Departamento de Matemática
Universidade de Harvard

FLOYD L. DOWNS, Jr.
Colégio Hillsdale

GEOMETRIA MODERNA

MOISE
DOWNS

PARTE I

TRADUTORES:

RENATE G. WATANABE
DORIVAL A. MELLO

Professôres de Matemática
da Universidade de São Paulo,
Universidade Mackenzie e
membros do GEEM.

EDITÔRA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

EDITÔRA EDGARD BLÜCHER LTDA.

Título Original
Geometry

A edição em língua inglêsa foi publicada pela
Addison-Wesley Publishing Company

EDITÔRA EDGARD BLÜCHER LTDA.
Rua Peixoto Gomide, 1400
Caixa Postal 5450
Fone: 287-2043
São Paulo — Brasil

APRESENTAÇÃO

O Departamento de Publicações do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática, GEEM, sente-se orgulhoso de poder apresentar aos estudiosos brasileiros, por iniciativa da Editôra Edgard Blücher Ltda., a versão portuguêsa do livro "Geometria" de Moise & Downs, considerado o mais completo tratado de Geometria, destinado a estudantes desde a terceira série ginasial até a terceira série colegial.

O propósito fundamental do livro é ensinar o leitor a "ler" matemámática e também a "escrever" sôbre ela. Caracteriza-se, principalmente, pela precisão de linguagem e exatidão nos conceitos emitidos, mesmo quando tais conceitos são explicados intuitivamente, mediante análise informal de figuras, utilizadas amplamente em tôda a exposição.

Como novidade, não faz uma separação rígida entre Geometria no plano e Geometria no espaço. Dessa forma, permite, a quem usar o livro, uma perfeita vivência entre experiências planas e espaciais.

Utiliza, ainda, métodos algébricos, introduzindo sistemas de coordenadas em uma reta, ressaltando, com êsse tratamento, a unidade da Matemática, preconizada por todos os estudiosos de hoje.

Finalmente, apresenta uma variedade elogiável de problemas atraentes: desde os mais simples até os considerados "magnos" que aí comparecem para desafiar os alunos mais interessados.

Grupo de Estudos do Ensino da Matemática
GEEM — São Paulo

Nos últimos anos, tem havido muita discussão quanto ao conteúdo de um curso de geometria normalmente ensinado no ciclo colegial. Um exame do índice dêste livro mostrará que seguimos de perto as recomendações da Comissão sôbre Matemática do College Entrance Examination Board (Conselho para Exames Vestibulares às Universidades) e que fomos fortemente influenciados pelo texto chamado *Geometria*, escrito pelo School Mathematics Study Group (SMSG). Assim, na escolha de tópicos, fomos guiados pelas idéias que êsses outros grupos geralmente aceitam.

A maneira mais simples de explicar o espírito e o método dêsse livro é reconhecer imediatamente nossa imensa dívida aos nossos colegas do SMSG. Tivemos o privilégio de participar daquela atividade e fomos estimulados por longas e sérias discussões sôbre o estilo e método de ensinar matemática. Naturalmente, escrevemos nosso livro com base em julgamento próprio, após muitos anos de trabalho, reflexão e experiência em classes colegiais; e nossas inovações são tantas que não podemos reivindicar para nosso livro qualquer suporte da autoridade do SMSG. Por outro lado, nossas opiniões sôbre questões fundamentais não mudaram muito desde os verões de 1958, 1959 e 1960; a filosofia do livro do SMSG nos parece ser tão válida agora como o era então; e consideramos ser nossa principal tarefa, melhorar sua execução.

Os principais aspectos do tratamento são os seguintes:

(1) Os conceitos de geometria no espaço são introduzidos cedo, no Cap. 3, e usados daí para frente. Êles aparecem não sòmente em capítulos posteriores sôbre geometria no espaço mas também nos problemas dos capítulos que tratam da geometria de um plano. Assim, o aluno terá uma experiência intuitiva, longa e variada, com geometria no espaço, antes de começar um estudo sistemático dessa geometria no Cap. 8.

(2) Sistemas de coordenadas numa reta são introduzidos no Cap. 2 e a álgebra é usada livremente daí para frente. Distâncias e ângulos são medidos com números e os métodos de álgebra são usados no seu tratamento. Isso torna fácil a introdução de coordenadas num plano, no Cap. 13, tão logo o aluno conheça semelhança e o Teorema de Pitágoras.

(3) A teoria sôbre áreas é em geral ensinada no fim de um curso de geometria. Aqui, introduzimos áreas no meio, no Cap. 11. Há duas razões para isso. Em primeiro lugar, área deve aparecer cedo, por ser fácil, salvo quanto às exigências que ela faz de habilidade algébrica. (Essa habilidade deve ser mantida viva de qualquer maneira.) Em segundo lugar, o conceito de área é útil para o resto da teoria: dá uma demonstração fácil do Teorema de Pitágoras (p. 285) e uma demonstração fácil do teorema da proporcionalidade (p. 307) do qual depende a teoria da semelhança.

(4) Em quase todos os casos, antes de serem formalmente definidos, os conceitos são explicados intuitivamente, por meio de discussões informais e também por figuras. Veja, por exemplo, a definição de conjunto convexo na p. 55.

(5) Na exposição, as figuras são usadas com grande freqüência e são marcadas de modo a transmitirem o máximo de informação possível. Veja a p. 104, onde explicamos o uso de marcas para indicar congruência. Veja também a p. 117, onde explicamos o uso de pontos de exclamação nas figuras. Êles são usados para indicar *conclusões*. Assim, a figura na p. 123 transmite o conteúdo todo do Teorema do Triângulo Isósceles. No fim da p. 124 há uma figura que transmite, da mesma maneira, o recíproco do teorema. E a figura no topo da p. 412, com suas marcas, nos diz que um ângulo inscrito numa semicircunferência é um ângulo reto.

(6) Tentamos inventar nomes para tantos teoremas quanto possível, para torná-los mais fáceis de se lembrar e citar. Veja, por exemplo, o Teorema da Dobradiça na p. 188 e o Postulado da Régua na p. 30.

(7) Um objetivo fundamental dêsse livro é ensinar cada estudante a ler matemática, bem como a escrevê-la. Isso não é uma tarefa fácil. Se os estudantes devem aprender o uso da linguagem matemática, deve-se dar a êles têrmos e notações que transmitam significados ràpida e corretamente. Não é costumeiro fazer isso. Por exemplo, em muitos livros a mesma notação AB é usada para representar (a) a reta que contém A e B, (b) o segmento de A a B, (c) a semi-reta de origem A, passando por B e (d) a distância entre A e B. Também é comum um livro explicar, primeiramente, a distinção entre um segmento e uma reta e, em seguida, ignorar tal distinção. Quando a linguagem é usada tão livremente, o estudante provàvelmente concluirá – e corretamente – que o livro não merece um exame cuidadoso. Nós tentamos àrduamente merecer profunda atenção do estudante através de consistente precisão e clareza.

Agradecimentos são devidos à equipe da Addison-Wesley Publishing Co., Inc., pela sua cooperação na produção do livro, em completo acôrdo com as intenções dos autores.

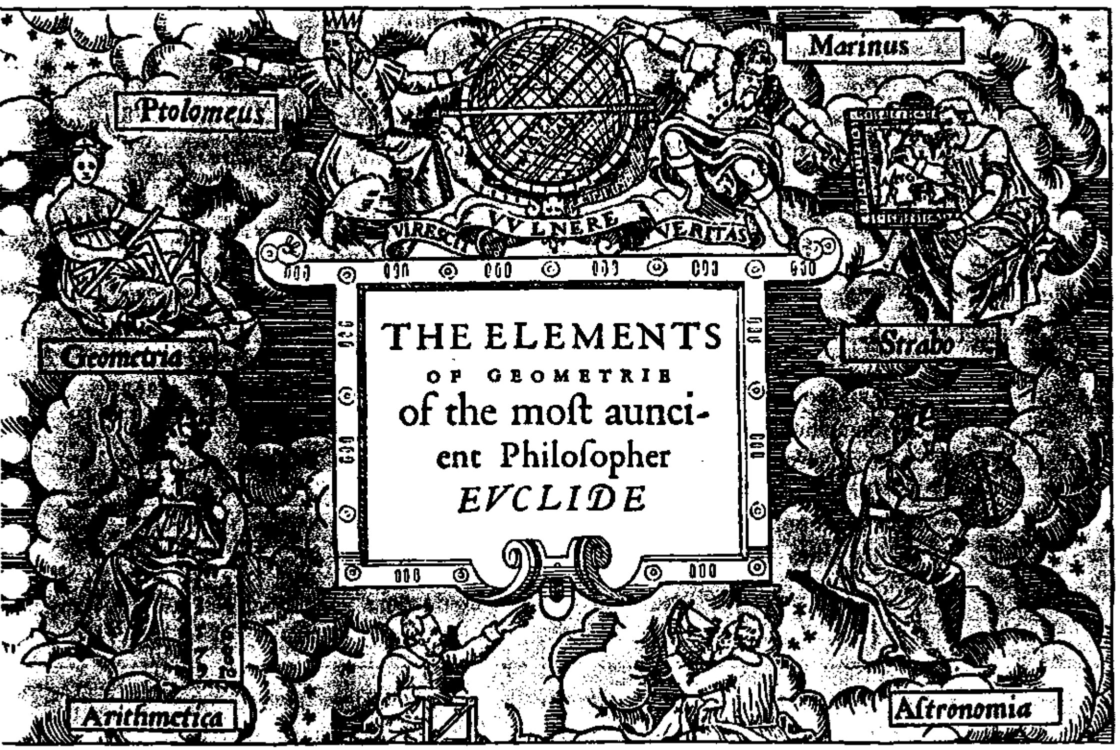
A edição do professor, dêste livro, foi preparada pelo Sr. Gerhard Wichura, de Wellesley High School, Wellesley, Mass.

Nosso reconhecimento é aqui transmitido pela permissão de imprimir nesse volume partes do texto *Geometria*, do SMSG, direitos autorais da Universidade de Yale. No entanto, essa permissão não deve ser interpretada como um endôsso do presente volume pelo School Mathematics Study Group.

E. E. M.
F. L. D., Jr.

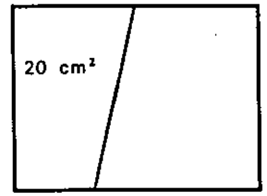
ILUSTRAÇÕES

1 BOM-SENSO E RACIOCÍNIO EXATO



1-1. DOIS TIPOS DE PROBLEMAS

Considere os seguintes problemas:



(1) Um certo retângulo mede 6 cm por 8 cm. A área compreendida é dividida em duas partes por um segmento de reta. Se a área de uma parte é 20 cm^2 qual é a área da outra parte?

(2) Num certo retângulo, a soma do comprimento e da largura é 14 (medidos em centímetros). Um segundo retângulo é cinco vêzes mais comprido que o primeiro e três vêzes mais largo. O perímetro do segundo retângulo é 91. Quais são as dimensões do primeiro retângulo?

Você poderia ser capaz de obter a resposta do Problema 1 sem ter de fazer um raciocínio muito difícil. A resposta é 28 cm^2, porque $6 \cdot 8 = 48$ e $48 - 20 = 28$. Evidentemente, poderíamos, se quiséssemos, resolver o problema algèbricamente, armando a equação

$$20 + x = 6 \cdot 8,$$

e resolvendo, então, para obter $x = 28$. Mas isto parece um pouco tolo porque não é necessário que seja resolvido desta forma. Provàvelmente você resolveu problemas mais difíceis que êste, com o auxílio da aritmética, muito antes de você ter estudado álgebra. Se tôdas as equações algébricas fôssem tão supérfluas como a que acabamos de montar, nenhuma pessoa em sã consciência daria atenção a elas.

O Problema 2, entretanto, é muito diferente. Se denotarmos o comprimento e a largura do primeiro retângulo por x e y respectivamente, então o comprimento e a largura do segundo retângulo são $5x$ e $3y$. Portanto

$$5x + 3y = \tfrac{91}{2},$$

porque a soma do comprimento e da largura é a metade do perímetro. Sabemos também, que

$$x + y = 14.$$

Isto nos dá um sistema de duas equações a duas incógnitas. Para resolver, multiplicamos cada têrmo da segunda equação por 3, obtendo

$$3x + 3y = 42,$$

e então, subtraímos esta última equação, têrmo a têrmo, da primeira. Isto nos dá

$$2x = 45\tfrac{1}{2} - 42 = 3\tfrac{1}{2} = \tfrac{7}{2}$$

ou

$$x = \tfrac{7}{4} = 1\tfrac{3}{4}.$$

Portanto

$$y = 14 - 1\tfrac{3}{4} = 12\tfrac{1}{4}.$$

Não é difícil verificar, agora, que nossa resposta satisfaz às condições do problema. De certo modo, êstes dois problemas são muito semelhantes, mas, por outro lado, são muito diferentes. O primeiro é o que você pode chamar de problema de bom-senso. É fácil prever qual deve ser a resposta e é fácil, também, verificar que a previsão natural é a resposta correta. Por outro lado, prever a resposta do segundo problema é algo quase fora de cogitação. Para resolvê-lo, precisamos conhecer alguma coisa sôbre métodos matemáticos.

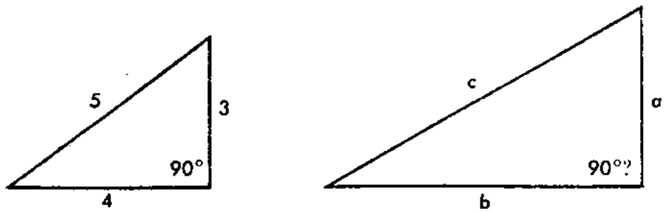
Há três casos dêste tipo na geometria. Considere os seguintes enunciados:

(1) Se um triângulo tem lados de comprimento 3, 4 e 5, então é um triângulo retângulo, com o ângulo reto oposto ao lado maior.

(2) Seja dado um triângulo com lados de comprimento a, b e c. Se

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

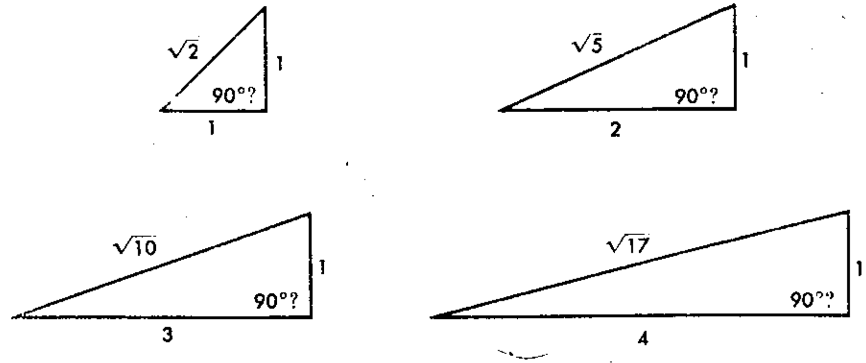
então o triângulo é retângulo, com o ângulo reto oposto ao lado maior.



O primeiro dêstes fatos já era conhecido pelos antigos egípcios. Êstes o verificaram experimentalmente. Você mesmo pode verificá-lo, desenhando um triângulo cujos lados meçam 3, 4 e 5 unidades, tão exatamente quanto possível, e então medindo o ângulo oposto ao lado maior com um transferidor. Você deve ter em mente, evidentemente, que esta verificação é apenas aproximada. Suponha que, por exemplo, o ângulo seja, de fato, $89° \, 59' 59\frac{1}{2}''$ (isto é, 89 graus, 59 minutos e $59\frac{1}{2}$ segundos) ao invés de $90° \, 0' \, 0''$ exatos. Neste caso, dificilmente você deve esperar descobrir a diferença com um transferidor, não importa quão cuidadosamente você tenha apontado seu lápis e desenhado a figura. Entretanto, o "método egípcio" é um sadio método de bom-senso para verificar um fato experimental.

Os egípcios eram extremamente hábeis no calcular medidas físicas. Os lados da base da Grande Pirâmide de Gizé medem 230,4 m de comprimento e as medidas dos quatro lados coincidem, com um êrro de apenas 1,5 cm. Ninguém parece saber, atualmente, como os construtores conseguiram tal precisão. (Quanto mais você pensar neste problema, mais difícil êle parecerá, provàvelmente.)

O enunciado (2) não era conhecido dos egípcios. Foi descoberto muito mais tarde, pelos gregos. É inteiramente impossível verificar êste fato experimentalmente, pela simples razão que há infinitos casos a serem considerados. Por exemplo, você teria de construir triângulos e tomar medidas com um transferidor em todos os seguintes casos:

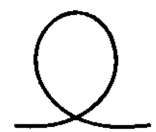


e assim sucessivamente sem cessar. Assim, não há esperança de se verificar o nosso enunciado geral, experimentalmente, mesmo de um modo aproximado. Portanto, uma pessoa normal não estaria convencida de que o enunciado 2 é verdadeiro em todos os casos, até que tenha visto uma razão lógica por que êle *tenha* de ser verdadeiro em todos os casos.

De fato, esta é a razão pela qual foram os gregos, e não os egípcios, que descobriram ser nosso segundo enunciado verdadeiro. Os egípcios foram muito bons em medições e fizeram previsões muito inteligentes, que mais tarde se tornaram verdadeiras. Mas os gregos descobriram um nôvo método que era imensamente mais poderoso. Êste era o método do raciocínio geométrico exato. Por êste método, êles transformaram previsões plausíveis em conhecimento sólido e apreenderam algumas coisas assustadoras que ninguém teria acreditado sem vê-las provadas. Dêste modo, os gregos nos deixaram os alicerces para a moderna matemática e, conseqüentemente, para a ciência moderna, em geral.

Problemas 1-1

1. Você é bom para fazer problemas de cabeça? Tente esta experiência. Tome um pedaço de corda, com 1,5 metros de comprimento, aproximadamente, e coloque-o no chão formando um laço, com as pontas livres;



então, puxe as extremidades da corda, fazendo o laço gradualmente menor e pare quando achar que o laço tem o tamanho de sua cintura. Marque a corda no ponto onde ela se cruza e verifique sua previsão, pondo a corda ao redor de sua cintura. *Depois* de ter feito esta verificação, leia as observações sôbre o Problema 1 no final desta série de problemas.

2. Êste também é um problema de previsão.
Uma página de jornal não é muito espêssa, cêrca de 0,008 cm, e você já viu muitas vêzes uma pilha de jornais. Suponha que você tenha de colocar uma fôlha de jornal sôbre o assoalho. Depois, você coloca uma outra fôlha sôbre a primeira, depois mais duas, depois mais quatro e assim por diante, levantando uma pilha de fôlhas de jornais. Cada vez, você adiciona à pilha tantas fôlhas quantas lá já estão. De-

pois da décima vez, você deve ter uma pilha com cêrca de 8 cm de altura. Se você fôsse capaz de continuar até a qüinquagésima vez, que altura teria a pilha?
Uma das respostas de (a) a (d) é a correta. Tudo o que você tem a fazer é prever ou calcular qual seja.

(a) Tão alta quanto sua sala de aula.
(b) Tão alta quanto um prédio de quatro andares.
(c) Tão alta quanto o Empire State Building.
(d) Mais alta que duas vêzes a altura do Empire State Building.

Depois de você ter feito a escolha, leia as observações sôbre o problema 2 no final desta série de problemas.

3. A primeira das duas questões abaixo pode ser respondida pelo bom-senso. Dê apenas a resposta. A segunda requer algum cálculo aritmético ou algébrico para sua solução. Mostre como você a conseguiu.
 (a) Quanto é um sexto de 12?
 (b) Quanto é um sexto de 5255622?
4. Siga as instruções para o Problema 3.
 (a) Um têrço da distância entre duas cidades é 10 km. Qual é a distância entre elas?
 (b) A distância entre duas cidades é 10 km a mais que um têrço da distância entre elas. Qual a distância entre elas?

* 5. Siga as instruções do Problema 3.
 (a) Se um fio de arame com 5 m de comprimento é dividido em duas partes de modo que o comprimento de uma parte seja quatro vêzes o comprimento da outra, qual é o comprimento da parte mais longa?
 (b) Se um fio de arame com 5 m de comprimento é dividido em duas partes, de tal modo que o quadrado obtido dobrando-se uma parte tenha área igual a quatro vêzes a área do quadrado obtido dobrando-se a outra parte, qual é o comprimento da parte mais longa?
6. Se dois estudantes, com bastante cuidado e um independente do outro, mede a largura da sala de aula com régua, um da esquerda para a direita e outro da direita para a esquerda, provàvelmente obterão resultados diferentes. Qual, entre os seguintes, é um motivo razoável para a diferença?
 (a) As réguas têm comprimentos diferentes.
 (b) As coisas são mais longas (ou mais curtas) da esquerda para a direita que da direita para a esquerda.
 (c) As discrepâncias resultantes da mudança de posição da régua se acumulam e a soma dêstes pequenos erros fazem uma diferença perceptível.
 (d) Uma das pessoas pode ter errado na conta.
7. Mostre que $n^2 - 2n + 2 - n$ é verdade se $n = 1$. É verdade para $n = 2$? É sempre verdade, ou seja, é verdade qualquer que seja o número n?
8. Uma importante parte do aprendizado da Matemática é aprender a reconhecer certas situações que sugerem verdades gerais. Por exemplo, olhando para as expressões

$$3 + 5 = 8, 9 + 5 = 14, 11 + 17 = 28,$$

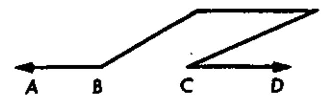
você pode supor que a soma de dois números ímpares é um número par. Você pode imaginar dois números ímpares cuja soma é um número ímpar? A resposta demonstra que não existem dois números ímpares nesta situação?
9. Considere as afirmações:

$$1^2 = 1, \quad 3^2 = 9, \quad 5^2 = 25, \quad 7^2 = 49.$$

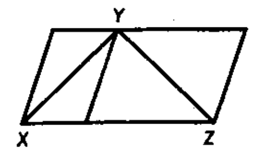
 (a) Procure uma regra envolvendo números ímpares. Escreva uma afirmação generalizando a sua observação.
 (b) Justifique a veracidade da generalização.
10. Divida cada um dos números 3^2, 5^2 e 7^2 por 4.
 (a) Qual é o resto em cada caso?
 (b) Qual é a regra evidente aqui?
 (c) Quantos inteiros ímpares você tem que elevar ao quadrado e dividir por quatro para garantir que o resto deve ser sempre o mesmo?
11. Considere as seguintes figuras e as regras sugeridas:

Número de pontos	2	3	4	5	6
Número de regiões	2	4	8	16	?

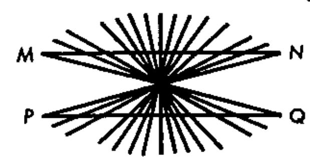
 (a) Troque o símbolo de interrogação sob o número 6 pelo número que você acha que deve estar ali.
 (b) Trace uma circunferência e ligue seis quaisquer de seus pontos de todos os modos possíveis. Conte as regiões assim obtidas. O resultado coincide com a resposta da parte (a)?
 (c) Que indicação êste problema dá quanto ao modo de demonstrar se uma generalização é verdadeira ou falsa?
12. As seguintes ilusões óticas mostram que não é sempre que você pode confiar nas aparências para decidir sôbre um fato.
 (a) C é continuação de AB? Teste a resposta com uma régua.



