $\overleftrightarrow{AB}$.

2. Nesta semi-reta, trace n segmentos congruentes $\overline{AP_1}$, $\overline{P_1P_2}, \ldots$, $\overline{P_{n-1}P_n}$, com as extremidades coincidindo, da maneira indicada. (O comprimento dêstes segmentos não importa, desde que todos os segmentos tenham o mesmo comprimento. Podemos escolher P_1 à vontade e obter os outros segmentos com o compasso, um de cada vez.)

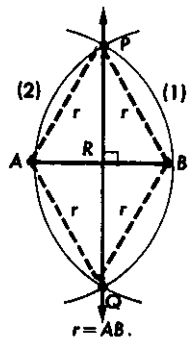
3. Trace $\overline{P_nB}$.

4. Pelos outros pontos $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$, trace semi-retas paralelas a $\overline{P_nB}$, que interceptarão $\overline{AB}$ nos pontos $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1}$.

Como nossas paralelas interceptam segmentos congruentes sôbre a transversal $\overrightarrow{AP_n}$, elas também interceptarão segmentos congruentes sôbre a transversal $\overrightarrow{AB}$. (Isto é o Corolário 9-30.1.) Portanto, os pontos $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1}$ dividem $\overline{AB}$ em n segmentos congruentes.

Construção 6. Como construir a mediatriz de um segmento dado.

É dado o segmento $\overline{AB}$.



1. Trace uma circunferência de raio $r = AB$ e centro A.

2. Trace uma circunferência com o mesmo raio e centro B.

O Teorema das Duas Circunferências se aplica a êste caso, porque cada um dos números r, r e r é menor que a soma dos outros dois. Portanto as circunferências se interceptam em dois pontos P e Q.

3. Trace $\overleftrightarrow{PQ}$.

Sendo P equidistante de A e B, P está na mediatriz de $\overline{AB}$. Pela mesma razão, Q está na mediatriz. Mas os dois pontos determinam uma reta. Portanto, $\overleftrightarrow{PQ}$ é a mediatriz de $\overline{AB}$.

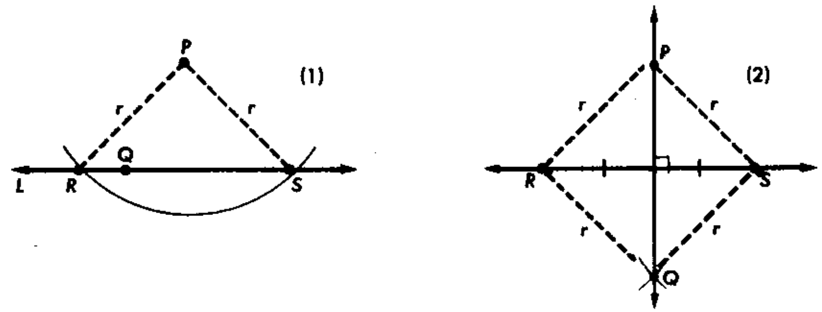
Evidentemente, não há necessidade de se usar circunferências com raio $r = AB$. Qualquer raio maior serviria igualmente bem. Na verdade, qualquer raio maior que $\frac{1}{2}AB$ serviria. (Justificações?)

Òbviamente, se podemos construir a mediatriz de um segmento, podemos construir o ponto que divide o segmento dado em dois segmentos congruentes. (Êste é o ponto R, na figura precedente.)

Construção 7. Como construir o ponto médio de um segmento dado. A mediatriz, automàticamente, nos dá o ponto médio.

Construção 8. Como construir uma perpendicular a uma reta dada, por um ponto dado.

Caso 1. São dados uma reta L e um ponto P. Suponha primeiramente que P é um ponto externo. Seja Q um ponto qualquer de L.



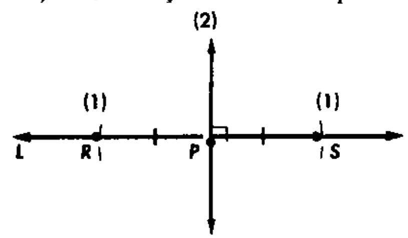
1. Trace uma circunferência com centro em P e raio $r > PQ$. Estando Q no interior da circunferência, segue-se, pelo Teorema 14-9, que L intercepta a circunferência em dois pontos R e S.

2. Construa a mediatriz de $\overline{RS}$. Esta reta passa por P porque P é equidistante de R e S.

Observe que, para traçar a mediatriz, não precisamos completar *tôda* a Construção 6; precisamos traçar o suficiente de cada circunferência para obter um ponto interseção Q distinto de P.

Portanto, $\overleftrightarrow{PQ}$ é a mediatriz porque contém dois pontos que são equidistantes de R e S.

Caso 2. Se o ponto P está em L, a construção é mais simples.



1. Trace uma circunferência qualquer com centro em P, interceptando L nos pontos R e S.

2. Trace a mediatriz de $\overline{RS}$.

Isto é tudo.

Problemas 15-8

[*Observação:* Os problemas desta série devem ser feitos com régua não graduada e compasso.]

1. Construa um triângulo retângulo isósceles.
2. Construa um losango, sendo conhecidos os comprimentos das diagonais.

3. Construa um paralelogramo, dados um dos ângulos, o comprimento do lado menor e o comprimento da diagonal maior.
4. Construa um ângulo de 60°.
5. Construa um ângulo de 30°.
6. Construa um ângulo de 15°.
7. Construa um ângulo de 75°.
8. Construa um triângulo isósceles, dadas a base e a altura perpendicular à base.
9. Construa um triângulo equilátero, conhecida a altura.
10. Dado o ângulo do vértice de um triângulo isósceles, construa um ângulo da base.
11. Construa um triângulo isósceles, dados um ângulo da base e a altura perpendicular à base.
12. Divida um segmento dado em três segmentos congruentes.
13. Dado um segmento de comprimento a, construa um segmento de comprimento $a\sqrt{2}$.
14. Dado um segmento de comprimento a, construa um segmento de comprimento $a\sqrt{3}$.
15. Dados dois segmentos de comprimentos a e b, construa um segmento cujo comprimento seja a média geométrica de a e b. [*Sugestão:* Veja o Problema 13 de Problemas 14-5.]
16. Dado um segmento de comprimento a, construa um segmento de comprimento $a\sqrt{6}$.
17. Construa um triângulo retângulo, dados um ângulo agudo e o comprimento da hipotenusa.
18. Construa um triângulo retângulo, dados um ângulo agudo e a altura perpendicular à hipotenusa.
19. Construa um triângulo, dados os comprimentos de dois lados e o comprimento da mediana em relação ao lado maior.
20. Construa um paralelogramo, dados um ângulo, um lado e a altura perpendicular a êste lado.
21. Construa duas circunferências tangentes internamente, conhecidos os raios.
22. Construa uma circunferência tangente a ambos os lados de um ângulo, conhecidos o ângulo e o raio.
23. Conhecido o raio, construa três circunferências congruentes, cada uma tangente à outra.
24. Construa um triângulo equilátero, dado um segmento cujo comprimento é igual ao perímetro do triângulo.

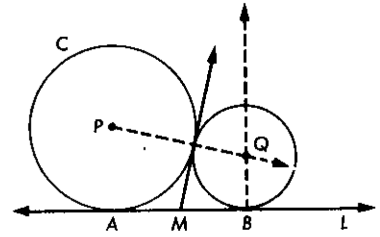
* 25. Construa uma tangente a uma circunferência por um ponto externo à circunferência. [*Sugestão:* Use o Corolário 14-16.1]

* 26. Construa um trapézio isósceles, dadas as bases e uma diagonal.

* 27. Construa um triângulo isósceles, dadas a base e a altura perpendicular a um dos lados congruentes. [*Sugestão:* O Problema 25 poderia ajudar.]

* 28. Construa um triângulo retângulo, dados um ângulo agudo e um segmento cujo comprimento é igual à soma dos comprimentos dos catetos. [*Sugestão:* Como você pode usar um ângulo de 45°?]

* 29. São dados dois pontos A e B de uma reta L. Em A, uma circunferência C é tangente a L. Construa uma circunferência tangente a L em B e também tangente à circunferência C. [*Sugestão:* Analise o diagrama, no qual Q é o centro da circunferência procurada.]



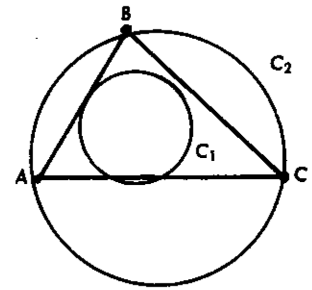
* 30. Construa um triângulo, dados os comprimentos de dois lados e o comprimento da mediana determinada pelo terceiro lado.

Problema Magno

Dados um segmento $\overline{AB}$ e um ângulo $\angle C$, construa o conjunto de todos os pontos P de um plano tais que $\angle APB \cong \angle C$.

15-9. CIRCUNFERÊNCIAS INSCRITAS E CIRCUNSCRITAS

Na figura abaixo, a circunferência C_1 se diz *inscrita no triângulo* ΔABC e a circunferência C_2 se diz *circunscrita ao triângulo* ΔABC.



Definições

Se uma circunferência é tangente aos três lados de um triângulo, então dizemos que a circunferência está *inscrita no* triângulo e que o triângulo está *circunscrito à* circunferência. Se uma circunferência contém os três vértices de um triângulo, então dizemos que a circunferência está *circunscrita ao* triângulo e que o triângulo está *inscrito na* circunferência.

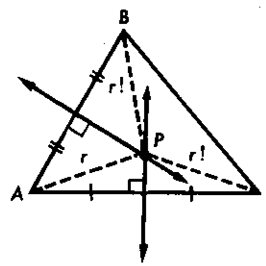
É um fato que todo triângulo está circunscrito a alguma circunferência e inscrito em alguma outra. Um meio de se ver por alto, porque isto é verdade, é imaginar uma pequena circunferência no interior do triângulo, que gradualmente aumenta de raio. No ponto onde o raio não pode mais aumentar sem que a circunferência saia fora do triângulo, a circunferência está inscrita. Da mesma forma, imagine uma circunferência cujo raio vá diminuindo sempre, com o triângulo em seu interior. No ponto em que o raio não puder mais diminuir, a circunferência deve estar circunscrita.

Demonstraremos, agora, não apenas que as circunferências inscrita e circunscrita existem, mas também que podem ser traçadas com régua e compasso.

Construção 9. Como circunscrever uma circunferência a um triângulo.
É dado o triângulo ΔABC.

1. Construa as mediatrizes de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$. Estas retas se interceptam em um ponto P. Pelo Teorema 15-1, P é equidistante de A, B e C.

2. Trace a circunferência de centro P e raio $r = PA$. Sendo $PB = PC = PA = r$, a circunferência contém não apenas A, mas também B e C.



Definição

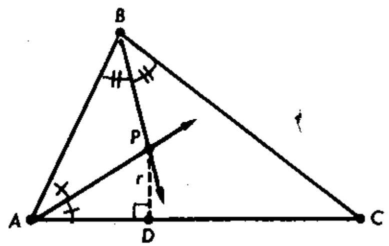
O ponto de concorrência das mediatrizes de um triângulo é chamado *circuncentro* do triângulo.

Vamos traçar, também, a circunferência inscrita.

Construção 10. Como inscrever uma circunferência em um triângulo dado.
É dado o triângulo ΔABC.

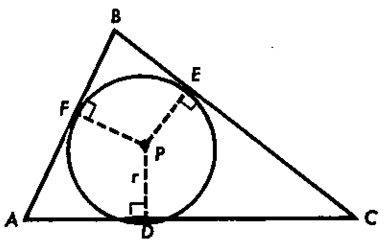
1. Divida $\angle A$ em dois ângulos congruentes.

2. Divida $\angle B$ em dois ângulos congruentes.
Pelo Teorema 15-4, as bissetrizes se encontram em um ponto equidistante dos três lados do triângulo.



3. Trace a perpendicular a $\overline{AC}$ por P. Seja D o pé da perpendicular.

4. Trace a circunferência com centro em P e raio $r = PD$.



Ora, a circunferência é tangente a $\overleftrightarrow{AC}$ em D porque $\overleftrightarrow{AC}$ é perpendicular ao raio $\overline{PD}$. Pela mesma razão, a circunferência é tangente, também, aos outros dois lados. Construímos, portanto, a circunferência pedida.

Definição

O ponto de concorrência das bissetrizes de um triângulo é chamado *incentro* do triângulo.

Problemas 15-9

[*Observação:* Os problemas desta série devem ser resolvidos com régua não graduada e compasso.]

1. Construa um triângulo equilátero. Construa, então, as circunferências inscrita e circunscrita.
2. Construa um triângulo retângulo isósceles. Construa, então, a circunferência inscrita.
3. Dado um triângulo escaleno, construa a circunferência circunscrita.
4. Dado um triângulo escaleno, construa a circunferência inscrita.
5. Circunscreva uma circunferência a um quadrado dado.
6. Dado um losango, construa a circunferência inscrita.
7. Responda a seguinte questão fazendo a construção. Demonstre, então, a resposta.
   Quantas cordas caberão em uma circunferência, ligadas uma à outra pelas extremidades, se cada corda é congruente ao raio da circunferência?
8. Construa um triângulo retângulo, dados um ângulo agudo e o raio da circunferência circunscrita.
9. Construa um triângulo isósceles, dados a base e o raio da circunferência inscrita.
10. Construa um triângulo retângulo isósceles, dado o raio da circunferência circunscrita.
11. Construa um triângulo equilátero, dado o raio da circunferência inscrita.

* 12. Construa um triângulo retângulo, dados um cateto e o raio da circunferência inscrita.

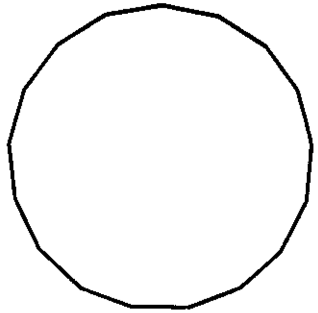
* 13. Construa um triângulo isósceles, dados o ângulo do vértice e o raio da circunferência inscrita.

* 14. Demonstre que o perímetro de um triângulo retângulo é igual à soma do diâmetro da circunferência inscrita mais duas vêzes o diâmetro da circunferência circunscrita.

15-10. OS PROBLEMAS INSOLÚVEIS DA ANTIGUIDADE

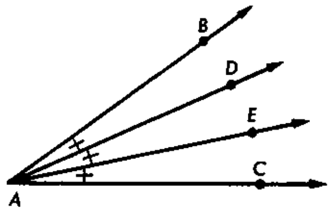
Os antigos gregos descobriram tôdas as construções que você estudou até aqui, juntamente com muitas outras, mais difíceis. Existiam alguns problemas, entretanto, que os melhores matemáticos gregos estudaram durante anos, sem nenhum sucesso.

Para se ter uma idéia de como pode ser complicado um problema de construção, considere o problema de dividir uma circunferência em 17 arcos congruentes, com régua e compasso. Quando você traça as cordas correspondentes, chega a uma figura chamada *polígono regular de 17 lados*. Êste problema era bastante conhecido, mas permaneceu sem solução cêrca de dois mil anos. Finalmente, a construção pretendida foi descoberta, no século passado, por C. F. Gauss.



Mas alguns dos antigos problemas gregos acabaram sendo mais difíceis que os problemas mais complicados: eram, realmente, impossíveis de se resolver.

(1) A DIVISÃO DE UM ÂNGULO EM TRÊS ÂNGULOS CONGRUENTES.

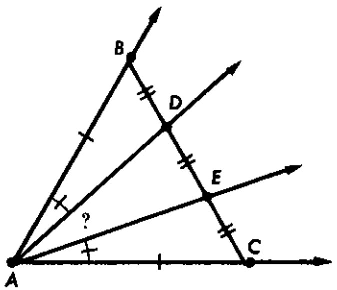


Dado um ângulo qualquer $\angle BAC$, desejamos construir duas semi-retas $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AE}$ (com D e E no interior de $\angle BAC$) de modo que

$$\angle BAD \cong \angle DAE \cong \angle EAC.$$

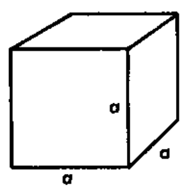
Nesta construção podemos usar apenas régua e compasso.

A primeira coisa que a maioria das pessoas tenta é tomar $AB = AC$, traçar $\overline{BC}$ e então dividir $\overline{BC}$ em três segmentos congruentes, como se vê na figura à direita. Isto não resolve; $\angle BAD$ e $\angle EAC$ são congruentes, como se pode demonstrar, mas nenhum dêles é congruente a $\angle DAE$. Na verdade, ninguém achou um método que funcionasse.



(2) A DUPLICAÇÃO DO CUBO. Um cubo de aresta a tem volume a^3. Dado um segmento de comprimento a, queremos construir um segmento de comprimento b, tal que um cubo com aresta b tenha volume igual a duas vêzes o volume de um cubo de aresta a. Algèbricamente, é evidente, isto significa que

$$b^3 = 2a^3 \qquad \text{ou} \qquad b = a\sqrt[3]{2}.$$

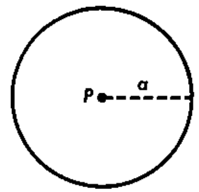


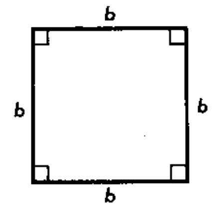
$V = a^3.$

Com êste problema, também, ninguém teve sorte. Há uma curiosa lenda em conexão com êle. Conta a história que o povo de uma certa cidade grega estava morrendo, em grande número, dizimado por uma peste e que se consultou o oráculo de Delfos para se descobrir qual deus estava zangado e qual a causa. O oráculo disse que o deus era Apolo. O altar de Apolo, na cidade, era um cubo de ouro sólido. Apolo queria que o altar fôsse duas vêzes maior.

Voltando, de Delfos para a cidade, o povo construiu um nôvo altar, com arestas cujo comprimento era duas vêzes o comprimento da aresta do altar antigo. A peste se tornou mais violenta, ao invés de se acalmar, e o povo percebeu que Apolo deveria ter se referido ao *volume* de seu altar. (Evidentemente, quando a aresta era duplicada, o volume era multiplicado por oito ao invés de dois.) Isto levantou o problema de duplicação do cubo, mas os matemáticos locais foram incapazes de resolvê-lo. Assim, a primeira tentativa de se aplicar a matemática à saude pública foi um completo desastre.

(3) A QUADRATURA DO CÍRCULO. Dado um círculo, desejamos construir um quadrado que tenha a mesma área.





Isto significa, algèbricamente, que $b = a\sqrt{\pi}$.

Por cêrca de dois mil anos, os melhores matemáticos tentaram descobrir meios de executar estas construções com régua simples e compasso. Finalmente, descobriu-se, modernamente, que êstes três problemas eram *impossíveis* de se resolver.

Impossibilidade em matemática não tem o mesmo significado que "impossibilidade" na vida diária, de modo que cabe uma explicação.

Freqüentemente, quando dizemos que alguma coisa é impossível, estamos simplesmente querendo dizer que é algo muito difícil, como encontrar uma agulha num palheiro. Muitas vêzes, queremos dizer que não *vemos* como fazer certa coisa e duvidamos que possa ser feita. Assim, o povo dizia que máquinas voadoras eram impossíveis e tinham razão, até que alguém construiu um aeroplano e voou.

A impossibilidade matemática não é isto. Em matemática, existem algumas coisas, que de fato, não podem ser feitas e é possível *demonstrar* isto.

(1) Não importa o quanto você seja inteligente, você não pode achar um número inteiro entre 2 e 3, porque tal número não existe.

(2) Caso êste problema pareça muito trivial para ser levado a sério, considere a seguinte situação. Partimos dos números inteiros, positivos,

negativos e o zero, sendo permitido fazer adições, subtrações, multiplicações e divisões. Chamemos de "*construtível*" todo número que possamos obter, partindo dos inteiros, com um número finito de passagens dêste tipo. Por exemplo, o seguinte número é construtível:

$$\frac{\left(\frac{3}{7}+\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{1}{13}\left(\frac{4}{9}-\frac{5}{7}\right)}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{7}\right)-\frac{2}{3}\left(\frac{7}{5}-\frac{1}{2}\right)}.$$

Suponha, agora, que o problema é "*construir*" o número $\sqrt{2}$ com operações dêste tipo. Êste problema é impossível, isto é, não pode ser resolvido. A razão é que os números "construtíveis" por meio destas regras são os números racionais e $\sqrt{2}$ não é um número dêste tipo. Não adianta procurá-lo entre os "números construtíveis", porque não é aí que êle está.

Problemas de construtibilidade com régua e compasso são muito mais do que pode sugerir o segundo exemplo. Partindo de um segmento $\overline{AB}$, descobrimos certos segmentos que podemos construir com régua e compasso. Por exemplo, há segmentos construtíveis de comprimentos $2AB$, $\frac{1}{2}AB$, $\sqrt{2}\,AB$ e $\frac{1}{10}AB$. Mas não existe nenhum segmento construtível $\overline{CD}$ para a qual

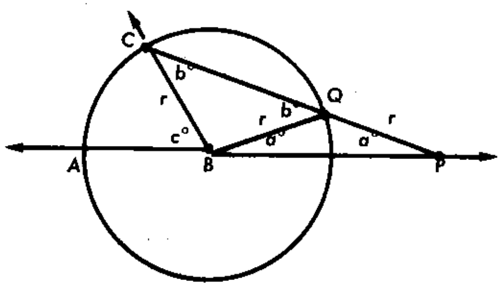
$$CD^3 = 2AB^3.$$

É isto que estamos querendo dizer quando afirmamos que a duplicação do cubo é impossível.

A divisão de um ângulo em três ângulos congruentes merece uma discussão em separado.

(1) *Alguns* ângulos podem fàcilmente ser divididos em três ângulos congruentes com régua e compasso. Por exemplo, um ângulo reto. E isto significa que a divisão é possível para ângulos de 45°, 22,5° e muitos outros. Quando dizemos que o problema da divisão de um ângulo em três ângulos congruentes é impossível, estamos querendo dizer que existem *alguns* ângulos para os quais as semi-retas, que dividem um ângulo em outros três congruentes, não podem ser construídas.

(2) O problema da divisão de um ângulo em três outros congruentes se torna resolúvel se deixarmos as regras um pouquinho menos rígidas, permitindo-nos fazer duas marcas na régua.

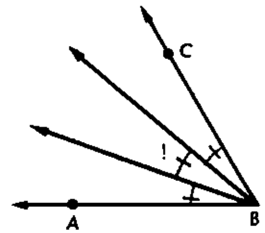


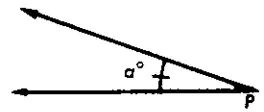
São dados, agora, o ângulo $\angle B$ e uma régua com duas marcas. Seja r a distância entre as duas marcas. Primeiramente, traçamos uma circunferência com centro em B e raio r. A circunferência intercepta o ângulo nos pontos A e C.

Colocamos a régua, então, de modo que (a) passe por C. Depois, deslizamos e giramos a régua de tal modo que (b) uma das marcas caia sôbre um ponto Q da circunferência e (c) a outra marca caia sôbre um ponto P da semi-reta oposta a $\overrightarrow{BA}$.

Temos, então, a situação vista na figura. Sendo o triângulo ΔQBP isósceles, com $QB = QP = r$, os ângulos da base têm a mesma medida a, como está indicado; da mesma forma para o triângulo ΔBCQ. Ora, a medida de um ângulo externo de um triângulo é a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes. Aplicando êste teorema ao triângulo ΔQBP, temos $b = a + a = 2a$. Aplicando o mesmo teorema ao triângulo ΔBCP, temos $c = b + a$. Portanto, $c = 3a$. Isto é, $m\angle P = \frac{1}{3}m\angle ABC$.

Reproduzimos, agora, duas vêzes o ângulo $\angle P$ no interior de $\angle ABC$:



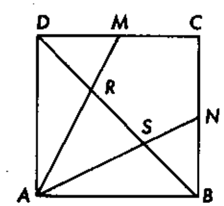


E o problema está, portanto, resolvido.

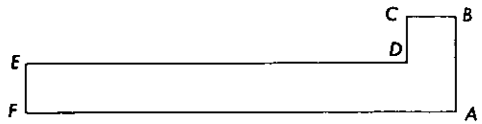
Evidentemente, êste procedimento não era permitido pelas antigas regras gregas para construções com régua e compasso.

Problemas 15-10

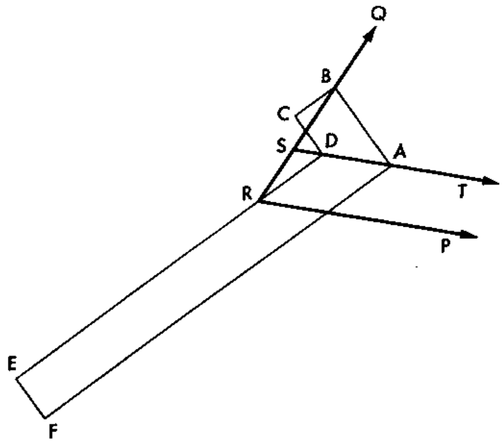
1. (a) Qual é o número que somado com 5 dá cinco vêzes o próprio número? Demonstre a resposta.
   (b) Qual é o número que multiplicado por 4 e dividido pelo próprio número resulta 5? Demonstre a resposta.
2. Explique como dividir um ângulo de 135° em três ângulos congruentes, com régua e compasso.
3. Demonstre que é impossível construir um triângulo tal que dois lados meçam 2 e 3 m, respectivamente, e cuja altura em relação ao terceiro lado é 4 m.
4. É dado o quadrado $\square ABCD$. M e N são os pontos médios de $\overline{DC}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. $\overline{AM}$ e $\overline{AN}$ interceptam $\overline{BD}$ em R e S, respectivamente. Demonstre que $\overline{AM}$ e $\overline{AN}$ dividem $\overline{BD}$ em três segmentos congruentes mas não dividem $\angle DAB$ em três ângulos congruentes.



5. Um carpinteiro é capaz de dividir em três ângulos congruentes qualquer ângulo, usando um instrumento chamado *esquadro de carpinteiro*, visto na figura abaixo. Todos os ângulos são retos e $EF = CD = \frac{1}{2}AB$.



Para dividir um ângulo $\angle PRQ$ em três outros congruentes, o carpinteiro, primeiramente, usa a parte mais longa do esquadro para traçar uma semi-reta $\overrightarrow{ST}$ paralela a $\overrightarrow{RP}$ a uma distância EF. Colocando, então, o esquadro de modo que $\overline{DE}$ contenha R, A esteja sôbre $\overrightarrow{ST}$ e B sôbre $\overrightarrow{RQ}$, o carpinteiro sabe que $\overrightarrow{RD}$ e $\overrightarrow{RA}$ dividem $\angle PRQ$ em três ângulos congruentes. Demonstre que isto é verdade.

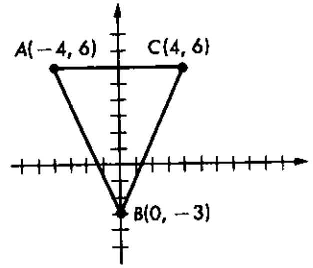


Revisão do Capítulo

1. Descreva o conjunto de todos os pontos de um plano que são equidistantes de duas paralelas dadas.
2. Descreva o conjunto de todos os pontos de um plano que são centros de circunferências tangentes a uma dada circunferência em um ponto dado desta última.
3. Descreva o conjunto de todos os pontos do espaço que estão a uma distância dada de um ponto dado.
4. São dados uma reta e um ponto num mesmo plano E, estando o ponto fora da reta. Descreva o conjunto de todos os pontos de E que estão a uma distância d da reta dada e a uma distância r do ponto dado.
5. Descreva o conjunto de todos os pontos que estão a uma dada distância de um ponto dado P e são equidistantes de P e de um outro ponto Q.
6. Esboce cada um dos seguintes conjuntos:
   (a) $\{(x, y) \mid x = -1\}$ (b) $\{(x, y) \mid y = x\}$
   (c) $\{(x, y) \mid y = 2\}$ (d) $\{(x, y) \mid y < x\}$
7. Esboce e descreva com uma equação o conjunto de todos os pontos que são equidistantes dos pontos $A(-5, 0)$ e $B(3, 0)$.

8. Esboce e descreva com uma equação o conjunto de todos os pontos que estão a uma distância 3 do gráfico da equação $y = 0$. (Não é permitido o uso do símbolo $\pm$.)
9. Construa um triângulo escaleno razoàvelmente grande. Determine, então, por construção, o ortocentro, o baricentro e o incentro do triângulo.
10. Construa um losango, dados um ângulo e um segmento cujo comprimento é igual ao perímetro do losango.

\+ 11. É dado o triângulo ΔABC com vértices $A(-4, 6)$, $B(0, -3)$ e $C(4, 6)$.
   (a) Demonstre que ΔABC é isósceles.
   (b) Determine as coordenadas do baricentro.



\+ 12. Dado o triângulo ΔPQR com vértices $P(-4, 7)$, $Q(8, 7)$ e $R(8, 2)$, determine as coordenadas do ortocentro.

\+ 13. É dado o triângulo ΔEFG com vértices $E(-2, 0)$, $F(4, 6)$ e $G(10, 0)$.
   (a) Determine as coordenadas do circuncentro.
   (b) Escreva uma equação para a circunferência circunscrita.

*+ 14. Determine as coordenadas do baricentro do triângulo cujos vértices são $A(-5, 0)$, $B(9, 0)$ e $C(5, 8)$.

15. Seja A o centro de uma circunferência de raio a e B o centro de uma circunferência de raio b, ambas em um mesmo plano. Se $a + b > AB$, as circunferências se interceptam? Por quê?
16. $\square ABCD$ é um trapézio com bases $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$. Em que condições existirá um ponto P, no plano do trapézio, eqüidistante de A, B, C e D?
17. São dadas duas retas paralelas L_1 e L_2 e uma transversal T. Descreva o conjunto de todos os pontos eqüidistantes de L_1 e L_2 e T.

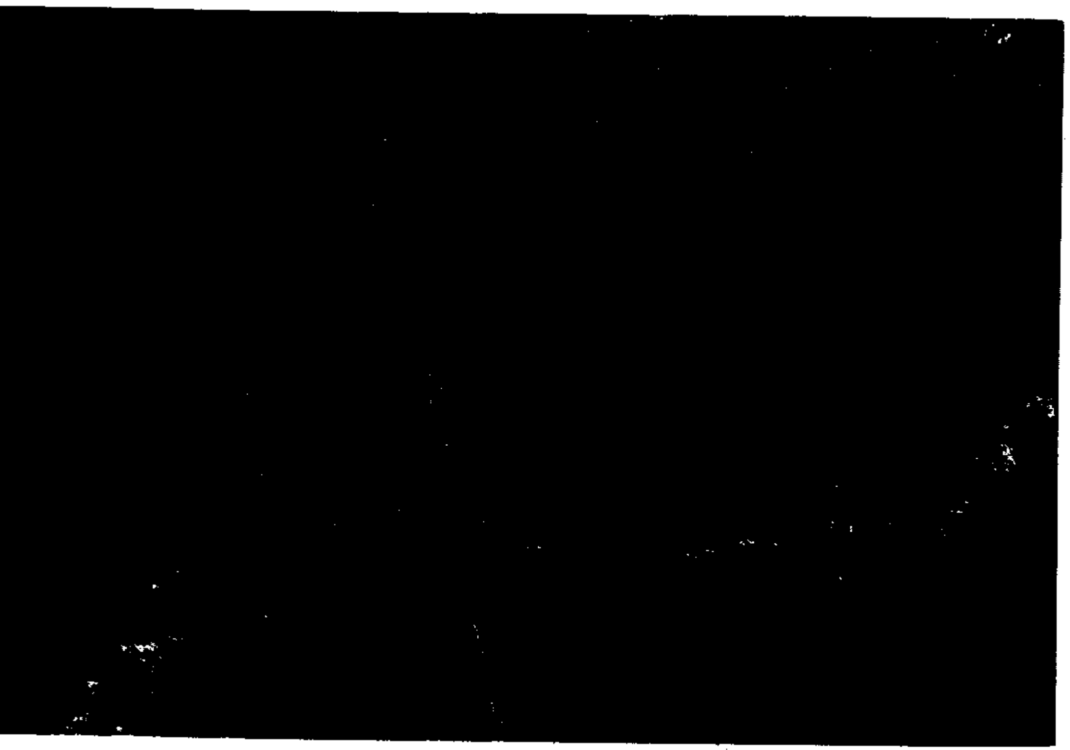
* 18. Construa um paralelogramo, dados um lado, um ângulo agudo e a diagonal maior.

* 19. Construa um triângulo retângulo, dados um ângulo agudo e o raio da circunferência inscrita.

* 20. Construa um quadrado, dado um segmento cujo comprimento é a soma dos comprimentos de uma diagonal e de um lado do quadrado.

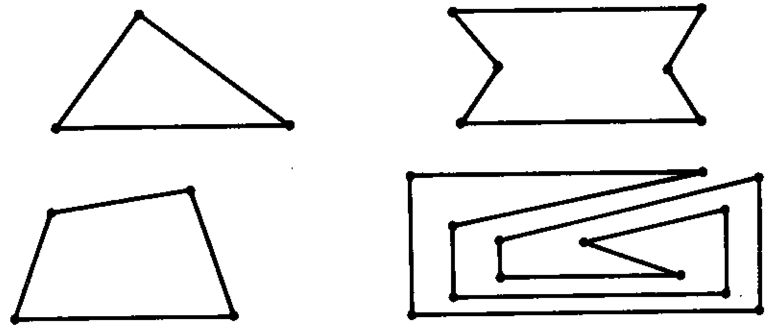
* 21. É dado um segmento cujo comprimento é a diferença entre os comprimentos de uma diagonal e de um lado do quadrado. Construa o quadrado.

16 ÁREAS DE CÍRCULOS E SETORES

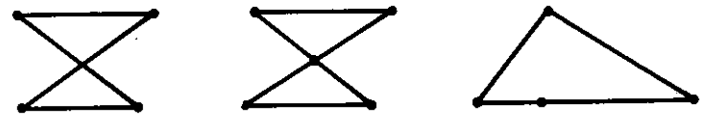


16-1. POLÍGONOS

Um polígono é uma figura formada pela junção de segmentos, extremidade a extremidade, assim:



mas não assim:



A idéia ilustrada pelas figuras é formalmente enunciada na seguinte definição:

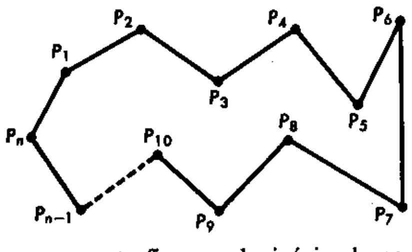
Definições

Seja $P_1, P_2, \ldots, P_n$, uma seqüência de n pontos distintos num plano com $n \geq 3$. Suponha que os n segmentos $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \ldots, \overline{P_{n-1}P_n}, \overline{P_nP_1}$ têm as seguintes propriedades:

(1) Nenhum par de segmentos se intercepta a não ser nas suas extremidades.

(2) Nenhum par de segmentos com extremidade comum é colinear.

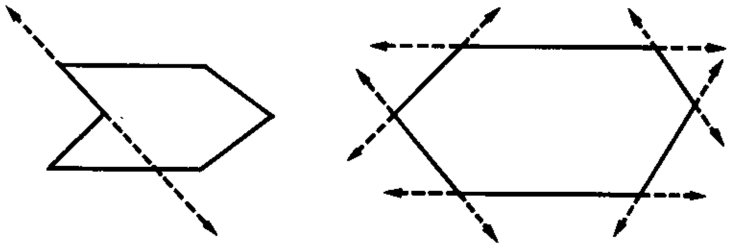
Então a reunião dos n segmentos é chamada *polígono*. Os pontos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ são chamados os *vértices* do polígono e os segmentos $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \ldots, \overline{P_{n-1}P_n}, \overline{P_nP_1}$ são os seus *lados*. Os *ângulos* do polígono são $\angle P_nP_1P_2$, $\angle P_1P_2P_3$, e assim por diante. Abreviadamente, muitas vêzes representamos os ângulos por $\angle P_1$, $\angle P_2$ e assim por diante. A soma dos comprimentos dos lados é chamada *perímetro*.



Você deve, agora, olhar novamente para as sete figuras do início dessa seção e se convencer de que nossa definição de polígono é satisfeita pelas quatro primeiras figuras mas não pelas últimas três. (Lembre-se que os pontos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ têm de ser todos distintos.)

Um polígono com n lados é chamado um *n-ágono*. Assim poderíamos nos referir a triângulos e quadriláteros como *3-ágonos* e *4-ágonos* mas êsses têrmos são raramente usados. Anàlogamente, 5-ágonos são chamados *pentágonos*, 6-ágonos são chamados *hexágonos*, 8-ágonos são chamados *octógonos* e 10-ágonos são *decágonos*. Alguns dos outros n-ágonos (para pequenos números n) também têm nomes especiais, tirados do grego, mas não são muito comumente usados.

Cada lado de um polígono está contido numa reta e cada reta, é claro, separa o plano em dois semiplanos.



Pode fàcilmente acontecer (como na figura à esquerda) que cada um dêsses semiplanos contém pontos do polígono. Se isso *não* acontecer para nenhum lado do polígono (como na figura à direita), então o polígono se diz *convexo*. Repetimos isso como uma definição:

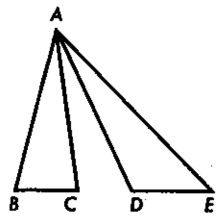
Definição

Um polígono é *convexo* se nenhum par de seus pontos está em semiplanos opostos relativamente a uma reta que contém um lado do polígono.

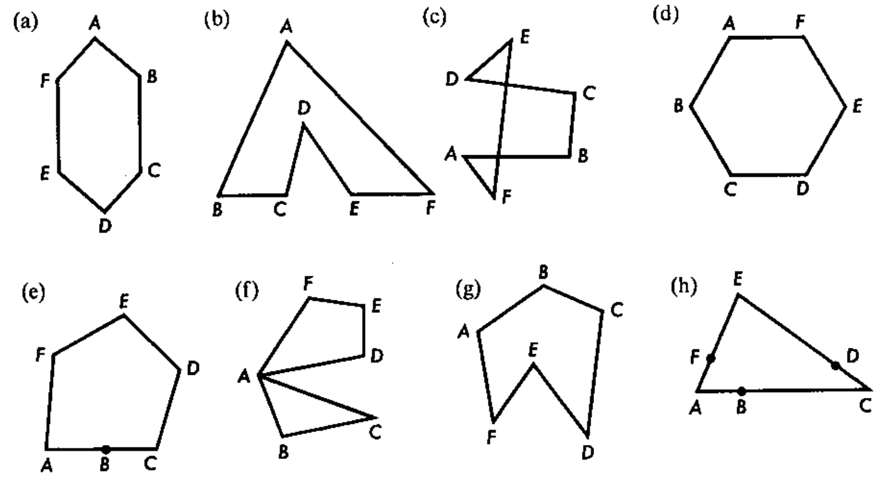
O uso do têrmo "convexo" é natural: se um polígono é convexo, então o polígono mais seu interior formam um *conjunto convexo*, como definido no Cap. 3. Quando falamos da área de um polígono convexo, queremos dizer a área da região poligonal convexa correspondente.

Problemas 16-1

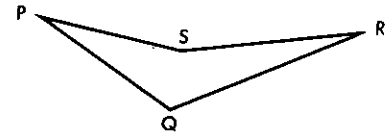
1. Nessa figura, nenhum par de segmentos se intercepta a não ser nas extremidades e nenhum par de segmentos que se intercepta é colinear. Mesmo assim a figura não é um polígono. Por quê?



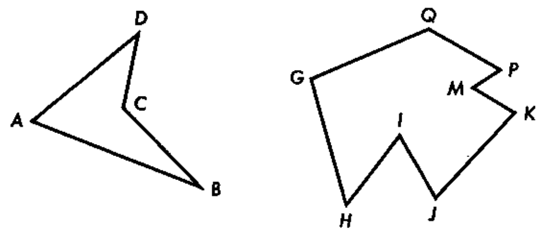
2. Quais das figuras abaixo são hexágonos? Quais são hexágonos convexos?



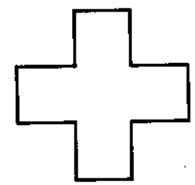
3. Dê uma explicação precisa por que essa figura não é um polígono convexo.



4. Nomeie os ângulos de cada polígono.

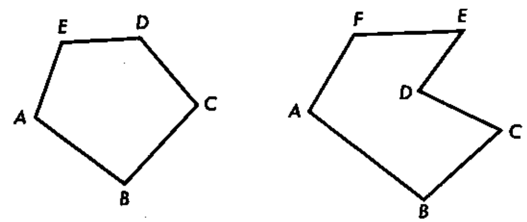


5. Um polígono, com todos os lados congruentes e todos os ângulos retos, é necessàriamente um quadrado?



6. Um segmento cujas extremidades são dois vértices não consecutivos de um polígono é chamado uma *diagonal* do polígono.

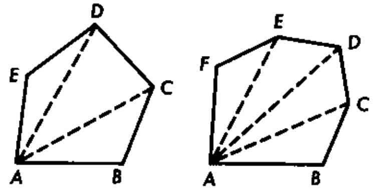
   (a) Nomeie tôdas as diagonais dos polígonos abaixo.



(b) Quantas diagonais tem um polígono de 3 lados? 4 lados? 5 lados? 6 lados? 7 lados?

(c) Quantas diagonais tem um polígono de 103 lados? n lados?

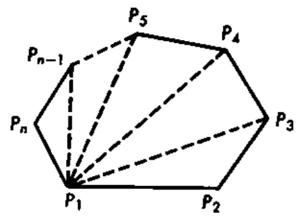
7. Calcule a soma das medidas dos ângulos de um pentágono convexo; de um hexágono convexo. [*Sugestão:* Desenhe tôdas as diagonais a partir de *um* vértice.]



8. Num polígono convexo são desenhadas tôdas as diagonais partindo de *um* vértice. Quantos triângulos resultam, se o polígono tem 4 lados? 5 lados? 6 lados? 11 lados? 35 lados? n lados?

9. Verifique a seguinte generalização:

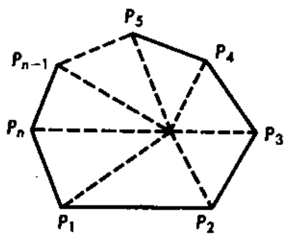
A soma das medidas dos ângulos de um polígono convexo de n lados é $(n-2)180$.



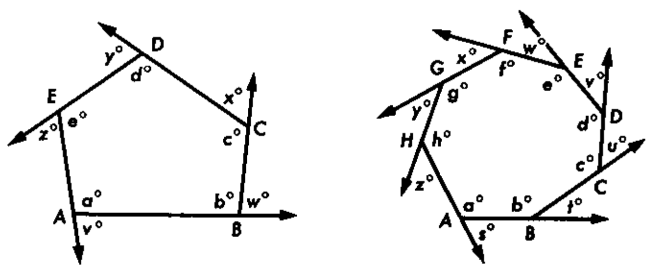
10. Determine a soma das medidas dos ângulos de um octógono convexo; decágono; 12-ágono (dodecágono); 15-ágono; 20-ágono.

11. Qual é o número de lados de um polígono convexo se a soma das medidas de seus ângulos é 900? 1260? 1980? 2700? 4140?

\+ 12. Usando a figura à direita, verifique o enunciado do Problema 9.



13. Determine a soma das medidas dos ângulos externos de um pentágono convexo; de um octógono convexo.



14. Verifique a seguinte generalização.

A soma das medidas dos ângulos externos de um polígono convexo de n lados é 360.

\+ 15. Dê a definição de *interior* de um polígono convexo. (Veja a definição de interior de um triângulo.)

\+ 16. Discuta a veracidade ou não das seguintes afirmações.

(a) A reunião de qualquer polígono convexo com seu interior é uma região poligonal.

(b) O contôrno de qualquer região poligonal é um polígono.

*+ 17. Dada uma correspondência $P_1P_2P_3 \cdots P_n \leftrightarrow Q_1Q_2Q_3 \cdots Q_n$ entre dois polígonos, se os lados correspondentes são congruentes e os ângulos correspondentes são congruentes, os dois polígonos têm que ser semelhantes? Os perímetros têm que ser iguais? As regiões poligonais correspondentes têm que ter a mesma área?

Apóie suas respostas em raciocínio lógico e/ou exemplos.

Problema Magno

Que um polígono separa os pontos do plano em dois conjuntos, chamados o interior e exterior do polígono, parece ser um fato bastante óbvio. Pode-se, no entanto, demonstrá-lo a partir de nossos postulados, apesar da demonstração ser bastante difícil. Mostre que êsse teorema é importante na solução do seguinte quebra-cabeça popular: Três casas, A, B, C são ligadas duas a duas a três condutos, um para gás, G, outro para água, A, e outro para eletricidade, E.

A B C

· · ·

G A E

· · ·

O problema consiste em desenhar trajetos, um de cada casa para cada conduto, sem que as trajetórias se interceptem. A figura tôda está contida num plano.

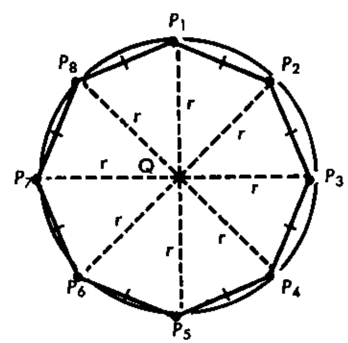
16-2. POLÍGONOS REGULARES

Definição

Um polígono é *regular* se (1) é convexo, (2) todos seus lados são congruentes e (3) todos seus ângulos são congruentes.

Por exemplo, um triângulo equilátero é um 3-ágono regular e um quadrado é um 4-ágono regular.

Podemos construir n-ágonos regulares com qualquer número de lados pelo seguinte método. Começamos com uma circunferência de centro Q e raio r. Primeiramente dividimos a circunferência em n arcos congruentes, ponta a ponta. Cada um dêsses arcos mede $360/n$. (A figura mostra o caso $n = 8$.) Para cada pequeno arco, desenhamos a corda correspondente. Isso nos dá um polígono, com vértices $P_1, P_2, \ldots, P_n$. É fácil ver



que o polígono é convexo. Os lados são todos congruentes porque os pequenos arcos o são.

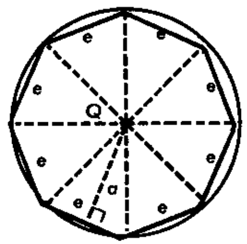
Se desenharmos os raios de Q aos vértices, obteremos um conjunto de triângulos isósceles. Pelo teorema LLL todos êsses triângulos são congruentes. Portanto todos os ângulos do nosso polígono são congruentes. (A medida de um ângulo do polígono é o dôbro da medida do ângulo da base de um de nossos triângulos isósceles.) Portanto nosso polígono é regular.

É um fato que todo polígono regular pode ser construído por êsse método. Isto é, todo polígono regular é inscrito em uma circunferência. Não vamos parar para demonstrar essa afirmação porque não vamos usá-la. Vamos usar polígonos regulares sòmente no estudo de circunferências e todos os polígonos regulares a que nos vamos referir serão construídos pelo método que acabamos de descrever.

O centro Q da circunferência na qual o polígono está inscrito é chamado o *centro* do polígono. Como todos os triângulos isósceles na figura acima são congruentes, êles têm a mesma base e e a mesma altura a. O número a é a distância do centro a cada um dos lados.

Definição

A distância a do centro de um polígono regular a cada um dos lados é chamada o *apótema* do polígono.