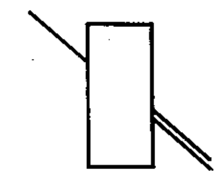
 (b) XY e YZ têm o mesmo comprimento? Compare os comprimentos com uma régua ou um compasso.



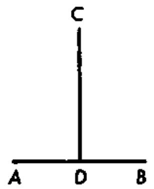
 (c) MN e PQ são segmentos de retas?



 (d) Qual dos dois segmentos de reta à direita do retângulo é continuação do segmento de reta à esquerda?



(e) Qual segmento é mais longo, AB ou CD?



13. Considere a expressão $n^2 - n + 11$. Se $n = 1$, a expressão é igual a 11. Para $n = 2$, a expressão é igual a 13. Para $n = 3$, a expressão é igual 17. Os números 11, 13 e 17 são números primos. Um número primo é um número maior que 1 e que é divisível apenas por 1 e por si próprio.) Obteremos sempre números primos quando substituímos n por números inteiros na expressão?

*+ 14. (a) Mostre que a expressão

$$n^2 - n + k$$

tem o mesmo comportamento que a expressão

$$n^2 - n + 11$$

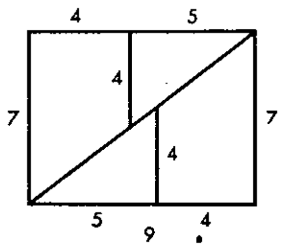
(veja o Problema 13) quando k é 3 ou 5.

(b) Qual é a afirmação geral que (a) sugere? É verdadeira ou falsa?

(c) Qual é o próximo número maior que 11 que funciona no lugar de k? 41 funciona?

+ 15. Um pilôto de um avião a jato planeja cobrir um percurso de 1000 quilômetros com uma velocidade média de 1000 quilômetros por hora. Nos primeiros 800 quilômetros, a velocidade foi de 800 quilômetros horários. A que razão o resto da distância deve ser percorrido?

+ 16. Use uma régua para verificar que as medidas da figura estão corretas. Se as medidas estão corretas, mostre, calculando as áreas, que a soma das áreas das partes é maior que a área do retângulo. Estranho, não? Você pode explicar isto?



Observações sôbre o Problema 1. Quase todo mundo faz um laço duas vêzes maior do que deve ser. Você poderá conseguir resultados satisfatórios se raciocinar mais ou menos da seguinte forma. O comprimento da circunferência é π vêzes o diâmetro e π é aproximadamente 3. Portanto, o diâmetro é cêrca de um têrço do comprimento da circunferência. Assim, se você sabe que sua cintura mede, digamos, 66 cm, o laço deve ter o diâmetro de 22 cm mais ou menos. Isto pode parecer incrìvelmente pequeno, mas se você analisar o problema matemàticamente, você se convencerá de que uma lógica cuidadosa é digna de confiança.

Êste é um dos muitos exemplos comuns nos quais mesmo o mais modesto tratamento matemático do problema é muito melhor que um salto no escuro.

Observações sôbre o Problema 2. Esta é, também, uma das muitas situações comuns nas quais o raciocínio matemático ajuda descobrir fatos divertidos que, de outra forma, não ocorreriam a você. O aspecto "descoberta", em Matemática, é tão predominante e tão importante quanto o seu uso na resolução de problemas.

Observando que, ao adicionar uma, você dobra o número de fôlhas de páginas de jornal, depois de 50 vêzes, você terá 2^{50} fôlhas. Uma tabela de potências de 2, ou cálculo direto, convencerá você de que deve ter 1.125.899.906.842.624 fôlhas. Um pouquinho mais de contas indicará que a pilha deve ter cêrca de 95.277 milhões de metros de altura; isto é, mais da metade da distância da Terra ao sol.

Mesmo se você decidiu que (d) era a resposta correta, provàvelmente não percebeu quão longe ela estava da realidade.

1-2. UM DESENVOLVIMENTO LÓGICO ORGANIZADO DA GEOMETRIA

Se você parar e pensar, perceberá que sabe muitas coisas sôbre geometria. Por exemplo, você sabe como determinar as áreas de várias figuras simples e também a relação de Pitágoras para triângulos retângulos. Algumas das coisas que você sabe são tão óbvias, que pode nunca lhe ter ocorrido colocá-las em palavras, e muito menos tentar descobrir por que elas são verdadeiras. Um exemplo disso é a seguinte afirmação:

Duas retas não podem se cruzar em mais de um ponto.

Mas algumas das afirmações, como o Teorema de Pitágoras, não são absolutamente óbvias. Neste livro, organizaremos os fatos da geometria de um modo ordenado, com algumas poucas afirmações simples, no início, conduzindo às mais complicadas nas seções posteriores. Veremos que tôdas as conclusões geométricas podem ser deduzidas de algumas afirmações simples e óbvias. Isto sugere que devemos arranjar estas conclusões numa tal ordem, que tôda conclusão de nossa lista possa ser deduzida das afirmações precedentes por raciocínio lógico.

Por ora, desenvolveremos o seguinte programa: Enunciaremos definições para *idéias* geométricas tão clara e exatamente quanto pudermos, e fixaremos os *fatos* da geometria dando demonstrações lógicas. As afirmações que demonstrarmos serão chamadas *teoremas*.

Embora quase tôdas as nossas afirmações venham a ser demonstradas como teoremas, haverá algumas exceções. As nossas afirmações mais simples e mais fundamentais serão dadas sem demonstração. Serão chamadas *postulados*. Da mesma forma, usaremos os têrmos mais simples e mais fundamentais sem fazer nenhuma tentativa de difini-los. Serão chamados *conceitos primitivos*.

À primeira vista, pode parecer melhor definirmos todos os têrmos que usarmos e demonstrarmos tôdas as afirmações que fizermos. Mas é muito fácil de se ver que isto não pode ser feito.

Considere, primeiramente, a questão dos teoremas. Usualmente, quando demonstramos um teorema, mostramos que êle resulta lògicamente de teoremas já demonstrados. Mas as demonstrações não podem funcionar sempre desta forma. Em particular, a *primeira* demonstração que fizermos não pode ser obtida desta forma, porque, neste caso, não há nenhum teorema que já tenhamos demonstrado. Mas temos de começar em algum lugar. Isto significa que temos de aceitar algumas afirmações sem demonstração. Estas afirmações não demonstradas são os postulados.

O mesmo princípio se aplica às definições. Na maioria das vêzes, quando introduzimos um têrmo nôvo, nós o definimos usando têrmos que já tenham sido definidos. Mas as definições não podem ser, sempre, formuladas desta forma. Em particular, a *primeira* definição que dermos não pode ser desta forma, porque, neste caso, não haverá nenhum têrmo que já tenha sido definido. Isto significa que temos de introduzir alguns têrmos geométricos sem defini-los. Portanto, usaremos os têrmos geométricos mais simples e mais fundamentais sem tentar dar uma definição a êles. Êstes têrmos fundamentais não definidos, chamados conceitos primitivos, serão *ponto*, *reta* e *plano*.

Os postulados, evidentemente, não são tomados ao acaso. (Se o fôssem, nenhuma pessoa em sã consciência daria atenção a êles.) Os postulados descrevem propriedades fundamentais do espaço. Da mesma forma, as idéias de *ponto*, *reta* e *plano* sugerem objetos físicos. Se você fizer uma pequena marca numa fôlha de papel, com a ponto de um lápis, você terá uma idéia razoável de um ponto. Quanto mais fina a ponta de seu lápis, melhor. A idéia será sempre apenas aproximada, porque a marca sempre cobrirá *alguma* área, enquanto que um ponto não ocupa, absolutamente, área alguma. Mas se você imaginar marcas cada vez menores, feitas por lápis cujas pontas são cada vez mais finas, você terá uma boa idéia do que queremos dizer, em geometria, com a palavra *ponto*.

Sempre que usarmos o têrmo *reta*, teremos em mente a idéia de *linha* reta. Uma linha reta se extende, infinitamente, em ambas as direções. De modo geral, indicaremos isto em nossas ilustrações, colocando pontas de setas nas extremidades das partes das retas que traçarmos:

As setas servem para nos lembrar que a reta não pára nos pontos onde a figura termina.

Teremos um outro têrmo, *segmento*, para uma figura do seguinte tipo:

Um fio de barbante fino e bastante esticado é uma boa aproximação de um segmento. Uma corda de piano, fina e bem tensa, é uma aproximação melhor; e assim por diante.

Se você imaginar uma superfície perfeitamente plana, extendendo-se infinitamente em tôdas as direções, você terá uma boa idéia do que se supõe que seja um plano.

EUCLIDES (TERCEIRO SÉCULO A. C.)

Euclides é, provàvelmente, o autor científico melhor sucedido que já existiu. Seu famoso livro, os *Elementos*, é um tratado sôbre geometria e teoria dos números. Por cêrca de dois mil anos, todo estudante que aprendeu geometria, aprendeu-a de Euclides. E durante todo êste tempo, os *Elementos* serviram como modêlo de raciocínio lógico para todo mundo.

Ninguém sabe, hoje, exatamente, o quanto da geometria contida nos *Elementos* é trabalho de Euclides. Alguma parte dela pode ter sido baseada em livros que já existiam antes e algumas das idéias mais importantes são atribuídas a Eudoxus, que viveu mais ou menos na mesma época. De qualquer forma, dos livros que chegaram até nós, os *Elementos* é o primeiro que apresenta a geometria de uma forma lógica, organizada, partindo de algumas suposições simples e desenvolvendo-se por raciocínio lógico.

Êste tem sido o método básico na matemática, desde então. O que causa admiração é que isto tenha sido descoberto há tanto tempo e usado de forma tão correta. A lógica desempenha, na matemática, o mesmo papel que a experiência na física. Tanto em matemática como em física, você pode ter uma idéia que você pensa ser correta. Em física, o melhor a fazer seria ir a um laboratório e testar sua idéia com uma experiência; em matemática, o melhor a fazer seria pensar um pouco mais e tentar obter uma demonstração.

Enquanto o método geral de Euclides permanece atual, hoje e sempre, seus postulados e a teoria baseada nêles não são muito usados. Desde o desenvolvimento da álgebra, o emprêgo dos números para medir coisas se tornou fundamental. Êste método não aparece nos *Elementos*, porque, na época de Euclides, a álgebra era quase desconhecida.

Você deve ter em mente que nenhuma destas afirmações são definições. São, simplesmente, explanações das idéias que os matemáticos tinham em mente quando escreveram os postulados. Quando começarmos a demonstrar os teoremas, as únicas informações que poderemos pretender ter sôbre retas, pontos e planos serão as informações dadas nos postulados.

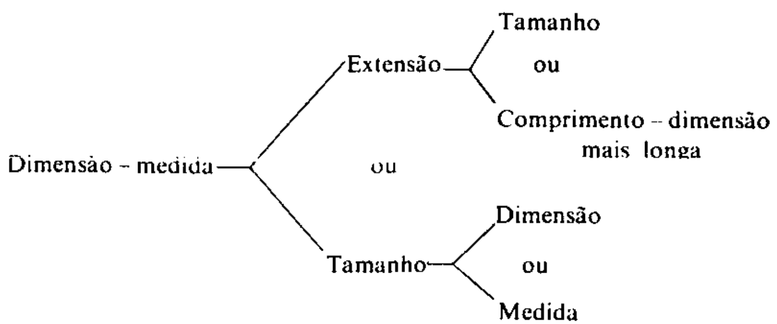
Finalmente, fazemos duas advertências.

Em primeiro lugar, há limites sôbre o que a lógica pode fazer por nós. A lógica nos ajuda a testar as nossas previsões mas não é de muita valia no ato de se fazer, em primeiro lugar, estas previsões. No estudo da Matemática, você nunca atingirá um estágio depois do qual você possa prosseguir sem um quê de ingenuidade ou sem o auxílio da intuição.

Em segundo lugar, os primeiros teoremas que vamos demonstrar não serão muito atraentes; você pode ter a curiosidade de saber por que simplesmente não os chamamos de postulados e encerramos o assunto. Esta parte inicial, entretanto, será simples; enfrente o texto de modo firme, mas moderado, e dirija-se logo aos problemas.

No início do próximo capítulo, apresentamos uma pequena discussão sôbre a idéia de conjunto e uma pequena revisão da parte algébrica dos números reais. Conjuntos e álgebra serão usados em todo o livro. Nós os interpretaremos, entretanto, muito mais como *meio* do que como *fim;* não farão parte do nosso sistema de postulados e teoremas. Êles estarão ao nosso dispor desde o início; alguns dos postulados envolverão números reais e, também, usaremos álgebra nas demonstrações. De fato, a álgebra e a geometria são estreitamente relacionadas e são muito mais simples de ser apreendidas se fixarmos esta relação de início.

1. Um estudante, querendo saber o significado da palavra "dimensão", consultou um dicionário. O dicionário deu como sinônimo a palavra "medida", cuja definição o estudante, por sua vez, também procurou. Êle fêz o seguinte mapa:



(a) Aponte, a partir do mapa, uma lista circular de três têrmos, tendo cada têrmo o seguinte como sinônimo. (Numa lista circular, diz-se que o primeiro têrmo segue ao último.)

(b) Faça uma lista circular com quatro têrmos.

2. Faça um mapa semelhante ao do Problema 1, partindo de alguma palavra de um dicionário.

3. O que é que você acha que está errado nas seguintes "definições" imperfeitas?

(a) Um quadrado é algo que não é redondo.

(b) Uma circunferência é algo que é redondo.

(c) Um triângulo retângulo é um triângulo cujos ângulos são retos.

(d) Um triângulo equilátero é quando um triângulo tem os três lados do mesmo comprimento.

(e) O diâmetro de uma circunferência é uma reta pelo centro da circunferência.

4. Siga as instruções do Problema 3.

(a) O perímetro de um retângulo é onde você toma a soma dos comprimentos dos lados.

(b) A circunferência de um círculo é quando você multiplica o diâmetro por π.

(c) Uma figura plana tendo quatro lados é um retângulo se seus lados opostos têm comprimentos iguais.

(d) Um triângulo equilátero é um triângulo que tem três lados e três ângulos, cujos lados têm todos o mesmo comprimento e cujos ângulos têm todos a mesma medida.

(e) Um triângulo é quando três retas interceptam uma à outra.

+ 5. Depois de ler a Seção 1-2, você deve ser capaz de decidir se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas.

(a) É possível definir cada têrmo geométrico usando têrmos geométricos mais simples.

(b) Os teoremas são demonstrados apenas com base nas definições e conceitos primitivos.

(c) Os raciocínios geométricos exatos levam a verdades geométricas que não podem ser deduzidas a partir de medições.

(d) O melhor meio de se aprender a demonstrar teoremas é observar os outros demonstrá-los.

(e) Se você se propuser a escrever tôdas as passagens, cada teorema pode ser demonstrado a partir dos postulados e conceitos primitivos, sem referência a outros teoremas.

(f) Qualquer afirmação que parece ser verdadeira deve se tornar um postulado.

+ 6. Suponha que você seja capaz de envolver com uma fita de ferro, bem ajustada, uma esfera bastante grande, como por exemplo a Terra no nível do equador. A fita deveria ter cêrca de 40.000 km de comprimento. Suponha que você corte a fita em determinado ponto e aumente o seu comprimento em 3 m, de modo que a fita não se ajuste mais, firmemente, à esfera. A fita aumentada ficará igualmente afastada da esfera e terá um raio um pouco maior que o raio original. A fita ficará afastada de quanto da esfera? (Se você precisar, poderá usar 6.400 km como raio da Terra.)

CONJUNTOS, NÚMEROS REAIS E RETAS

2-1. CONJUNTOS

Você, talvez, não tenha visto a palavra *conjunto* usada em matemática, mas a idéia é bastante familiar. Sua família é um conjunto de pessoas, formado por você, seus pais e seus irmãos e irmãs (se você os tiver). Essas pessoas são os *elementos* do conjunto. A sua classe na escola é um conjunto de pessoas. Diz-se que um elemento do conjunto *pertence* ao conjunto. Por exemplo, você pertence à sua família e à sua classe na escola. Diz-se que um conjunto *contém* seus elementos. Por exemplo, tanto sua família como sua classe na escola contém você. Se um conjunto contiver todos os elementos de um outro conjunto, dizemos que o segundo conjunto é um *subconjunto* do primeiro. Por exemplo, sua classe é um subconjunto do corpo discente da sua escola e o corpo discente contém sua classe. Dizemos que o subconjunto está *contido* no conjunto.

Observe que, ao definirmos um subconjunto, permitimos a possibilidade de os dois conjuntos serem o mesmo. Assim, todo conjunto é subconjunto de si mesmo.

Quando dizemos que dois conjuntos são *iguais*, ou escrevemos uma igualdade $A = B$ entre dois conjuntos, queremos dizer que os dois conjuntos têm exatamente os mesmos elementos. Suponha, por exemplo, que A seja o conjunto de todos os números inteiros entre $9\frac{1}{3}$ e $14\frac{1}{10}$ e que B seja o conjunto de todos os números inteiros entre $9\frac{1}{10}$ e $14\frac{1}{3}$. Então $A = B$, porque cada conjunto contém precisamente os números 10, 11, 12, 13 e 14. Na realidade, quase sempre, um mesmo conjunto pode ser descrito de dois modos diferentes. Portanto, se as descrições parecerem diferentes, isso não implicará em que os conjuntos sejam diferentes. O mesmo acontece em álgebra. As expressões 3.17 e $39 + 12$ parecem diferentes, mas descrevem o mesmo número; e isso que queremos dizer ao escrever $3.17 = 39 + 12$.

Dois conjuntos se *interceptam* se existir um ou mais elementos que pertençam a ambos. Por exemplo, sua família e sua classe se interceptam porque você é um elemento de ambos. (Provàvelmente você é a única pessoa que pertence a ambos os conjuntos). A *interseção* de dois conjuntos é o conjunto de todos os objetos comuns a ambos os conjuntos.

Passando a exemplos de matemática, vemos que o conjunto de todos os números pares é o conjunto cujos elementos são

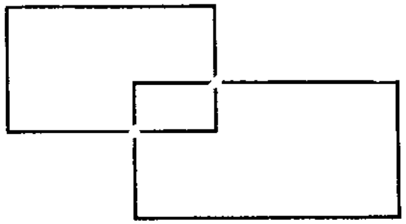
$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18, \ldots$$

O conjunto de todos os múltiplos de 3 é o conjunto cujos elementos são

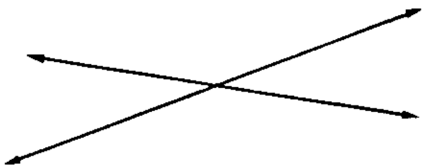
$$3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18, \ldots$$

A interseção dêsses é o conjunto cujos elementos são 6, 12, 18,... (Êsse é o conjunto de todos os múltiplos de 6).

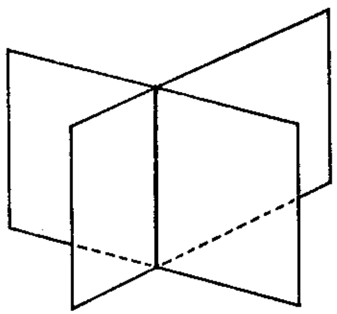
Na figura à direita, cada um dos dois retângulos é um conjunto de pontos e a interseção é um conjunto contendo exatamente dois pontos. Anàlogamente, cada uma das regiões retangulares correspondentes é um conjunto de pontos e a interseção é a pequena região retangular no meio da figura.



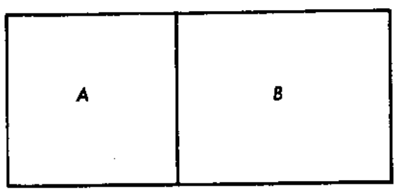
Na figura seguinte, cada uma das duas retas é um conjunto de pontos e a interseção contém exatamente um ponto.



Neste livro, pontos, retas e planos serão considerados conjuntos de pontos. (Você pode considerar essa afirmação como nosso primeiro postulado, se quiser). De fato, *tôdas* as figuras geométricas serão consideradas conjuntos de pontos. À direita, vemos dois conjuntos de pontos, sendo cada um uma região retangular contida num plano. Sua interseção é um segmento, contido numa reta.

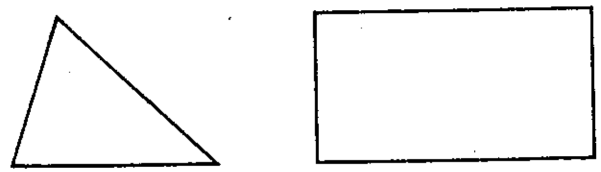


A *reunião* de dois conjuntos é o conjunto de todos os objetos que pertencem a um ou ambos os conjuntos.



Por exemplo, na figura vemos uma região retangular grande R que é a reunião de duas regiões retangulares menores A e B. O segmento vertical próximo ao meio da figura é a interseção de A e B. Os pontos dêsse segmento pertencem à reunião por duas razões.

Para três ou mais conjuntos, a interseção e reunião são definidas de modo análogo. Assim, um triângulo é a reunião de três conjuntos, cada um dos quais é um segmento. E um retângulo é a reunião de quatro conjuntos, cada um dos quais é um segmento.



Algumas vêzes é conveniente usar a idéia do *conjunto vazio.* O conjunto vazio é o conjunto que não contém nenhum elemento. Essa idéia pode lhe parecer estranha no início mas ela está, de fato, intimamente ligada à idéia do número zero. Assim, as três afirmações seguintes têm exatamente o mesmo significado:

(1) Não existem elefantes brancos em São Paulo.
(2) O número de elefantes brancos em São Paulo é zero.
(3) O conjunto de todos os elefantes brancos em São Paulo é o conjunto vazio.

Uma vez introduzida a idéia de conjunto vazio, podemos falar da interseção de dois conjuntos quaisquer, mantendo em mente a possibilidade da interseção poder ser vazia. Por exemplo, a interseção do conjunto de todos os números ímpares e o conjunto de todos os números pares é o conjunto vazio. Na figura acima, a interseção do triângulo e do retângulo é o conjunto vazio.

O conjunto vazio é representado por ϕ.

Cuidado: Se você comparar as definições das palavras *intercepta* e *interseção*, verá que o uso dêsses têrmos é ardiloso. Quando falamos da *interseção* de dois conjuntos, permitimos a possibilidade da interseção ser vazia, mas, quando dizemos que dois conjuntos se *interceptam*, sempre queremos dizer que sua interseção contém pelo menos um elemento.

Cuidado novamente! Zero e o conjunto vazio estão intimamente relacionados mas não são a mesma coisa. Por exemplo, a equação

$$x + 3 = 3$$

tem 0 como sua única raiz e portanto o conjunto das raízes não é o conjunto vazio; o conjunto das raízes tem exatamente um elemento, a saber 0. Por outro lado, a equação

$$x + 1 = x + 2$$

não tem nenhuma raiz. Portanto o conjunto das raízes é ϕ.