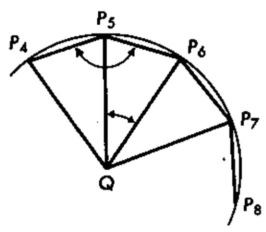
O perímetro é representado por p. Òbviamente

$$p = ne.$$

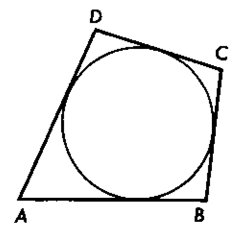
É fácil calcular a área da região formada pelo polígono e seu interior. Cada um de nossos triângulos isósceles tem área $\frac{1}{2}ae$. Existem n triângulos. Portanto a área é $A_n = n \cdot \frac{1}{2}ae = \frac{1}{2}ap$.

Problemas 16-2

1. Que quadrilátero, se existir, é equilátero mas não regular? equiângulo, mas não regular?
2. Desenhe um polígono que tem todos os lados congruentes e todos os ângulos retos, mas não é regular.
3. A figura representa parte de um n-ágono regular inscrito numa circunferência de centro Q.
   (a) Qual é a medida do $\angle P_5QP_6$?
   (b) Qual o valor de $m\angle QP_5P_6 + m\angle QP_6P_5$?
   (c) Por que $\angle QP_6P_5 \cong \angle QP_5P_4$?
   (d) Por que $m\angle P_4P_5P_6 = m\angle P_4P_5Q + m\angle QP_5P_6$?
   (e) Mostre que $m\angle P_4P_5P_6 = 180 - \dfrac{360}{n}$.



4. Determine a medida dos ângulos de um polígono regular de 5 lados; 9 lados; 12 lados; 15 lados; 17 lados; 24 lados. (Veja Problema 3)
5. Quantos lados tem um polígono regular se a medida de um ângulo externo é 72? 45? 36? 24? $17\frac{1}{7}$?
6. Quantos lados tem um polígono regular se a medida de um de seus ângulos é $128\frac{4}{7}$? 140? 144? 160?
7. Como você construiria um octógono regular usando sòmente um compasso e uma régua não graduada?
8. Como você construiria um hexágono regular usando sòmente um compasso e uma régua não graduada?
9. O perímetro de um polígono regular é 48 e seu apótema é 6. Qual é a área do polígono?
10. Determine a área de um hexágono regular que tem um lado com 10 cm de comprimento.
11. Um lado de um héxagono regular inscrito numa circunferência é 4. Qual é o raio da circunferência e o apótema do hexágono?
12. Demonstre que a área de um hexágono regular de lado s é dada pela fórmula $\frac{3}{2}\sqrt{3}\ s^2$.
13. $\square ABCD$ é um quadrilátero qualquer, tendo seus lados tangentes a uma circunferência de diâmetro 9. Se o perímetro do $\square ABCD$ é 56, qual é a $a\square ABCD$?



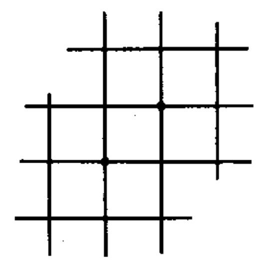
$^+$ 14. Determine a área de um polígono regular de 9 lados, dado que o comprimento de um lado é 8. (Lembre-se das razões trigonométricas!)

$^+$ 15. Determine a área de um polígono regular de 15 lados, dado que o comprimento de um lado é 4.

* 16. Demonstre que cada lado de um octógono regular inscrito numa circunferência de raio 1 tem comprimento $\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Problema Magno

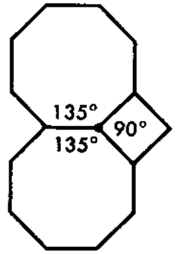
Um problema que se apresenta freqüentemente em desenho arquitetônico é o de cobrir uma superfície com regiões poligonais regulares. Por exemplo, um plano pode ser coberto por regiões quadradas congruentes, colocadas quatro em um vértice, como visto na figura.



(a) Quantas regiões triangulares regulares precisam ser colocadas num vértice para cobrir um plano?

(b) Que outra classe de regiões poligonais regulares pode ser usada para cobrir um plano? Quantas seriam necessárias em um vértice?

(c) Dois octógonos regulares e um quadrado cobrirão exatamente uma parte de um plano em tôrno de um ponto quando arranjados como na figura. Que outras combinações de três regiões poligonais (duas do mesmo tipo) podem ser usadas para êsse fim? Você deve encontrar mais duas combinações.



(d) Investigue se há outras possibilidades de se cobrir um plano com regiões poligonais regulares. Uma tabela das medidas dos ângulos de polígonos regulares será útil para descobrir outras combinações que funcionem.

16-3. O COMPRIMENTO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA. O NÚMERO π

Nessa seção e na seguinte, vamos considerar n-ágonos regulares para vários valôres de n. Como sempre, representaremos o lado, apótema e perímetro de um n-ágono regular inscrito numa circunferência de raio r por e, a e p, respectivamente.

Seja C o comprimento de uma circunferência. Parece razoável supor que, se você quiser medir C com aproximação, você poderá fazê-lo inscrevendo na circunferência um polígono regular com um grande número de lados e medindo o perímetro do polígono. Isto é, o perímetro p deve ser uma boa aproximação de C quando n é grande. Em outras palavras, tendo decidido quão próximo de C nós queremos p, devemos ser capazes de obter essa aproximação de C, simplesmente tomando n suficientemente grande. Descrevemos essa situação em símbolos, escrevendo

$$p \to C,$$

e dizemos que p aproxima C como limite.

No entanto não podemos demonstrar isso; e a razão por que não podemos fazê-lo é bastante inesperada. A razão é que, até agora, não temos uma definição matemática do que significa o comprimento de uma circunferência. (Não podemos obter o comprimento simplesmente adicionando os comprimentos de segmentos como fizemos para obter o perímetro de um polígono, porque circunferências não contêm segmentos, nem mesmo muito curtos. De fato, o Corolário 14-6.1 nos diz que nenhuma circunferência contém nem mesmo *três* pontos colineares.)

Mas o remédio é fácil: fazemos da afirmação

$$p \to C$$

nossa definição de C.

Definição

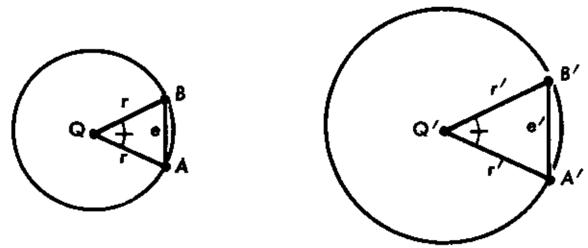
O *comprimento* de uma circunferência é o limite dos perímetros dos polígonos regulares inscritos.

Queremos agora definir o número π, na maneira usual, como a razão do comprimento da circunferência para o diâmetro. Mas para termos certeza de que essa definição tem sentido, precisamos primeiramente saber que a razão $C/2r$ é a mesma para tôdas as circunferências, independentemente do seu tamanho. De fato, isso é verdade.

Teorema 16-1

A razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro é a mesma para tôdas as circunferências.

Demonstração. Dada uma circunferência de centro Q e raio r, e uma circunferência de centro Q' e raio r', inscrevemos em cada circunferência um n-ágono regular.



Na figura, mostramos apenas um lado de cada n-ágono, com o triângulo isósceles correspondente. Os dois ângulos centrais são congruentes, como as marcas indicam, pois a medida de cada um dêles é $360/n$. Também os lados são proporcionais: $r'/r = r'/r$. Pelo Teorema LAL sôbre Semelhança,

$$\Delta BQA \sim \Delta B'Q'A'.$$

Portanto

$$\frac{e'}{r'} = \frac{e}{r}, \qquad \frac{ne'}{r'} = \frac{ne}{r} \qquad \text{e} \qquad \frac{p'}{r'} = \frac{p}{r},$$

onde p e p' são os perímetros dos dois n-ágonos. Mas

$$p \to C \qquad \text{e} \qquad p' \to C',$$

por definição. Portanto

$$\frac{p}{r} \to \frac{C}{r} \qquad \text{e} \qquad \frac{p'}{r'} \to \frac{C'}{r'}.$$

Como $\frac{p}{r}$ e $\frac{p'}{r'}$ são iguais, seus limites são os mesmos:

$$\frac{C}{r} = \frac{C'}{r'} \quad \text{e} \quad \frac{C}{2r} = \frac{C'}{2r'},$$

como queríamos demonstrar.

A razão $C/2r$ é representada por π. Como ela é a mesma para tôdas as circunferências, a fórmula

$$C = 2\pi r$$

é válida para tôdas as circunferências.

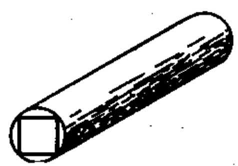
O número π não é racional. De fato, êle não pode ser calculado exatamente por nenhum método comum de álgebra. Por outro lado, êle pode ser aproximado, tanto quanto quisermos, por números racionais. Algumas das aproximações úteis são

$$3, \quad 3{,}14, \quad 3\tfrac{1}{7}, \quad 3{,}1416, \quad \tfrac{355}{113}, \quad 3{,}14159265358979.$$

Não é difícil você se convencer, fazendo algumas medidas físicas, que π é um pouco mais que 3. Mas para obter uma aproximação muito boa é necessário o uso de uma matemática muito avançada.

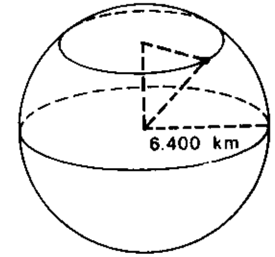
Problemas 16-3

1. Um polígono regular é inscrito numa circunferência, em seguida um outro polígono regular com um lado a mais que o primeiro é inscrito, e assim por diante, indefinidamente, cada nôvo polígono com um lado a mais que o anterior.
   (a) Qual é o limite do apótema?
   (b) Qual é o limite do comprimento de um lado?
   (c) Qual é o limite da medida de um ângulo do polígono?
   (d) Qual é o limite do perímetro do polígono?
2. O diâmetro de uma roda de bicicleta é 63 cm. Quanto a bicicleta anda com cada revolução da roda? (Que aproximação de π torna o cálculo mais fácil?)
3. Qual é uma melhor aproximação de π, 3,14 ou $3\frac{1}{7}$?
4. O comprimento da circunferência de uma tora é 62,8 cm. Qual é o comprimento do lado de uma seção da maior viga quadrangular que pode ser obtida da tora? (Use 3,14 para π.)



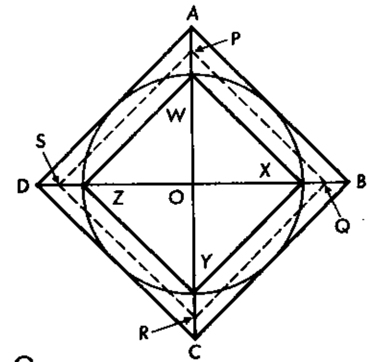
5. Qual é o raio de uma circunferência cujo comprimento é π?
6. Uma piscina circular de 900 cm de diâmetro é cercada por uma cêrca em forma de um quadrado. O comprimento total da cêrca deve ser o dôbro do comprimento da circunferência da piscina. Qual será o comprimento da cêrca, ao longo de um lado do quadrado?
7. O lado de um quadrado tem 8 cm de comprimento. Determine o comprimento da circunferência nêle inscrita; da circunferência circunscrita.

8. O comprimento de um lado de um triângulo equilátero é 12. Qual é o comprimento da circunferência inscrita? da circunferência circunscrita?
9. A terra está aproximadamente a 148.800.000 km do sol. A trajetória da terra em tôrno do sol é aproximadamente circular. Calcule que distância percorremos cada ano "em órbita" ao redor do sol. Qual é uma boa aproximação da nossa velocidade (em km por hora) nessa órbita?
10. O raio da terra é aproximadamente 6.400 km. À medida que a terra gira, objetos na sua superfície estão constantemente se deslocando com várias velocidades em relação ao eixo da terra, dependendo da latitude onde se encontra cada objeto. Qual é a velocidade aproximada, em km por hora, de um objeto próximo ao equador? Qual é a velocidade de um objeto a uma latitude de 45° N?



11. Um lado de um hexágono regular é 6. Qual é o comprimento da circunferência circunscrita? da circunferência inscrita?
12. Os raios de três circunferências são 1 cm, 10 cm e 10.000 cm. O raio de cada uma das circunferências é aumentado de 1 cm, de modo que os novos raios passam a ser, respectivamente, 2 cm, 11 cm e 10.001 cm. Determine o acréscimo no comprimento de cada circunferência devido ao acréscimo no raio.

* 13. É dada a figura na qual $\square ABCD$ é um quadrado circunscrito a uma circunferência, $\square WXYZ$ é um quadrado inscrito na circunferência e $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ contêm as diagonais de ambos os quadrados; $\square PQRS$ é um quadrado cujos vértices são os pontos médios de $\overline{AW}$, $\overline{BX}$, $\overline{CY}$ e $\overline{DZ}$. Determine se o perímetro do $\square PQRS$ é menor, igual ou maior que o comprimento da circunferência. Faça o raio da circunferência igual a 1 e justifique sua resposta com cálculos.



16-4. A ÁREA DE UM CÍRCULO

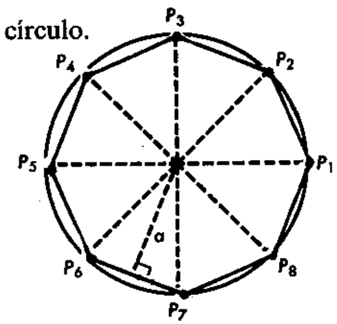
Definição

Um *círculo* (*região circular* ou *disco*) é a reunião de uma circunferência e seu interior.

Vamos obter a fórmula para a área de um círculo.

Dada uma circunferência de raio r, inscrevemos nela um n-ágono regular. Como sempre, a área do n-ágono é representada por A_n; o perímetro é p e o apótema é a. Na Seção 16-2, p. 478 vimos que

$$A_n = \tfrac{1}{2}ap.$$



Nessa situação há três grandezas envolvidas, cada uma dependendo de n. São elas p, a e A_n. Para obter nossa fórmula para a área de um círculo, precisamos descobrir que limites essas grandezas aproximam quando n se torna muito grande.

(a) *O que acontece com* A_n? A_n é sempre um pouco menor que a área do círculo, porque sempre existem alguns pontos que estão no interior da circunferência mas fora do n-ágono regular. No entanto, a diferença entre A_n e A é muito pequena quando n é muito grande, pois nesse caso a região poligonal quase que preenche o interior da circunferência. Assim, é de se esperar que

$$A_n \to A. \tag{1}$$

Mas assim como no caso do comprimento da circunferência, isso não pode nunca ser demonstrado, pois não demos ainda nenhuma definição de área de um círculo. Aqui, também, o remédio é fácil:

Definição

A *área de um círculo* é o limite das áreas dos polígonos regulares inscritos.

Assim, $A_n \to A$ por definição.

(b) *O que acontece com* a? O apótema a é sempre ligeiramente menor que r pois ambos os catetos de um triângulo retângulo são menores que a hipotenusa. Mas a diferença entre a e r é muito pequena quando n é muito grande. Assim

$$a \to r. \tag{2}$$

(c) *O que acontece com* p? Por definição de C, temos

$$p \to C. \tag{3}$$

Combinando os resultados (2) e (3), obtemos

$$\tfrac{1}{2}ap \to \tfrac{1}{2}rC.$$

Portanto, como $A_n = \frac{1}{2}ap$, temos

$$A_n \to \tfrac{1}{2}rC.$$

Mas sabíamos de (1) que $A_n \to A$. Portanto

$$A = \tfrac{1}{2}rC.$$

Como $C = 2\pi r$, temos

$$A = \tfrac{1}{2}r \cdot 2\pi r = \pi r^2.$$

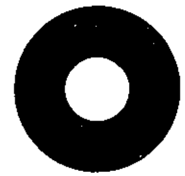
Assim, a fórmula familiar transformou-se finalmente num teorema.

Teorema 16-2

A área de um círculo de raio r é πr^2.

Problemas 16-4

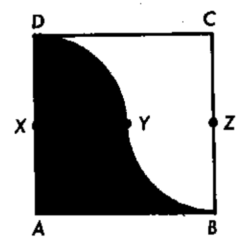
1. Calcule o comprimento da circunferência e a área do círculo cujo raio é 3; 5; $\sqrt{2}$; π.
2. Calcule o comprimento da circunferência e a área de um círculo cujo diâmetro é 6; 9; 2; $\pi\sqrt{12}$.
3. Qual é o raio de um círculo cuja área é 49π? 20π? 25? 16? $18\pi^3$?
4. Qual é a área de um círculo cuja circunferência tem comprimento 6π? 16π? 12? 2π?
5. Calcule a área de uma das faces de uma máquina (fig. ao lado) dado que seu diâmetro é $1\frac{1}{4}$ dm e o diâmetro do buraco é $\frac{1}{2}$ dm. (Use $3\frac{1}{7}$ para π).



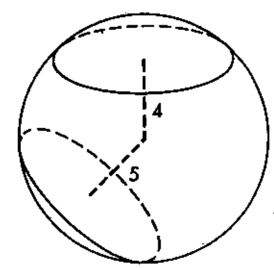
6. Demonstre o seguinte teorema.

   A razão das áreas de dois círculos é igual ao quadrado da razão de seus raios.
7. Dois círculos têm raios 3 e 12 respectivamente. Qual é a razão de suas áreas?
8. Os comprimentos de duas circunferências são 7 e 4π. Qual é a razão das áreas dos círculos correspondentes?
9. O comprimento de uma circunferência e o perímetro de um quadrado são 20 cm cada um. Qual é o que tem maior área, o círculo correspondente ou o quadrado? Qual é a diferença entre as áreas?
10. Dado um quadrado com lado de comprimento 10, calcule a área da região limitada pelas circunferências inscrita e circunscrita.
11. Na figura, o diâmetro de cada uma das semicircunferências pequenas é igual ao raio da semicircunferência maior. Se o raio da semicircunferência grande é 2, qual é a área da região sombreada?

12. $\square ABCD$ é um quadrado cujo lado é s. X e Z são os pontos médios de $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Os arcos circulares $\widehat{DY}$ e $\widehat{BY}$ têm centros X e Z, respectivamente. Determine a área da região sombreada.



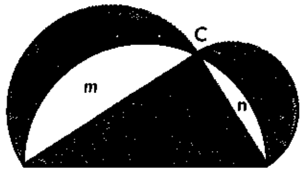
13. Numa esfera de raio 10 cm, são feitas duas seções por planos a 4 cm e 5 cm do centro. Que seção determina maior área? Calcule a razão das áreas das duas seções.



14. Uma *coroa circular* é uma região limitada por duas circunferências concêntricas. Calcule a área de uma coroa circular limitada pelas circunferências inscrita e circunscrita a um triângulo equilátero cujo lado tem comprimento 6.

15. São dadas duas circunferências concêntricas e uma corda da circunferência maior tangente à circunferência menor. Demonstre que a área da coroa circular determinada pelas circunferências é igual a um quarto do produto de π pelo quadrado do comprimento da corda.

* 16. As semicircunferências desenhadas na figura têm como diâmetros os lados de um triângulo retângulo ΔABC. x, y, z, m e n são áreas das regiões, como na figura. Demonstre que $x + y = z$.

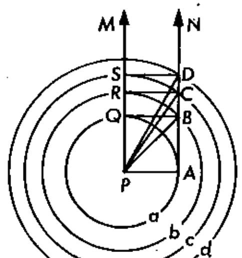


* 17. O 12-ágono, visto aqui com 8 de seus vértices numa circunferência, tem todos os lados congruentes e todos seus ângulos são ângulos retos. Dado que o comprimento de cada lado é 4, calcule a área da parte do círculo que está fora do polígono.

\+ 18. Uma circunferência de comprimento 4π é inscrita num losango de perímetro 20. Calcule a área total das regiões limitadas pela circunferência e o losango.

\+ 19. Um trapézio isósceles cujas bases medem 2 cm e 6 cm é circunscrito a uma circunferência. Determine a área da parte do trapézio externa à circunferência.

*+ 20. Deseja-se construir um alvo tal que um amador acerte na "môsca" com a mesma freqüência com que êle acerta qualquer um dos anéis. Procede-se da seguinte maneira: seja o raio r da "môsca" igual à distância entre duas semi-retas paralelas $\overrightarrow{PM}$ e $\overrightarrow{AN}$. Isto é, $PA = r$. A circunferência de raio r e centro P intercepta $\overrightarrow{PM}$ em Q. A perpendicular a $\overrightarrow{PM}$ em Q intercepta $\overrightarrow{AN}$ em B. Em seguida desenha-se a circunferência de raio $PB = r$ e centro P. Êsse processo é repetido, desenhando-se perpendiculares em R e S e circunferências concêntricas de raios $PC = r_2$ e $PD = r_3$. É claro que mais anéis podem ser construídos.



(a) Expresse r_1, r_2 e r_3 em têrmos de r.

(b) Mostre que as áreas da môsca, a, e dos três anéis b, c e d são iguais.

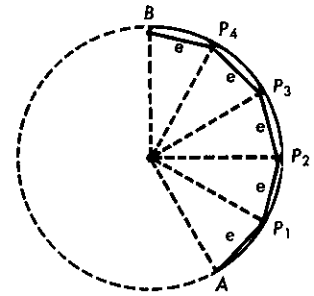
16-5. COMPRIMENTOS DE ARCOS E ÁREAS DE SETORES

Para definir o comprimento de um arco circular, usamos o mesmo tipo de esquema usado para definir o comprimento da circunferência tôda.

Primeiramente dividimos o arco dado, $\widehat{AB}$, em n arcos congruentes. Desenhamos as cordas correspondentes. Como antes, todas as cordas têm o mesmo comprimento e e a soma de seus comprimentos é

$$p = ne.$$

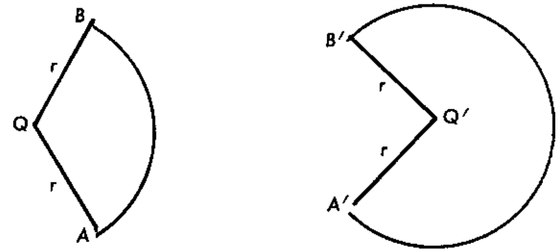
O *comprimento* de $\widehat{AB}$ é definido como o limite de p quando n torna-se cada vez maior.



Na discussão que se segue será conveniente considerar a circunferência tôda como um arco de medida 360. O comprimento da circunferência pode então ser considerado como o comprimento de um arco que mede 360.

Teorema 16-3

Se dois arcos têm raios iguais, então seus comprimentos são proporcionais às medidas dos arcos.



$$\frac{\text{comprimento } \widehat{AB}}{m\widehat{AB}} = \frac{\text{comprimento } \widehat{A'B'}}{m\widehat{A'B'}}.$$

Em casos simples, é fácil ver por que isso é verdade. Se você duplicar a medida de um arco, isso duplicará seu comprimento; se você dividir a medida por 7, isso dividirá o comprimento por 7 e assim por diante. Mas uma demonstração completa do teorema é demasiadamente difícil para êsse curso. Consideraremos, portanto, o teorema como um nôvo postulado.

Com base nesse teorema, podemos calcular os comprimentos de arcos.