1. Para que conjuntos A e B abaixo, o conjunto A é igual ao conjunto B?
   (a) A é o conjunto de todos os números inteiros entre $\frac{3}{2}$ e $\frac{25}{3}$. B é o conjunto cujos elementos são 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.
   (b) A é o conjunto de todos os nomes femininos começando com J. B é o conjunto Joana, Jaqueline, Judite, Jandira, Jeni.
   (c) A é o conjunto de todos os países da América Central cujos nomes começam com P. B é o conjunto de todos os paises da América Central que podem ser atravessados via um canal.
   (d) A é o conjunto de todos os estudantes que são seus colegas de classe nas aulas de geometria e têm menos de 10 anos. B é o conjunto dos meses do ano cujos nomes começam com R.
   (e) A é o conjunto de todos os números que satisfazem $x + 7 = 12$. B é o conjunto de todos os números que satisfazem $x^2 = 25$.
   (f) A é o conjunto de todos os números que satisfazem $5x + 8 = 8$. B é o conjunto de todos os números que satisfazem $7(x^2 + 2) - 5 = 9$.
2. Seja

$$P = \{2, 5, 7, 10, 14, 17, 19\}$$

[*Observação*: Leia "P é o conjunto cujos elementos são 2, 5, 7, 10, 14, 17 e 19".]
Seja

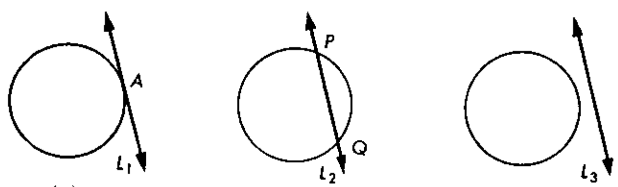
$$Q = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

Qual é a interseção dos conjuntos P e Q? Qual é a reunião dos conjuntos P e Q?
3. Considere os seguintes conjuntos.

   S_1 é o conjunto de todos os alunos de sua escola.
   S_2 é o conjunto de todos os rapazes de corpo discente.
   S_3 é o conjunto de tôdas as môças do corpo discente.
   S_4 é o conjunto de todos os professôres da sua escola.
   S_5 é o conjunto cujo único elemento é você, um estudante na sua escola.

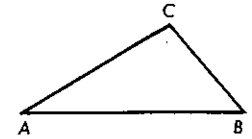
   (a) Que *pares* de conjuntos se interceptam?
   (b) Que conjunto é a reunião de S_2 e S_3?
   (c) Que conjunto é a reunião de S_1 e S_5?
   (d) Descreva a reunião de S_1 e S_4.
   (e) Quais dos conjuntos são subconjuntos de S_1?

4. Nas figuras abaixo, considere a reta e a circunferência como dois conjuntos de pontos. Em cada caso, diga qual é a interseção.



(a) (b) (c)

5. Na figura, qual é a interseção do triângulo ABC e o segmento AC? Qual é a reunião?



6. Considere o conjunto P de todos os números naturais pares e o conjunto I de todos os números naturais ímpares.
   (a) Escreva a reunião de P e I.
   (b) Escreva a interseção de P e I.
7. Considere o conjunto de três rapazes $\{A, B, C,\}$. Qualquer subconjunto dêsse conjunto será chamado uma comissão.
   (a) Dê todos os subconjuntos de $\{A, B, C\}$.
   (b) Quantas comissões de dois membros podem ser formadas com os três rapazes?
   (c) Mostre que duas comissões quaisquer de (b) se interceptam.
   (d) Qual é o significado da expressão "se interceptam"?
8. Seja A o conjunto dos pares de números (x, y) que satisfazem a equação $3x + y = 15$. Seja B o conjunto dos pares de números (x, y) que satisfazem a equação $2x + y = 11$. Qual é a interseção dos conjuntos A e B?
9. Seja $A = \{(1,12), (2,9), (3,6), (4,3), (5,0)\}$.
   $B = \{(1,9), (2,7), (3,5), (4,3), (5,1)\}$.
   Observe que os elementos dos conjuntos A e B são pares de números. Qual é a interseção de A e B?
10. Seja A o conjunto de tôdas as soluções de $5r + s = 11$. Seja B o conjunto de tôdas as soluções de $3r - s = 5$. Qual é a interseção de A e B?
11. Seja A o conjunto de tôdas as soluções de $7x - y = 28$. Seja B o conjunto de tôdas as soluções de $3x + 2y = 12$. Qual é a interseção de A e B?
12. Seja A o conjunto de tôdas as soluções de $2m + n = 8$. Seja B o conjunto de tôdas as soluções de $4m + 2n = 12$. Qual é a interseção de A e B?
* 13. Considere o conjunto de todos os inteiros positivos divisíveis por 2. Considere o conjunto de todos os inteiros positivos divisíveis por 3.
   (a) Escreva a interseção dêsses dois conjuntos e dê, explicitamente, seus quatro primeiros elementos.
   (b) Escreva uma expressão algébrica para a interseção.
   (c) Escreva a reunião dos dois conjuntos e dê, explicitamente, seus seis primeiros elementos.
14. Pense num ponto A do quadro negro ou de um pedaço de papel. Quantas retas existem no plano do quadro-negro ou do papel que contêm A? As retas contendo A formam um conjunto. As retas são elementos do conjunto. Quantos elementos tem êsse conjunto?
15. (a) Dados dois pontos distintos, A e B, quantos elementos existem no conjunto de tôdas as retas que contêm tanto A como B? Muitas vêzes apresentamos essa questão sob outra forma e perguntamos: Quantas retas podem ser desenhadas passando por dois pontos A e B?
   (b) Dados três pontos A, B e C, não todos contidos numa reta, quantas retas existem, cada uma das quais contendo dois dos três pontos?
   (c) Dados quatro pontos, A, B, C e D, de modo que três dêles nunca estão contidos numa mesma reta, quantas retas existem, cada uma contendo dois dos pontos

dados? Se um quinto ponto fôsse dado, sob as mesmas condições, quantas retas existiriam?

* (d) Nas partes (a), (b), (c) a mesma pergunta é feita para números diferentes de pontos. Responda essa pergunta quando são dados n pontos.

+ 16. Ao dar os subconjuntos de um conjunto fixado, o próprio conjunto e o conjunto vazio são incluídos como subconjuntos do conjunto fixado. Assim, o conjunto $\{a, b\}$ tem os seguintes subconjuntos:

$$\{a, b\}, \quad \{a\}, \quad \{b\}, \quad \phi$$

Isto é, um conjunto com dois elementos tem quatro subconjuntos.

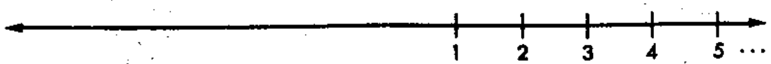
(a) Dê os subconjuntos de $\{a, b, c\}$.
(b) Quantos subconjuntos tem um conjunto de quatro elementos?
(c) Quantos subconjuntos tem um conjunto de cinco elementos?
(d) Quantos subconjuntos tem um conjunto de n elementos?

2-2. ORDEM NA RETA NUMÉRICA

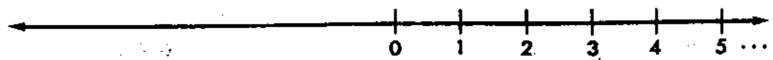
Os primeiros números que você aprendeu foram os "números naturais" sem o zero

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

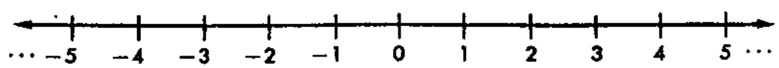
Os números naturais nunca terminam pois, não importando quão longe se vá, sempre é possível ir um passo adiante adicionando 1. Podemos pensar nos números naturais sem o zero como arranjados numa reta, da esquerda para a direita:



À esquerda de 1, colocamos o número 0:

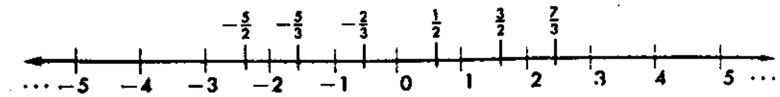


Em seguida, marcamos os números inteiros negativos da direita para a esquerda:



Os números que temos até agora são os *inteiros* (positivos, negativos e zero). Os números naturais são, evidentemente, os inteiros positivos e são muitas vêzes designados por essa expressão.

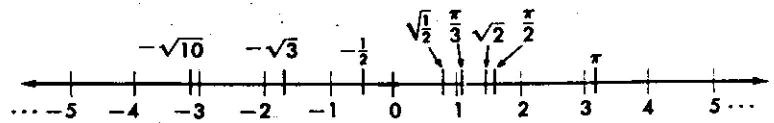
Observe que há muitos pontos da reta que até agora não estão associados a nenhum número. Precisamos, pelo menos, colocar as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{3}$ e assim por diante. Existe uma infinidade delas entre cada par de números inteiros. Numa figura, portanto, o que podemos fazer é indicar algumas das frações, como amostras:



Os números que mencionamos até agora são os números da forma p/q, onde p e q são números inteiros e q é não nulo. Êles são chamados *números racionais*. (Isso não deve sugerir que outros números sejam contrários à razão. O têrmo se refere apenas ao fato de que números racionais são *razões* de inteiros).

É evidente que os números racionais não preenchem a reta numérica completamente. Existem muitos números que não podem ser expressos como razões de inteiros. Por exemplo, $\sqrt{2}$ não é racional. O mesmo acontece com $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ e também para certos números "peculiares" como π.

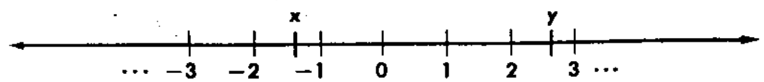
Se inserirmos todos êsses números extras de modo que todo ponto da nossa reta esteja associado a um número, então temos o conjunto completo dos *números reais*.



Você deveria verificar que êsses números aparecem, na figura, aproximadamente nos lugares onde deveriam estar.

Os números reais serão usados em tôda nossa geometria. E, de agora em diante, será importante pensar nêles como arranjados numa reta.

Um número x é *menor* que um número y se x estiver à esquerda de y na reta numérica, assim



Indicamos êsse fato escrevendo $x < y$. Òbviamente todo número negativo está à esquerda de todo número positivo. Portanto, todo número negativo é menor que qualquer número positivo. Por exemplo

$$-1.000.000 < \tfrac{1}{10},$$

apesar de que $-1.000.000$ possa, de algum modo, parecer maior.

Expressões usando $<$ são chamadas *desigualdades*. Qualquer desigualdade pode ser escrita ao contrário: quando escrevemos $y > x$, isso significa que $x < y$. Assim $y > x$ se y estiver à direita de x na reta numérica.

A expressão $x \leq y$ significa que ou $x < y$ ou $x = y$. Assim $-2 \leq 1$ porque $-2 < 1$; e $2 \leq 2$ porque $2 = 2$.

Estudando álgebra, você aprendeu até agora muitos fatos a respeito do comportamento dos números reais sob adição e multiplicação. É um fato que a álgebra pode ser estudada da mesma maneira como vamos estudar geometria nesse curso. Isto é, todos os fatos algébricos que você conhece podem ser derivados de alguns poucos postulados. Mas é grande a chance de que você não tenha estudado álgebra dessa maneira e não temos tempo agora para começar a álgebra tôda de nôvo. Nesse curso, portanto, vamos usar quase tôda a álgebra que você conhece, sem comentários especiais.

Devemos tomar cuidado, no entanto, com desigualdades e raízes quadradas, porque enganos a respeito dêsses tópicos são muito comuns. A relação $<$ é chamada uma relação de *ordem*. Suas propriedades fundamentais são as seguintes:

O-1. TRICOTOMIA

Para todo x e y uma e sòmente uma das seguintes condições é verificada: $x < y$, $x = y$, $x > y$.

O-2. TRANSITIVIDADE

Se $x < y$ e $y < x$, então $x < z$.

O-3. A LEI DA ADIÇÃO

Se $a < b$ e $x \leq y$, então $a + x < b + y$.

O-4. A LEI DA MULTIPLICAÇÃO

Se $x < y$ e $a > 0$, então $ax < ay$.

Tôdas as leis usuais das desigualdades são conseqüências dessas quatro leis. Finalmente, vamos precisar o seguinte:

R-1. EXISTÊNCIA DE RAÍZES QUADRADAS

Todo número positivo tem pelo menos uma raíz quadrada positiva.

Existe um ponto bastante delicado em relação a raízes quadradas. Quando dizemos, em palavras, que *x é uma raiz quadrada de a*, queremos dizer simplesmente que $x^2 = a$. Por exemplo, 2 é uma raiz quadrada de 4 porque $2^2 = 4$. E -2 é também uma raiz quadrada de 4, porque $(-2)^2 = 4$. Mas quando escrevemos, em símbolos, que $x = \sqrt{a}$, isso significa que x é a raiz quadrada *positiva* de a. Portanto, as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas, como indicado:

Verdadeira: -2 é uma raiz quadrada de 4.
Falsa: $-2 = \sqrt{4}$.

A razão para êsse costume é simples. Se permitíssemos que $\sqrt{a}$ representasse tanto a raiz positiva quanto a negativa, não teríamos nenhum símbolo para a raiz quadrada positiva de 7. Colocar um sinal "+" na frente de $\sqrt{7}$ não resolveria o problema porque um sinal "+" nunca muda o valor de uma expressão. Se $\sqrt{7}$ fôsse negativo, $+\sqrt{7}$ seria tão negativo quanto antes. Por essa razão, convencionamos que $\sqrt{a}$ sempre representa a raiz positiva de a. A raiz negativa de a é $-\sqrt{a}$ e $\sqrt{0} = 0$.

Você achará as seguintes afirmações convenientes para referência, ao justificar passagens algébricas.

PROPRIEDADE ADITIVA DA IGUALDADE

Se $a = b$ e $c = d$, então $a + c = b + d$.

PROPRIEDADE SUBTRATIVA DA IGUALDADE

Se $a = b$ e $c = d$, então $a - c = b - d$.

PROPRIEDADE MULTIPLICATIVA DA IGUALDADE

Se $a = b$ e $c = d$, então $ac = bd$.

1. Prepare uma tabela, tendo as colunas os seguintes títulos: "números reais", "números racionais", "inteiros", "números irracionais". Sob o título "números reais" coloque os seguintes

$$7,\ \tfrac{2}{3},\ \sqrt{11},\ 0{,}02,\ \sqrt{4},\ 1\tfrac{3}{4},\ 14{,}003,\ -3,$$
$$\frac{\sqrt{2}}{5},\ -\sqrt{\frac{3}{8}},\ 0,\ 1{,}414,\ -\sqrt{\frac{9}{16}},\ \pi.$$

Complete a tabela colocando cada número sob o nome do subconjunto dos reais ao qual êle pertence.

2. Indique se as sentenças abaixo são verdadeiras ou falsas.
(a) Números negativos são números reais.
(b) A reta dos números reais tem pelo menos uma extremidade.
(c) $-x$ é um número negativo qualquer que seja x.
(d) O ponto da reta dos números reais correspondente a $\frac{7}{8}$ está entre os pontos correspondentes a $\frac{6}{7}$ e $\frac{8}{9}$.

(e) Existe um ponto na reta real que corresponde a $\sqrt{2}$ e é diferente do ponto correspondente a 1,414.

(f) Se x é um número negativo, então $-x$ é um número positivo.

(g) Se $x > y$, então $x-y > 0$.

3. Em que ordem estariam, na reta numérica, os pontos correspondentes aos números nos conjuntos abaixo, estando os números positivos à direita do zero?

(a) $\frac{7}{4}$, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{5}{8}$. (b) 4,1, 4,06, 4,012.

(c) $-1{,}3$, $-0{,}7$, $-2{,}14$ (d) $\frac{8}{5}$, $-1\frac{2}{3}$, $-1\frac{7}{8}$.

4. Escreva as sentenças abaixo usando os símbolos de ordem (isto é, $<$, $\geq$, etc.)

(a) x é um número maior que 0.

(b) y é um número entre -1 e 2.

(c) w é um número entre -1 e 2, podendo ser -1 ou 2.

(d) k é um número positivo.

(e) m é um número negativo.

(f) n é um número não-negativo.

5. Escreva as sentenças abaixo com palavras

(a) $AB > CD$. (b) $m \leq n$. (c) $-11 < 5 < 8$.

(d) $-2 \leq k \leq 2$. (e) $x < 0$. (f) $y \geq 0$.

6. Quais das seguintes sentenças são verdadeiras?

(a) $\sqrt{16} = 4$. (b) $\sqrt{25} = -5$.

(c) $-\sqrt{64} = -8$. (d) $-\sqrt{0{,}36} = -0{,}6$. (e) $-\sqrt{0{,}04} = 0{,}2$.

7. Quais das seguintes sentenças satisfazem a condição $\sqrt{x^2} = x$?

(a) $x = 3$. (b) $x = -3$. (c) $x = 0$.

(d) $x = 1$. (e) $x = -1$. (f) $x < 0$.

(g) $x \geq 0$. (h) $\frac{1}{x} > 0$.

8. Ao longo da reta numérica, com intervalos unitários de 1 cm de comprimento, coloque corretamente os seguintes números

$$0, \quad 1, \quad \sqrt{4}, \quad -\sqrt{4}, \quad \sqrt{9}, \quad -\sqrt{9}, \quad \sqrt{16}, \quad -\sqrt{25}.$$

9. Se r e s são números reais diferentes de zero e $r > s$, indique se as seguintes sentenças são verdadeiras para todo r e s com (V), se são verdadeiras apenas para alguns valôres de r e s com (A) ou se nunca são verdadeiras com (F).

(a) $s > r$. (b) $r-s > 0$. (c) $\frac{r}{s} > 1$. (d) $s^2 < r^2$.

* 10. Siga as instruções do Problema 9 para (a) até (d), abaixo.

(a) $\frac{1}{r} > \frac{1}{s}$. (b) $r^3 > s^3$.

(c) $-r < -s$. (d) $r-2 < s-2$.

2-3. VALOR ABSOLUTO

O *valor absoluto* de um número x é representado por $|x|$. O significado do símbolo $|x|$ é fàcilmente compreendido a partir de alguns exemplos:

$$\begin{aligned} |0| &= 0, & |-8| &= 8, \\ |2| &= 2, & |87| &= 87, \\ |-2| &= 2, & |-95| &= 95, \\ |7| &= 7, & |-\sqrt{13}| &= \sqrt{13}, \end{aligned}$$

e assim por diante. Estamos usando aqui as seguintes regras:

(1) Se $x \geq 0$, então $|x| = x$.

(2) Se $x < 0$, então $|x|$ é o número positivo correspondente.

Se um número é escrito aritmèticamente, é fácil ver como escrever seu valor absoluto. Se não houver sinal negativo na frente, deixamos o número como estava. Se houver um sinal negativo na frente, omitimos o sinal para obter o valor absoluto.

Mas quando trabalhamos algèbricamente com expressões como $|x|$, $|a-b|$, e assim por diante, é conveniente ter uma forma algébrica para a condição (2). Assim, dado um número negativo x, queremos ter uma maneira algébrica de descrever o número positivo correspondente. Se o número negativo fôr representado por x, então não podemos "omitir o sinal negativo" porque não existe nenhum sinal para ser omitido. Podemos contornar essa dificuldade com um truque: se $x < 0$, *então o número positivo correspondente* é $-x$. Aqui estão alguns exemplos:

$$\begin{aligned} x &= -2, & -x &= -(-2) = 2, \\ x &= -3, & -x &= -(-3) = 3, \end{aligned}$$

e assim por diante.

Podemos agora dar uma segunda descrição de $|x|$.

(1) Se $x \geq 0$, então $|x| = x$.

(2) Se $x < 0$, então $|x| = -x$.

Essa segunda forma é mais difícil de se entender no comêço, mas é mais fácil para se usar posteriormente. Você deveria experimentá-la em alguns números, até se convencer de que ela realmente diz o que temos em mente.

Problemas 2-3

1. Calcule:

(a) $|5|$. (b) $|-6|$. (c) $-|-6|$.

(d) $|2| + (-2)$. (e) $|2| + |-2|$. (f) $|8-5|$.

(g) $|5-8|$. (h) $|5|-|8|$. (i) $|-8-5|$.

2. Quais das seguintes sentenças são verdadeiras?

(a) $|-3| = 3$. (b) $|3| = -3$. (c) $|7-9| = |9-7|$.

(d) $|0-4| = |4-0|$. (e) $|k| = k$ para todo número real k.

3. Quais das seguintes sentenças são verdadeiras para quaisquer valôres da variável?

(a) $|-n| = -n$. (b) $|n^2| = n^2$. (c) $|x-3| = |3-x|$.

(d) $|a-b| = |b-a|$. (e) $|d+1| = |d| + 1$.

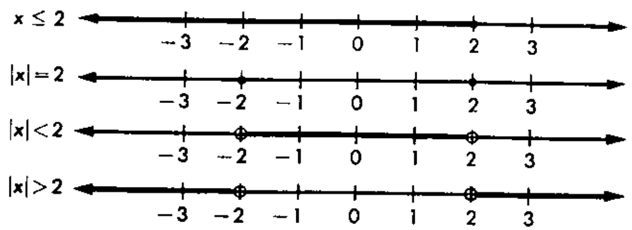
4. Copie e complete as seguintes afirmações:

(a) Se $k > 0$, então $|k| =$ ....

(b) Se $k < 0$, então $|k| =$ ....

(c) Se $k = 0$, então $|k| =$ ....

5. As quatro figuras abaixo são gráficos, na reta numérica, de sentenças algébricas escritas à esquerda de cada gráfico



Faça gráficos para as seguintes sentenças

(a) $x = 1$. (b) x é um número negativo (c) $x > 1$.

(d) $x \geq 0$. (e) $|x| = 1$. (f) $|x| \leq 1$.

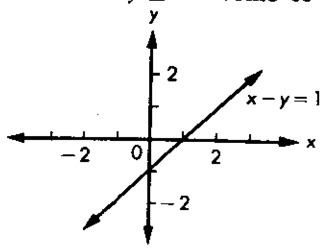
(g) $|x| > 1$. (h) $|x| \geq 0$.

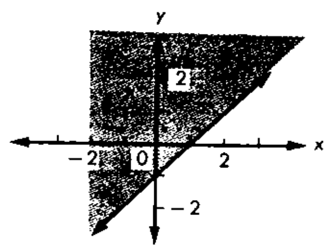
6. (a) Qual é a diferença entre o gráfico de $x < 0$ e de $x \leq 0$?

(b) Qual é a diferença entre o gráfico de $|x| = 1$ e o gráfico de $|x| \leq 1$?

(c) Qual é a diferença entre o gráfico de $-1 \leq x \leq 1$ e o gráfico de $|x| < 1$?

* 7. Se considerarmos sentenças algébricas em duas variáveis x e y, onde x e y podem ser números reais, podemos representar gràficamente tais sentenças no plano xy. Você deve se lembrar, de cursos anteriores de matemática, que para isso representamos gràficamente todos os pares ordenados (x, y) que tornam a sentença algébrica verdadeira. Assim, o gráfico de $x - y = 1$ é como se vê à esquerda e o gráfico de $x - y \leq 1$ é como se vê à direita.





(a) Desenhe o gráfico de $y = |x|$. (b) Desenhe o gráfico de $y > |x|$.

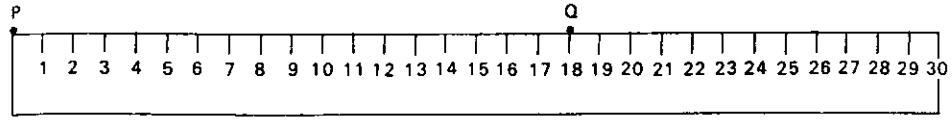
* 8. Use o Problema 7 como uma introdução para êsse problema:

(a) Faça o gráfico de $|x| + |y| = 1$.

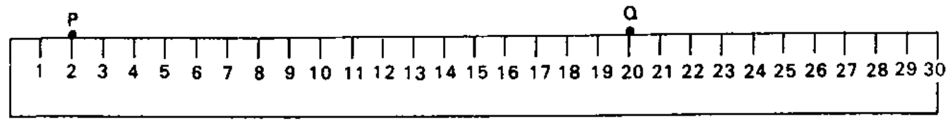
(b) Faça o gráfico de $|x| + |y| < 1$.

RÉGUAS E UNIDADES DE DISTÂNCIA

Se dois pontos P e Q estão a uma distância não maior que 30 cm, podemos achar a distância entre êles usando uma régua comum.

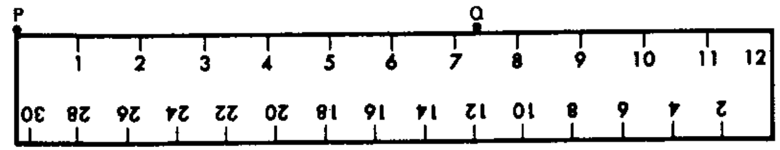


Na figura a distância é 18 cm. É claro que não havia necessidade de se colocar o ponto zero da régua em P. Poderíamos ter colocado a régua como na figura abaixo



Nesse caso vemos que a distância entre P e Q, medida em cm, é $20 - 2 = 18$, como antes.

A escala de muitas réguas está marcada em polegadas. Usando essa escala, poderíamos ter colocado a régua como visto abaixo



Isso dá uma distância de cêrca de 7 polegadas.

Naturalmente, um metro é 100 centímetros. Um milímetro é um milésimo do metro. Um pé são 12 polegadas e uma jarda são 36 polegadas. Podemos, portanto, medir a distância entre P e Q pelo menos dessas várias maneiras: 180 mm, 18 cm, 0,18 m, 7 polegadas, $\frac{7}{12}$ pés, $\frac{7}{36}$ jardas. Assim, o *número* que obtemos como medida da distância depende da *unidade de medida.*

Problemas 2-4A

1. A distância do ponto H ao ponto K medida em cm é 4. Se escolhermos o mm para unidade, que número mede a distância de H a K?

2. A distância de K a M, medida em cm é 9. Que número mede a distância de K a M em metros?

3. 

(a) Réguas com diferentes escalas são usadas para medir PQ, PR e PT, e os resultados estão na tabela abaixo. Copie e Complete.

Unidade de medida	PQ	PR	PT	QT
polegada	2			
pé		$\frac{1}{4}$		
jarda	$\frac{1}{18}$		$\frac{1}{9}$	
centímetro	5,08			
milímetro				50,8
metro		0,0762		
palmo			0,364	

(b) Qual é a razão de PQ para PR? de PQ para PT?
(c) A razão de PQ para PT muda quando unidades diferentes são usadas?
(d) Qual o valor de QR em polegadas? em centímetros? em palmos?

4. Discuta as seguintes questões:
(a) Por que temos tantas unidades para medir distâncias?
(b) Imagine que tivéssemos estabelecido uma só unidade universal para medir distância. Que vantagens isso traria? Que desvantagens resultariam?

5. Copie e complete as afirmações, preenchendo com os números apropriados.
(a) 6 pol = ... pés = ... jardas
(b) .... pol = 7,5 pés = ... jardas
(c) .... pol = ... pés = $\frac{2}{3}$ jardas

6. Copie e complete as afirmações, preenchendo com números apropriados
(a) 2 m = ... cm = ... mm.
(b) .... m = 50 cm = ... mm.
(c) .... m = ... cm = 1 mm.

7. 

A, B e C são três pontos de uma reta arranjados como na figura acima. Qual o valor de AC, dado que
(a) $AB = 6$ cm e $BC = 12$ cm?
(b) $AB = 6$ m e $BC = 12$ m?
(c) $AB = 6$ mm e $BC = 12$ mm?

8. A, B e C são três pontos de uma reta arranjados na ordem do Problema 7. Qual o valor de AC, dado que
(a) $AB = 6$ m e $BC = 12$ cm?
(b) $AB = 6$ cm e $BC = 12$ m?
(c) $AB = 6$ cm e $BC = 12$ cm?

9. Observe que apenas os números 6 e 12 apareceram nos enunciados dos Problemas 7 e 8. Explique por que no Problema 7 a resposta às três questões é o mesmo número, enquanto que no Problema 8 tôdas as respostas são diferentes.

Lògicamente falando, uma unidade funciona tão bem quanto qualquer outra. No entanto, o uso de várias unidades no mesmo problema causaria dificuldades desnecessárias. Vamos portanto escolher uma unidade e concordar em usá-la em todos nossos teoremas. (Não há mal nenhum em escolher a unidade com tôda arbitrariedade. Se você gostar de polegadas ou quilômetros ou pés, você tem ampla liberdade de escolhê-los como unidades. *Todos nossos teoremas serão válidos para tôdas as unidades*).

Assim, uma vez escolhida uma unidade, a cada par de pontos, P e Q, corresponderá um número que nos dirá quão longe P está de Q. Êsse número é chamado a *distância* entre P e Q.

Formalizaremos essa discussão, enunciando um postulado e uma definição.

POSTULADO 1. O Postulado da Distância

A todo par de pontos distintos corresponde um único número positivo.

Definição

A *distância* entre dois pontos é o número dado pelo Postulado da Distância. Se os pontos são denotados por P e Q, a distância será representada por PQ.

Admitimos a possibilidade de $P = Q$, isto é, de P e Q serem o mesmo ponto. Nesse caso, $PQ = 0$. A distância é definida simplesmente para um par de pontos e não depende da ordem em que êsses pontos são mencionados. Portanto sempre temos $PQ = QP$.

Alguns dos problemas que você deve resolver envolverão várias unidades como centímetros, metros, quilômetros e assim por diante. Como já observamos, todos os teoremas serão válidos para essas unidades, desde que, *consistentemente, você use uma só unidade cada vez que aplicar um teorema.* Em outras palavras, você pode fazer a escolha que quiser, desde que você a mantenha, mas não pode mudar de unidade no meio de um teorema.

Problemas 2-4B

1. Alberto, Bruno e Carlos mediram, em centímetros, a distância entre dois pontos P e Q, marcados num quadro negro. Alberto encontrou $PQ = 27$, Bruno encontrou

$PQ = 27,5$ e Carlos encontrou $PQ = 26,75$. Quantos dos meninos podiam estar certos. Por quê? Um dos meninos, necessàriamente, estava certo? Discuta.

2. Se a distância PQ é 54 dm, qual o valor de PQ medido em cm? medido em metros?
3. Se a distância RS é 15 m, qual o valor de RS medido em cm? em dm?
4. Eduardo e Francisco estavam calculando distâncias entre os mesmos pontos A, B e C. Eduardo disse "Se $AB = 1$ então $BC = 2\frac{1}{2}$". Francisco disse: "Se $AB = 12$, então $BC = 30$". Se os dois meninos estavam certos, explique como êles poderiam ter obtido números diferentes para as mesmas distâncias. Isso está de acôrdo com o Postulado da Distância?
5. Se a distância RS é x dm, quanto vale RS medido em cm? medido em m?

* 6. A distância AB medida em dm é 15 mais que 9 vêzes a mesma distância medida em metros. Qual é a distância AB em metros?

* 7. O perímetro de um triângulo medido em dm é 10 mais que 10 vêzes seu perímetro medido em metros. Qual é o perímetro em metros?

+ 8. Se o lado de um quadrado é 4 m, seu perímetro é 16 m e sua área é 16 metros quadrados, sendo $16 = 16$, a afirmação, "a área de um quadrado é igual ao seu perímetro" é verdadeira para êsse quadrado.
   (a) A afirmação continua verdadeira quando o lado do quadrado é medido em centímetros?
   (b) Descreva dois outros quadrados para os quais a afirmação é verdadeira.
   (c) O que têm em comum os três quadrados para os quais a afirmação é verdadeira?

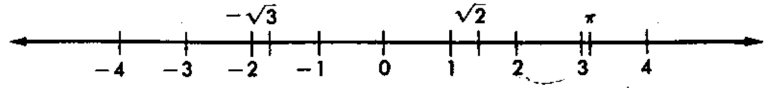
+ 9. Se o comprimento de um retângulo é 6 m e sua largura 4 m, a afirmação "o perímetro do retângulo é a soma do dôbro do seu comprimento com o dôbro de sua largura" é verdadeira para êsse retângulo.
   (a) A afirmação continua verdadeira quando o comprimento e largura são medidos em cm? em dm?
   (b) Depende a veracidade dessa afirmação de uma escolha especial de números? de uma escolha especial de unidades?

+ 10. Se o raio de uma circunferência é 2 m, seu comprimento ($C = 2\pi r$) é 4π m e a área do círculo que ela limita ($A = \pi r^2$) é 4π metros quadrados. A afirmação "a área de círculo é igual ao comprimento de sua circunferência" é verdadeira para êsse círculo.
   (a) A afirmação continua verdadeira quando o raio do círculo é medido em cm?
   (b) Descreva dois outros círculos para os quais a afirmação é verdadeira.
   (c) Depende a veracidade dessa afirmação de uma escolha especial de números? de uma escolha especial de unidades?

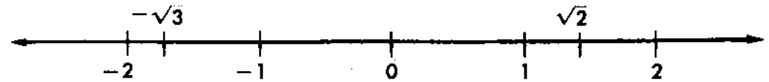
+ 11. Nos problemas 8, 9 e 10 você deve ter observado que algumas afirmações geométricas são verdadeiras apenas para certos números, não importando que unidade é especificada. Outras afirmações são verdadeiras independentemente da escolha de números ou unidades.
   Você deve verificar que as seguintes afirmações são verdadeiras. Em seguida indique se elas permanecem verdadeiras quando os comprimentos são medidos em unidades diferentes. Que afirmações permanecem verdadeiras sòmente se o mesmo número ou conjunto de números fôr usado para tôdas as unidades?
   (a) O perímetro de um retângulo de 3 m de largura e 4 m de comprimento é 14 m.
   (b) O perímetro de um quadrado de lado 2 m é o dôbro de sua área.
   (c) O perímetro de um triângulo de lados de comprimento 12 cm é 36 cm.
   (d) Um triângulo, cujos lados têm comprimento 3 m, 4 m e 5 m, é um triângulo retângulo. (Use o teorema de Pitágoras).
   (e) Um triângulo de lados 9 cm, 12 cm e 15 cm é um triângulo retângulo.
   (f) A área de um círculo de raio 4 m é o dôbro do comprimento de sua circunferência.

2-5. UMA RÉGUA INFINITA

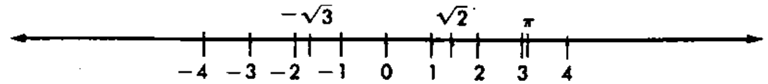
No começo dêsse capítulo estabelecemos uma escala de números numa reta, assim:



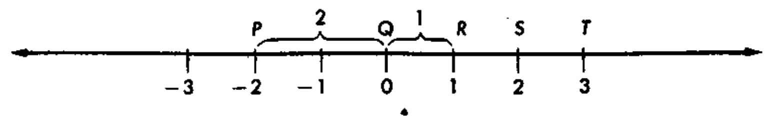
Poderíamos, é claro, ter usado uma escala maior:



ou uma escala menor:



Mas vamos convencionar, de agora em diante, que sempre que estabelecermos uma escala de números numa reta, devemos usar a escala dada pelo Postulado da Distância.



Isto é, o ponto marcado com 1 deve estar a uma distância 1 do ponto marcado com 0; o ponto marcado com -2 deve estar a uma distância 2 do ponto 0 e assim por diante. Da figura, tira-se as distâncias

$$QR = 1,$$
$$QS = 2,$$
$$QT = 3.$$

Por subtração, obtemos

$$RS = 2 - 1 = 1,$$
$$RT = 3 - 1 = 2,$$
$$PR = 1 - (-2) = 3.$$

De fato, parece que podemos sempre achar a distância, calculando a diferença dos números marcados.

Essa afirmação é quase verdadeira, mas não totalmente. Se tomarmos os pontos P e R em ordem reversa, obtemos a resposta errada

$$RP = -2 - 1 = -3.$$

que é o *oposto* da resposta correta. Na verdade, cêrca da metade das vêzes, a subtração dá uma resposta negativa.

É fácil, porém, contornar essa dificuldade: tomamos o *valor absoluto* da diferença dos números marcados. Ao fazermos isso, tôdas nossas respostas corretas permanecem corretas e tôdas nossas respostas erradas tornam-se corretas. Por exemplo

$$PR = |1-(-2)| = |3| = 3,$$

e

$$RP = |-2-1| = |-3| = 3,$$

como deveria ser.

Assim, vemos que a distância entre dois pontos é o valor absoluto da diferença dos números correspondentes.

Formalizamos êsse bom-senso, resumindo-o num postulado.

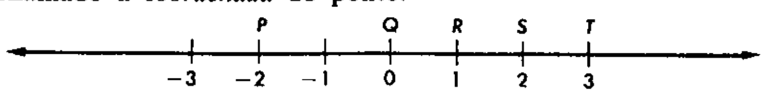
POSTULADO 2. O Postulado da Régua

Os pontos de uma reta podem ser postos em correspondência com os números reais, de tal modo que
(1) *a cada ponto da reta corresponde exatamente um número real;*
(2) *a cada número real corresponde exatamente um ponto da reta; e*
(3) *a distância entre dois pontos quaisquer é o valor absoluto da diferença dos números correspondentes.*

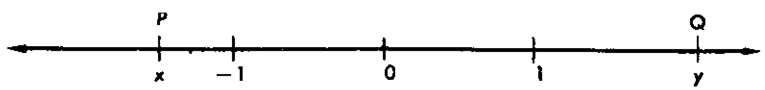
Chamamos êsse postulado de Postulado da Régua, porque seu efeito é nos fornecer uma régua infinita que pode ser colocada em tôda reta e usada para medir a distância entre dois pontos quaisquer.

Definições

Uma correspondência do tipo descrito pelo Postulado da Régua é chamada um *sistema de coordenadas*. O número correspondente a um dado ponto é chamado a *coordenada* do ponto.



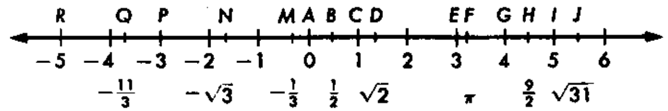
Por exemplo, na figura acima, a coordenada de P é -2, a coordenada de Q é 0, a coordenada de R é 1, e assim por diante.



Se a coordenada de P é x e a coordenada de Q é y, então o Postulado da Régua nos diz que

$$PQ = |y-x|.$$

Problemas 2-5

1. 

Na figura, foi estabelecido um sistema de coordenadas numa reta com 0 em A e 1 em C. Para facilitar a leitura, algumas coordenadas não inteiras foram escritas um pouco abaixo dos inteiros. Determine as seguintes distâncias:

(a) AC	(b) AD	(c) EI	(d) PR
(e) RI	(f) AN	(g) BH	(h) QM
(i) AF	(j) DJ	(k) ND	(l) PF

2. Simplifique:

(a) $\|6-2\|$	(b) $\|2-6\|$	(c) $\|5-0\|$
(d) $\|0-5\|$	(e) $\|0-(-5)\|$	(f) $\|4-(-4)\|$
(g) $\|x\|$	(h) $\|x-0\|$	(i) $\|x-(-x)\|$
(j) $\|x\|-\|-x\|$		

3. Usando o Postulado da Régua, ache a distância para os pares de pontos tendo as seguintes coordenadas

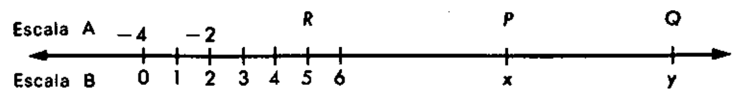
(a) 0 e 8	(b) 8 e 0	(c) 0 e -8
(d) -5 e -7	(e) $-\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{3}$	(f) $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$
(g) $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{5}$	(h) x e y	(i) $2a$ e $-a$
(j) 0 e x		

4. Se você usar uma régua comum de 30 cm para medir a distância entre dois pontos, marcados num pedaço de papel, é necessário colocar o zero em um dos pontos? Explique.

5. Suponha que ao medir a distância PQ você tencione colocar o zero de sua régua em P e ler um número positivo em Q. Como você pode ainda determinar PQ, se, por acaso, você colocar sua régua de tal modo que P corresponda a $\frac{1}{4}$ e

(a) Q corresponda a um número positivo?

(b) Q corresponda a um número negativo?

6. 

Na figura, escalas A e B usam a mesma unidade mas designam números de um modo diferente.

(a) Quais são as coordenadas de R, P e Q na escala A?

(b) Mostre como achar a distância RQ, usando a escala B; usando a escala A.

(c) Qual é a distância PQ na escala A? na escala B?

7. Considere um sistema de coordenadas na reta. Suponha que 3 é adicionado à coordenada de cada ponto e a obtida é o nôvo número designado a cada ponto.

(a) Se P tem coordenada 5, qual será seu nôvo número? Se Q tem coordenada -2, qual será seu nôvo número?

(b) Se dois pontos da reta têm coordenadas a e b quais serão seus novos números?

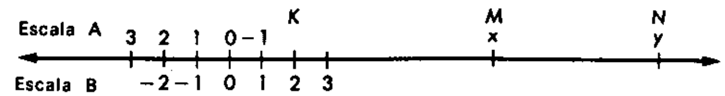
(c) Cada ponto da reta corresponderá a um nôvo número? Cada nôvo número corresponderá a um ponto da reta?

(d) Mostre que a fórmula

$$|\text{(Nôvo número para um ponto)} - \text{(Nôvo número para outro ponto)}|$$

dá a distância entre os dois pontos.

(e) Essa nova correspondência entre pontos e números satisfaz às três condições do Postulado da Régua? Pode cada número ser chamado a coordenada de um ponto? Por quê?

8. 

Na figura, escalas A e B usam a mesma unidade mas designam números de modo diferente.

(a) Qual é a coordenada de K na escala A?

(b) Quais são as coordenadas de M e N na escala B?

(c) Se $x = -6$, qual é a coordenada de M na escala B?

(d) Se a coordenada de N na escala B é $9\frac{1}{2}$ qual o valor de y?

(e) O que é a distância KM? a distância MN?

9. Quantos números reais existem? Como é que você sabe? Isso lhe diz algo sôbre o número de pontos numa reta? Quantos pontos tem uma reta? Como o Postulado da Régua entrou no seu argumento?

10. Num certo distrito as cidades A, B e C são colineares (estão numa reta) mas não necessàriamente nessa ordem. A distância de A a B é 8 km. A distância de B a C é 14 km.

(a) É possível dizer qual cidade está entre as outras duas? qual *não* está entre as outras duas?

(b) Use um desenho para determinar a distância de A a C. Existe mais de uma possibilidade?

(c) Se lhe fôr dada a informação adicional que a distância de A a C é 6 km, então que cidade está entre as outras duas?

(d) Se a distância entre A e B é k km, entre A e C m km e entre B e C, $k + m$ km, que cidade está entre as outras duas?

11. E, H e K são três pontos numa reta. E e H estão a uma distância de 3 cm e H e K estão a uma distância de 5 cm. De quantos modos podem êsses pontos ser arranjados? Explique com um desenho.

* 12. Três sistemas de coordenadas diferentes são fixados em uma mesma reta. A três pontos fixos A, B e C da reta são designadas coordenadas da seguinte maneira:

No sistema I a coordenada de A é -6 e a de B é -2.

No sistema II as coordenadas de A e C são, respectivamente, -4 e -3.

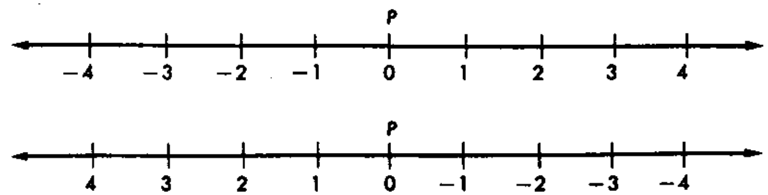
No sistema III, as respectivas coordenadas de C e B são 7 e 4.

(a) Que ponto está entre os outros dois?

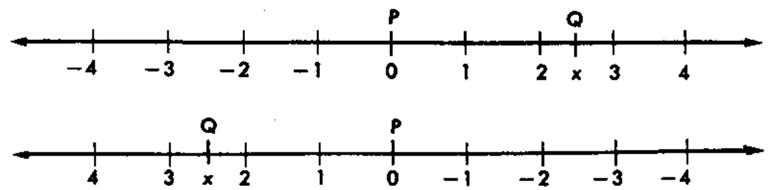
(b) Calcule $AB + AC + BC$.

2-6. O POSTULADO DA COLOCAÇÃO DA RÉGUA. ESTAR ENTRE, SEGMENTOS E SEMI-RETAS

O postulado da Régua nos diz que em qualquer reta podemos estabelecer um sistema de coordenadas, fixando uma escala de números. Òbviamente, isso pode ser feito de muitos modos diferentes. Por exemplo, dado um ponto qualquer P da reta, podemos associar a P o número 0 e marcar o resto da escala em qualquer uma das duas direções:



Portanto, se Q é qualquer outro ponto da reta, podemos fixar a escala de tal modo que a coordenada de Q seja positiva



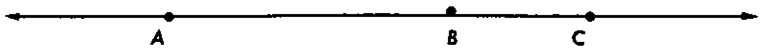
Em cada caso, a escala é marcada de modo que $x > 0$.

Formalizamos essa observação enunciando-a como um postulado.

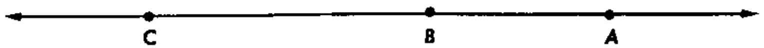
POSTULADO 3. O Postulado da Colocação da Régua

Dados dois pontos P e Q numa reta, o sistema de coordenadas pode ser escolhido de tal modo que a coordenada de P seja zero e a coordenada de Q seja positiva.

Todos sabem o que significa dizer que um ponto B está entre dois pontos A e C. Isso significa que os três pontos estão na mesma reta e estão arranjados assim:



ou assim



Até aqui, tudo está bem. Duvidamos que alguém fique confuso a respeito do significado da palavra *entre*, depois que umas figuras forem desenhadas. Mas nos prometemos, no Cap. 1, que todos nossos têrmos geométricos iam ser definidos, exceto os têrmos *ponto*, *reta* e *plano*. Para deixar tudo em ordem, devemos cumprir nossa promessa, dando uma definição matemática de *entre* que transmita a idéia que temos em mente. Isso é fácil.

Definição

B está *entre* A e C se (1) A, B e C são pontos distintos de uma reta e (2) $AB + BC = AC$.

É fácil verificar que essa definição realmente descreve a idéia que ela pretende descrever.

Existe, porém, um ponto delicado na maneira em que a definição é enunciada. É o uso da palavra *se*. Numa definição, quando duas afirmações são ligadas pela palavra *se*, as duas afirmações são consideradas como sendo completamente equivalentes. Assim, se soubermos que B está entre A e C, podemos concluir que tanto (1) como (2) são verdadeiros; e se soubermos que tanto (1) como (2) são verdadeiros, podemos concluir que B está entre A e C. Êsse uso da palavra *se* é bastante especial, pois êle é diferente do seu uso na linguagem comum. E a palavra *se* não é usada dêsse modo nos postulados e teoremas. Sòmente em definições o significado da palavra *se* é *ser equivalente a*.