Teorema 16-4

Se um arco tem medida q e raio r, seu comprimento é

$$L = \frac{q}{180} \cdot \pi r.$$

Demonstração. Seja C o comprimento de uma circunferência de raio r. Pelo Teorema 16-3,

$$\frac{L}{q} = \frac{C}{360},$$

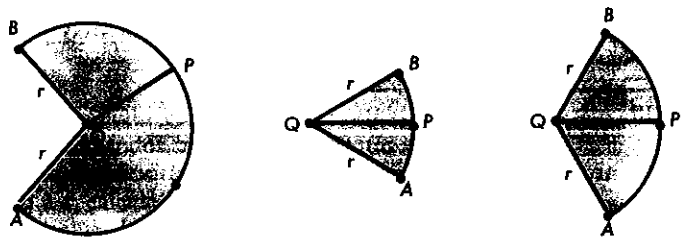
Mas $C = 2\pi r$. Portanto

$$\frac{L}{q} = \frac{2\pi r}{360},$$

e

$$L = \frac{q}{180} \cdot \pi r.$$

Um *setor* é uma região como uma dessas:



Definições

Seja $\widehat{AB}$ um arco de circunferência de centro Q e raio r. A reunião de todos os segmentos $\overline{QP}$, onde P é um ponto qualquer de $\widehat{AB}$ chama-se *setor*. $\widehat{AB}$ é chamado *arco* do setor e r é seu *raio*.

Definimos a área de um setor pelo mesmo tipo de esquema usado para definir a área de um círculo. Usando o mesmo tipo de demonstrações, obtemos o seguinte teorema:

Teorema 16-5

A área de um setor é o semiproduto do seu raio pelo comprimento do seu arco.

Abreviadamente,

$$A = \tfrac{1}{2}rL.$$

Há uma maneira fácil de lembrar essa fórmula. A área de um setor, em um círculo de raio fixo r, deveria ser proporcional ao comprimento do seu arco. (De fato, isso é verdade). Quando o arco é a circunferência tôda, a área é $\pi r^2 = \frac{1}{2}Cr$, onde $C = 2\pi r$. Portanto, para um setor com arco de comprimento L e área A devemos ter

$$\frac{A}{L} = \frac{\frac{1}{2}Cr}{C}, \quad \text{e} \quad A = \tfrac{1}{2}rL.$$

Usando a fórmula de L do Teorema 16-4, obtemos:

Teorema 16-6

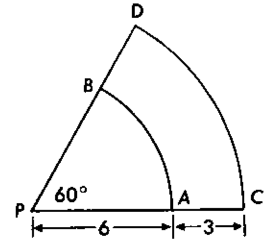
Se um setor tem raio r e seu arco medida q, então sua área é

$$A = \frac{q}{360} \cdot \pi r^2.$$

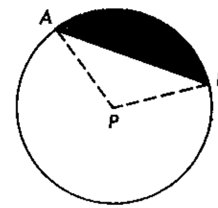
Observe que sendo $q = 360$ o teorema diz que $A = \pi r^2$, e é o que deveria dizer.

Problemas 16-5

1. O raio de uma circunferência é 18. Qual o comprimento de um arco de 60°? de 90°? de 120°? de 150°? de 180°? de 270°?
2. Qual é o raio de uma circunferência se o comprimento de um arco de 45° é 3π?
3. Qual é o raio de uma circunferência se o comprimento de um arco de 72° é 4π?
4. Tanto $\widehat{AB}$ como $\widehat{CD}$ são arcos de 60°, mas seus comprimentos não são iguais. P é o centro de ambos os arcos. Se $PA = 6$ e $AC = 3$, qual o comprimento de $\widehat{AB}$ e qual o comprimento de $\widehat{CD}$?



5. O comprimento de um arco de 60° é 1 dm. Determine o raio do arco e o comprimento da sua corda.
6. Explique a diferença de significado dos têrmos medida de arco e comprimento de arco.
7. O raio de uma circunferência é 10. Qual é a área de um setor que tem um arco de 90°? de 72°? de 180°? de 216°? de 324°?
8. Numa circunferência de raio 2, um setor tem área π. Qual é a medida do arco do setor?
9. Numa circunferência de raio 6, um setor tem área 15π. Qual é o comprimento do arco do setor?
10. O ponteiro dos minutos de um relógio grande na tôrre de um edifício tem 1,8 m. Calcule a distância percorrida pela extremidade dêsse ponteiro em 5 minutos. Que distância êle percorre em 1 minuto?
11. Ao projetar prédios muito altos, os engenheiros devem ter em mente o movimento de oscilação que é típico de estruturas de arranha-céus. A altura do "Empire State Building" no 102° andar é 375 m. Se o edifício, nessa altura, descreve um arco de $\frac{1}{2}$°, quanto êle oscila de um lado para outro?
12. Um *segmento circular* é uma região limitada por um arco de circunferência e a corda do arco. Descreva um método para determinar a área de um segmento circular.

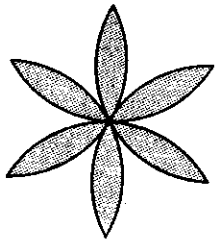


13. Calcule a área de um segmento circular sabendo-se que o raio r da circunferência e a medida do arco, $m\widehat{AB}$, são
(a) $r = 12$; $m\widehat{AB} = 60$. (b) $r = 6$; $m\widehat{AB} = 120$.

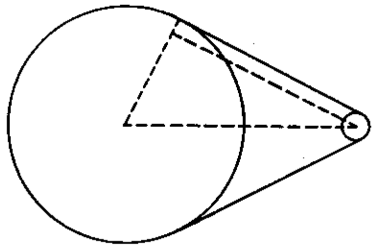
14. Calcule a área de um segmento circular, dado o raio r da circunferência e a medida do arco, $m\widehat{AB}$:
(a) $r = 8$; $m\widehat{AB} = 45$. (b) $r = 10$; $m\widehat{AB} = 30$.

* 15. Uma região octogonal é inscrita numa circunferência de raio 6. Determine a parte da região circular externa ao octógono.

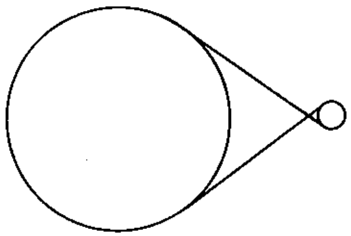
* 16. O raio de cada arco circular, constituindo o desenho de seis pétalas, é o mesmo que o raio da circunferência que contém as pontas de tôdas as pétalas. Se o raio é 1, qual é a área da figura?



17. Uma correia contínua corre ao longo de duas rodas como na figura. As rodas têm raios 3 cm e 15 cm e a distância entre seus centros é 24 cm. Calcule o comprimento da correia.

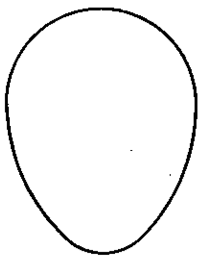


* 18. Uma correia contínua corre ao longo de duas rodas de modo que as rodas giram em sentidos contrários. As rodas têm raios 3 cm e 9 cm e a distância entre seus centros é 24 cm. Calcule o comprimento da correia.



Problema Magno

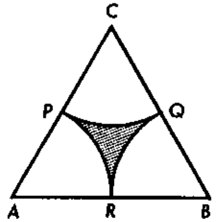
Derive a fórmula para área de uma oval. Construa uma oval da seguinte maneira. Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ diâmetros perpendiculares de uma circunferência de raio r. Com centro em A e raio AB desenhe um arco a partir de B que intercepta $\overleftrightarrow{AC}$ em G. Anàlogamente, com centro em B e raio AB, seja H a interseção de $\overrightarrow{AH}$ com $\overrightarrow{BC}$. Finalmente, com centro em C e raio CG, desenhe $\widehat{GH}$. Determine a área da oval $ADBGH$.



Revisão do Capítulo

1. Um polígono convexo é um conjunto convexo?
2. Defina polígono regular.
3. Um hexágono é circunscrito a uma circunferência de diâmetro 10. Se o perímetro do hexágono é 28, qual é a sua área?
4. Compare o apótema de um polígono regular e o raio da circunferência inscrita.
5. Compare o apótema de um polígono regular e o raio da circunferência circunscrita. (Para demonstrar sua resposta, você pode supor que o comprimento de um lado é e.)
6. Um polígono convexo tem 13 lados. Qual é a soma das medidas dos seus 13 ângulos externos?
7. Quantos lados tem um polígono convexo se a soma das medidas dos seus ângulos é 1080?
8. Qual é a medida de cada ângulo de um pentágono regular? hexágono? octógono? decágono?
9. Qual é o apótema de um polígono regular de área 225 e perímetro 60?
10. Se o comprimento de uma circunferência é C e o raio é r, qual é o valor de C/r?
11. Qual é o raio de uma circunferência se seu comprimento é igual à área do círculo que ela determina?
12. A área de um círculo é 6 vêzes o comprimento da circunferência que o determina. Qual é o raio?
13. Duas circunferências concêntricas têm raios 5 e 13. Determine o raio de uma circunferência cuja área é igual à área da coroa circular limitada pelas duas circunferências.
14. Se o raio de uma circunferência é 4 vêzes o raio de outra, qual é a razão de seus diâmetros? de seus comprimentos? das áreas dos círculos que elas determinam?
15. Os comprimentos de duas circunferências são 6 e 10. Qual é a razão das áreas dos círculos que elas determinam?
16. Compare as áreas de um triângulo equilátero circunscrito a uma circunferência com a de um triângulo equilátero inscrito na circunferência.
17. Mostre que a área de um círculo é dada pela fórmula $\frac{1}{4}\pi d^2$ onde d é o diâmetro do círculo.
18. Passa mais água por 3 torneiras de 1 cm ou por uma torneira de 3 cm? Demonstre sua resposta. (Uma torneira é medida pelo seu diâmetro interno).

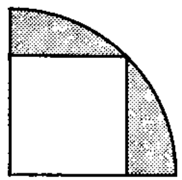
19. Sabe-se que o comprimento de um lado de um triângulo equilátero ΔABC é 6 e que P, Q e R são os pontos médios dos lados. $\widehat{PQ}$, $\widehat{PR}$ e $\widehat{QR}$ têm os vértices do triângulo como centros. Calcule a área e o comprimento do contôrno da região PQR.



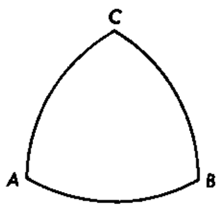
20. A área de um quadrado é igual à área de um círculo de diâmetro 2. Qual é o comprimento do lado do quadrado?

* 21. O perímetro de um quadrado é igual ao comprimento de uma circunferência. Qual determina uma área maior? Calcule a razão entre a área do quadrado e a área do círculo.

* 22. Um quadrado é inscrito num setor de 90° e raio r. Deduza uma fórmula para a área da região sombreada.

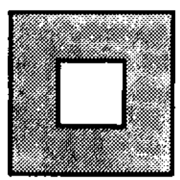


* 23. Cada vértice da figura ABC é o centro do arco oposto. A figura tem a seguinte propriedade muito interessante: se rolada entre duas retas paralelas, que sòmente a tocam, ela sempre tocará as duas retas, assim como uma circunferência o faria. Seja r o raio de cada arco. Deduza uma fórmula para a área da figura ABC e uma fórmula para o perímetro da figura ABC.



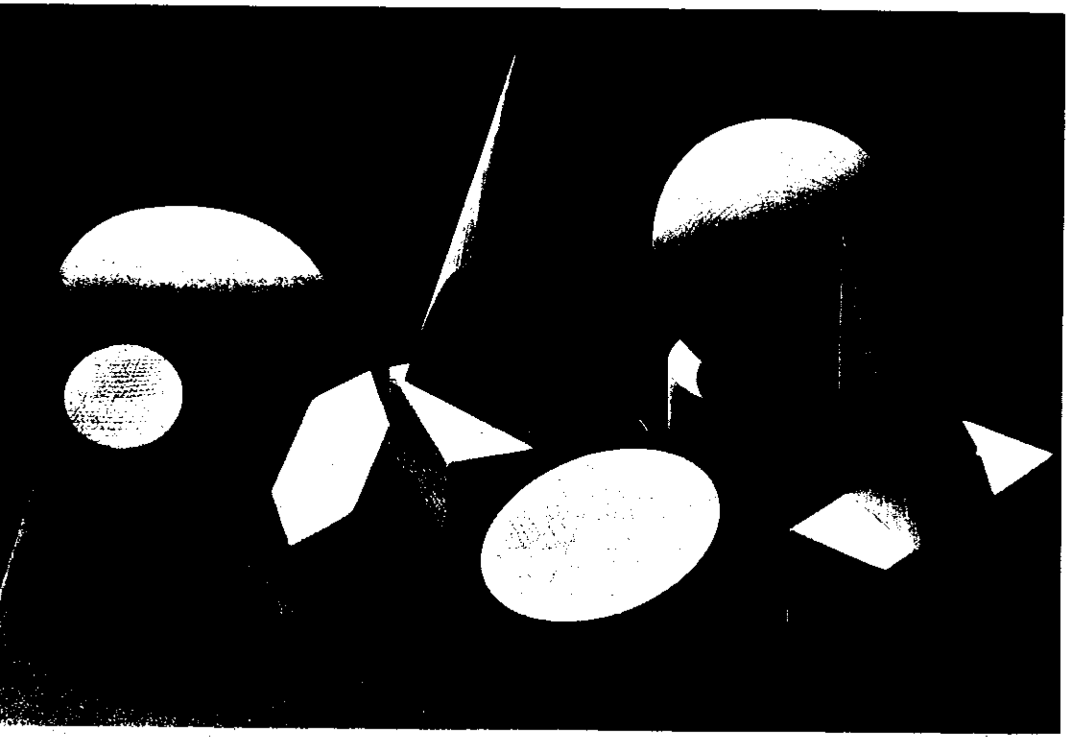
Problema Magno

Você já viu uma broca que pode fazer um buraco quadrado? Uma tal broca foi inventada em 1914. É simplesmente uma adaptação da figura triangular vista no Problema 23 acima. A figura é conhecida como o triângulo de Reuleaux, pois Franz Reuleaux (1829-1905) foi a primeira pessoa a demonstrar suas propriedades de largura-constante. Você pode desenhar uma broca que faça um buraco quadrado com facilidade. Recorte cuidadosamente, de uma fôlha grossa de papelão, um quadrado de 10 cm aproximadamente de lado. O buraco resultante será o buraco quadrado para usar na experiência.



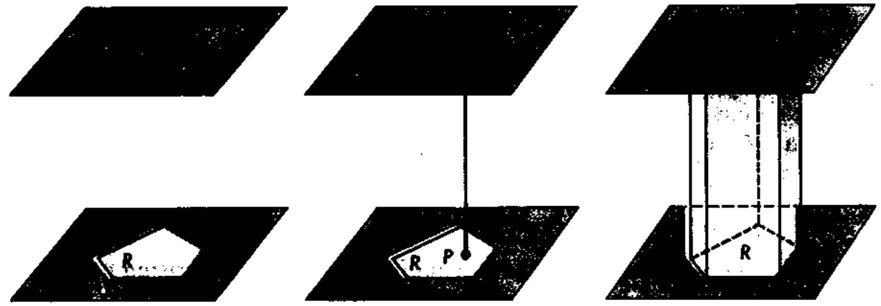
Em seguida, num pedaço separado de papelão, construa um triângulo equilátero de lado igual ao lado do quadrado. Com um compasso e usando como centro os vértices do triângulo, desenhe os arcos necessários. Recorte êsse triângulo de Reuleaux. Você vai ver que o triângulo gira no buraco mantendo sempre contato com os lados do buraco quadrangular. Desenhar a broca agora é trabalho seu. Se você estiver interessado em conhecer algo mais a respeito de curvas de largura constante, assim como outros problemas relacionados, você deve ler "Mathematical Games" de Martin Gardner no *Scientific American* de fevereiro, 1963, p. 148 em diante e o capítulo sôbre tais curvas em *The Enjoyment of Mathematics* de Rademacher e Toeplitz.

17 SÓLIDOS E SEUS VOLUMES



17-1. PRISMAS

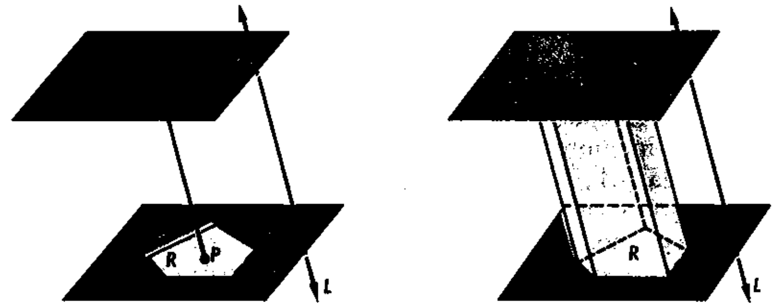
Suponha que tenhamos dois planos paralelos e uma região poligonal em um dêles.



Nas figuras, a região poligonal dada é R, contida no plano E_1.

Em cada ponto P de R, levantamos um segmento $\overline{PP'}$, perpendicular a E_1, ligando P ao ponto P' do segundo plano. A reunião de todos êstes segmentos é chamada *prisma reto*. A região R é chamada *base inferior* ou simplesmente *base*. Podemos imaginar um prisma reto como o sólido que é gerado quando a base se move verticalmente para cima, de E_1 até E_2.

Um sólido como êste é chamado prisma *reto* porque todos os segmentos que levantamos são perpendiculares ao plano da base. Podemos formar prismas de outros tipos, levantando os segmentos em uma direção fixa qualquer, que pode ou não ser perpendicular ao plano da base. Esta possibilidade está prevista na definição seguinte:



Definição

Sejam E_1 e E_2 dois planos paralelos, R uma região poligonal contida em E_1 e L uma reta que intercepta E_1 e E_2 mas não intercepta R. Para cada ponto P em R, seja $\overline{PP'}$ o segmento que é paralelo a L e liga P a P' de E_2. A união de todos os segmentos $\overline{PP'}$ é chamada *prisma*.

Observe que, na definição acima, não podemos permitir que L intercepte R porque, então, nenhum segmento pela interseção seria paralelo a L.)

Definições

A região poligonal R é chamada *base inferior* ou, simplesmente, *base* do prisma. A parte do prisma que está em E_2 é chamada *base superior*. A distância entre E_1 e E_2 é chamada *altura* do prisma. Se L é perpendicular a E_1 e E_2, então o prisma é chamado prisma *reto*.

Observe que para os prismas retos, a altura é a distância PP', mas para os prismas que não são retos, a altura é sempre menor que PP'.

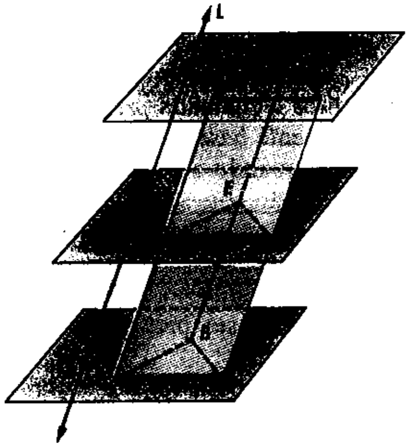
Os prismas são designados pelas bases: um *prisma triangular* é um prisma cuja base é uma região triangular, e assim por diante.

Definição

Uma *seção transversal* de um prisma é a interseção do prisma com um plano paralelo ao plano da base (desde que esta interseção não seja vazia.)

Teorema 17-1

Tôdas as seções transversais de um prisma triangular são congruentes à base.



Evidentemente, as seções transversais e a base são, na realidade, regiões triangulares ao invés de triângulos. Quando dizemos que elas são congruentes, estamos querendo dizer que os triângulos correspondentes são congruentes.

Demonstração. Como na figura, consideremos como base o triângulo ΔABC mais os pontos interiores e sejam D, E e F os pontos onde a seção transversal intercepta $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$. Então $\overline{AD} \parallel \overline{FC}$, porque ambos os segmentos são paralelos a L. $\overline{DF} \parallel \overline{AC}$, Pelo Teorema 10-1. Portanto $\square ADFC$ é um paralelogramo. Logo, $DF = AC$.

[*Pergunta:* O Teorema 10-1 nos diz o que acontece quando dois planos paralelos são interceptados por um terceiro plano. Aqui, os dois planos paralelos são os que contêm ΔABC e ΔDEF. Qual é o terceiro plano?]

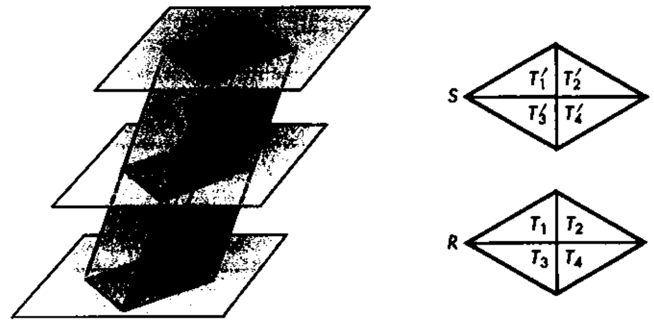
Exatamente da mesma forma, mostramos que $DE = AB$ e $EF = BC$. Por LLL, temos $\Delta DEF \cong \Delta ABC$, como queríamos demonstrar.

Corolário 17-1.1

As bases superior e inferior de um prisma triangular são congruentes. Isto é óbvio, porque a base superior é uma seção transversal.

Teorema 17-2

Tôdas as seções transversais de um prisma têm a mesma área.

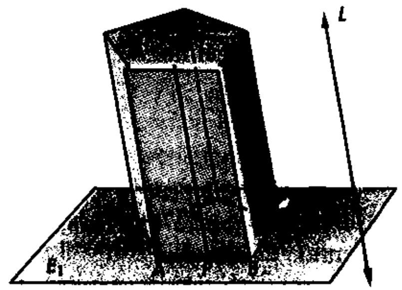


Demonstração. Sejam R a base e S uma seção transversal. Então, a área de R é a soma de áreas de um número finito de regiões triangulares. A área de S é soma de áreas de correspondentes regiões triangulares em S. Como triângulos congruentes têm a mesma área, a soma é a mesma para R e para S.

Corolário 17-2.1

As bases de um prisma têm a mesma área.

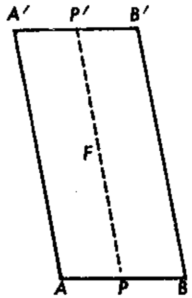
Isto é porque a base superior é uma seção transversal.



Na maioria das vêzes, lidaremos com prismas cujas bases são regiões poligonais convexas. Por uma *região poligonal convexa*, entendemos um polígono convexo mais seu interior. Em tais casos, podemos falar de uma *aresta* ou de um *vértice* de uma base.

A figura acima nos recorda a definição de prisma. Na figura, A e B são vértices da base e $\overline{AB}$ é uma aresta da base. Os segmentos $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$ são chamados *arestas laterais* do prisma. A região em forma de paralelogramo determinada por $\square AA'B'B$ é chamada *face lateral* do prisma. Re-enunciamos êstes conceitos numa linguagem mais precisa.

Definição



Se A é um vértice da base de um prisma e A' é o ponto correspondente da base superior, então $\overline{AA'}$ é uma *aresta lateral* do prisma. Se $\overline{AB}$ é uma aresta da base e F é a reunião de todos os segmentos $\overline{PP'}$ para os quais P está em $\overline{AB}$, então F é uma *face lateral* do prisma.

Teorema 17-3

As faces laterais de um prisma são regiões em forma de paralelogramo.

Para demonstrar isto, precisamos provar que $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$ e $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$. Justificações?

Corolário 17-3.1

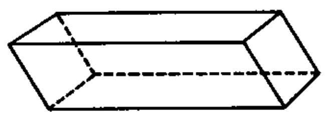
As faces de um prisma reto são regiões retangulares.

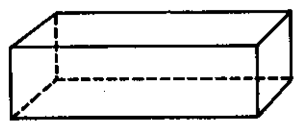
Demonstração? (Sabemos que $L \perp E_1$ e $\overline{AA'} \parallel L$.)

Definições

A reunião das faces laterais de um prisma é chamada *superfície lateral*. A reunião das faces laterais e das bases é chamada *superfície total*.

Definições





Um *paralelepípedo* é um prisma cuja base é uma região em forma de paralelogramo.

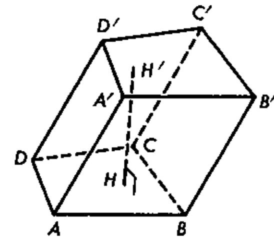
Um *paralelepípedo retângulo* é um prisma retangular reto.