Problemas 2-6A

1. Considere um sistema de coordenadas numa reta. Os pontos R e S têm coordenadas x e y, respectivamente. O Postulado da Colocação da Régua é aplicado, isto é, a escala é deslocada, de modo que a coordenada de R seja 0 e a de S um número positivo. Qual será êsse número positivo, dado que x e y são:

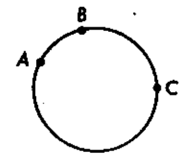
(a) $x = -3,\ y = 4$. (b) $x = -4,\ y = -10$.
(c) $x = 8,\ y = -2$. (d) $x = \frac{9}{2},\ y = -4$.
(e) $x = 5{,}2,\ y = 6.1$. (f) $x = a,\ y = b$.

2. A, B, C são três pontos de uma reta. $AC = BC = 5$. A coordenada de C é 8 e a coordenada de A é maior que a coordenada de B. Quais são as coordenadas de A e B?
3. A, B, C são três pontos de uma reta. $AC = BC = 10$. A coordenada de C é 8 e a coordenada de A é maior que a coordenada de B. Quais são as coordenadas de A e B?
4. M, N, P são três pontos de uma reta. $MN = 7$, $NP = 9$ e $MP = 2$. A coordenada de M é 3. Quais são as coordenadas de N e P se
   (a) a coordenada de M é menor que a de N?
   (b) a coordenada M é maior que a de N?
5. R, S, T são três pontos de uma reta. Se R está entre S e T, que relação deve ser válida, envolvendo RS, ST e RT?
6. P, Q, R são três pontos de uma reta. Se $PQ = 12$, $PR = 7$ e $QR = 5$, que ponto está entre os outros dois? Que postulado ou definição é a razão de sua resposta?
7. G, H, K são três pontos de uma reta. As coordenadas de G e H são 4 e -3 respectivamente. Se H está entre G e K e $GK = 13$, qual é a coordenada de K?

* 8. A, E, K são três pontos de uma reta. As coordenadas de A e K são $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{18}$. Se $AE = EK$, qual é a coordenada de E?

* 9. A, B, C são três pontos de uma reta com coordenadas a, b, c respectivamente. Se $|a-c| + |c-b| = |a-b|$, que ponto está entre os outros dois? Justifique sua resposta.

10. É a seguinte afirmação uma definição de "estar entre" para pontos de uma reta? F, G, H são pontos distintos de uma mesma reta e $FG + GH = FH$ se G estiver entre F e H.
    Qual é a diferença entre a formulação dessa afirmação e a que está no texto?



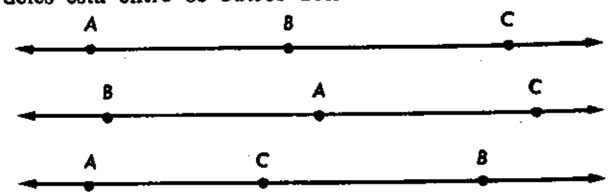
\+ 11. Se A, B e C forem três pontos de uma circunferência, você pode dizer que ponto está entre os outros dois? Discuta.

As duas afirmações seguintes são óbvias.

(1) Sejam A, B e C pontos de uma reta com coordenadas x, y e z:

Se $x < y < z$, então B está entre A e C.

(2) Se A, B e C são três pontos distintos de uma mesma reta, então exatamente um dêles está entre os outros dois

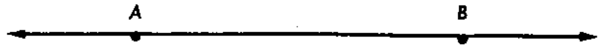


De fato, ambas as afirmações podem ser demonstradas com base no Postulado da Régua. Sem essa demonstração, podemos considerar as duas afirmações como postulados.

Chegamos agora num ponto em que precisamos do seguinte postulado:

POSTULADO 4. O Postulado da Reta

Para cada par de pontos distintos existe exatamente uma reta que os contém.



A reta que contém A e B é representada por $\overleftrightarrow{AB}$. A flecha de duas pontas sôbre as letras A e B deve nos lembrar das nossas figuras de retas. A notação sugere que a reta está determinada quando os pontos A e B são dados e é exatamente isso que o Postulado da Reta acabou de nos dizer. Algumas vêzes, é claro, é mais simples representar uma reta por uma letra como L, W ou qualquer outra.

Um segmento é uma figura assim:

Uma descrição mais precisa é dada pelas seguintes definições.

Definições

Para dois pontos quaisquer A e B, o *segmento* $\overline{AB}$ é o conjunto cujos pontos são A e B, juntamente com todos os pontos que estão entre A e B. Os pontos A e B são chamados *extremidades* de $\overline{AB}$.

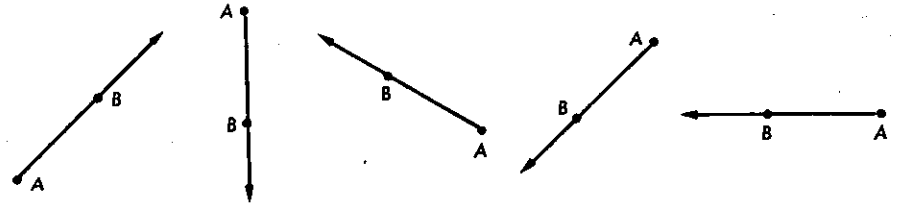
No símbolo $\overline{AB}$, a barra horizontal no tôpo deve nos lembrar da aparência de um segmento. Observe que há uma grande diferença entre o segmento $\overline{AB}$ e a distância AB. De fato, são objetos de tipos completamente diferentes: $\overline{AB}$ é uma figura geométrica, isto é, um conjunto de pontos, enquanto que AB é um número que mede a distância entre as extremidades.

Definição

O número AB é chamado *comprimento* do segmento $\overrightarrow{AB}$.

Uma semi-reta é uma figura assim:

A figura deve indicar que uma semi-reta começa em A, passa por B em linha reta e continua para sempre na mesma direção. Na notação de uma semi-reta, sempre desenhamos uma flecha da esquerda para a direita, independentemente da direção para a qual a semi-reta aponta. Por exemplo, tôdas as semi-retas abaixo seriam representadas por $\overrightarrow{AB}$:

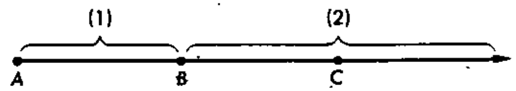


Tendo explicado informalmente o que é uma semi-reta, vamos continuar agora, dando uma definição matemática.

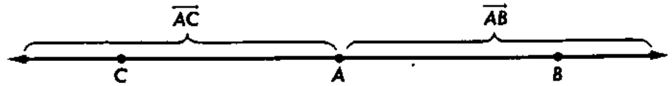
Definições

Sejam A e B pontos de uma reta L. A *semi-reta* $\overrightarrow{AB}$ é o conjunto reunião de (1) o segmento $\overline{AB}$ e (2) o conjunto de todos os pontos C para os quais B está entre A e C. O ponto A é chamado *origem* de $\overrightarrow{AB}$.

As duas partes da semi-reta são assim:



Se A está entre B e C em L, então as duas semi-retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ "apontam em direções opostas":



Definição

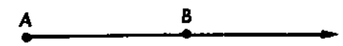
Se A está entre B e C, então $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são chamadas *semi-retas opostas*.

Observe que um par de pontos A e B determina pelo menos seis figuras geométricas e um número. As seis figuras geométricas são:

A reta $\overleftrightarrow{AB}$

O segmento $\overline{AB}$

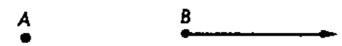
A semi-reta $\overrightarrow{AB}$



A semi-reta oposta a $\overrightarrow{AB}$

A semi-reta $\overrightarrow{BA}$

A semi-reta oposta a $\overrightarrow{BA}$



O número determinado por A e B é, naturalmente, a distância AB.

Problemas 2-6B

1. A, B, C são três pontos de uma reta com coordenadas 7, 3, e 12 respectivamente. Que ponto está entre os outros dois?
2. P, Q, R são três pontos de uma reta com coordenadas -5, $-\sqrt{4}$ e $-\sqrt{12}$, respectivamente. Que ponto está entre os outros dois?
3. G, H, K são três pontos de uma reta. Quais das seguintes afirmações podem ser verdadeiras?

   (a) K está entre G e H e H está entre G e K.
   (b) H está entre K e G e H está entre G e K.
   (c) G está entre H e K e K está entre G e H.
   (d) K está entre H e G e G está entre K e H.
   (e) G está entre K e H e G está entre H e K.

4. Se três pontos estão numa reta, quantos dêles não estão entre os outros dois?
* 5. Três pontos de uma reta, R, S, T têm coordenadas a, b e $a + b$, respectivamente; $a > 0$ e $a > b$. Que ponto está entre os outros dois se
   (a) $b > 0$. (b) $b < 0$. (c) $b = 0$.
6. D, E, F são três pontos, não todos numa reta. Quantas retas êles determinam? Quais são?
7. D, E, F, G são quatro pontos, três dos quais estão numa reta. Quantas retas êles determinam? Quais são?
8. P, Q, R são três pontos. Quantos segmentos êles determinam? Quais são? Quantas retas P, Q e R determinam?
9. (a) $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BA}$? por quê?
   (b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$? Por quê?
   (c) $\overline{AB} = \overline{BA}$? Por quê?
10. $\overline{AB} = AB$?Por quê? O que é AB?
11. (a) Copie o seguinte parágrafo, colocando os símbolos apropriados, se necessários, acima de cada par de letras.
    XZ contém os pontos Y e V mas XZ não contém nem Y nem V. V pertence a XZ mas Y não. $YZ + ZV = YV$.
    (b) Faça um desenho, mostrando a posição relativa dos quatro pontos da parte (a).
12. Se $\overrightarrow{RS}$ é oposta a $\overrightarrow{RT}$, qual dos pontos R, S, T está entre os outros dois?
13. O que é a interseção de $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{DC}$? de $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{DC}$?
14. Se A, B e C são três pontos de uma reta tais que $AC + BC = AB$, o que é a interseção de $\overrightarrow{CB}$ e $\overrightarrow{BA}$? de $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$? de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$?
** 15. É correta a seguinte definição de semi-reta $\overrightarrow{AB}$?

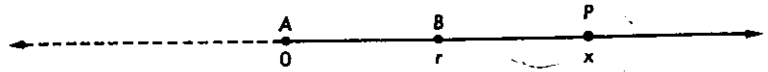
    Semi-reta $\overrightarrow{AB}$ é o conjunto de todos os pontos D de $\overleftrightarrow{AB}$ para os quais a afirmação "A está entre D e B" não é verdadeira.

O seguinte teorema é conseqüência do Postulado da Colocação da Régua.

Teorema 2-1.

Seja $\overrightarrow{AB}$ uma semi-reta e seja x um número positivo. Então existe exatamente um ponto P de $\overrightarrow{AB}$ tal que $AP = x$.

Demonstração. Pelo Postulado da Colocação da Régua, podemos escolher um sistema de coordenadas para a reta $\overleftrightarrow{AB}$ de tal modo que a coordenada de A seja 0 e a coordenada de B um número positivo r.

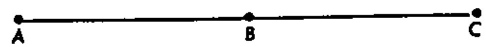


Seja P o ponto cuja coordenada é o número dado x. Então P está em $\overrightarrow{AB}$ porque $x > 0$ e $AP = |x - 0| = |x| = x$. (Por definição de valor absoluto, $|x| = x$ quando $x > 0$.) Como sòmente um ponto da semi-reta tem coordenada x, sòmente um ponto da semi-reta está a uma distância x de A.

(Observe que essa demonstração copia o processo que usaríamos se a semi-reta estivesse desenhada num papel e tivéssemos que marcar o ponto P com uma régua. Colocaríamos o ponto zero da régua em A e marcaríamos o ponto oposto ao número x da escala).

Definição

Um ponto B é chamado *ponto médio* de um segmento $\overline{AC}$ se B está entre A e C e $AB = BC$.



Teorema 2-2.

Todo segmento tem exatamente um ponto médio.

Demonstração. Queremos um ponto satisfazendo as duas condições

$$AB + BC = AC \quad \text{e} \quad AB = BC.$$

Essas duas equações nos dizem que

$$AB = \frac{AC}{2}.$$

Pelo teorema anterior, existe exatamente um ponto B da semi-reta $\overrightarrow{AC}$ que está a uma distância $AC/2$ de A. Portanto $\overline{AC}$ tem exatamente um ponto médio.

Problemas 2-6C

1. 

   Em $\overrightarrow{ST}$, S, T e V são pontos distintos. Podemos ter $ST = SV$? Por quê?
2. P é um ponto numa reta e n é um número positivo. Quantos pontos da reta estão a uma distância n de P? Que definições ou teoremas justificam sua resposta?
3. A, B e C são três pontos numa reta. A coordenada de A é 0 e a coordenada de C é -6. Se B é o ponto médio de $\overline{AC}$, qual é a coordenada de B?
4. A, B e C são três pontos de uma reta. As coordenadas de A e B são -2 e 8 respectivamente. Se C divide $\overline{AB}$ ao meio, qual é a coordenada de C?
5. B, o ponto médio de $\overline{AC}$, tem coordenada 5. Se a coordenada de A é maior que a coordenada de C e se $BC = 9$, quais são as coordenadas de A e C?
6. Pode-se definir ponto médio de uma reta?
7. (a) Se as coordenadas de P e Q são 4 e 10 respectivamente e M divide $\overline{PQ}$ ao meio qual é a coordenada de M?
   (b) Que palavra (ou palavras) completam a seguinte sentença? Se M é o ponto médio de $\overline{PQ}$, então a coordenada de M é .... das coordenadas de P e Q.

\+ 8. Por que a seguinte afirmação não é uma definição de ponto médio de um segmento? Um ponto B é chamado ponto médio de um segmento $\overline{AC}$ se $AB = BC$.

*+ 9. (a) Se A, B, C são três pontos distintos e $AB + BC = AC$, que relação existe entre os três pontos?
   (b) Se A, B e C são três pontos distintos, pode $AB + BC > AC$ ser uma afirmação verdadeira? Se sua resposta fôr negativa, por que não? Se fôr afirmativa, que relação existe entre A, B e C?

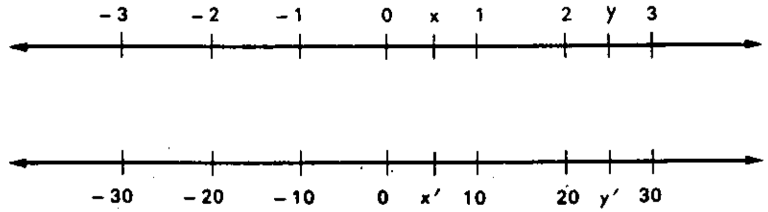
2-7. MUDANÇAS NA UNIDADE DE DISTÂNCIA

Na Seção 2-4, foi explicado que, ao trabalharmos com problemas em geometria, podemos escolher a unidade de distância que quisermos, desde que, num problema particular, mantenhamos a unidade escolhida. Por outro lado, temos a liberdade de começar tudo novamente com uma nova unidade, sempre que assim o desejarmos.

Suponha, por exemplo, que a distância dada pelo Postulado da Distância seja em metros e que para dois pontos quaisquer P, Q, o número PQ seja o número de metros entre P e Q. Se decidirmos que seria melhor usar decímetros, deveríamos multiplicar tôdas as distâncias por 10. Isto é, se $(PQ)'$ (lê-se "PQ linha") é a nova distância entre P e Q, temos

$$(PQ)' = 10PQ.$$

A nova distância é tão boa quanto a antiga. O Postulado da Régua continua válido para a nova distância, da mesma maneira como o era para a antiga.



Em tôda reta L existe um sistema de coordenadas no qual

$$PQ = |y-x|.$$

Para obter um sistema de coordenadas que funcione para a nova distância, basta multiplicar cada uma das velhas coordenadas por 10. Assim, na figura, $x' = 10x$ e $y' = 10y$. Portanto

$$\begin{aligned} |y'-x'| &= |10y-10x| \\ &= 10|y-x| \\ &= 10PQ \\ &= (PQ)', \end{aligned}$$

exatamente como deveria acontecer.

De fato, começando com dois pontos quaisquer A e B, podemos escolher uma nova distância de tal modo que $(AB)' = 1$. Para isso, dividimos *tôdas* as velhas distâncias por AB; isto é,

$$(PQ)' = \frac{PQ}{AB}.$$

Então

$$(AB)' = \frac{AB}{AB} = 1,$$

que é o que queríamos. Para obter um sistema de coordenadas numa reta, que funcione para a nova distância $(PQ)'$, dividimos tôdas as velhas coordenadas por AB. Isto é,

$$x' = \frac{x}{AB}, \qquad y' = \frac{y}{AB}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} |y'-x'| &= \left|\frac{y}{AB} - \frac{x}{AB}\right| \\ &= \frac{|y-x|}{AB} \\ &= \frac{PQ}{AB} \\ &= (PQ)', \end{aligned}$$

como deveria ser.

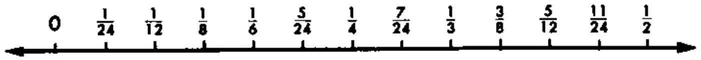
Problemas 2-7

1. 

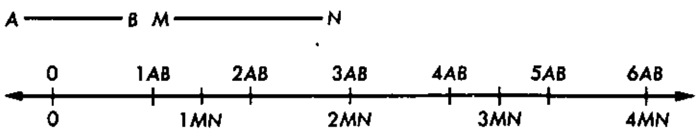
Se na figura, $AB = 3$ e $AB = BC = CD = DE = EF$, então $AF = 15$. Se $(AB)'$ é a nova distância entre A e B que usa AB como unidade, qual será a distância $(AF)'$?

2. No Problema 1, se $(AC)'$ é a distância entre A e C que usa AC como unidade, qual será a distância $(AE)'$? a distância $(AF)'$? a distância $(AB)'$?

3. Considere as duas afirmações abaixo e responda a seguinte questão para cada uma delas: a veracidade da sentença depende da escolha especial da unidade de distância?
   (a) Se A, B, C, D, E, F são pontos distintos de uma reta tais que $AB = BC = CD = DE = EF$ então $AC = BD = CE = DF$.
   (b) Se A, B, C, D, E, F são pontos distintos de uma reta tais que $AB = BC = CD = DE = EF$, então AF é exatamente divisível por 5. (Isto é, $AF/5$ é um número inteiro).
   Qual das afirmações pode ser considerada de "mais utilidade"?

4. 

O sistema de coordenadas indicado na figura funciona quando a distância é medida em decímetros. Copie a figura num papel e, colocando numerais abaixo da reta, indique um sistema de coordenadas que funcione quando a distância é medida em centímetros. Faça o mesmo quando a distância é medida em meio-decímetro; em metros.

5. 

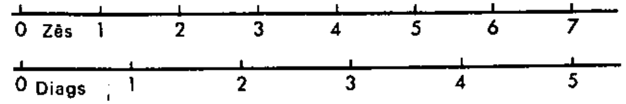
Na figura, a reta está marcada com duas escalas. A escala de cima usa o comprimento de $\overline{AB}$ como unidade e a escala de baixo usa o comprimento de $\overline{MN}$ como unidade. Observe que $6\ AB = 4\ MN$.

(a) Qual é a razão de AB para MN?
(b) Qual é a razão de MN para AB?
(c) Quantos AB's são iguais a $3\ MN$?
(d) Quantos MN's são iguais a $4\ AB$?
(e) Copie e em seguida complete a tabela abaixo

$1AB =$ ....MN.	$1MN =$ ....AB.
$2AB =$ ....MN.	$2MN =$ ....AB.
$3AB =$ ....MN.	$3MN =$ ....AB.
$4AB =$ ....MN.	$4MN =$ ....AB.
$5AB =$ ....MN.	$xMN =$ ....AB.
$6AB =$ ....MN.	
$xAB =$ ....MN.	

* 6. Ao escavarem as ruínas de uma antiga civilização, uma equipe de arqueólogos descobriu peças de duas réguas antigas marcadas com conhecidos símbolos numé-

ricos, mas cada uma usando uma unidade diferente de medida. Êles chamaram uma das escalas de "escala Zê" porque na régua estava gravado um símbolo semelhante a um "Z". Após experimentar um pouco as duas réguas, êles descobriram que um quadrado cujo lado tinha comprimento 1 zê tinha uma diagonal cujo comprimento era a unidade da outra escala. Portanto êles chamaram essa outra escala de "escala Diag". Usando a relação de Pitágoras para triângulos retângulos, êles sabiam que 1 diag $= \sqrt{2}$ zês. Um diagrama das duas escalas está abaixo:



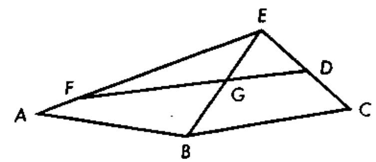
(a) Qual é a medida, em zês, de um segmento cuja medida, em diags, é 1? é 2? é 5? é n?
(b) Faça uma tabela de conversão de diags em zês, até 10 diags.
(c) Qual é a medida, em diags, de um segmento cuja medida em zês é 1? é 4? é 5? é 8? é n?
(d) Copie e complete a tabela de conversão de zês em diags até 10 zês.

Número de zês	Número de diags	Aproximação decimal
1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0,707
2	$\sqrt{2}$	1,414
3	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$	
4		

Revisão do Capítulo

1. Seja A o conjunto dos meses do ano cujos nomes começam com J.
   Seja B o conjunto dos meses do ano que têm exatamente 30 dias.
   Seja C o conjunto dos meses do ano cujos nomes começam com F.
   (a) Qual é a interseção de A e B?
   (b) Qual é a reunião de A e C?
   (c) Qual é a interseção de B e C?
   (d) É C um subconjunto de A? de B? de C?

2. (a) Qual é a interseção de $\overline{FD}$ e $\overline{BE}$?
   (b) Qual é a interseção de $\overline{AE}$ e o triângulo FGE?
   (c) Qual é a reunião de $\overline{ED}$ e $\overline{DC}$?
   (d) Qual é a reunião de $\overline{BG}$ e $\overline{BE}$?
   (e) Qual é a interseção de $\overline{AB}$ e $\overline{EG}$?

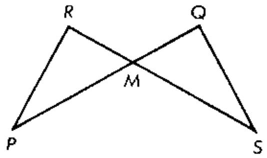


3. (a) Quantos resultados se obtém elevando um número positivo ao quadrado?
   (b) Qual é o quadrado de 4?
   (c) Quantas raízes quadradas tem um número positivo dado?
   (d) $\sqrt{4}$ é negativo?

4. Escreva o que segue sem usar as barras de valor absoluto

(a) $|-6|$ (b) $|5-7|$ (c) $|5|-|7|$
(d) $|-5|-7$ (e) $|n|$ (f) $|-n|$
(g) $|n+(-n)|$ (h) $|n|+|-n|$

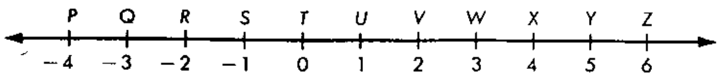
5. (a) Se $a < b$, então $a-b$ é? ....
(b) Se $a = b$, então $a-b$ é? ....
(c) Se $a > b$, então $a-b$ é? ....



6. (a) Que equação define as posições relativas dos pontos P, M e Q?
(b) Sob que condições seria M o ponto médio de $\overline{RS}$?

7. Quatro pontos A, B, C e D são arranjados numa reta de modo que $AC > AB$ e $BD < BC$. Desenhe uma figura contendo os quatro pontos. Há possibilidade para mais de uma ordem? Explique.

8. G é o conjunto de todos os pares de inteiros x e y cuja soma é 21. H é o conjunto de todos os pares de inteiros x e y cuja diferença é 5.
(a) O par 15 e 6 pertence a G?
(b) O par 9 e 4 pertence a H?
(c) Qual é a interseção de G e H?

9. 

(a) Qual é a coordenada de W? de S?
(b) Qual é o nome do ponto cuja coordenada é 0? −3? 5?
(c) Calcule RT, VZ, TW, TQ, RW, PZ, XS, YQ.

10. É dado um sistema de coordenadas numa reta. A coordenada de A é 6, a de B é −2, a de C é 1, a de D é x, a de E é y.
(a) Que ponto tem que estar entre que dois pontos?
(b) Calcule AB, BC, AD, CE, BE, DE.
(c) Se $x-6 > 0$ e $y-(-2) < 0$, em que ordem estão os cinco pontos na reta?

11. É dado um sistema de coordenadas numa reta. A coordenada de P é 7 e a coordenada de Q é −12. Qual é a coordenada de M se $MP = MQ$?

12. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.
(a) −5 é um inteiro. (b) $\frac{4}{7}$ é um número real.
(c) 0 é um número racional (d) $\sqrt{8}$ é um número racional.
(e) $\sqrt{9}$ é um inteiro. (f) $-\dfrac{31}{6}$ é um número racional.
(g) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ é um número racional. (h) $-x$ é um número negativo para todo x real.
(i) $-\sqrt{\dfrac{4}{9}}$ é um número racional. (j) $|x| = x$

13. Se a distância entre A e B medida em centímetros fôr k, qual o valor de AB em decímetros?

14. Se a distância de P a M medida em metros fôr t, qual o valor de PM em centímetros?

15. Os pares de letras no parágrafo que segue indicam números, ou retas, ou segmentos, ou semi-retas. Copie o parágrafo, colocando os símbolos apropriados:

$AB + BC = AC$. DB contém os pontos A e C mas DB não contém nem o ponto A nem o ponto C. A pertence a DB mas C não.

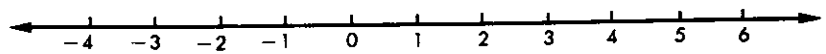
Faça um desenho mostrando a posição relativa dos quatro pontos.

16. Se A, B, C, D são pontos distintos tais que $\overleftrightarrow{AC}$ contém B e $\overleftrightarrow{BD}$ contém C, quais das afirmações abaixo têm de ser verdadeiras?
(a) B está entre A e C. (b) $\overrightarrow{BC}$ contém A.
(c) $\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{BD}$ (d) $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ se interceptam sòmente em B e C.
(e) $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BC}$ não se interceptam.
(f) $\overrightarrow{AC}$ é oposto a $\overrightarrow{DB}$.

17. É dado um sistema de coordenadas em $\overleftrightarrow{AB}$ tal que $\overline{AB}$ é o conjunto de todos os pontos cujas coordenadas x satisfazem a condição $-5 \leq x \leq 7$. A coordenada de A é menor que a coordenada de B.
(a) Qual é a coordenada da origem de $\overrightarrow{AB}$? de $\overrightarrow{BA}$? da semi-reta oposta a $\overrightarrow{BA}$?
(b) Qual é a coordenada do ponto médio de $\overline{AB}$?

18. (a) Desenhe dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ para os quais a interseção de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ é o conjunto vazio mas a interseção de $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ é exatamente um ponto.
(b) Desenhe dois segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{RS}$ tais que a interseção de $\overline{PQ}$ e $\overline{RS}$ é o conjunto vazio mas $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{RS}$.

19. A primeira numeração dos pontos da reta abaixo representa um sistema de coordenadas. Quais das numerações dadas em (a) até (e) não são sistemas de coordenadas de acôrdo com o Postulado da Régua e o Postulado da Colocação da Régua?

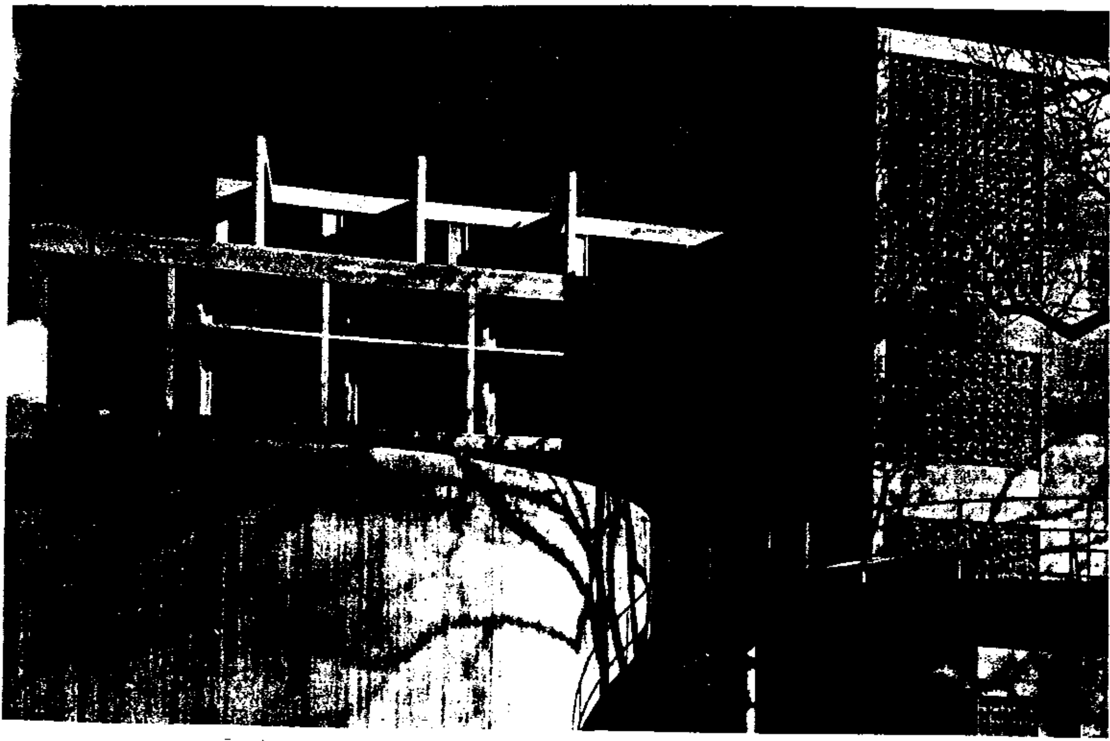


(a)	−4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6
(b)	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
(c)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
(d)	−10	−9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0
(e)	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5

\+ 20. Para cada uma das sentenças abaixo, considere o conjunto de todos os pontos de uma reta cujas coordenadas x satisfaçam a condição.
(a) $x \leq 3$. (b) $x = 1$. (c) $5 \geq x \geq 0$.
(d) $x \geq 1$. (e) $x = -4$. (f) $x \leq -2$ ou $x \geq 2$.
(g) $|x| \leq 2$. (h) $|x| \geq 0$.

Quais dos conjuntos é uma semi-reta? um ponto? um segmento?. Desenhe cada uma das figuras.

3 RETAS, PLANOS E SEPARAÇÃO



3-1. INTRODUÇÃO

No último capítulo, falamos apenas sôbre retas e como medir distância. Na verdade, falamos sôbre uma reta de cada vez, sem discutir qualquer relação que pudesse haver entre duas ou mais retas. Começaremos, agora, o estudo de retas e planos no espaço. Recordamos que nossos conceitos primitivos básicos são *ponto*, *reta* e *plano* — retas e planos sendo conjuntos de pontos.

Definição

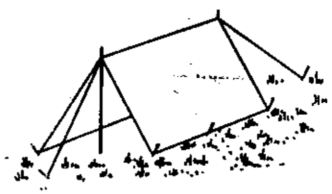
O conjunto de todos os pontos é chamado *espaço*.

Na seção seguinte, explicaremos alguns dos têrmos que usaremos ao discutir retas e planos e enunciaremos alguns dos fatos mais elementares sôbre êles. Muitos dêstes fatos serão enunciados como postulados. Num capítulo posterior, veremos que todos os teoremas dêste capítulo podem ser demonstrados com base nos postulados. Mas, neste capítulo, não trataremos de demonstrações, exceto em caso muito simples. O que tentaremos aqui é obter uns poucos fatos básicos e aprender a traçar figuras no espaço.

Problemas 3-1

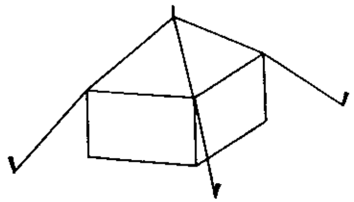
[*Nota:* Quando se está aprendendo a imaginar relações entre pontos, retas e planos no espaço, é útil usar cartões de papelão para ilustrar planos e lápis para ilustrar retas.]

1. Mantenha seu braço esticado para frente. Considere um ponto *A*, na extremidade de seu dedo indicador e um ponto *B* no canto superior à direita da sala. Quantas retas passam pelos pontos *A* e *B*? Em que postulado se baseia sua resposta?
2. Tome um livro ou um pedaço de papelão duro. É possível você manter o papelão em posição fixa sôbre as pontas de dois lápis? Qual é o número mínimo de lápis necessários para que isto aconteça?
3. Podem três pontos estar sôbre uma reta? Terão três pontos que estar sôbre uma reta?
4. Suponha que o canto de sua mesa represente um ponto *P*, o interruptor elétrico na parede um ponto *Q*, e um canto da sala um ponto *R*. Existe um plano contendo os pontos *P*, *Q* e *R*?
5. Qual é o número mínimo de pontos necessários para determinar um plano? Três pontos sempre determinam um plano?



6. Na figura da tenda ao lado, quais são os segmentos de reta que você tem que imaginar para completar o contôrno da tenda? Qual é a interseção dos planos que contêm os dois lados da tenda?

7. A tenda ao lado tem piso em forma quadrada. Quais são os segmentos que completam o contôrno da tenda?



8. Mantenha dois lápis juntos, pelas suas pontas, entre os dedos polegar e indicador. Se os lápis representam duas retas que se interceptam, quantos planos conterão ambas as retas?
9. Quais dos esboços você considera como um retrato mais significativo de um livro? Como é que você deve segurar um livro de modo que êle pareça como no esbôço (a)? E como no esbôço (b)?

(a) 

(b) 

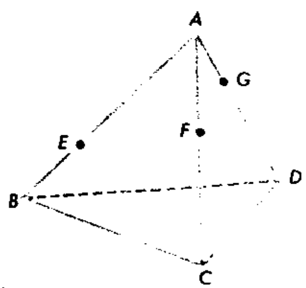
10. Uma tábua com 2,5 m de comprimento está marcada no meio, isto é, a 1,25 m de cada extremidade. Um homem serra a tábua, cuidadosamente, sôbre a marca, e nenhuma das metades resultantes tem 1,25 m de comprimento. Além do mais, os comprimentos combinados das duas peças resultantes não igualam o comprimento original da tábua tôda. Como é que você explica isto?

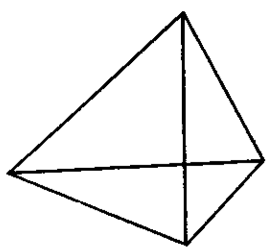
3-2. RETAS E PLANOS

A próxima figura à esquerda é uma figura de uma pirâmide triangular. Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ e $\overline{CD}$ são chamados *arestas*. Observe que a aresta $\overline{BD}$ está interrompida, porque não poderíamos vê-la se a pirâmide fôsse sólida. Se a figura fôsse desenhada como à direita, pareceria um conjunto de pontos em um plano.

Os pontos A, E, B, C e F estão todos em um único plano, a saber, o plano que contém a face superior frontal da pirâmide. Um conjunto de pontos dêste tipo é chamado *coplanar*. Evidentemente, os pontos A, B, C e D não são coplanares.

Os pontos A, E e B estão sôbre uma única reta, a reta $\overleftrightarrow{AB}$. Êstes pontos





se dizem *colineares*. Evidentemente, os pontos, A, B e C não são colineares. Da mesma forma A, F e C são colineares mas A, F e G, não.

Repetiremos, agora, estas afirmações de modo mais formal.

Definição

Um conjunto de pontos se diz *colinear* se existe uma reta que contém todos os pontos do conjunto.

Definição

Um conjunto de pontos se diz *coplanar* se existe um plano que contém todos os pontos do conjunto.

[*Pergunta:* Na figura à esquerda acima, os pontos E, F e G, juntos, não estão contidos em nenhuma das faces da pirâmide. Segue daí que E, F e G não são coplanares?].

Para fazer geometria segundo o esquema descrito no Cap. 1, precisamos de postulados que transmitam os significados reais dos nossos conceitos primitivos: *ponto*, *reta* e *plano*. Para as retas, já fizemos isto. O Postulado da Régua é uma boa descrição daquilo que as retas parecem ser, quando as vemos uma por vez. Dissemos, também, que dois pontos determinam uma reta, quando enunciamos o Postulado 4.

POSTULADO 4. O Postulado da Reta

Para cada par de pontos distintos existe exatamente uma reta que os contém.

Desejamos, agora, escrever os postulados que descrevam os planos e o espaço. Nosso primeiro passo é um postulado afirmando que figuras do tipo daquelas que desenhamos no início desta seção existem, realmente, em nossa geometria.

POSTULADO 5

(a) Todo plano contém pelo menos três pontos não colineares.
(b) O espaço contém pelo menos quatro pontos não coplanares.

Isto é simplesmente um outro modo de dizer que os planos são amplos e que o espaço não é plano.

Finalmente, observamos que o Postulado da Reta transmite alguma informação sôbre a maneira pela qual as retas as interceptam, umas às outras.

Teorema 3-1

Se duas retas distintas se interceptam, a interseção contém apenas um ponto.

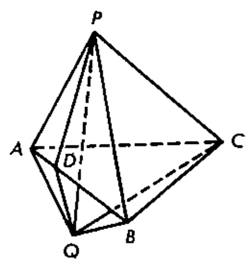
Demonstração. Se as duas retas se interceptassem em dois pontos diferentes P e Q, então haveria duas retas contendo P e Q. O Postulado da Reta nos diz que isto nunca acontece.

Daqui para frente, quando falarmos de *duas* retas ou de *dois* planos, entenderemos sempre que as retas e os planos são diferentes. Isto é, quando falamos de duas coisas, sempre entenderemos que existem, com certeza, dois sêres separados. Mas, se dissermos, simplesmente, que P e Q são pontos, entendemos que é permitida a possibilidade $P = Q$.

Problemas 3-2

1. Decida, olhando para êste desenho de uma figura tridimensional, se cada um dos seguintes conjuntos de pontos é (1) colinear, (2) não colinear mas coplanar ou (3) não coplanar.

(a) $\{A, B, C, D\}$.
(b) $\{A, D, B\}$.
(c) $\{P, D, Q\}$.
(d) $\{P, B, C\}$.
(e) $\{A, B, C, Q\}$.



2. Quantas retas pode conter um ponto dado? dois pontos dados? três pontos dados?
3. Dados: P e Q são pontos distantes. A reta L_1 contém P e Q. A reta L_2 contém P e Q. O que deve ser verdade a respeito de L_1 e L_2? Qual postulado ou teorema garante sua resposta?
4. Dados: As retas L_1 e L_2 são retas distintas. O ponto P está em L_1 e em L_2. O ponto Q está em L_1 e L_2.
O que deve ser verdade a respeito de P e Q? Qual é o postulado ou teorema que garante sua conclusão?
5. Escreva uma definição cuidadosa de pontos não colineares.
6. Diga quantas retas podem ser traçadas por pares de pontos distintos A, B, C e D se
(a) A, B e C são colineares.
(b) Três quaisquer dos pontos dados não são colineares.
(c) Os pontos não são coplanares.

\+ 8. Faça um modêlo da figura do Problema 1, usando palitos e cola.

3-3. RETAS E PLANOS

O postulado seguinte descreve o quanto um plano é "achatado".

POSTULADO 6

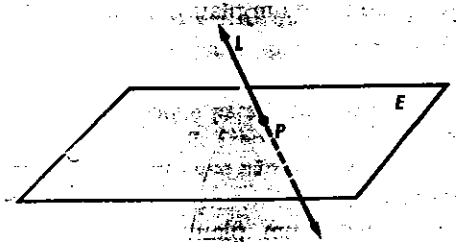
Se dois pontos de uma reta estão em um plano, então a reta está contida nesse mesmo plano.

O próximo teorema descreve o modo pelo qual retas e planos se interceptam.

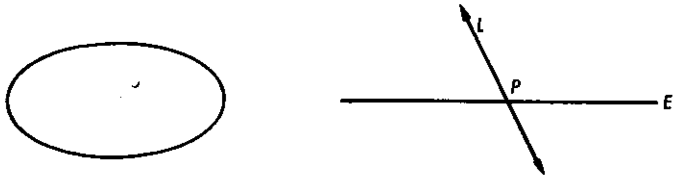
Teorema 3-2

Se uma reta intercepta um plano que não a contém, a interseção contém sòmente um ponto.

(Mais tarde, veremos que o Teorema 3-2 não dá nenhuma informação nova; êle é conseqüência do Postulado 6, da mesma forma que o Teorema 3-1 é conseqüência do Postulado 4.)



Na figura, vemos que a reta L intercepta o plano E do modo que o Teorema 3-2 diz que deve ser. Você verá muitas figuras dêste tipo e deve examiná-las com muito cuidado, de modo que possa desenhá-las sòzinho. Para traçar uma reta, evidentemente, em primeiro lugar traçamos um segmento da reta e então colocamos as pontas de seta nas extremidades para indicar que a reta não pára. Usualmente, indicamos um plano traçando um retângulo do plano. Quando olhamos para um retângulo de grandes arestas, como supomos que seja a figura acima, o retângulo parece um paralelogramo. Da mesma forma, uma circunferência, vista em perspectiva, parece uma elipse, como se vê a seguir, à esquerda. Se os seus olhos estivessem no plano do retângulo, êste pareceria simplesmente um segmento, como é visto à direita, a seguir; o desenho se tornaria lògicamente correto, mas não seria instrutivo.



O Postulado 4 nos diz que dois pontos determinam uma reta. Para determinar um plano, precisamos de três pontos não colineares.

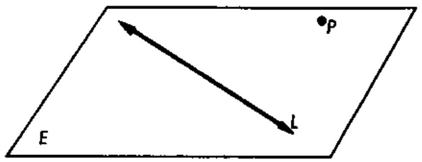
POSTULADO 7. O Postulado do Plano

Três pontos quaisquer pertencem pelo menos a um plano e três pontos não colineares quaisquer pertencem a exatamente um plano.

Mais resumidamente, *três pontos quaisquer são coplanares e três pontos quaisquer não colineares determinam um plano.*

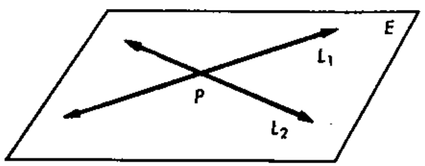
Teorema 3-3

Dados uma reta e um ponto fora da reta, existe exatamente um plano que os contém.



Teorema 3-4

Dadas duas retas que se interceptam, existe exatamente um plano que as contém.



POSTULADO 8

Se dois planos distintos se interceptam, a interseção é uma reta.

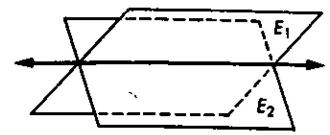
Pode parecer que continuaremos escrevendo uma série sem fim de postulados para descrever idéias intuitivas sôbre espaço. Acontece, entretanto, que não precisaremos fazer isto. Neste livro, estudaremos a geometria do espaço, com base em apenas vinte e quatro afirmações fundamentais. Tudo o mais pode ser deduzido destas afirmações. Neste livro, você aprenderá como isto é feito.

Vinte e quatro não deve ser interpretado como um número grande. Na verdade, é tão pequeno que faz da geometria uma ciência completa-

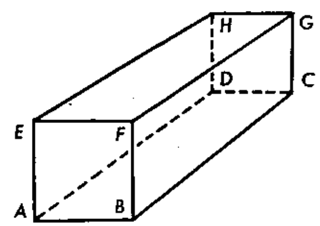
mente diferente de uma ciência como a biologia, por exemplo. Em biologia, vinte e quatro fatos não nos levariam a nada; para obter os milhares de outros fatos que precisaríamos conhecer, teríamos de continuar trabalhando em um laboratório, examinando plantas e animais reais. Em lugar de um laboratório, a geometria usa o raciocínio lógico, partindo de um número muito pequeno de fatos fundamentais.

Problemas 3-3

1. Quantos planos podem passar por um ponto dado? por dois pontos dados? por três pontos dados?
2. Uma mesa de quatro pernas pode oscilar às vêzes, enquanto que uma mesa de três pernas está sempre firme. Explique êste fato.
3. Que postulado a figura ao lado ilustra?

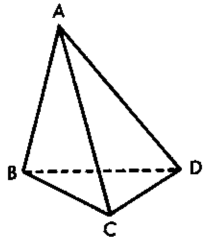


4. Copie e complete a frase: Duas retas diferentes podem se interceptar em um .... e dois planos diferentes podem se interceptar em uma ....
5. É dado um plano E contendo os pontos R e T. O que você pode concluir sôbre $\overleftrightarrow{RT}$? Qual postulado ou teorema garante sua resposta? Trace uma figura que ilustre o problema.
6. Trace um plano E, usando um paralelogramo para indicar o plano. Trace um segmento de reta que esteja contido no plano E. Trace um segmento de reta que intercepte o plano E em um único ponto, mas que não intercepte o outro segmento.
7. Se $\overleftrightarrow{AB}$ e o plano F têm em comum os pontos K e M, o que você pode concluir a respeito de $\overleftrightarrow{AB}$ e F? Por quê?
8. Uma reta pode ser designada, nomeando-se dois de seus pontos. Quantos pontos de um plano devem ser nomeados para se designar o plano?
9. São dados os pontos A, B e C em um plano E. Os pontos A, B e C também estão em um plano F. Pode-se concluir que E e F são o mesmo plano? Explique.
10. São dadas duas retas distintas L_1 e L_2. L_1 está em um plano E e L_2 está em um plano F. L_1 e L_2 se interceptam em um ponto P. O ponto Q, distinto de P, está em L_1 e F. O ponto R, distinto de P, está em L_2 e E. O que se pode concluir sôbre os planos E e F? Quais os postulados e teoremas que garantem sua resposta?
11. Examine esta figura de um sólido retangular até perceber como ela foi traçada, de modo a parecer uma figura tridimensional. Então, feche o livro e trace uma figura como esta, de memória. Faça isto tantas vêzes quantas forem necessárias, até que você se sinta satisfeito com os resultados.



12. Depois de fazer o Problema 11, desenhe a figura de um cubo.

\+ 13. A figura que é reunião de todos os segmentos que têm quatro pontos não coplanares como extremidades é chamada pirâmide triangular ou tetraedro. Os quatro pontos são os vértices do tetraedro.