Assim, tôdas as faces de um paralelepípedo são regiões em forma de paralelogramo. E tôdas as faces de um paralelepípedo retângulo são regiões retangulares.

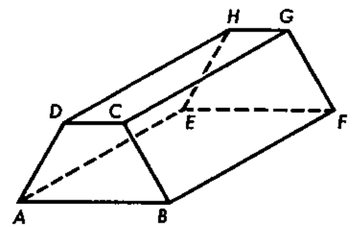
Definição

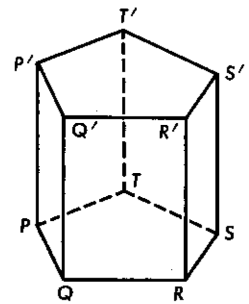
Um *cubo* é um paralelepípedo retângulo cujas arestas são tôdas congruentes.

Problemas 17-1

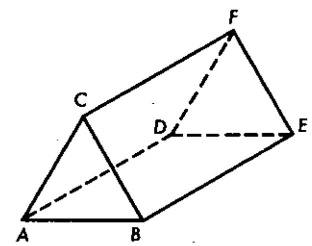


1. Copie em seu caderno e complete:
   (a) O prisma da figura ao lado é chamado ....
   (b) A região $ABCD$ é chamada ....
   (c) $\overline{AA'}$ é chamado...............
   (d) $\overline{HH'}$ é chamado...............
   (e) Se $\overline{AA'}$ fôsse perpendicular ao plano da base, então o prisma seria chamado...............
   (f) A região BB′C′C é chamada...............
   (g) A reunião das faces laterais é chamada...............
   (h) Se $\square ABCD$ fôsse um paralelogramo, o prisma seria chamado...............
2. A figura abaixo, à esquerda, mostra um prisma reto apoiado sôbre uma face lateral. As bases são regiões trapezoidais. Os comprimentos das arestas paralelas da base são 4 e 9 e os comprimentos das arestas não paralelas são 5 e 6 e $BF = 12$. Determine a área da superfície lateral do prisma.

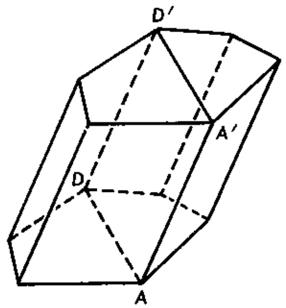




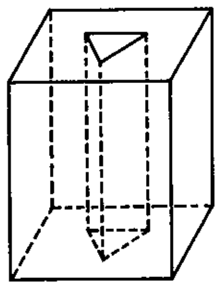
3. A altura do prisma reto pentagonal à direita acima é 8 e os comprimentos das arestas das bases são 2, 5, 7, 7 e $8\frac{1}{2}$. Determine a área da superfície lateral do prisma.
4. Um prisma reto tem uma aresta lateral medindo 3 e o perímetro da base é 34. Qual é a área da superfície lateral?
5. Demonstre que a área S da superfície lateral de um prisma reto é dada pela fórmula $S = hp$, onde h é a altura do prisma e p é o perímetro da base.
6. Determine a altura de um prisma reto para o qual a área da superfície lateral é 143 e o perímetro da base é 13.
7. Se uma face lateral de um prisma é um retângulo, é verdade que tôdas as outras faces laterais são retângulos?
8. As bases de um prisma são triângulos equiláteros e as faces laterais são regiões retangulares. Sendo 6 o comprimento de uma aresta da base e 10 a altura do prisma, determine a área da superfície total do prisma.



9. Demonstre que duas arestas laterais não consecutivas são coplanares e que a interseção do plano por elas determinado com o prisma é uma região em forma de paralelogramo. (Em primeiro lugar, refaça o enunciado, em têrmos das notações da figura.)

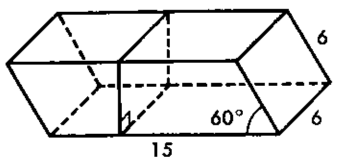


10. Qual é a área da superfície lateral de um cubo de aresta 5? Qual é a área da superfície total?
11. As arestas de uma seção transversal de um prisma triangular são 3, 6 e $3\sqrt{3}$. Quanto medem as arestas de uma outra seção transversal? Que figura geométrica será? Quais as medidas de seus ângulos? Determine a área de uma seção transversal dêste prisma.
12. A diagonal de um cubo é $16\sqrt{3}$. Determine a área da superfície total.
13. As dimensões de um paralelepípedo retangular são 4,7 e 12. Determine a área da superfície total.



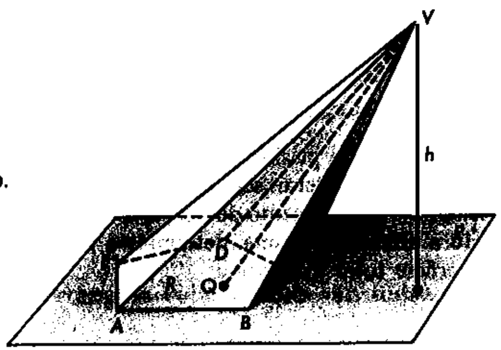
* 14. As dimensões da base de um paralelepípedo retângulo são 5 e 8 e sua altura é 12. Uma cavidade, em forma de prisma triangular reto de base um triângulo equilátero de aresta de comprimento 3, estende-se da base inferior à base superior do paralelepípedo. Determine a área da superfície total da figura.

* 15. A base de um paralelepípedo é uma região retangular medindo 6 por 15. Duas faces laterais opostas (ver figura) são regiões inclinadas de 60° graus em relação à base. Um plano perpendicular à aresta mais longa da base intercepta o paralelepípedo em uma região retangular. Determine a superfície total da figura.



17-2. PIRÂMIDES

Uma pirâmide de base R e vértice V é o sólido visto ao lado.



A pirâmide é a reunião de todos os segmentos $\overline{VQ}$, onde Q é um ponto qualquer da base. Desta forma:

Definições

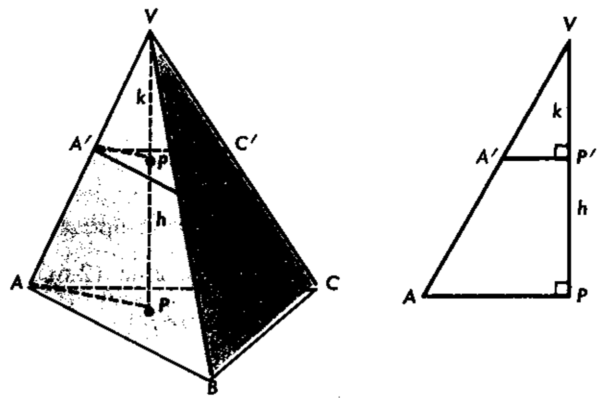
Dados uma região poligonal R em um plano E e um ponto V fora de E, a *pirâmide de base* R e *vértice* V é a reunião de todos os segmentos $\overline{VQ}$, com Q pertencendo a R. A *altura* da pirâmide é a distância (perpendicular) de V a E.

Seções transversais horizontais são definidas do mesmo modo que para os prismas. Isto é, uma *seção transversal horizontal* de uma pirâmide é a interseção da pirâmide com um plano paralelo ao plano da base (desde que, como antes, o plano, de fato, intercepte a pirâmide).

Conforme um plano horizontal se mova paralelamente da base para o vértice, é óbvio que a área da seção transversal decresce constantemente, até que, finalmente, torna-se zero, no vértice. No teorema seguinte, obtemos uma fórmula que nos diz exatamente *como* a área da seção transversal muda quando a base é triangular.

Teorema 17-4

Tôda seção transversal de uma pirâmide triangular, entre a base e o vértice, é uma região triangular semelhante à base. Se h é a altura e k é a distância do vértice à seção transversal, então a área da seção transversal é k^2/h^2 vêzes a área da base.



A notação da demonstração é a da figura. A base é a região determinada pelo triângulo ΔABC. O triângulo $\Delta A'B'C'$ é o triângulo correspondente na seção transversal. O segmento $\overline{VP}$ é perpendicular ao plano da base, com $VP = h$; e $\overline{VP'}$ é o segmento perpendicular por V ao plano da seção transversal, com $\overline{VP'} = k$. A figura à direita mostra os triângulos ΔVAP e $\Delta VA'P'$ no próprio plano que êles determinam. Observe que $\angle P$ e $\angle P'$ (ou seja, $\angle VP'A'$) são, realmente, ângulos retos porque $\overleftrightarrow{VP}$ é perpendicular aos dois planos em questão.

Demonstração. Seguem-se as principais passagens.

(1) $$\Delta VA'P' \sim \Delta VAP.$$

Sendo $\angle P$ e $\angle P'$ ângulos retos e $\angle V \cong \angle V$, a semelhança segue do Corolário AA.

(2) $$\frac{VA'}{VA} = \frac{k}{h},$$

porque êstes são os comprimentos de lados correspondentes.

Exatamente da mesma forma, usando os triângulos $\Delta VP'B'$ e ΔVPB, podemos mostrar que

(3) $$\frac{VB'}{VB} = \frac{k}{h}.$$

Pelo Teorema de Semelhança LAL, temos

(4) $$\Delta VA'B' \sim \Delta VAB.$$

Portanto

(5) $$\frac{A'B'}{AB} = \frac{VA'}{VA} = \frac{k}{h}.$$

Nesta situação, não existe nada especial sôbre $\overline{AB}$ na base e $\overline{A'B'}$ na seção transversal; as arestas $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$ mantêm o mesmo tipo de relação. Portanto temos

(6) $$\frac{B'C'}{BC} = \frac{k}{h},$$

e

(7) $$\frac{A'C'}{AC} = \frac{k}{h}.$$

Pelo Teorema de Semelhança LLL (Teorema 12-6), temos

(8) $$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC.$$

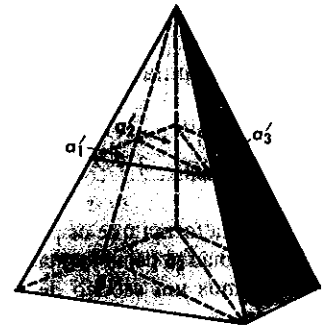
Isto demonstra uma parte de nosso teorema. A outra parte resulta, agora, do Teorema 12-9, porque a razão entre cada par de lados correspondentes é k/h.

Não é apenas para pirâmides triangulares que as seções transversais se comportam desta maneira; não importa qual possa ser a forma da base, a razão é sempre k^2/h^2, como antes.

Teorema 17-5

Em qualquer pirâmide, a razão entre a área de uma seção transversal e a área da base é k^2/h^2, onde h é a altura da pirâmide e k é a distância do vértice ao plano da seção transversal.

Demonstração. Dividimos a base em pequenas regiões triangulares T_1, $T_2, \ldots, T_n$, como na definição de região poligonal. As áreas são a_1, $a_2, \ldots, a_n$. Na figura, mostramos o caso em que $n = 3$. Sejam a'_1, $a'_2, \ldots, a'_n$ as áreas das regiões correspondentes na seção transversal. Então, a área da base é



$$A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

e a área da seção transversal é

$$A_k = a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_n.$$

Pelo teorema precedente,

$$a'_1 = \frac{k^2}{h^2} a_1, \quad a'_2 = \frac{k^2}{h^2} a_2, \quad \cdots, \quad a'_n = \frac{k^2}{h^2} a_n.$$

Portanto

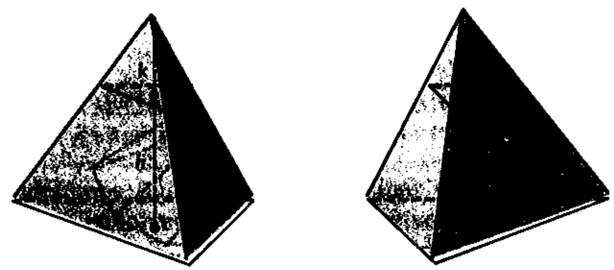
$$A_k = \frac{k^2}{h^2}(a_1 + a_2 + \cdots + a_2) = \frac{k^2}{h^2} A,$$

como queríamos demonstrar.

Êste teorema nos permite demonstrar o seguinte,

Teorema 17-6

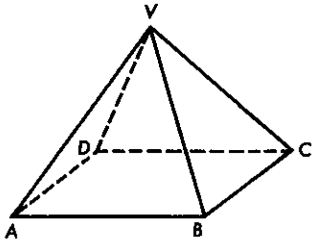
Se duas pirâmides têm a mesma área da base e a mesma altura, então as seções transversais, equidistantes dos vértices, têm a mesma área.



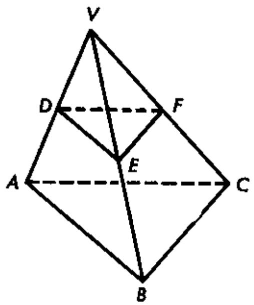
Na figura, mostramos pirâmides triangulares meramente por questão de simplicidade. Mas a demonstração não se restringe a êste caso, nem o teorema.

Demonstração. Como está indicado na figura, sejam A a área da base de cada pirâmide, h a altura de cada uma e k a distância de cada seção transversal ao vértice. Então, as áreas das seções transversais são as mesmas, pois cada uma delas é igual a $(k^2/h^2)A$.

Problemas 17-2



1. Da mesma forma que os prismas, as pirâmides são designadas pelas formas de suas bases. Ao lado, temos um esbôço de uma pirâmide retangular. Faça esboços de pirâmides triangulares e quadrangulares.
2. Qual é o outro nome de uma pirâmide triângular? (Veja o Cap. 3).
3. Escreva as definições formais de *aresta lateral* e *face lateral* de uma pirâmide.
4. Na pirâmide V-ABC, o triângulo ΔABC é equilátero. Um plano paralelo à base intercepta as arestas laterais em D, E e F, de tal forma que $VE = \frac{1}{2}EB$.

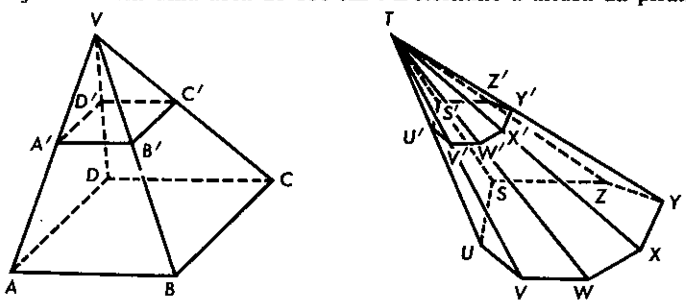


   (a) Quanto vale $\dfrac{DV}{AV}$?

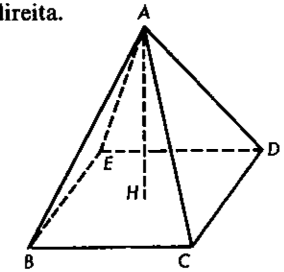
   (b) O que é que você pode afirmar sôbre ΔDEV e ΔABV? E sôbre ΔABC e ΔDEF?

   (c) Quanto vale $\dfrac{DE}{AB}$?

   (d) Se $BC = 6$, quanto vale $a\Delta DEF$?
5. A altura de uma pirâmide quadrangular é 10 e um lado da base é 15. Determine a área de uma seção transversal a uma distância 6 do vértice.
6. A área da base de uma pirâmide pentagonal é 72 cm² e a altura é 12 cm. Qual é a área de uma seção transversal a 4 cm da base?
7. Uma seção transversal de 108 cm² de área está a 9 cm do vértice de uma pirâmide cuja base tem uma área de 180 cm². Determine a altura da pirâmide.
8.

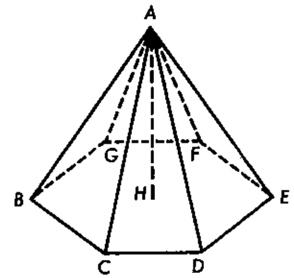


As duas pirâmides vistas na pág. anterior, com a pirâmide quadrangular à esquerda, têm alturas iguais. As bases são coplanares, bem como as seções transversais. Sendo que $AB = 2\sqrt{6}$, $A'B' = 3\sqrt{2}$ e a área da região poligonal $SUVWXYZ$ 24, determine a área da seção transversal da pirâmide à direita.



9. Uma pirâmide cuja base é um polígono regular e cujo vértice é equidistante de cada vértice da base é chamada *pirâmide regular*.

   Demonstre que a altura pelo vértice de uma pirâmide regular intercepta a base no seu circuncentro (isto é, no ponto da base que é equidistante de cada um dos vértices da mesma).
10. Uma aresta da base de uma pirâmide regular quadrangular mede 10 m de comprimento e a altura da pirâmide é 12 m. Determine a área da superfície lateral da pirâmide.
11. Demonstre que as faces laterais de uma pirâmide regular são limitadas por triângulos isósceles congruentes.
12. A altura de cada uma das faces laterais de uma pirâmide regular é chamada *apótema* da pirâmide. Mostre que a área da superfície lateral é metade do produto do apótema pelo perímetro da base.
13. Determine a área da superfície total de uma pirâmide regular cuja altura é 15 e cuja base é um quadrado de lado 16.



* 14. Determine a área da superfície total de uma pirâmide regular hexagonal sendo que o comprimento de uma aresta da base é 8 e a altura da pirâmide é 12.

\+ 15. É dada uma pirâmide triangular qualquer $ABCD$. Descreva um plano cuja interseção com a pirâmide seja uma região em forma de paralelogramo.

Problema Magno

Dado um tetraedro regular (uma pirâmide triangular) de aresta 8, determine a área de uma seção transversal que contenha o ponto de concorrência das quatro alturas da pirâmide.

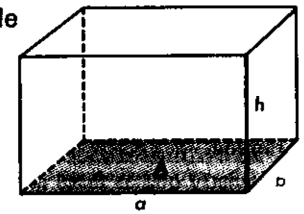
17-3. O VOLUME DE UM PRISMA E DE UMA PIRÂMIDE. O PRINCÍPIO DE CAVALIERI

Aprenderemos, agora, como determinar os volumes de vários sólidos. Êste processo envolverá muitas idéias que você já usou no cálculo de áreas de regiões poligonais. Nossa discussão, entretanto, será mais informal que a do Cap. 11 e não incluirá uma série completa de postulados apropriados a justificar tudo que fizermos a cada passo. Enunciaremos, entretanto, os dois principais postulados que usaremos nos cálculos numéricos.

Você se recorda que, no Cap. 11, tomamos a fórmula de área $A = e^2$ para quadrados como postulado e usamos um artifício para obter a fórmula de área $A = bh$ para retângulos. Para volumes de sólidos, nosso artifício não funciona, de modo que lançamos mão de um postulado mais forte.

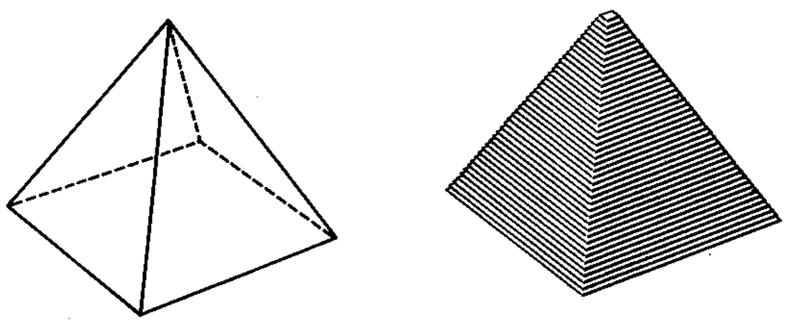
POSTULADO 23. O Postulado da Unidade

O volume de um paralelepípedo retângulo é o produto da área da base pela altura.



Evidentemente, qualquer face de um paralelepípedo retângulo pode ser considerada como base. Obtemos sempre a mesma resposta para o volume, porque, em cada caso, Ah é o produto dos comprimentos de três arestas quaisquer com uma extremidade em comum.

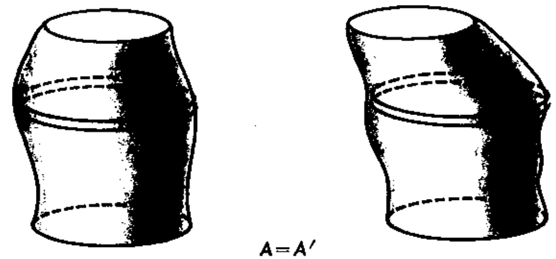
Para compreender o que acontece com o nosso próximo postulado, raciocinemos, antes, com um modêlo físico. Podemos fazer um modêlo aproximado de uma pirâmide quadrangular formando uma pilha de cartões quadrados, de tamanho apropriado.



A figura à esquerda representa uma pirâmide exata e a figura à direita é um modêlo aproximado, feito de cartões.

Suponha que tenhamos perfurado um pequeno orifício no modêlo, do alto até algum ponto da base, e que tenhamos inserido uma pequena haste de modo que ela atravesse todos os cartões do modêlo. Podemos, então, inclinar a haste em qualquer direção que quisermos, mantendo sua extremidade fixada à base. A forma do modêlo, então, muda, mas não o volume. A razão é que o volume é simplesmente o volume total dos cartões, e êste volume total não muda quando os cartões deslizam uns sôbre os outros.

O mesmo princípio se aplica de modo mais geral. Suponha que se tenha dois sólidos com bases em um mesmo plano. Imaginaremos êste plano como sendo horizontal. Se tôdas as seções transversais dos dois sólidos, ao mesmo nível, têm a mesma área, então os dois sólidos têm o mesmo volume.



$A = A'$

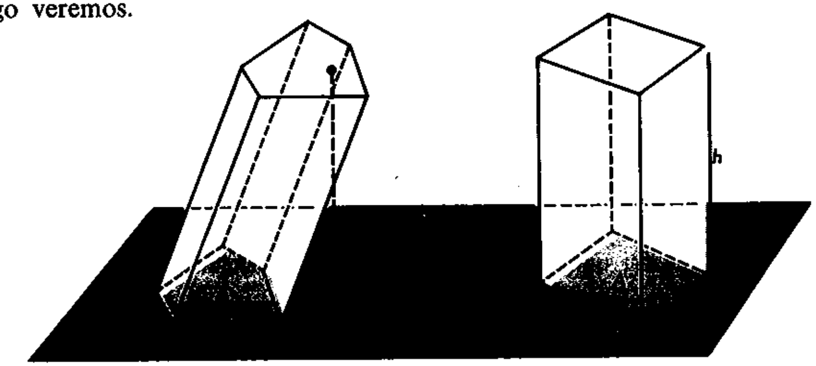
Isto é verdade pela seguinte razão. Façamos, novamente, um modêlo de cartões para cada um dos sólidos. Então, cada cartão do primeiro modêlo tem, exatamente, o mesmo volume do cartão correspondente do segundo volume. Usando cartões muito finos, podemos fazer modêlos que são aproximações muito boas dos sólidos dados. Na verdade, podemos fazer aproximações tão boas quanto quisermos, usando cartões suficientemente finos. Portanto, os volumes dos dois sólidos iniciais são os mesmos.

O princípio envolvido neste raciocínio é chamado Princípio de Cavalieri. Não demonstramos êste princípio; simplesmente explicamos por que êle é razoável. Enunciaremos, portanto, êste princípio na forma de postulado.

POSTULADO 24. O Princípio de Cavalieri

São dados dois sólidos e um plano. Suponha que todo plano, paralelo ao plano dado, interceptando um dos dois sólidos, também interceptará o outro, dando seções transversais de mesma área. Então os dois sólidos têm o mesmo volume.

O Princípio de Cavalieri é a chave para o cálculo de volumes, como logo veremos.



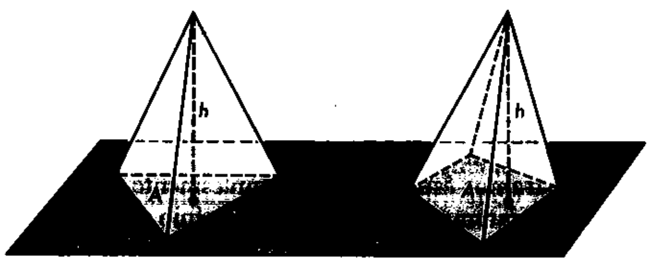
Teorema 17-7

O volume de qualquer prisma é o produto da altura e a área da base.