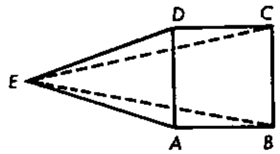
(a) Escreva a definição de uma aresta de um tetraedro.

(b) Quantas arestas tem o tetraedro? Quais são?

(c) Existem pares de arestas que não se interceptam?

(d) Uma face é uma região triangular determinada por três vértices quaisquer. Quais são as quatro faces? Existe algum par de faces que não se interceptam?

\+ 14. Esta figura é uma pirâmide quadrangular cuja base, um quadrado, é a face que está mais perto de você. Nomeie os planos determinados pelos vértices. (Você deve achar sete planos).



*+ 15. Considere as seguintes definições:

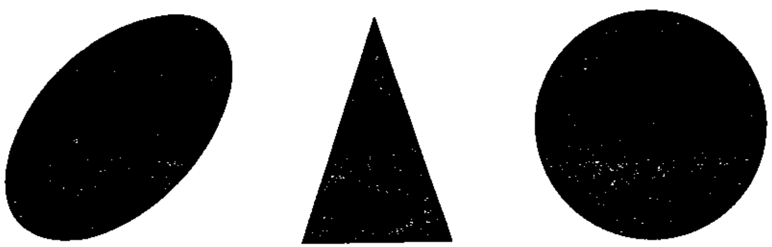
Um *M-espaço* é um conjunto cujos únicos elementos são quatro pontos não-coplanares A, B, C e D. Uma *reta* é um par qualquer de pontos do M-espaço. Um *plano* é uma tripla qualquer de pontos do M-espaço.

Mostre, depois de um exame cuidadoso, que todos os pares e tôdas as triplas de pontos do M-espaço satisfazem os Postulados 4, 5, 6, 7 e 8 e os Teoremas 3-1, 3-2, 3-3 e 3-4. Um tal sistema é chamado uma geometria de quatro pontos.

Qual é o postulado incluído no texto que assegura que o espaço comum possui infinitos pontos?

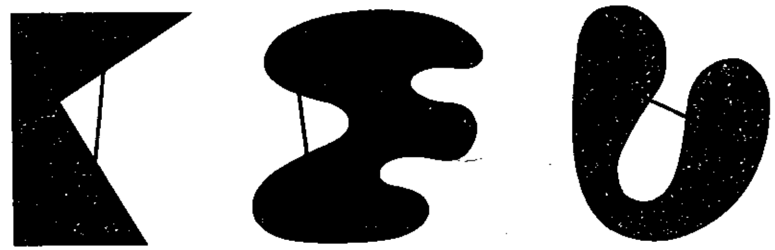
3-4. CONJUNTOS CONVEXOS

Um conjunto de pontos se diz *convexo* se você nunca precisar deixar o conjunto para ir de um de seus pontos a outra, pelo caminho mais curto:



Cada um dêstes conjuntos é uma região tôda do plano, não apenas o contôrno. Nestes conjuntos, você pode ir de um ponto P qualquer a outro ponto Q qualquer, movendo-se ao longo da reta que os une, sem deixar o conjunto. Veja os exemplos acima.

Por outro lado, nenhum dos conjuntos seguintes é convexo.



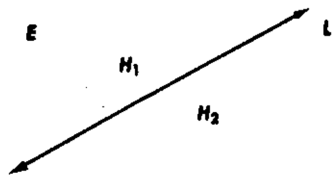
Indicamos porque êstes conjuntos não são convexos, dando exemplos de pontos P e Q que não podem ser ligados por segmentos contidos nos conjuntos.

Dizendo tudo isto de uma forma mais matemática, apresentamos a seguinte definição.

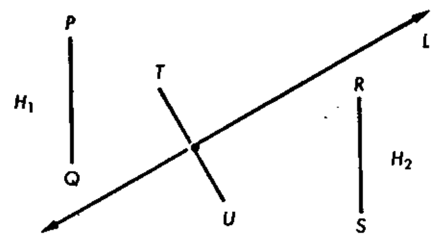
Definição

Um conjunto A é chamado *convexo* se, para todo par de pontos P e Q do conjunto, o segmento $\overline{PQ}$ está inteiramente contido no conjunto.

Os conjuntos que mencionamos, até agora, são "pequenos", mas um conjunto convexo pode ser bem grande. Por exemplo, o plano todo é um conjunto convexo; uma reta em um plano corta o plano em dois conjuntos, cada um dos quais é convexo e de extensão infinita. Êstes dois conjuntos H_1 e H_2 são chamados *semiplanos* ou *lados* da reta L e a reta L é chamada *origem* de cada um dêles.



Os semiplanos são convexos porque se dois pontos estão em um mesmo lado de uma reta, o segmento que os une nunca cruza a reta.



Por outro lado, se *T* e *U* são pontos em lados opostos da reta, o segmento $\overline{TU}$ *sempre* intercepta a reta.

Resumiremos, agora, as afirmações precedentes em um postulado e algumas definições.

POSTULADO 9. O Postulado da Separação do Plano

Dados uma reta e um plano que a contém, os pontos do plano que não pertencem à reta formam dois conjuntos tais que

(1) *cada um dos conjuntos é convexo, e*

(2) *se P pertence a um dos conjuntos e Q ao outro, então o segmento* $\overline{PQ}$ *intercepta a reta.*

Definições

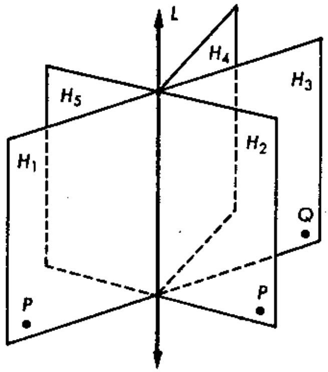
Dados uma reta *L* e um plano *E* que a contém, os dois conjuntos descritos no Postulado da Separação do Plano são chamados *semiplanos*, ou *lados* de *L*, e *L* é chamada *origem* de cada um dêles. Se *P* está em um dos semiplanos e *Q* no outro, então dizemos que *P* e *Q estão em lados opostos de L.*

O Postulado 9 nos diz duas coisas sôbre o modo como uma reta separa um plano em dois semiplanos.

(1) Se dois pontos estão em um semiplano, então o segmento que os liga está contido no mesmo semiplano e, desta forma, *nunca* intercepta a reta.

(2) Se dois pontos estão em semiplanos opostos, então o segmento que os une *sempre* intercepta a reta.

Enquanto uma reta determina dois lados em um plano, tôda reta determina infinitos lados no espaço. Na figura à direita, vemos cinco dos infinitos semiplanos no espaço, que têm a reta *L* como origem.

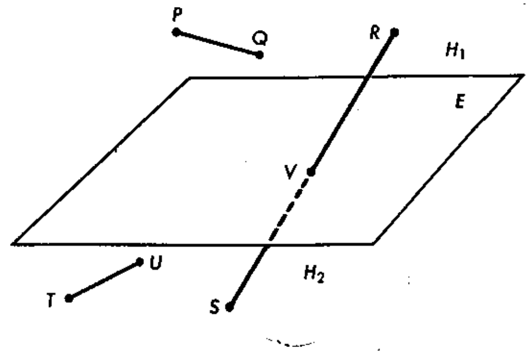


[*Pergunta:* Existe alguma diferença entre as duas afirmações seguintes?

(1) *P* e *Q* estão em lados diferentes de *L*.

(2) *P* e *Q* estão em lados opostos de *L*.]

Um plano separa o espaço, exatamente da mesma forma que uma reta separa um plano.



Os dois conjuntos nos quais um plano separa o espaço são chamados *semi-espaços*, ou *lados* do plano. Na figura, êstes são H_1 (acima do plano) e H_2 (abaixo). Cada um dos dois semi-espaços é convexo. Mas se *R* está em um dêles e *S* no outro, então o segmento $\overline{RS}$ sempre intercepta o plano.

Novamente, resumimos tudo isto com um postulado e algumas definições.

POSTULADO 10. O Postulado da Separação do Espaço

Os pontos do espaço que não pertencem a um plano dado formam dois conjuntos, tais que

(1) *cada um dos conjuntos é convexo, e*

(2) *se P pertence a um dos conjuntos e Q ao outro, então o segmento* $\overline{PQ}$ *intercepta o plano.*

Definições

Os dois conjuntos descritos no Postulado da Separação do Espaço são chamados *semi-espaços* e o plano dado é chamado *origem* de cada um dêles.

Observe que, enquanto tôda reta no espaço é origem de infinitos semiplanos, todo plano no espaço é origem de apenas dois semi-espaços.

Problemas 3-4

[*Nota:* Ao responder as questões desta série, você deve usar a intuição em situações que não foram cobertas pela teoria.]

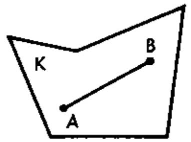
1. Prepare-se para discutir as seguintes questões oralmente.

(a) Uma reta é um conjunto convexo? Explique.

(b) Um conjunto formado por apenas dois pontos é convexo? Por quê?

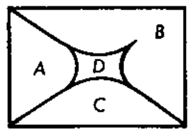
(c) Se um único ponto é removido de uma reta, os pontos remanescentes formam um conjunto convexo?
(d) Uma circunferência é um conjunto convexo?
(e) O interior de uma circunferência é um conjunto convexo?
(f) O espaço englobado por uma superfície esférica é um conjunto convexo?
(g) Uma superfície esférica é um conjunto convexo?
(h) Um ponto separa um plano? o espaço? uma reta?
(i) Uma semi-reta separa um plano? Uma reta separa um plano? Um segmento separa um plano?
(j) Duas retas em um plano podem separar êste plano em duas regiões? três regiões? quatro regiões? cinco regiões?

2. Todo ponto de $\overline{AB}$ está contido no conjunto K. Isto significa que K é um conjunto convexo? Explique.



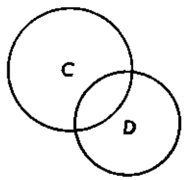
3. Qualquer plano é um conjunto convexo? Explique. Que postulado é essencial para a explicação?

4. Quais das seguintes regiões, designadas por letras maiúsculas, são conjuntos convexos?



5. Se um ponto é removido de um plano, o conjunto remanescente é convexo?

6. Os interiores C e D das circunferências são conjuntos convexos.
(a) A interseção dos interiores é um conjunto convexo?
(b) A reunião é um conjunto convexo?



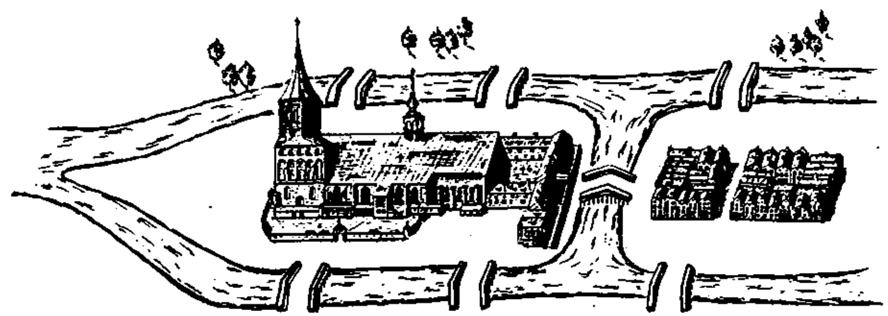
7. Se L é uma reta de um plano E, o conjunto de todos os pontos de E que estão de um mesmo lado de L é um conjunto convexo?
8. Desenhe um quadrilátero plano (uma figura com quatro lados) cujo interior seja convexo. Desenhe um quadrilátero plano cujo interior não seja convexo.
9. Uma esfera é um conjunto convexo?
10. Um toro (uma figura em forma de argola maciça) é um conjunto convexo?
11. Trace dois semiplanos de mesma origem e que sejam coplanares. Trace dois semiplanos de mesma origem, mas que não sejam coplanares.
12. Trace dois semiplanos que sejam coplanares mas que não tenham a mesma origem.
13. H_1 e H_2 são dois semiplanos coplanares. A reunião de H_1 e H_2 é todo o plano se
(a) H_1 e H_2 têm a mesma origem? Explique.
(b) A origem de H_1 intercepta a origem de H_2 em exatamente um ponto? Explique.

14. (a) Em quantos conjuntos um ponto sôbre uma reta separa esta mesma reta? Que nome você sugere que se dê a cada um dêstes conjuntos?
(b) Usando a terminologia desenvolvida na parte (a), escreva um Postulado de Separação da Reta, semelhante aos Postulados 9 e 10.
15. Que nome você daria ao ponto que separa a reta em duas semi-retas?
+ 16. Três retas em um plano podem separar o plano em três regiões? em quatro regiões? em cinco? em seis? em sete?
+ 17. Dois planos que se interceptam separam o espaço em quantas regiões? E dois planos paralelos?
+ 18. Qual é o maior número de conjuntos no qual três planos diferentes podem separar o espaço? Qual é o menor número?
+ 19. A afirmação seguinte é verdadeira ou falsa? A reunião de dois conjuntos convexos quaisquer, que tenham pelo menos dois pontos em comum, é um conjunto convexo. Justifique a resposta.
*+ 20. Explique cuidadosamente por que a seguinte afirmação é verdadeira: A interseção de dois conjuntos convexos quaisquer, que têm pelo menos dois pontos em comum, é um conjunto convexo. [*Sugestão:* Sejam P e Q dois pontos quaisquer da interseção. Quais os conjuntos que contêm $\overline{PQ}$?].
*+ 21. Esboce um sólido geométrico qualquer limitado por superfícies planas, de tal modo que o conjunto dos pontos que estão no interior da figura não seja convexo.

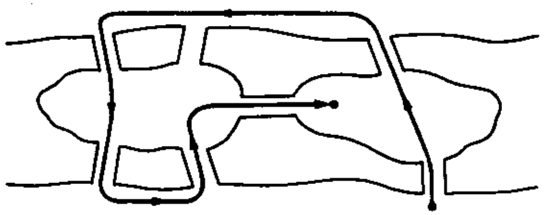
3-5. AS SETES PONTES DE KÖNIGSBERG

Você poderia pensar que não há nada de importante com a idéia de cruzar ruas, pontes, etc., mas na verdade existe um famoso problema, em matemática, que envolve a idéia de "cruzar" e quase nenhuma outra.

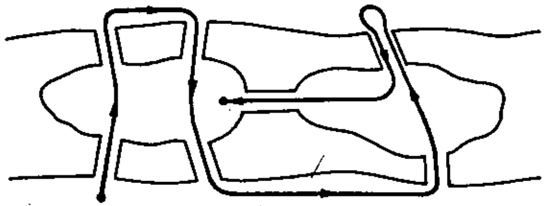
A cidade de Königsberg está situada nas costas do Mar Báltico, na foz do Rio Pregel. (O ö em Königsberg é pronunciado, aproximadamente, como *ê*, bem fechado, sem equivalente direto em português.) No rio, existem duas ilhas, ligadas às margens e uma à outra por sete pontes, como se vê na figura abaixo.



O povo, que passeava dando voltas por estas ilhas, descobriu que, partindo da margem sul do rio, não conseguia planejar um trajeto de modo a cruzar cada uma das pontes exatamente uma vez. Parecia que era preciso ignorar uma ponte, pelo menos:

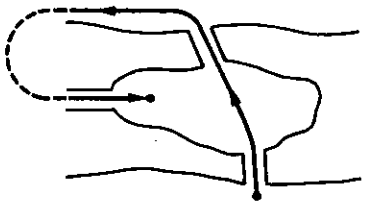


ou passar pela mesma ponte duas vêzes:



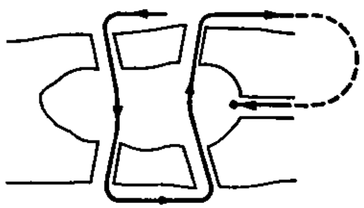
O povo estava convencido de que não se podia cruzar cada ponte exatamente uma vez, mas ninguém tinha certeza. Finalmente, no ano de 1735, alguém submeteu o problema ao grande matemático suíço Leonhard Euler. Euler descobriu que se poderia parar com as tentativas. Êle chegou à seguinte análise do problema.

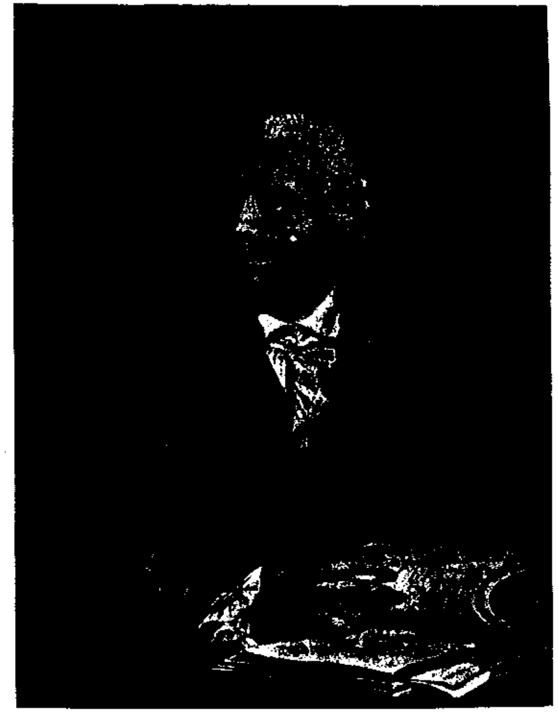
Em primeiro lugar, considere a ilha a leste:



Há três pontes que levam a ela. Desde que você partiu da margem sul, como o problema requer, você deve ter partido de algum lugar *fora* desta ilha. Como você cruza cada ponte exatamente uma vez, terminará *dentro* da ilha leste. (Da mesma forma, se uma lâmpada estiver *apagada*, e você muda a posição do interruptor três vêzes, então a lâmpada ficará *acesa*.)

Considere, depois a ilha a oeste.





LEONHARD EULER (1707-1783)

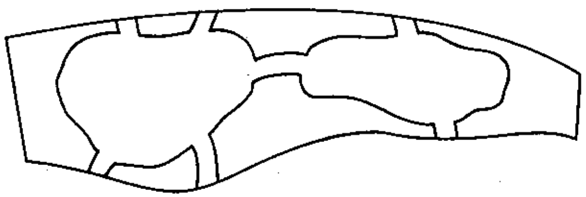
A solução de Euler para o problema das sete pontes de Königsberg foi típico de sua perspicácia e do seu engenho. Antes de sua época, não ocorreu a ninguém que êste tipo de problema pertencesse à matemática. Desde então, a matemática tem se desenvolvido depressa, em direções inesperadas. A análise de Euler do problema das pontes de Königsberg foi a primeira alusão a um nôvo ramo da matemática, agora conhecido como topologia, que recebeu pleno desenvolvimento no século vinte e ainda está se desenvolvendo.

Euler não era apenas muito inteligente, mas também muito trabalhador; produziu trabalhos originais em matemática, com um ritmo que dificilmente tem sido igualado. A coleção de seus trabalhos matemáticos preenche cêrca de sessenta volumes. Aos vinte e oito anos, perdeu um ôlho; aos cincoenta, ficou quase totalmente cego. Mas sua memória era fabulosa — sabia tôda a Eneida, de Virgílio, de cor — e sempre foi capaz de desenvolver longos cálculos de cabeça. Assim, êle foi capaz de prosseguir trabalhando, no mesmo ritmo de antes, pelo resto de sua vida.

Há cinco pontes que levam até ela e cinco é um número ímpar. Como você iniciou o trajeto *fora* da ilha a oeste, você deve terminar *dentro* desta ilha. (Isto é como comutar o interruptor cinco vêzes: se a lâmpada estava apagada no início, estará acesa no final.)

Mas isto significa que o "Trajeto de Königsberg" é impossível, porque você não pode terminar em dois lugares distintos ao mesmo tempo.

A solução de Euler para êste problema foi um acontecimento muito importante, porque foi a primeira vez que alguém resolvia um problema dêste *tipo*. Observe que se você desenhar um mapa das ilhas sôbre uma fôlha de borracha, você pode esticar a fôlha à vontade sem mudar, absolutamente, o problema.

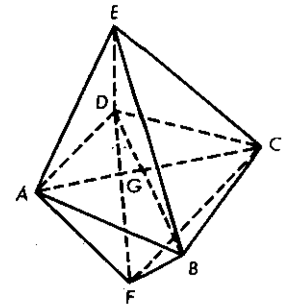


A partir da análise de Euler do "Trajeto de Königsberg", desenvolveu-se todo um ramo da matemática, tratando de problemas dêste tipo. É o que se chama *topologia*.

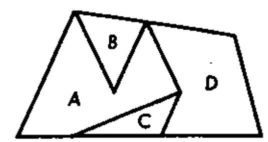
Se você quiser, por acaso, encontrar Königsberg em um mapa, você deve procurá-la em um mapa velho. A cidade, agora, está na União Soviética e seu nome foi trocado para Kaliningrado. Ninguém, entretanto, trocou o nome do problema.

Revisão do Capítulo

1. (a) Quando se diz que um conjunto de pontos é colinear?
   (b) Quando se diz que um conjunto de pontos é coplanar?
   (c) Quatro pontos podem ser colineares?
   (d) Dois pontos tem de ser colineares?
   (e) Quatro pontos tem de ser colineares?
   (f) n pontos podem ser colineares?
   (g) Quatro pontos tem de ser coplanares?
   (h) n pontos podem ser coplanares?
2. Quais das afirmações abaixo são verdadeiras? explique.
   (a) Se três pontos são colineares, então são coplanares.
   (b) Se três pontos são coplanares, então são colineares.
3. Comente a afirmação: "O tampo de uma mesa é um plano".
4. Estude a figura tridimensional dada (na qual A, B, C e D são coplanares) e responda as seguintes questões:



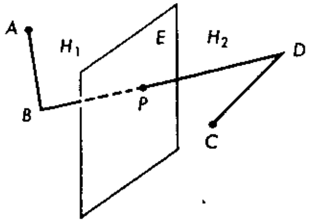
   (a) E, D e F são colineares?
   (b) E, C, B e F são coplanares?
   (c) $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se interceptam?
   (d) $\overline{AC}$ e $\overline{DF}$ se interceptam?
   (e) E, B e F são coplanares?
   (f) F, B, G e D são coplanares?
5. Faça uma lista de tôdas as condições estudadas, que determinam um plano. Você precisa, simplesmente, escrever as condições que enunciamos nos postulados e teoremas. Por exemplo, "Uma reta e um ponto fora dela determinam um plano" (Teorema 3–3).
6. Quantos planos passarão por três pontos dados se nenhuma reta os contém?
7. A reta L_1 intercepta um plano E em P, mas não está contida em E. A reta L_2 está contida em E, mas não contém P. É possível L_1 interceptar L_2? Explique.
8. Dois planos E e F se interceptam em $\overleftrightarrow{AB}$. Cada um dos pontos P e Q está em ambos os planos E e F. P e Q devem estar em $\overleftrightarrow{AB}$? Explique.
9. Indique se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas.
   (a) O espaço tridimensional contém pelo menos quatro pontos.
   (b) Todo semiplano contém sua origem.
   (c) Uma semi-reta separa um plano.
   (d) Todo plano separa o espaço em dois conjuntos convexos.
   (e) Se uma reta L separa o plano E em dois semiplanos H_1 e H_2, e P é um ponto de H_1 e Q um ponto de H_2, então $\overline{PQ}$ intercepta L.
   (f) Dois semiplanos quaisquer são coplanares.
10. Quais das seguintes regiões designadas com letras maiúsculas são conjuntos convexos?