Demonstração. Sejam h e A a altura e a área da base, respectivamente, de um prisma dado. Considere um paralelepípedo retângulo com a mesma altura h e base de mesma área A, sendo que a base do paralelepípedo está no mesmo plano da base do prisma dado. Sabemos, pelo Teorema 17-2, que tôdas as seções transversais, para ambos os prismas, têm a mesma área A. Pelo Princípio de Cavalieri, isto significa que os dois sólidos têm o mesmo volume. Como o volume de um paralelepípedo retângulo é Ah, pelo Postulado 23, o teorema está demonstrado.

Teorema 17-8

Se duas pirâmides têm a mesma altura e a mesma área da base e se as bases estão contidas num mesmo plano, então elas têm o mesmo volume.

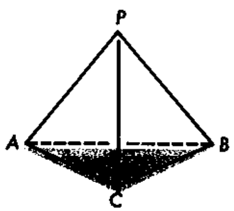


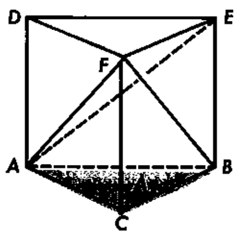
Demonstração. Pelo Teorema 17-6, as seções transversais correspondentes nas duas pirâmides têm a mesma área. Pelo Princípio de Cavalieri, isto significa que elas têm o mesmo volume.

Teorema 17-9

O volume de uma pirâmide triangular é um têrço do produto da altura pela área da base.

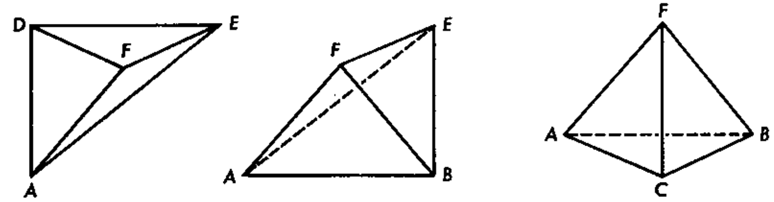
Demonstração. Dada uma pirâmide triangular, formamos um prisma triangular com a mesma base e mesma altura.



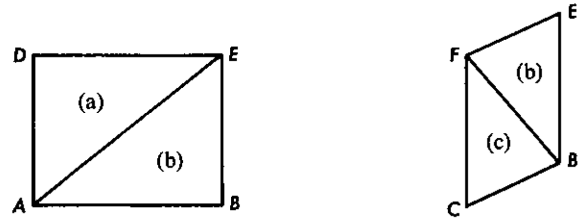


(Temos a liberdade de usar um prisma triangular *reto*, como na figura. De um modo ou de outro, isto não tem importância.)

Agora, dividimos o nosso prisma em três pirâmides, como está indicado acima, à direita. Designaremos estas pirâmides pelos nomes dos seus vértices, em qualquer ordem. Assim as novas pirâmides são $ADEF$, $ABEF$ e $AFBC$. Desenhadas separadamente, temos:



(a) (b) (c)



(1) *ADEF e ABEF têm o mesmo volume.*

Demonstração. Podemos considerar F como vértice de cada uma das pirâmides. As bases são, então, as regiões triangulares determinadas pelos triângulos ΔADE e ΔABE. Como êstes triângulos são congruentes, sabemos que $ADEF$ e $ABEF$ têm a mesma área da base; e elas têm a mesma altura porque a altura de cada uma é a distância de F ao plano que contém as bases. Portanto, elas têm o mesmo volume.

(2) *ABEF e AFBC têm o mesmo volume.*

Demonstração. Podemos considerar A como o vértice de cada uma das pirâmides. As bases são, então, as regiões triangulares determinadas pelos triângulos ΔBEF e ΔFBC. Como êstes triângulos são congruentes, sabemos que $ABEF$ e $AFBC$ têm a mesma área da base. E elas têm a mesma altura, porque a altura de cada uma delas é a distância de A ao plano que contém as bases. Portanto, elas têm o mesmo volume.

(3) *AFBC e a pirâmide original PABC têm o mesmo volume.*

(A demonstração é óbvia: elas têm a mesma altura e a mesma área da base.)

Neste ponto, a demonstração está quase terminada. Seja a a área de ΔABC e seja h a altura de $PABC$. Então, o volume de nosso prisma e ah. Se V é o volume de cada uma das pirâmides, então $3V = ah$. Portanto,

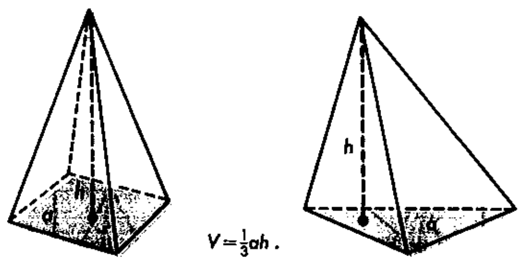
$$V = \tfrac{1}{3}ah,$$

como queríamos demonstrar.

O mesmo resultado vale para pirâmides em geral.

Teorema 17-10

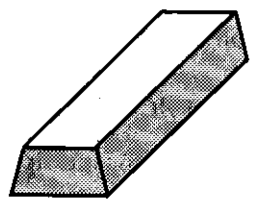
O volume de uma pirâmide é um têrço do produto da altura pela área da base.



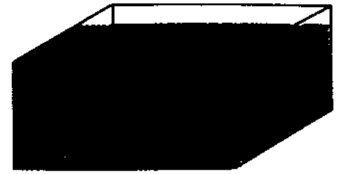
Demonstração. Sendo dada uma pirâmide com altura h e base a, tome uma pirâmide triangular com a mesma altura e base mesma área, estando a base no mesmo plano da primeira. Pelo Teorema 17-6, as seções transversais, no mesmo nível, têm a mesma área. Portanto, pelo Princípio de Cavalieri, as duas pirâmides têm o mesmo volume. Logo, o volume de cada uma é $\frac{1}{3}ah$, o que demonstra o teorema.

Problemas 17-3

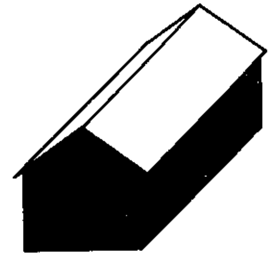
1. A altura de paralelepípedo retângulo é 7 e as dimensões da base são 4 e 5. Determine o volume.
2. Enche-se um recipiente cúbico de metal com água. Dado que um galão do líquido tem um volume de 21600 cm^3, e sendo 120 cm a aresta do recipiente, calcular o número de galões que o recipiente pode conter.
3. Certos lingotes de prata são fundidos na forma de um prisma reto cuja base (a extremidade do lingote) é um trapézio. As bases do trapézio medem 7,5 cm e 10 cm e a altura de um lingote é 5 cm. O comprimento do lingote é 30 cm. Se a prata pesa 140 gr por cm^3, quanto deve pesar um lingote?



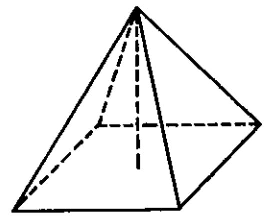
4. Uma amostra de metal é mergulhada em um tanque de água, retangular, cuja base mede 15 cm por 20 cm. O nível da água se eleva de 0,35 cm. Qual é o volume do metal?



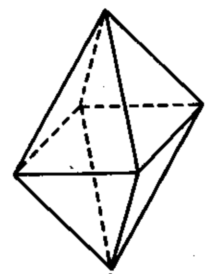
5. Para calcular o custo da instalação de um sistema de ar condicionado em um certo projeto de construção, o empreiteiro deve computar o volume de ar contido em uma construção retangular como a delineada na figura. A construção mede 40 m de comprimento por 12 m de largura. As arestas laterais da construção medem 3 m e o ponto mais alto do teto se acha a uma altura de 4,5 m. Determine o volume da construção.



6. Um prisma retangular reto tem uma altura de 18 cm e as dimensões da base são 6 cm e 8 cm. Um plano determinado por uma diagonal da base e um vértice da base superior forma uma pirâmide com as faces do prisma. Determine o volume da pirâmide.
7. Determine o volume de uma pirâmide regular quadrangular cuja altura é 12 e cuja base tem uma aresta de 12. Determine, também, a área da superfície lateral.

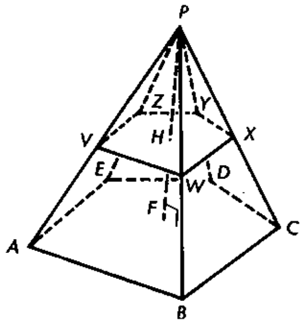


8. Deduza uma fórmula para o volume de uma pirâmide regular quadrangular, cujas faces laterais são triângulos equiláteros de lado s.
9. Se duas pirâmides regulares quadrangulares, cujas faces são triângulos equiláteros, são colocadas base a base, então o sólido resultante, de oito faces, é chamado *octaedro regular*. Demonstre que o volume V de um octaedro regular de aresta a é dado pela fórmula $V = \frac{1}{3}\sqrt{2}a^3$.



10. Determine o volume e a superfície total de um octaedro regular de aresta 3.
11. + Demonstre que o volume de um octaedro regular é dado por $V = \frac{1}{6}d_1d_2d_3$, onde d_1, d_2, e d_3 são os comprimentos das diagonais.
12. Uma seção transversal de uma pirâmide forma uma pequena pirâmide, cujo volume é 2 e cuja altura é 1. O volume da pirâmide grande é 54. Qual é a altura desta pirâmide?

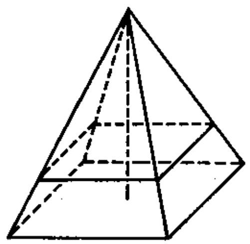
13. A pirâmide $P\text{-}ABCDE$ é pentagonal e a área da base é 64. A altura PF é igual a 12. V, W, X, Y e Z são os pontos médios das arestas laterais, como mostra a figura. Determine a área da seção transversal $VWXYZ$. (Por que é uma seção transversal?) Determine o volume da pirâmide pequena. Qual é a razão entre os volumes das duas pirâmides?



14. A parte de uma pirâmide limitada pela base, por uma seção transversal e pelas regiões trapezoidais das faces laterais, é chamada *tronco* de pirâmide. Na figura do Problema 13, os vértices do tronco de pirâmide são A, B, C, D, E, V, W, X, Y e Z. Determine o volume dêste tronco.

* 15. A área de uma seção transversal de uma pirâmide é 20 e a área base é 45. Se a altura da pirâmide é 6, qual a distância do vértice à seção transversal? Qual é a razão entre os volumes das duas pirâmides?

* 16. Um plano paralelo à base de uma pirâmide regular quadrangular intercepta a altura em um ponto a três quartos da distância do vértice à base, a partir do vértice. A altura da pirâmide é 16 e a aresta da base é 24. Determine a área da superfície lateral e o volume do tronco de pirâmide.

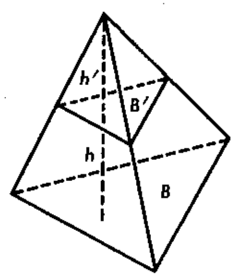


Problema Magno

Mostre que o volume de um tronco de pirâmide é dado pela fórmula

$$V = \tfrac{1}{3}h(B + B' + \sqrt{BB'}),$$

onde B e B' são as áreas das bases e h é a altura do tronco.



Sugestão: Seja h' a altura da pirâmide pequena. Obtenha os volumes das duas pirâmides. Observe que

$$\frac{h + h'}{h'} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B'}}$$

de modo que

$$\frac{h}{h'} = \frac{\sqrt{B} - \sqrt{B'}}{\sqrt{B'}} \quad \text{e} \quad h' = \frac{h\sqrt{B'}}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}}.$$

ARQUIMEDES (287-212 A.C.)

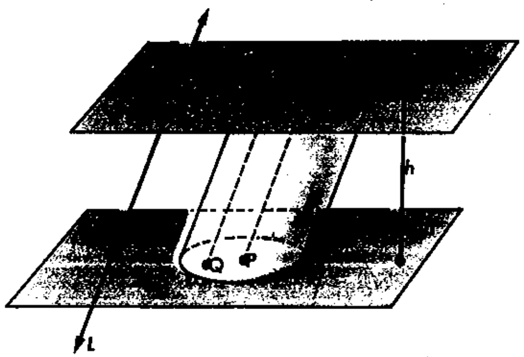
Arquimedes é, geralmente, considerado o maior matemático grego da antiguidade e um dos três ou quatro maiores de todos os tempos. Foi o primeiro homem a determinar o volume de uma esfera; fêz, também, um cálculo muito acurado de π. E os métodos que idealizou, para resolver problemas de área e volume, colocaram-no muitos séculos à frente de seu tempo. Êle era capaz de calcular área de regiões limitadas por curvas bastante complicadas; e as suas realizações neste tipo de geometria não foram suplantadas por cêrca de mil e oitocentos anos. O próximo grande passo no cálculo de áreas e volumes foi a descoberta do cálculo infinitesimal, por Newton e Leibniz, no século dezessete.

Diferente dos outros matemáticos gregos, Arquimedes se interessava pelas aplicações práticas. Conta-se que quando os romanos atacaram Siracusa, cidade natal de Arquimedes, na Sicília, êste desenvolveu um importante papel na defesa da cidade, aterrorizando os invasores com armas ofensivas de sua própria invenção. Teria bombardeado os navios romanos com grandes pedras, lançadas pelas maiores catapultas já vistas na época. Conta-se, também, que teria incendiado a armada romana, usando espelhos para focalizar os raios de sol concentrados sôbre os navios. Quando o ataque se firmou em um cêrco, Arquimedes não pôde mais ajudar; retornou ao seu quarto de trabalho e voltou a estudar matemática.

Morreu trabalhando. Quando os romanos, finalmente, capturaram Siracusa, um soldado encontrou-o em casa, desenhando figuras geométricas sôbre a areia do chão. "Não estrague minhas circunferências", disse Arquimedes. Estas foram suas últimas palavras. O comandante romano havia dado ordens para que Arquimedes não fôsse incomodado. Mas ninguém sabe se o soldado sabia ou estava interessado em saber quem era a sua vítima.

17-4. CILINDROS E CONES

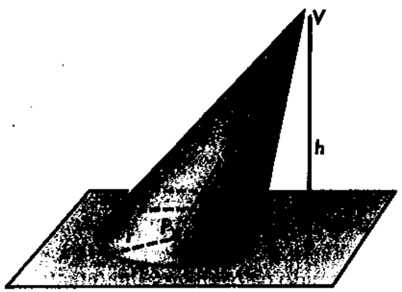
Se você se lembrar como construímos um prisma com uma região poligonal como base, você verá que o mesmo processo funciona igualmente bem para bases que não são regiões poligonais. Suponha que comecemos com dois planos E_1 e E_2, como antes, mas que usemos uma região *circular* (círculo) E_1 como base.



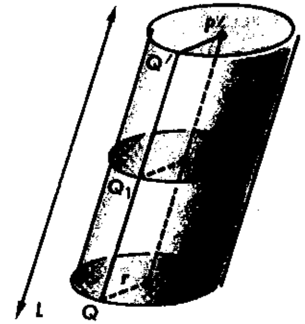
Exatamente como antes, usamos uma reta L, interceptando E_1 e E_2 mas não a base. Formamos a reunião de todos os segmentos $\overline{QQ'}$, onde Q está na base, Q' em E_2 e $\overline{QQ'} \parallel L$. O sólido resultante é chamado cilindro circular. Não há necessidade de se repetir as definições de altura, seção transversal, etc., porque são exatamente as mesmas que as definições correspondentes para prismas. Se $L \perp E_1$, então o cilindro é chamado cilindro reto.

Evidentemente, podemos obter outros tipos de cilindros usando outras figuras como bases. Os cilindros circulares, entretanto, serão os únicos que discutiremos neste livro.

Da mesma forma, o esquema que usamos para formar uma pirâmide pode ser usado igualmente bem quando a base não é uma região poligonal. Se usamos uma região circular como base, o sólido resultante é chamado cone circular.



Os seguintes teoremas sôbre cilindros e cones são análogos aos teoremas correspondentes sôbre prismas e pirâmides. As demonstrações também são muito semelhantes: a questão é que a forma da base nunca tem muita importância. Omitiremos, portanto, os detalhes.



Teorema 17-11

Tôda seção transversal de um cilindro circular é um círculo congruente à base.

A demonstração se baseia no fato de que $P_1Q_1 = PQ = r$; isto é verdade porque $\overline{PQ}$ e $\overline{P_1Q_1}$ são lados opostos do paralelogramo $\square QQ_1P_1P$.

Teorema 17-12

Tôda seção transversal de um cilindro circular tem a mesma área que a base.

O próximo teorema é ligeiramente mais difícil.

Teorema 17-13

É dado um cone de altura h e uma seção transversal feita por um plano a uma distância k do vértice. A área da seção é igual a k/h vêzes a área da base.

Na notação da figura, as principais passagens da demonstração são as seguintes:

(1) $\quad \Delta VPT \sim \Delta VP'T'$,

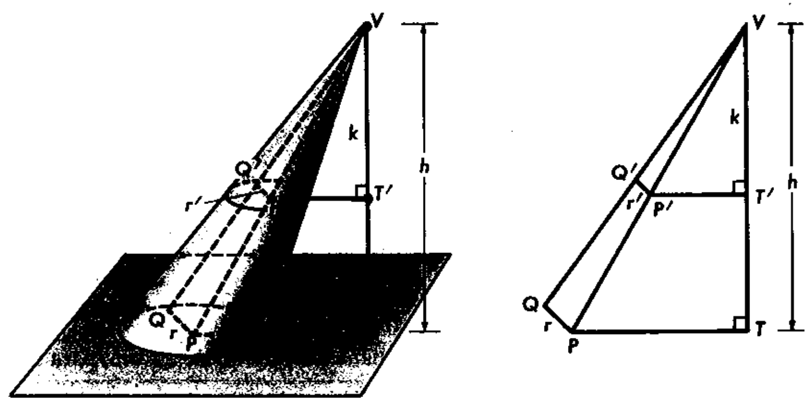
(2) $\quad \dfrac{VP'}{VP} = \dfrac{VT'}{VT} = \dfrac{k}{h}$,

(3) $\quad \Delta VP'Q' \sim \Delta VPQ$,

(4) $\quad \dfrac{P'Q'}{PQ} = \dfrac{VP'}{VP} = \dfrac{k}{h} \quad$ e $\quad P'Q' = \dfrac{k}{h}PQ$.

Assim, se Q está sôbre a circunferência de centro P e raio r na base, então Q' está sôbre a circunferência de centro P' e raio

$$r' = \frac{k}{h}PQ = \frac{k}{h}r$$



na seção transversal. Portanto, a seção transversal é um círculo de raio r' e a área é

$$\pi \frac{k^2}{h^2} r^2.$$

Isto é igual a k^2/h^2 vêzes a área da base.

Podemos, agora, calcular os volumes de cilindros e cones, usando o Princípio de Cavalieri do mesmo modo que fizemos para prismas e pirâmides.

Teorema 17-14

O volume de um cilindro circular é o produto da altura pela área da base.

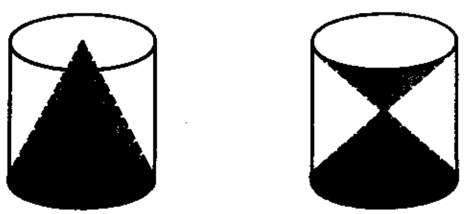
A demonstração é semelhante à demonstração do Teorema 17-7.

Teorema 17-15

O volume de um cone reto é um têrço do produto da altura pela área da base.

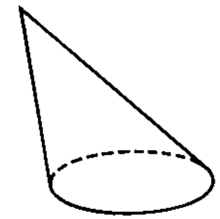
A demonstração é semelhante à demonstração do Teorema 17-10.

Problemas 17-4

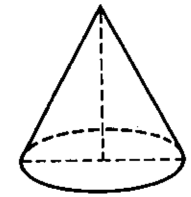
1. A base de um cilindro é um círculo de diâmetro 8. A altura do cilindro é também 8. Qual o seu volume?
2. Um cano de drenagem é um tubo cilíndrico com 210 cm de comprimento. Os diâmetros interior e exterior são 45 cm e 51 cm. Calcule o volume de barro necessário para a fabricação de um cano. (Use $3\frac{1}{7}$ para π.)
3. 

Os dois cilindros da figura são idênticos. Compare o volume do cone à esquerda com o volume dos dois cones à direita.

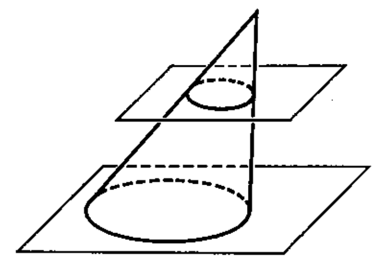
4. Qual o comprimento de um tubo com diâmetro interno de 2,5 cm, para que possa conter 1 m^3 de água? (Use $3\frac{1}{7}$ para π.)



5. Determine o volume de um cone circular cuja altura é 12 e cuja base tem um raio de 3,2.



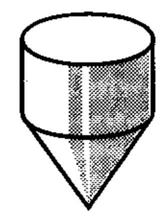
6. Esta figura representa um *cone circular reto.* Defina cone circular reto. Determine a altura quando o volume é 48π e o diâmetro da base é 8.
7. Um tanque cônico tem 10,5 pés de profundidade e seu tôpo circular tem um raio de 5 pés. Quantos galões de líquido o tanque conterá? (1 pé cúbico contém 7,48 galões.)



8. Em um cone, a altura é 9. Um plano paralelo ao plano da base intercepta o cone, separando um cone menor na parte superior. A distância entre os planos é 5.

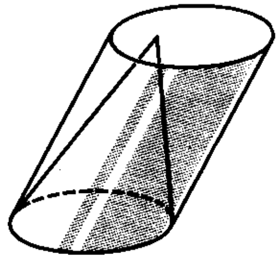
   (a) Qual é a razão entre as alturas dos dois cones?
   (b) Qual é a razão entre os raios das bases dos cones?
   (c) Qual é a razão entre as áreas das bases?
   (d) Qual é a razão entre os volumes dos dois cones?

9. A altura de um cone é 5 cm. Um plano, a 2 cm do vértice do cone, é paralelo à base do cone. Se o volume do cone menor é 24 cm^2, qual é o volume do cone maior?
10. Uma pirâmide quadrangular está inscrita em um cone circular de tal modo que tenham o mesmo vértice, e a base da pirâmide esteja inscrita na base do cone. A altura comum é 18 e um lado do quadrado é 15. Determine o volume de cada um.



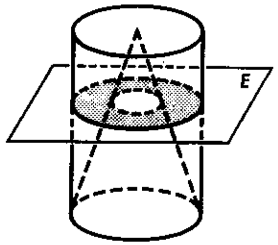
11. Um silo para armazenagem de cereais tem a forma da figura. O raio do cilindro superior é 3,5 m. A altura total do silo é 13 m e a altura da seção cônica é 6 m. Determine a capacidade do silo.

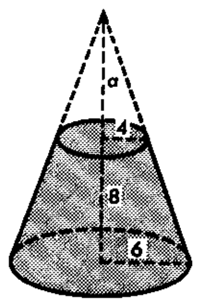
12. Uma superfície cônica está dentro de uma superfície cilíndrica. A base do cone é a base do cilindro e o vértice do cone está na base superior do cilindro. Escreva uma fórmula para o volume do espaço limitado pelas duas superfícies e a base superior em têrmos de r, o raio da base, e h, a altura do cilindro.



* 13. Um plano paralelo às bases intercepta a figura do Problema 12, e é equidistante delas. Faça um esbôço da interseção, vista por cima. Se o raio do cilindro é 4, qual é a área da interseção do plano com o espaço entre as duas superfícies?

14. Na figura, o cone circular reto está inscrito no cilindro circular reto. O plano E é paralelo à base do cilindro e se acha a 14 cm acima da base. A altura do cone é 21 cm e o raio da base é 6 cm. Determine a área da interseção do plano E com o espaço entre as duas superfícies.





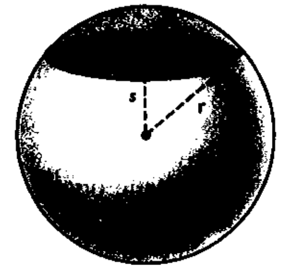
+ 15. Um tronco de cone tem altura 8 e os raios das bases superior e inferior são 4 e 6, respectivamente. Qual é o volume? (Veja o Problema 14 de Problemas 17-3.)

17-5. O VOLUME DA ESFERA E A ÁREA DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

Esfera é a reunião da superfície esférica e seu interior.

Até aqui, no cálculo de volumes, nossa melhor arma tem sido o Princípio de Cavalieri. Para usar êste princípio no problema da esfera, precisamos achar um outro sólido cujas seções transversais tenham as mesmas áreas, em todos os níveis. Portanto, nosso primeiro passo deve ser determinar as áreas das seções transversais da esfera. Isto é fácil. Dada uma esfera de raio r, as seções transversais horizontais são regiões circulares. Se a seção transversal está a uma distância s do centro, e o raio é t, então, pelo Teorema de Pitágoras, sabemos que

$$t^2 = r^2 - s^2.$$

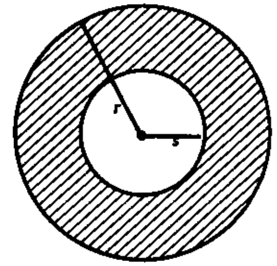


Portanto, a área da seção transversal à distância s é

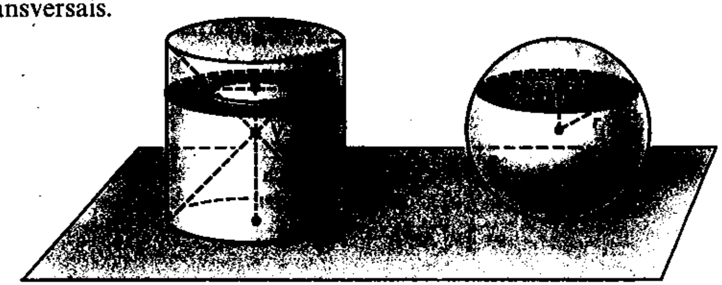
$$\begin{aligned} A_s &= \pi t^2 \\ &= \pi(r^2 - s^2) \\ &= \pi r^2 - \pi s^2. \end{aligned}$$

Esta última fórmula tem um significado geométrico: é a área da coroa de raio interno s e raio externo r, como é mostrado na figura.

$$A = \pi r^2 - \pi s^2$$



Formaremos, agora, um sólido que tenha regiões desta forma como seções transversais.



Tomamos um plano horizontal E, tangente à esfera. Neste plano, tomamos um círculo de raio r. Usando-o como base, formamos um cilindro circular reto de altura $2r$. Seja V o ponto médio do eixo do cilindro, isto é, do segmento vertical que liga os centros das bases. Formamos dois cones, tendo as bases do cilindro como bases e o ponto V como vértice comum.

O sólido que está dentro dos cilindros e fora dos cones é um sólido do tipo que estamos procurando: cada uma de suas seções transversais é uma coroa e as seções transversais a uma distância s de V têm área $\pi(r^2 - s^2)$. Portanto, o volume dêste sólido é o mesmo que o volume da esfera.

Mas o volume do nôvo sólido é fàcilmente calculado: é igual ao volume do cilindro menos os volumes dos cones. Isto nos dá

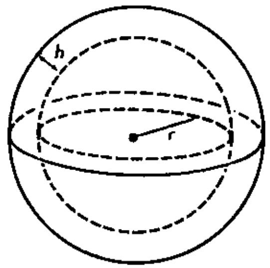
$$\begin{aligned} &\pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \tfrac{1}{3}\pi r^2 r \\ &= 2\pi r^3 - \tfrac{2}{3}\pi r^3 \\ &= \tfrac{4}{3}\pi r^3. \end{aligned}$$

Desta forma, demonstramos o seguinte teorema:

Teorema 17-16

O volume de uma esfera de raio r é $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Existe um artifício que nos permite usar êste resultado para determinar a área da superfície esférica. Dada uma esfera de raio r, formamos uma esfera um pouco maior, de raio $r + h$. O sólido entre as duas esferas está representado na figura abaixo. Seja A a área da superfície esférica e seja V o volume do sólido entre as duas esferas. Então V é aproximadamente Ah e se h é pequeno, a aproximação é boa. (Por exemplo, se você tivesse uma bola com raio de 30 cm e a pintasse com uma fina camada de tinta, digamos, com um centésimo de milímetro de expessura, então o volume total de tinta a ser usado seria cêrca de $\frac{1}{100}A$.) Assim, V/h é aproximadamente A quando h é pequeno. E quando $h \to 0$, temos



$$\frac{V}{h} \to A.$$

Mas podemos calcular V/h exatamente e ver para que expressão se aproxima quando $h \to 0$. Ora, V é a diferença dos volumes de duas esferas. Portanto

$$\begin{aligned} V &= \tfrac{4}{3}\pi(r + h)^3 - \tfrac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \tfrac{4}{3}\pi[(r + h)^3 - r^3] \\ &= \tfrac{4}{3}\pi[r^3 + 3r^2h + 3rh^2 + h^3 - r^3] \\ &= \tfrac{4}{3}\pi[3r^2h + 3rh^2 + h^3]. \end{aligned}$$

[Você deve verificar que $(r + h)^3$ é, realmente, igual a $r^3 + 3r^2h + 3rh^2 + h^3$.] Portanto

$$\begin{aligned} \frac{V}{h} &= \tfrac{4}{3}\pi(3r^2 + 3rh + h^2) \\ &= 4\pi r^2 + h(4\pi r + \tfrac{4}{3}\pi h). \end{aligned}$$

Quando $h \to 0$, todo o segundo têrmo se aproxima de 0. Portanto

$$\frac{V}{h} \to 4\pi r^2.$$

Como sabemos também que

$$\frac{V}{h} \to A,$$

segue-se que

$$A = 4\pi r^2.$$

Assim, demonstramos o seguinte teorema:

Teorema 17-17

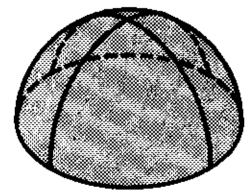
A área da superfície esférica de raio r é

$$A = 4\pi r^2.$$

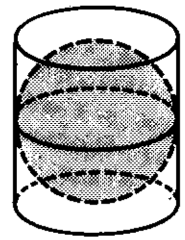
Observe o fato, bastante curioso, que a área da superfície esférica é exatamente quatro vêzes a área de uma seção transversal pelo centro.

Problemas 17-5

1. Determine a área da superfície esférica e o volume de uma esfera cujo raio é 4.
2. Numa esfera de diâmetro 4, o que é maior, a área da superfície ou o volume?
3. Numa esfera de diâmetro 10, o que é maior, a área da superfície ou o volume?
4. Qual é o diâmetro de uma esfera para a qual o volume é igual à área da superfície?
5. Um tanque de armazenagem para combustível, de forma esférica, tem um raio de 7 pés. Quantos galões poderá conter? (Um pé cúbico equivale a 7,48 galões. Use $3\frac{1}{7}$ para π.)
6. Um recipiente para sorvete, de forma cônica, tem 10 cm de profundidade e 4 cm de diâmetro, na bôca. São colocadas duas colheradas de sorvete no recipiente, sendo a colher de forma hemisférica, também de diâmetro de 4 cm. Se o sorvete derreter no cone, êle transbordará?
7. Um grande reservatório em forma de hemisfério é construído. Se gastamos 13 galões de tinta para pintar o assoalho do reservatório, quantos galões serão necessários para pintar o exterior da construção?



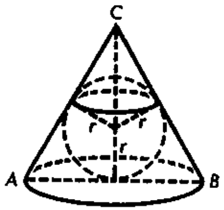
8. Os volumes de uma esfera e de um cilindro circular são iguais e o diâmetro da esfera é igual ao diâmetro da base do cilindro. Determine a altura do cilindro em têrmos do diâmetro da esfera.
9. O diâmetro de uma certa esfera é igual ao raio de uma segunda esfera.
   (a) Qual é a razão entre os raios?
   (b) Qual é a razão entre as áreas das superfícies?
   (c) Qual é a razão entre os volumes?
10. O diâmetro de uma certa esfera é igual a um têrço do raio de uma segunda esfera. Responda as questões do Problema 9 para estas esferas.
11. Arquimedes (287-212 A.C.) mostrou que o volume de uma esfera é dois terços do volume do menor cilindro circular reto que a contém. Verifique êste fato.



12. O diâmetro da Lua é aproximadamente um quarto do diâmetro da Terra. Compare os volumes da Lua e da Terra.

13. Cêrca de três quartos da superfície da Terra é coberta por água. Quantos milhões de quilômetros quadrados da superfície terrestre é coberta por terra? (Use 12.800 km como diâmetro da Terra e 3,14 como aproximação de π.)

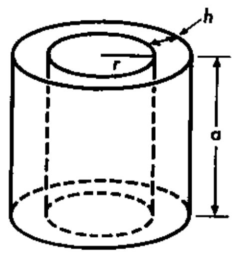
14. Na figura, a esfera está inscrita em um cone circular reto. $\overline{AB}$ é o diâmetro da base e C é o vértice do cone. ΔABC é equilátero. Determine o volume do cone em têrmos de r, raio da esfera.



* 15. O volume de uma esfera é metade do volume de uma outra esfera. Qual é a razão entre os raios?

* 16. Um engenheiro municipal, que tinha 1,8 m de altura, inspecionava a construção de um nôvo reservatório de água, de forma esférica. Sua cabeça tocava o tanque exatamente quando êle estava a 5,4 m do ponto onde o reservatório encontrava o chão. Sabendo que a cidade consumia 5000 m^3 de água por hora, o engenheiro calculou, imediatamente, quantas horas duraria um tanque completamente cheio. Como êle o fêz e qual é o resultado?

*+ 17. Usando o método empregado na dedução da fórmula da área de uma superfície esférica (Teorema 17-17), mostre que a área lateral de um cilindro circular reto é $2\pi ra$, onde r é o raio da base e a é a altura.



Problema Magno

Uma esfera e um cilindro circular reto têm volumes iguais. O raio da esfera é igual ao raio da base do cilindro. Compare a área da superfície esférica com a área da superfície total do cilindro.

Revisão do Capítulo

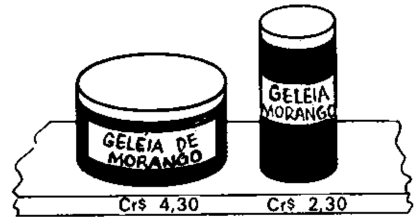
1. Sem consultar o texto, tente escrever, de memória, e identificar tôdas as fórmulas de áreas e volumes que constam dêste capítulo.

2. Copie e complete cada sentença com os têrmos apropriados:
   (a) As bases de qualquer prisma são .... e ....
   (b) As faces laterais de um prisma são regiões ....
   (c) A superfície de um prisma é a .... das .... do prisma.
   (d) Se a base de um prisma é um paralelogramo, o prisma é chamado ....
   (e) Se duas pirâmides triangulares têm bases congruentes, os seus volumes são proporcionais à ....

3. Copie e complete cada sentença com os têrmos apropriados:
   (a) Em um prisma reto, cada aresta lateral é .... à base.
   (b) Uma seção transversal de uma pirâmide é a .... da pirâmide e um plano .... à base.
   (c) As áreas de duas seções transversais de uma pirâmide são proporcionais às suas .... ao vértice da ....
   (d) Se um cone e um cilindro têm bases congruentes e alturas iguais, o volume do cilindro é .... o volume do cone.
   (e) Os volumes de duas esferas são proporcionais ao .... de seus raios e as superfícies de duas esferas são proporcionais ao .... de seus raios.

4. A base de um prisma reto é uma região hexagonal regular. Uma aresta da base mede 2 cm de comprimento e uma aresta lateral mede 7 cm. Determine a área da superfície lateral do prisma. Determine a área de uma seção transversal 5 cm acima da base.

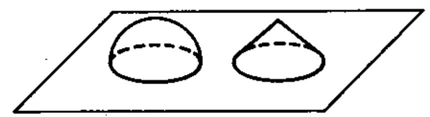
5. Duas latas de geléia de morango, de mesma marca, estão em uma prateleira de um supermercado. A lata mais alta possui o dôbro da altura da outra, mas seu diâmetro é metade do diâmetro da lata mais baixa. A lata mais alta custa Cr$ 2,30 e a outra Cr$ 4,30. Qual lata proporciona mais economia?



6. Qual é o volume de um cone cuja altura é 6 e cujo diâmetro da base é 10?

7. O volume de uma pirâmide quadrangular é 384 m^3 e sua altura é 8 m. Qual é o comprimento de cada aresta da base? Qual é a área da superfície lateral da pirâmide? (Suponha que a projeção do vértice é o centro da base.)

8. As bases de um hemisfério e de um cone são círculos congruentes e coplanares. O plano pelo vértice do cone e paralelo ao plano das bases é tangente ao hemisfério. Qual é a razão entre os volumes do cone e do hemisfério?



9. A base de um tretaedro é um triângulo cujos lados medem 10, 24 e 26. A altura do tetraedro é 20. Determine a área da seção transversal cuja distância à base é 15.

10. Sendo 18 o diâmetro de uma esfera, calcule o volume e a área da superfície esférica.

11. O volume de um cone é 400 m^3 e o raio de sua base é 5 m. Determine a altura.

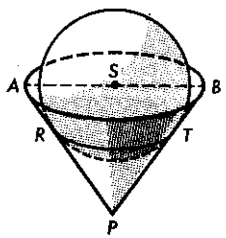
12. Duas esferas concêntricas têm raios de 3 m e 2 m, respectivamente. Qual é o volume compreendido entre as superfícies esféricas?

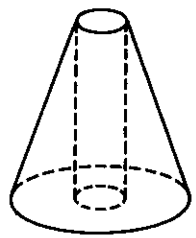
13. Demonstre que o volume de uma esfera é dado pela fórmula $\frac{1}{6}\pi d^3$, onde d é o diâmetro.

14. O volume de uma pirâmide, cuja altura é 12 cm, é 432 cm^3. Determine a área de uma seção transversal a 3 cm acima da base.

15. São dados dois cones. A altura do primeiro é metade da do segundo e o raio da base do primeiro é metade do raio da base do segundo. Compare os volumes.

16. Uma esfera está inscrita em um cilindro circular reto, de tal forma que é tangente a ambas as bases. Qual é a razão entre o volume da esfera e o volume do cilindro?
17. Um vaso de forma cilíndrica, de raio de 12 cm e altura de 25 cm, é preenchido com água. Uma esfera, de diâmetro de 20 cm, é colocada dentro do vaso com água e, então, removida. Qual é o volume da água que permanece no vaso?
* 18. Um paralelepípedo retângulo, cujas medidas da base são 12 e 20, está inscrito em uma esfera de diâmetro 25. Determine o volume da parte da esfera exterior ao paralelepípedo.
* 19. A base de um cone circular reto tem diâmetro de 12 cm e a altura do cone é 12 cm. Enche-se o cone de água. Uma esfera é colocada no cone, até alcançar a posição de repouso. Exatamente metade da esfera fica fora da água. Depois da esfera ser removida, qual é o volume da água que fica no cone?





* 20. A altura de um cone circular reto é 15 e o raio da base é 8. Perfura-se uma cavidade cilíndrica de diâmetro 4 ao longo do cone, cujo eixo coincide com o eixo do cone, resultando um sólido como é visto na figura. Qual é o volume do sólido?

Problema Magno

É dado um retângulo $\square ABCD$. $\overline{PQ}$ é um segmento fora do plano do $\square ABCD$, tal que $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$. Trace $\overline{PA}$, $\overline{PD}$, $\overline{QC}$ e $\overline{QB}$. O comprimento de um segmento perpendicular ao plano de $\square ABCD$ por um ponto de $\overline{PQ}$ é h. Sejam $AD = a$, $AB = b$ e $PQ = c$. Demonstre que o volume do sólido $ABCDPQ$ é igual a

$$\tfrac{1}{6}ah(2b + c)$$

POSTULADOS E TEOREMAS

POSTULADOS

POSTULADO 1. *O Postulado da Distância.* A todo par de pontos distintos corresponde um único número positivo.

POSTULADO 2. *O Postulado da Régua.* Os pontos de uma reta podem ser postos em correspondência com os números reais de tal modo que

(1) a cada ponto da reta corresponde exatamente um número real;
(2) a cada número real corresponde exatamente um ponto da reta; e
(3) a distância entre dois pontos quaisquer é o valor absoluto da diferença dos números correspondentes.

POSTULADO 3. *O Postulado da Colocação da Régua.* Dados dois pontos P e Q de uma reta, o sistema de coordenadas pode ser escolhido de tal modo que a coordenada de P seja zero e a coordenada de Q seja positiva.

POSTULADO 4. *O Postulado da Reta.* Para cada par de pontos distintos existe exatamente uma reta que os contém.

POSTULADO 5.

(a) Todo plano contém pelo menos três pontos não-colineares.
(b) O espaço contém pelo menos quatro pontos não-coplanares.

POSTULADO 6. Se dois pontos de uma reta estão em um plano, então a reta está contida nesse plano.

POSTULADO 7. *O Postulado do Plano.* Três pontos quaisquer pertencem pelo menos a um plano e três pontos não-colineares quaisquer pertencem a exatamente um plano.

POSTULADO 8. Se dois planos distintos se interceptam, a interseção é uma reta.

POSTULADO 9. *O Postulado da Separação do Plano.* Dados uma reta e um plano que a contém, os pontos do plano que não pertencem à reta formam dois conjuntos tais que

(1) cada um dos conjuntos é convexo, e
(2) se P pertence a um dos conjuntos e Q ao outro, então o segmento $\overline{PQ}$ intercepta a reta.

POSTULADO 10. *O Postulado da Separação do Espaço.* Os pontos do espaço que não pertencem a um plano dado formam dois conjuntos tais que

(1) cada um dos conjuntos é convexo, e
(2) se P pertence a um dos conjuntos e Q ao outro, então o segmento $\overline{PQ}$ intercepta o plano.

POSTULADO 11. *O Postulado da Medida do Ângulo.* A todo ângulo $\angle BAC$ corresponde um número real entre 0 e 180.

POSTULADO 12. *O Postulado da Construção de um Ângulo.* Seja $\overrightarrow{AB}$ uma semi-reta contida na origem do semiplano H. Para todo número r entre 0 e 180 existe exatamente uma semi-reta $\overrightarrow{AP}$, com P em H, tal que $m\angle PAB = r$.

POSTULADO 13. *O Postulado da Adição de Ângulos.* Se D está no interior do $\angle BAC$, então $m\angle BAC = m\angle BAD + m\angle DAC$.

POSTULADO 14. *O Postulado do Suplemento.* Se dois ângulos formam um par linear, então êles são suplementares.

POSTULADO 15. *O Postulado LAL.* Tôda correspondência LAL é uma congruência.

POSTULADO 16. *O Postulado ALA.* Tôda correspondência ALA é uma congruência.

POSTULADO 17. *O Postulado LLL.* Tôda correspondência LLL é uma congruência.

POSTULADO 18. *O Postulado das Paralelas.* Por um ponto fora de uma reta, existe sòmente uma reta paralela à reta dada.

POSTULADO 19. *O Postulado da Área.* A tôda região poligonal corresponde um único número real positivo.

POSTULADO 20. *O Postulado da Congruência.* Se dois triângulos são congruentes, então as regiões triangulares determinadas por êles têm a mesma área.

POSTULADO 21. *O Postulado da Adição de Áreas.* Supondo que a região R é a reunião de duas regiões R_1 e R_2 e supondo que R_1 e R_2 se interceptem, no máximo, em um número finito de segmentos e pontos, então $aR = aR_1 + aR_2$.

POSTULADO 22. *O Postulado da Unidade.* A área de uma região quadrada é o quadrado do comprimento do seu lado.

POSTULADO 23. *O Postulado da Unidade.* O volume de um paralelepípedo retângulo é o produto da área da base pela altura.

POSTULADO 24. *O Princípio de Cavalieri.* São dados dois sólidos e um plano. Suponha que todo plano paralelo ao plano dado, interceptando um dos dois sólidos, também interceptará o outro, dando seções transversais de mesma área. Então os dois sólidos têm o mesmo volume.

TEOREMAS

TEOREMA 2–1. Seja $\overrightarrow{AB}$ uma semi-reta e seja x um número positivo. Então existe exatamente um ponto P de $\overrightarrow{AB}$ tal que $AP = x$.

TEOREMA 2–2. Todo segmento tem exatamente um ponto médio.

TEOREMA 3–1. Se duas retas distintas se interceptam, a interseção contém sòmente um ponto.

TEOREMA 3–2. Se uma reta intercepta um plano que não a contém, a interseção contém sòmente um ponto.

TEOREMA 3–3. Dados uma reta e um ponto fora da reta, existe exatamente um plano que os contém.

TEOREMA 3–4. Dadas duas retas que se interceptam, existe exatamente um plano que as contém.

TEOREMA 4–1. Se dois ângulos são complementares, ambos são agudos.

TEOREMA 4–2. Todo ângulo é congruente a si mesmo.

TEOREMA 4–3. Dois ângulos retos quaisquer são congruentes.

TEOREMA 4–4. Se dois ângulos são congruentes e suplementares então cada um é um ângulo reto.

TEOREMA 4–5. Suplementos de ângulos congruentes são congruentes.

TEOREMA 4–6. Complementos de ângulos congruentes são congruentes.

TEOREMA 4–7. *Teorema dos Ângulos Opostos pelo Vértice.* Ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

TEOREMA 4–8. Se duas retas que se interceptam formam um ângulo reto, então elas formam quatro ângulos retos.

TEOREMA 5–1. Todo segmento é congruente a si mesmo.

TEOREMA 5–2. Todo ângulo possui exatamente uma bissetriz.

TEORENA 5–3. *O Teorema do Triângulo Isósceles.* Se dois lados de um triângulo são congruentes, então os ângulos opostos a êstes lados são congruentes.

TEOREMA 5–4. Se dois ângulos de um triângulo são congruentes, então os lados opostos a êstes ângulos são congruentes.

TEOREMA 6–1. Num plano dado, por um ponto dado de uma reta dada, existe uma e uma só reta perpendicular à reta dada.

TEOREMA 6–2. *O Teorema da Mediatriz.* A mediatriz de um segmento em um plano é o conjunto de todos os pontos do plano eqüidistantes das extremidades do segmento.

TEOREMA 6–3. Por um ponto dado, fora de uma reta, existe pelo menos uma reta perpendicular à reta dada.

TEOREMA 6–4. Por um ponto dado, fora de uma reta, existe no máximo uma reta perpendicular à reta dada.

TEOREMA 6–5. Se M está entre A e C na reta L, então M e A estão no mesmo lado de qualquer outra reta que contenha C.

TEOREMA 6–6. Se M está entre B e C e A é qualquer ponto não em $\overleftrightarrow{BC}$, então M está no interior de $\angle BAC$.

TEOREMA 7–1. Se $a = b + c$ e $c > 0$, então $a > b$.

TEOREMA 7–2. *O Teorema do Ângulo Externo.* Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um de seus ângulos internos não adjacentes.

TEOREMA 7–3. *O Teorema LAA.* Tôda correspondência *LAA* é uma congruência.

TEOREMA 7–4. É dada uma correspondência entre dois triângulos retângulos. Se a hipotenusa e um cateto de um dos triângulos são congruentes às partes correspondentes do segundo triângulo, então a correspondência é uma congruência.

TEOREMA 7–5. Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a êles não são congruentes e o maior ângulo se opõe ao maior lado.

TEOREMA 7–6. Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a êstes ângulos não são congruentes e o maior lado se opõe ao maior ângulo.

TEOREMA 7–7. O menor segmento ligando um ponto a uma reta é o segmento perpendicular à reta.

TEOREMA 7–8. *A Desigualdade Triangular.* A soma dos comprimentos de dois lados quaisquer de um triângulo é maior que o comprimento do terceiro lado.

TEOREMA 7–9. *O Teorema da Dobradiça.* Se dois lados de um triângulo são congruentes, respectivamente, a dois lados de um segundo triângulo e se o ângulo determinado por êles no primeiro triângulo é maior que o ângulo correspondente no segundo, então o terceiro lado do primeiro triângulo é maior que o terceiro lado do segundo.

TEOREMA 7–10. *O Recíproco do Teorema da Dobradiça.* Se dois lados de um triângulo são congruentes, respectivamente, a dois lados de um segundo triângulo e se o terceiro lado do primeiro triângulo é maior que o terceiro lado do segundo, então o ângulo determinado pelos dois lados no primeiro triângulo é maior que o ângulo determinado pelos lados correspondentes no segundo.

TEOREMA 8–1. Se B e C são eqüidistantes de P e Q, então todo ponto entre B e C é eqüidistante de P e Q.

TEOREMA 8–2. Se uma reta é perpendicular a duas retas que se interceptam, então ela é perpendicular ao plano que as contém.

TEOREMA 8–3. Por um ponto de uma reta passa um plano perpendicular a esta reta.

TEOREMA 8–4. Se uma reta e um plano são perpendiculares, então o plano contém tôda reta perpendicular à reta dada no seu ponto de interseção com o plano dado.

TEOREMA 8–5. Por um ponto de uma reta existe sòmente um plano perpendicular a esta reta.

TEOREMA 8–6. O plano perpendicular a um segmento, passando pelo seu ponto médio, é o conjunto de todos os planos eqüidistantes das extremidades do segmento.

TEOREMA 8–7. Duas retas perpendiculares ao mesmo plano são coplanares.

TEOREMA 8–8. Por um ponto dado passa um e sòmente um *plano* perpendicular à *reta* dada.

TEOREMA 8–9. Por um ponto dado passa uma e sòmente uma *reta* perpendicular a um *plano* dado.

TEOREMA 8–10. O menor segmento ligando um ponto externo a um plano é o segmento perpendicular.

TEOREMA 9–1. Duas retas paralelas estão contidas em exatamente um plano.

TEOREMA 9–2. Duas retas em um plano são paralelas se ambas forem perpendiculares a uma mesma reta.

TEOREMA 9–3. Seja L uma reta e P um ponto fora de L. Então existe pelo menos uma reta por P, paralela a L.

TEOREMA 9–4. Se duas retas são cortadas por uma transversal e se um par de ângulos alternos e internos é formado por ângulos congruentes, então o outro par de ângulos alternos e internos também é formado por ângulos congruentes.

TEOREMA 9–5. *O Teorema AIP.* Dadas duas retas cortadas por uma transversal, se um par de ângulos alternos e internos é formado por ângulos congruentes então as retas são paralelas.

TEOREMA 9–6. Dadas duas retas cortadas por uma transversal, se um par de ângulos correspondentes é formado por ângulos congruentes, então qualquer par de ângulos alternos e internos é formado por ângulos congruentes.

TEOREMA 9–7. Dadas duas retas cortadas por uma transversal, se um par de ângulos correspondentes é formado por ângulos congruentes, então as retas são paralelas.

TEOREMA 9–8. *O Teorema PIA.* Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos alternos e internos são congruentes.

TEOREMA 9–9. Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, cada par de ângulos correspondentes é formado por ângulos congruentes.

TEOREMA 9–10. Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, os ângulos internos, do mesmo lado da transversal, são suplementares.

TEOREMA 9–11. Em um plano, se duas retas são paralelas a uma terceira, elas são paralelas entre si.

TEOREMA 9–12. Em um plano, se uma reta é perpendicular a uma de duas retas paralelas então ela é perpendicular à outra.

TEOREMA 9–13. Para todo triângulo, a soma das medidas dos ângulos é 180.

TEOREMA 9–14. Tôda diagonal separa um paralelogramo em dois triângulos congruentes.

TEOREMA 9–15. Em um paralelogramo, dois lados opostos quaisquer são congruentes.

TEOREMA 9–16. Em um paralelogramo, dois ângulos opostos quaisquer são congruentes.

TEOREMA 9–17. Em um paralelogramo, dois ângulos consecutivos quaisquer são suplementares.

TEOREMA 9–18. As diagonais de um paralelogramo se dividem ao meio.

TEOREMA 9–19. Um quadrilátero no qual ambos os pares de lados opostos são congruentes, é um paralelogramo.

TEOREMA 9–20. Se dois lados de um quadrilátero são paralelos e congruentes, então o quadrilátero é um paralelogramo.

TEOREMA 9–21. Se as diagonais de um quadrilátero se dividem ao meio, então o quadrilátero é um paralelogramo.

TEOREMA 9–22. O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e seu comprimento é a metade do comprimento dêste.

TEOREMA 9-23. Se um paralelogramo tem um ângulo reto, então tem quatro ângulos retos e o paralelogramo é um retângulo.

TEOREMA 9-24. Em um losango, as diagonais são perpendiculares entre si.

TEOREMA 9-25. Se as diagonais de um quadrilátero se dividem ao meio e são perpendiculares, então o quadrilátero é um losango.

TEOREMA 9-26. A mediana em relação à hipotenusa de um triângulo retângulo tem por comprimento a metade do comprimento da hipotenusa.

TEOREMA 9-27. *O Teorema do Triângulo* 30-60-90. Se um ângulo agudo de um triângulo retângulo mede 30, então o comprimento do lado oposto é a metade do comprimento da hipotenusa.

TEOREMA 9-28. Se o comprimento de um cateto de um triângulo retângulo é metade do comprimento da hipotenusa, então o ângulo oposto a êste cateto mede 30.

TEOREMA 9-29. Se três retas paralelas determinam segmentos congruentes sôbre uma transversal T, então elas determinam segmentos congruentes sôbre qualquer transversal T' paralela a T.

TEOREMA 9-30. Se três retas paralelas determinam segmentos congruentes sôbre uma transversal, então elas determinam segmentos congruentes sôbre qualquer outra transversal.

TEOREMA 10-1. Se um plano intercepta dois planos paralelos, então as interseções são duas retas paralelas.

TEOREMA 10-2. Se uma reta é perpendicular a um de dois planos paralelos, ela é perpendicular ao outro.

TEOREMA 10-3. Dois planos perpendiculares a uma mesma reta são paralelos.

TEOREMA 10-4. Duas retas perpendiculares ao mesmo plano são paralelas.

TEOREMA 10-5. Planos paralelos são sempre eqüidistantes. (Se dois planos são paralelos, todos os pontos de um dêles são eqüidistantes do outro.)

TEOREMA 10-6. Todos os ângulos planos de um mesmo diedro são congruentes.

TEOREMA 10-7. Se uma reta é perpendicular a um plano, então todo plano contendo a reta é perpendicular ao plano dado.

TEOREMA 10-8. Se dois planos são perpendiculares, então qualquer reta de um dêles, perpendicular à interseção dos planos, é perpendicular ao outro.

TEOREMA 10-9. Se uma reta e um plano não são perpendiculares, a projeção da reta sôbre o plano é uma reta.

TEOREMA 11-1. A área de um retângulo é o produto de sua base pela sua altura.

TEOREMA 11-2. A área de um triângulo retângulo é o semiproduto de seus catetos.

TEOREMA 11-3. A área de um triângulo é o semiproduto de qualquer base pela altura correspondente.

TEOREMA 11-4. A área de um trapézio é o semiproduto da altura pela soma das bases.

TEOREMA 11-5. A área de um paralelogramo é o produto de qualquer base pela altura correspondente.

TEOREMA 11-6. Se dois triângulos têm a mesma base b e a mesma altura h, então têm a mesma área.

TEOREMA 11-7. Se dois triângulos têm a mesma altura h, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases.

TEOREMA 11-8. *O Teorema de Pitágoras.* Em um triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

TEOREMA 11-9. Se o quadrado de um lado de um triângulo é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, então o triângulo é retângulo, com o ângulo reto oposto ao maior lado.

TEOREMA 11-10. *O Teorema do Triângulo Retângulo Isósceles.* Em um triângulo retângulo isósceles, a hipotenusa é igual a $\sqrt{2}$ vêzes o comprimento de cada um dos catetos.

TEOREMA 11-11. Se a base de um triângulo isósceles é $\sqrt{2}$ vêzes o comprimento de qualquer um dos dois lados congruentes, então o ângulo oposto à base é reto.

TEOREMA 11-12. Em um triângulo cujos ângulos medem 30-60-90, o cateto maior mede $\sqrt{3}/2$ vêzes o comprimento da hipotenusa.

TEOREMA 12-1. *O Teorema Fundamental sôbre Proporcionalidade.* Se uma reta paralela a um lado de um triângulo intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então ela determina segmentos que são proporcionais a êstes lados.

TEOREMA 12-2. Se uma reta intercepta dois lados de um triângulo e determina segmentos proporcionais a êstes dois lados, então ela é paralela ao terceiro lado.

TEOREMA 12-3. *O Teorema AAA sôbre Semelhança.* É dada uma correspondência entre dois triângulos. Se os ângulos correspondentes são congruentes, então a correspondência é uma semelhança.

TEOREMA 12-4. Se $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, e $\Delta DEF \cong \Delta GHI$, então $\Delta ABC \sim \Delta GHI$.

TEOREMA 12-5. *O Teorema LAL sôbre Semalhança.* É dada uma correspondência entre dois triângulos. Se dois pares de lados correspondentes são proporcionais e os ângulos que êles determinam, congruentes, então a correspondência é uma semelhança.

TEOREMA 12-6. *O Teorema LLL sôbre Semelhança.* É dada uma correspondência entre dois triângulos. Se os lados correspondentes são proporcionais, então a correspondência é uma semelhança.

TEOREMA 12-7. Em qualquer triângulo retângulo, a altura em relação à hipotenusa separa o triângulo em dois triângulos semelhantes entre si e semelhantes ao triângulo original.

TEOREMA 12-8. É dado um triângulo retângulo e a altura em relação à hipotenusa.

(1) A altura é a média geométrica dos segmentos que ela determina sôbre a hipotenusa.

(2) Cada um dos catetos é a média geométrica da hipotenusa e do segmento da hipotenusa adjacente ao cateto.

TEOREMA 12-9. Se dois triângulos são semelhantes, a razão de suas áreas é o quadrado da razão de dois lados correspondentes quaisquer.

TEOREMA 12-10. Para todo $\angle A$, $(\text{sen} \angle A)^2 + (\cos \angle A)^2 = 1$.

TEOREMA 12-11. Para todo $\angle A$, $\text{tg} \angle A = \dfrac{\text{sen} \angle A}{\cos \angle A}$.

TEOREMA 12-12. Se $\angle A$ e $\angle B$ são complementares, então $\text{sen} \angle B = \cos \angle A$ e $\cos \angle B = \text{sen} \angle A$.

TEOREMA 13–1. Em uma reta não vertical, todos os segmentos têm a mesma declividade.

TEOREMA 13–2. Duas retas não verticais são paralelas se, e sòmente se, têm a mesma declividade.

TEOREMA 13–3. Duas retas não verticais são perpendiculares se e sòmente se o produto de suas declividades fôr -1.

TEOREMA 13–4. *A Fórmula da Distância.* A distância entre os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

TEOREMA 13–5. *A Fórmula do Ponto Médio.* Dados $P_1 = (x_1, x_2)$ e $P_2 = (y_1, y_2)$, o ponto médio de $\overline{P_1P_2}$ é o ponto $P = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

TEOREMA 13–6. Se P é um ponto entre P_1 e P_2 e $\frac{P_1P}{PP_2} = r$, então

$$P = \left(\frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}\right).$$

TEOREMA 13–7. Seja L uma reta com declividade m, passando pelo ponto (x_1, y_1). Então todo ponto (x, y) de L satisfaz a equação $y - y_1 = m(x - x_1)$.

TEOREMA 13–8. O gráfico da equação $y - y_1 = m(x - x_1)$ é a reta que passa pelo ponto (x_1, y_1) e tem declividade m.

TEOREMA 13–9. O gráfico da equação $y = mx + b$ é a reta que passa pelo ponto $(0, b)$ e tem declividade m.

TEOREMA 14–1. A interseção de uma superfície esférica com um plano passando pelo centro é uma circunferência de mesmo centro e mesmo raio.

TEOREMA 14-2. Uma reta perpendicular a um raio pelo seu ponto de interseção com a circunferência é tangente à mesma.

TEOREMA 14–3. Tôda tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio que contém o ponto de tangência.

TEOREMA 14–4. A perpendicular pelo centro de uma circunferência a uma corda divide a corda ao meio.

TEOREMA 14–5. O segmento do centro de uma circunferência ao ponto médio de uma corda é perpendicular à corda.

TEOREMA 14–6. No plano de uma circunferência, a mediatriz de uma corda passa pelo centro.

TEOREMA 14-7. Na mesma circunferência ou em circunferências congruentes, cordas eqüidistantes do centro são congruentes.

TEOREMA 14–8. Na mesma circunferência ou em circunferências congruentes, duas cordas congruentes quaisquer são eqüidistantes do centro.

TEOREMA 14–9. Se uma reta intercepta o interior de uma circunferência, então ela intercepta a circunferência em dois e sòmente dois pontos.

TEOREMA 14–10. Um plano perpendicular a um raio pelo ponto de interseção do raio e a superfície esférica é tangente à mesma.

TEOREMA 14–11. Todo plano tangente a uma superfície esférica é perpendicular ao raio que contém o ponto de tangência.

TEOREMA 14–12. Se um plano intercepta o interior de uma superfície esférica, então a interseção do plano e a superfície esférica é uma circunferência. O centro dessa circunferência é o pé da perpendicular do centro da superfície esférica ao plano.

TEOREMA 14–13. A perpendicular do centro de uma superfície esférica a uma corda divide a corda ao meio.

TEOREMA 14–14. O segmento do centro de uma superfície esférica ao ponto médio de uma corda é perpendicular à corda.

TEOREMA 14–15. *Teorema da Adição de Arcos.* Se B é um ponto de $\widehat{AC}$, então

$$m\widehat{ABC} = m\widehat{AB} + m\widehat{BC}.$$

TEOREMA 14–16. A medida de um ângulo inscrito é a metade da medida do arco interceptado.

TEOREMA 14–17. Na mesma circunferência ou em circunferências congruentes, se duas cordas são congruentes, os arcos menores também o são.

TEOREMA 14–18. Na mesma circunferência ou em circunferências congruentes, se dois arcos são congruentes, as cordas correspondentes também o são.

TEOREMA 14–19. Dado um ângulo com vértice numa circunferência, formado por uma semi-reta secante e uma semi-reta tangente, a medida do ângulo é a metade da medida do arco interceptado.

TEOREMA 14–20. Os dois segmentos tangentes a uma circunferência, a partir de um ponto no exterior, são congruentes e determinam ângulos congruentes com o segmento do ponto exterior ao centro.

TEOREMA 14–21. *O Teorema da Potência.* Dada uma circunferência C e um ponto Q do seu exterior, seja L_1 uma reta secante passando por Q e interceptando C nos pontos R e S; seja L_2 uma outra reta secante passando por Q e interceptando C nos pontos U e T. Então $QR \cdot QS = QU \cdot QT$.

TEOREMA 14–22. Dado um segmento tangente $\overline{QT}$ a uma circunferência e uma reta secante passando por Q, interceptando a circunferência nos pontos R e S, temos $QR \cdot QS = QT^2$.

TEOREMA 14–23. Sejam $\overline{RS}$ e $\overline{TU}$ cordas de uma mesma circunferência interceptando-se em Q. Então $QR \cdot QS = QU \cdot QT$.

TEOREMA 14–24. O gráfico da equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ é a circunferência de centro (a, b) e raio r.

TEOREMA 14–25. Tôda circunferência é o gráfico de uma equação da forma

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0.$$

TEOREMA 14–26. O gráfico da equação $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ é (1) uma circunferência, (2) um ponto ou (3) o conjunto vazio.

TEOREMA 15–1. *O Teorema sôbre a Concorrência das Mediatrizes.* As mediatrizes dos lados de um triângulo são concorrentes. O ponto de concorrência é eqüidistante dos vértices do triângulo.

TEOREMA 15–2. *O Teorema sôbre a Concorrência das Alturas.* As três alturas de um triângulo são sempre concorrentes.

TEOREMA 15–3. A bissetriz de um ângulo, menos a extremidade, é o conjunto de todos os pontos do interior do ângulo que são eqüidistantes dos lados.

TEOREMA 15–4. *O Teorema sôbre a Concorrência das Bissetrizes.* As bissetrizes de um triângulo são concorrentes em um ponto que é eqüidistante dos três lados.

TEOREMA 15–5. *O Teorema sôbre a Concorrência das Medianas.* As medianas de um triângulo são concorrentes. O ponto de concorrência está a dois terços ao longo de cada mediana, a partir do vértice ao lado oposto.

TEOREMA 15–6. *O Teorema das Duas Circunferências.* São dadas duas circunferências de raios a e b, sendo c a distância entre os centros. De cada um dos números a, b e c é menor que a soma dos outros dois, então as circunferências se interceptam em dois pontos em lados opostos da reta que passa pelos centros.

TEOREMA 16–1. A razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro é a mesma para tôdas as circunferências.

TEOREMA 16–2. A área de um círculo de raio r é πr^2.

TEOREMA 16–3. Se dois arcos têm raios iguais, então seus comprimentos são proporcionais às medidas dos arcos.

TEOREMA 16–4. Se um arco tem medida q e raio r, seu comprimento é

$$L = \frac{q}{180} \cdot \pi r.$$

TEOREMA 16–5. A área de um setor é o semiproduto do seu raio pelo comprimento do seu arco.

TEOREMA 16–6. Se um setor tem raio r e seu arco medida q, então sua área é

$$A = \frac{q}{360} \cdot \pi r^2.$$

TEOREMA 17–1. Tôdas as seções transversais de um prisma triangular (paralelas à base) são congruentes à base.

TEOREMA 17–2. Tôdas as seções transversais de um prisma têm a mesma área.

TEOREMA 17–3. As faces laterais de um prisma são paralelogramos.

TEOREMA 17–4. Tôda seção transversal de uma pirâmide triangular, entre a base e o vértice, é uma região triangular semelhante à base. Se h é a altura e k a distância do vértice à seção transversal, então a área da seção transversal é igual a k^2/h^2 vêzes a área da base.

TEOREMA 17–5. Em qualquer pirâmide, a razão da área de uma seção transversal para a área da base é k^2/h^2, onde h é a altura da pirâmide e k é a distância do vértice ao plano da seção transversal.

TEOREMA 17–6. Se duas pirâmides têm a mesma área da base e a mesma altura, então as seções transversais, eqüidistantes dos vértices, têm a mesma área.

TEOREMA 17–7. O volume de qualquer prisma é o produto da altura e a área da base.

TEOREMA 17–8. Se duas pirâmides têm a mesma altura e a mesma área da base e se as bases estão contidas num mesmo plano, então elas têm o mesmo volume.

TEOREMA 17–9. O volume de uma pirâmide triangular é um têrço do produto de sua altura pela área de sua base.

TEOREMA 17–10. O volume de uma pirâmide é um têrço do produto da altura pela área da base.

TEOREMA 17–11. Tôda seção transversal de um cilindro circular é uma região circular congruente à base.

TEOREMA 17–12. Tôda seção transversal de um cilindro circular tem a mesma área que a base.

TEOREMA 17–13. Dado um cone de altura h e uma seção transversal feita por um plano a uma distância k do vértice, a área da seção transversal é igual a k^2/h^2 vêzes a área da base.

TEOREMA 17–14. O volume de um cilindro circular é o produto da altura pela área da base.

TEOREMA 17–15. O volume de um cone circular é um têrço do produto da altura pela área da base.

TEOREMA 17–16. O volume de uma esfera de raio r é $\frac{4}{3}\pi r^3$.

TEOREMA 17–17. A área da superfície de uma esfera de raio r é $A = 4\pi r^2$.

LISTA DE SÍMBOLOS

Abaixo está uma ligeira explicação dos símbolos usados neste livro, com referência às páginas onde são dadas explicações mais detalhadas.

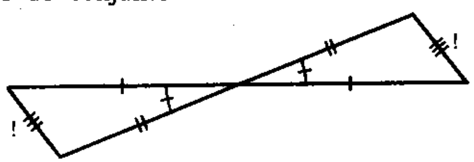
Símbolos	Significado	Para definição veja página
$=$	Igual; é igual a; é o mesmo que	13
$\neq$	Não é igual a; é diferente de	
$<$	É menor que:	
	para números	19
	para segmentos	171
	para ângulos	171
$\leq$	É menor que ou igual a:	
	para números	20
$>$	É maior que:	
	para números	19
$\geq$	É maior que ou igual a:	
	para números	20
$\sqrt{a}$	A raiz quadrada positiva de a	20
$\lvert a \rvert$	O valor absoluto de a	23
AB	A distância entre os pontos A e B	27
$\overleftrightarrow{AB}$	A reta contendo os pontos A e B	36
$\overline{AB}$	O segmento cujas extremidades são A e B	36
$\overrightarrow{AB}$	A semi-reta de origem A passando por B	36
$\angle BAC$	O ângulo cujos lados são $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$	67
$m\angle BAC$	A medida do $\angle BAC$	74
ΔABC	O triângulo cujos vértices são A, B e C	68
$\square ABCD$	O quadrilátero cujos vértices são A, B, C e D	133
A-B-C	B está entre A e C	34, 69
$\angle A \cong \angle B$.	$\angle A$ e $\angle B$ são congruentes	80
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$.	Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são congruentes	102
$ABC \leftrightarrow DEF$	A correspondência que associa A com D B com E e C com F	96
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$.	A correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$ é uma congruência.	103
$\Delta ABC \sim \Delta DEF$.	A correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$ é uma semelhança.	304
$\perp$	É perpendicular a:	
	para retas	79
	para uma reta e um plano	197
	para planos	259

Símbolos	Significado	Para definição veja página
$\parallel$	É paralelo a:	
	para retas	213
	para uma reta e um plano	251
	para planos	251
aR	A área da região R	273
$\angle A\text{-}BC\text{-}D$	O diedro de aresta $\overleftrightarrow{BC}$ com faces contendo A e D	257
$m\angle A\text{-}BC\text{-}D$	A medida de $\angle A\text{-}BC\text{-}D$	259
$\widehat{AB}$	O arco de extremidades A e B	406
$m\widehat{AB}$	A medida em graus de $\widehat{AB}$	407
sen $r°$	seno de $\angle A$ se $m\angle A = r$	329
cos $r°$	cosseno do $\angle A$ se $m\angle A = r$	329
tg $r°$	tangente do $\angle A$ se $m\angle A = r$	329

Os símbolos abaixo são freqüentemente usados para têrmos descritos ou definidos na Seção 2-1, apesar da maioria não ser usada no texto.

$\{a, b, c\}$	O conjunto cujos elementos são a, b e c
$\{a \mid a > 2\}$	O conjunto de todos os números maiores que 2
ϕ	O conjunto vazio
$A \cup B$	A reunião dos conjuntos A e B
$A \cap B$	A interseção dos conjuntos A e B
$A \subset B$	Conjunto A é um subconjunto do conjunto B
$x \in A$	x é um elemento do conjunto A

A marcação de figuras e o uso de pontos de exclamação (!) para transmitir informações são discutidos nas pp. 116, 117 e 129.



ÍNDICE ALFABÉTICO