11. Que propriedade os semiplanos e os semi-espaços têm em comum?
12. Escreva uma definição de conjunto convexo.
13. A reunião de dois semiplanos é sempre um plano? Algumas vêzes é um plano? Explique.

14. Copie e complete o seguinte, em relação à figura ao lado

Na figura, ... E separa o espaço em .... H_1 e .... Sabemos que A e .... estão do mesmo lado de .... pois .... não intercepta o plano E. B e D, também, estão no .... de E, uma vez que .... Podemos demonstrar que $\overline{AC}$ .... mostrando que A e .... estão no .... do plano E.

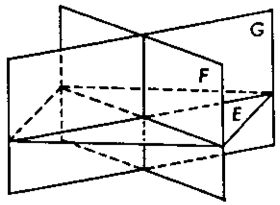


15. Trace uma reta L separando o plano em dois semiplanos. Chame os semiplanos de H_1 e H_2. Tome os pontos D e K em H_1 e o ponto F em H_2.

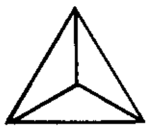
(a) Qual é a interseção de $\overline{DK}$ com L? Por quê?

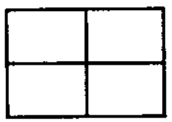
(b) Qual é a interseção de $\overline{KF}$ com L? Por quê?

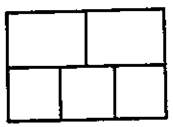
+ 16. Os planos E, F e G se interceptam segundo a figura. Em quantas regiões convexas êles separam o espaço?

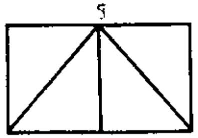


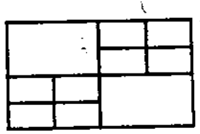
+ 17. Neste problema, você "ganha" se puder cruzar cada segmento da figura exatamente uma vez, sem levantar o lápis do papel. Copie as figuras em uma fôlha de papel e veja se você pode descobrir as duas das cinco figuras nas quais é possível você "ganhar"; existe um processo de compor figuras de modo que você sempre "perca"?


(a)

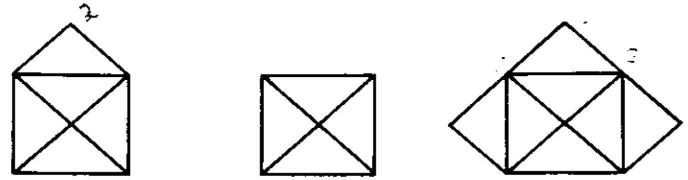

(b)


(c)

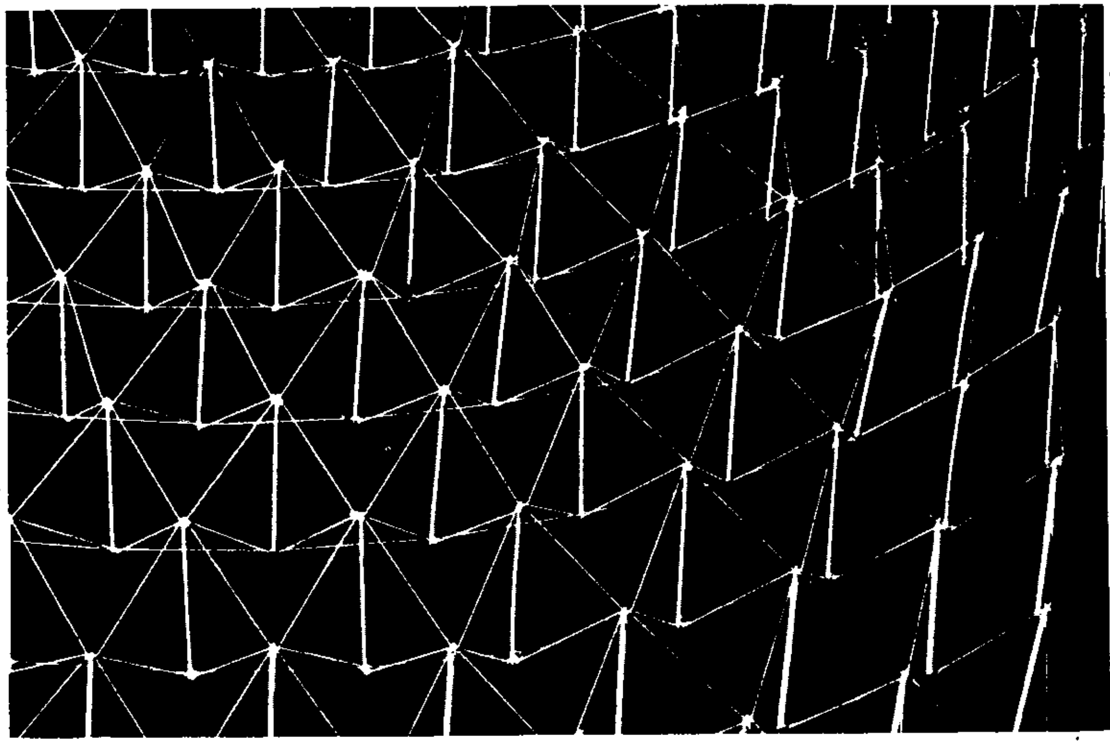

(d)


(e)

+ 18. Das três figuras abaixo, duas podem ser desenhadas sem se levantar o lápis do papel ou traçar um segmento duas vêzes, enquanto que na terceira, isto não acontece. Quais são as duas? Tente reproduzir cada figura em seu caderno, segundo as instruções. Existe um processo mais simples de se chegar a esta conclusão?



4 ÂNGULOS E TRIÂNGULOS

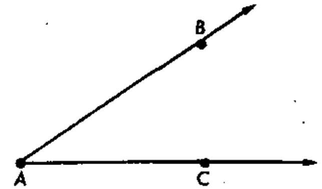


4-1. OS TÊRMOS BÁSICOS

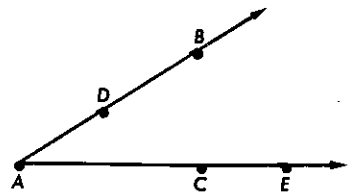
Um *ângulo* é uma figura como uma dessas

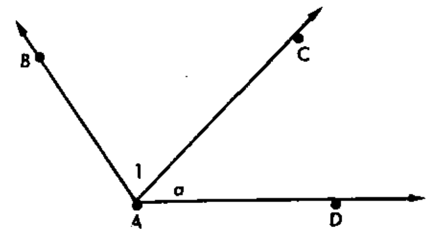
Definições

Se duas semi-retas tiverem a mesma origem mas não estiverem contidas na mesma reta, então a sua reunião é um *ângulo*. As duas semi-retas são chamadas *lados* do ângulo e a origem comum das semi-retas é chamada *vértice* do ângulo. Se os semi-retas forem $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, o ângulo será representado por $\angle BAC$ ou $\angle CAB$.



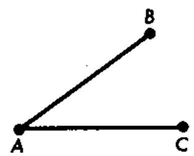
Não faz diferença qual lado é mencionado em primeiro lugar. De fato, é indiferente qual ponto você menciona em cada um dos dois lados. O ângulo na figura à esquerda, abaixo, poderia igualmente bem ser descrito por $\angle BAC$, $\angle DAE$, $\angle BAE$ e assim por diante. Para abreviar, podemos escrever simplesmente $\angle A$, se estiver bem claro quais são os lados do ângulo.

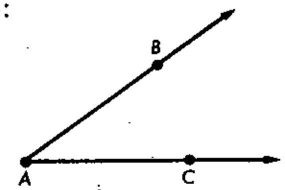




E em figuras como as da direita, acima, podemos escrever números e letras dentro dos ângulos, de modo que podemos escrever $\angle 1$ no lugar de $\angle BAC$, $\angle a$ no lugar de $\angle CAD$, e assim por diante.

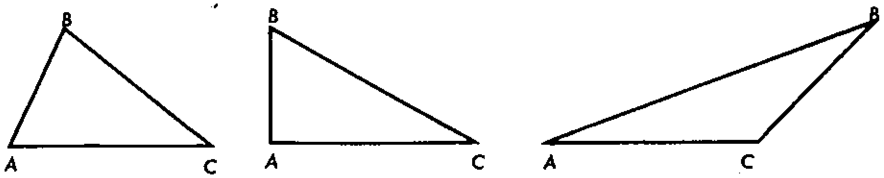
Os lados de um ângulo são semi-retas, não segmentos. Portanto a figura à esquerda, abaixo, não é um ângulo:





É claro que ela *determina* um ângulo, como indicado à direita. (Da mesma maneira, um segmento *determina* uma reta embora não *seja* uma reta).

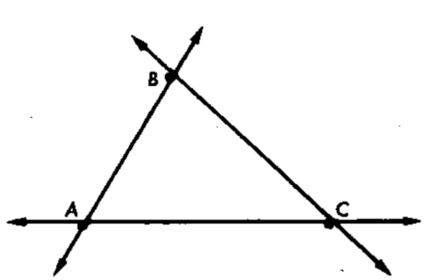
Um *triângulo* é uma figura que se parece com uma destas:

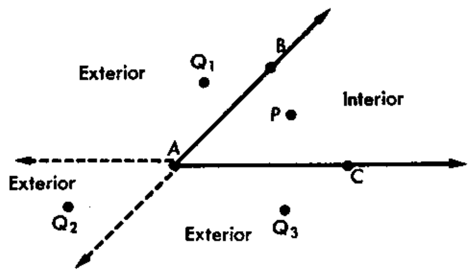


Definições

Se A, B e C forem três pontos não-colineares, a reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ é chamado um *triângulo* e é representado por ΔABC. Os pontos A, B e C são chamados seus *vértices* e os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são seus *lados*. Cada triângulo ΔABC determina três ângulos, a saber, $\angle BAC$, $\angle ABC$ e $\angle ACB$. Êsses são chamados os *ângulos* do triângulo ΔABC. Se fôr óbvio qual o triângulo mencionado, representamos muitas vêzes os seus ângulos por $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$.

Observe que quando desenhamos um triângulo, não desenhamos necessàriamente seus ângulos. Assim como uma escola não contém os alunos que nela se graduaram, um triângulo não contém seus próprios ângulos. Se quisermos desenhar os ângulos, devemos prolongar os lados e usar pontas de flechas como se vê na figura à esquerda, abaixo. Em geral não há necessidade de se fazer isso pois é óbvio quais são os ângulos do triângulo.





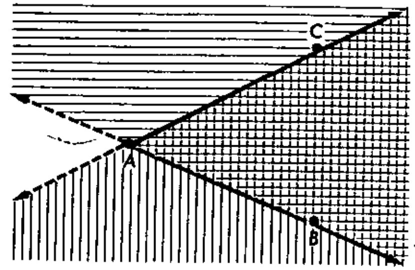
O *interior* e o *exterior* de um ângulo são como estão indicados na figura, acima à direita.

Definições

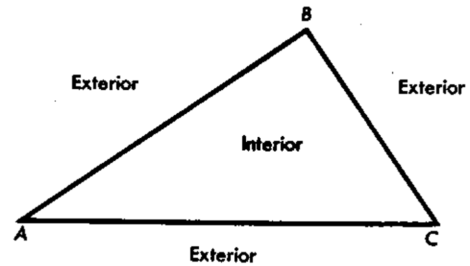
Seja $\angle BAC$ um ângulo num plano E. Um ponto P está no *interior do* $\angle BAC$ se (1) P e B estiverem do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AC}$ e (2) P e C estiverem do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AB}$. O *exterior* do $\angle BAC$ é o conjunto de todos os pontos de E que não estão no ângulo nem no seu interior.

Você deve comparar essa definição com a figura, para ter certeza de que a definição realmente diz o que temos em mente. Por exemplo, P está no interior porque êle satisfaz tanto (1) quanto (2). Q_1 não está no interior; êle satisfaz (1) mas não (2). Q_2 não está no interior; êle não satisfaz nem (1) nem (2). Q_3 satisfaz (2) mas não (1).

Observe que definimos o interior de um ângulo como a interseção de dois semiplanos. Um dêles é o lado de $\overleftrightarrow{AC}$ que contém B e o outro é o lado de $\overleftrightarrow{AB}$ que contém C.



O *interior* e o *exterior* de um triângulo são vistos na figura.



Definições

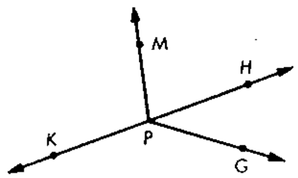
Um ponto está no *interior* de um triângulo se êle estiver no interior de todos os ângulos do triângulo. Um ponto está no *exterior* de um triângulo se êle estiver no plano do triângulo mas não estiver no triângulo nem no seu interior.

Você deve comparar essa definição com a figura, como antes, para ter certeza de que ela realmente diz o que temos em mente. (Se exigíssemos apenas que o ponto estivesse no interior de *dois* dos ângulos e não no interior dos três, isso seria o suficiente para descrever o interior?) É muito mais fácil aprender definições se você as examina primeiro dessa maneira. Aliás, se você as esquece, isso em geral acontece porque você tentou decorá-las, sem considerar como elas expressam as idéias que deveriam expressar.

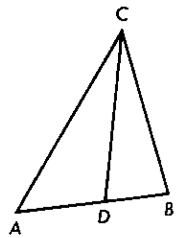
Ocasionalmente usaremos o simbolismo A-B-C para dizer que "B está entre A e C , como no Problema 21.

Problemas 4-1

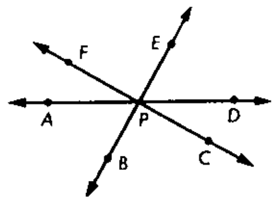
1. Reescreva a seguinte definição, completando-a.
   Um ângulo é a .... de duas .... de mesma .... mas que não são ....
2. Reescreva a seguinte definição, completando-a.
   Um triângulo é a .... de três .... ligando cada par de três ....
3. Na figura, os pontos K, P e H são colineares. Nomeie os cinco ângulos.



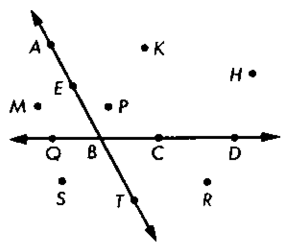
4. Dado o ΔABC, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ são lados do $\angle A$? Explique.
5. Quantos ângulos são determinados por essa figura? Quais são? Quantos podem ser indicados usando sòmente a letra do vértice?



6. Dois ângulos de um triângulo podem ter um lado comum? Explique.
7. Quantos ângulos existe nessa figura? (Há mais de seis).

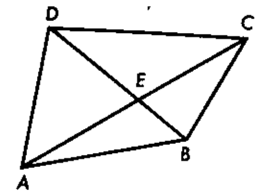


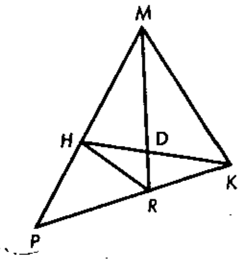
8. É a seguinte afirmação verdadeira? ΔABC é a reunião do $\angle CAB$ e $\angle CBA$. Por quê?
9. Que pontos da figura estão
   (a) no interior do $\angle CBA$?
   (b) no exterior do $\angle EBC$?
   (c) no interior do $\angle ABD$?
   (d) no interior do $\angle ABQ$?



10. O vértice de um ângulo está no interior do ângulo? no exterior?
11. Um triângulo separa o plano que o contém em quantas regiões?

12. Os ângulos de um triângulo separam o plano que os contém em quantas regiões?
13. Nomeie todos os triângulos na figura à esquerda, abaixo. (Há mais de quatro).

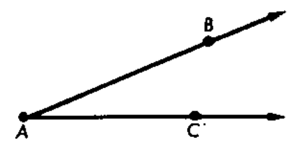


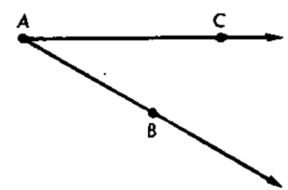


14. Quantos triângulos estão na figura à direita, acima? (Uma das maneiras de atacar êsse problema é escrever $PRHMDK$, e escrever em seguida tôdas as possíveis combinações das três letras e comparar cada combinação com a figura).
15. É o interior de um triângulo um conjunto convexo? e o exterior?
16. É um triângulo um conjunto convexo?
17. É o interior de um triângulo um conjunto convexo? e o exterior?
18. Dado o ΔABC e um ponto no interior do $\angle A$ e também no interior do $\angle C$, o que você pode concluir a respeito de P?
* 19. (a) Pode um ponto estar no exterior de um triângulo e no interior de um ângulo do triângulo? Ilustre.
   (b) Pode um ponto estar no exterior de um triângulo e não no interior de nenhum dos ângulos do triângulo? Ilustre.
* 20. É dado ΔABC e um ponto P. P e A estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{BC}$. P e B estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$.
   (a) Está P no interior do $\angle ACB$?
   (b) Está P no interior do ΔACB?
+ 21. É dado o triângulo ABC. A-D-B, B-E-C, C-D-F e D-G-E.
   (a) Está G no interior ou no exterior do ΔABC?
   (b) $\overrightarrow{BG}$ intercepta $\overline{AC}$?
   (c) G e F estão em semiplanos opostos em relação a que reta?
   (d) Como pode você ter certeza de sua resposta para a questão (a)?

4-2. ALGUMAS OBSERVAÇÕES SÔBRE ÂNGULOS

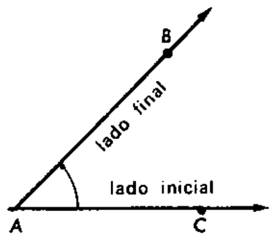
Ângulos, como definidos nesse capítulo, são simplesmente conjuntos de pontos. Por exemplo:



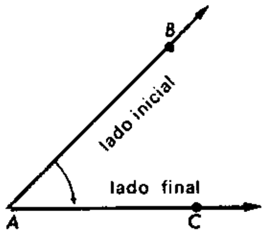


A ordem em que os lados do ângulo são mencionados não faz nenhuma diferença.

Essa é a forma mais simples da idéia de um ângulo. É a idéia que precisamos para os propósitos dêsse curso. Mais tarde, no entanto, quando você estudar trigonometria, a idéia de ângulo aparecerá de uma forma diferente. Em trigonometria, fará diferença qual lado do ângulo é mencionado em primeiro lugar:

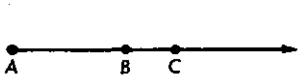


$\angle CAB$



$\angle BAC$

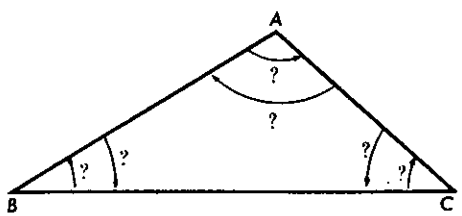
Isto é, em trigonometria fazemos distinção entre $\angle CAB$ e $\angle BAC$. Em $\angle CAB$, $\overrightarrow{AC}$ é o *lado inicial* e $\overrightarrow{AB}$ é o *lado final*. No $\angle BAC$, $\overrightarrow{AB}$ é o lado inicial e $\overrightarrow{AC}$ é o lado final. Ângulos assim são chamados ângulos *orientados*. Quando usamos ângulos orientados, admitimos a existência de "ângulos nulos" e "ângulos rasos".



$\angle BAC$

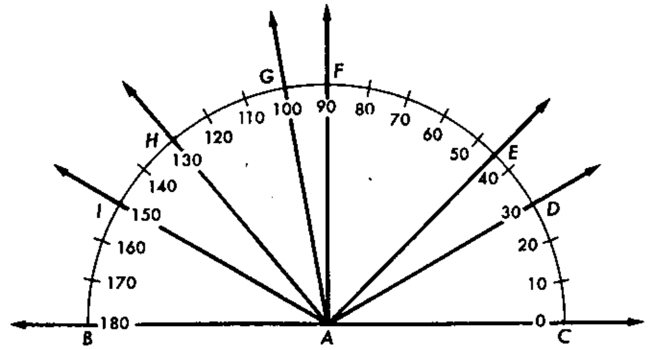
$\angle BAC$

Neste curso, ângulos orientados não serão usados, pois são desnecessários em geometria elementar. Por exemplo, os ângulos de um triângulo nunca são nulos ou rasos e não há nenhuma maneira razoável de decidir que orientação dar aos ângulos. Para orientar ângulos, deveríamos proceder ao acaso e orientações ao acaso de ângulos não teriam utilidade para nós, pois êles não estariam relacionados com os problemas com os quais estamos trabalhando.



4-3. MEDIDA DE ÂNGULOS

Assim como medimos segmentos com uma régua, medimos ângulos com um transferidor.



O número de graus de um ângulo é chamado *medida* dêste ângulo. Se existirem r graus no $\angle PQR$, escrevemos

$$m\angle PQR = r.$$

Simplesmente observando a escala no transferidor, vemos que

$$m\angle CAD = 30, \quad m\angle CAF = 90,$$
$$m\angle CAE = 45, \quad m\angle CAG = 100.$$

e assim por diante.

Observe que não precisamos usar o símbolo de graus quando escrevemos 30, 45 e assim por diante, pois o m se encarrega disso: $m\angle PQR$ é o *número de graus* no ângulo.

Assim como achamos distâncias, por subtração, com uma régua, podemos usar subtração para achar a medida de ângulos. Por exemplo, devemos ter $m\angle DAE = 15$ porque $15 = 45 - 30 = m\angle CAE - m\angle CAD$. O mesmo processo nos dá

$$m\angle GAD = 100 - 30 = 70.$$

Observe que 180 não é a medida de nenhum ângulo da figura. (Não existe algo como $\angle BAC$ porque $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são colineares). Ainda podemos subtrair de 180, no entanto, para obter

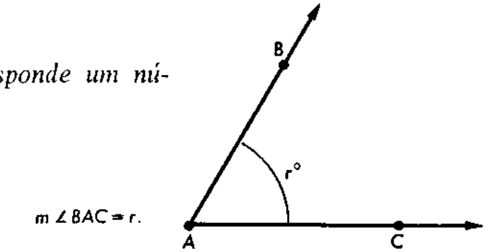
$$m\angle BAI = 180 - 150 = 30,$$
$$m\angle BAH = 180 - 130 = 50,$$

e assim por diante.

Os seguintes postulados resumem os fatos a respeito de transferidores que estivemos usando. Nas figuras, ilustrando êsses fatos, escrevemos $r°$, $s°$ e assim por diante, para lembrar que êsses números são medidas em graus de ângulos.

POSTULADO 11. O Postulado da Medida do Ângulo

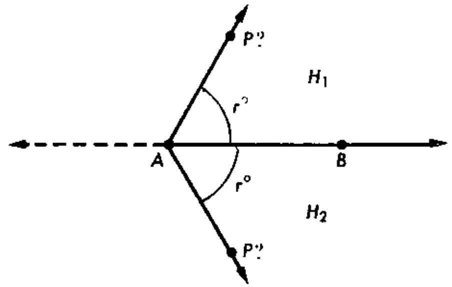
A todo ângulo $\angle BAC$ corresponde um número real entre 0 e 180.



Definição

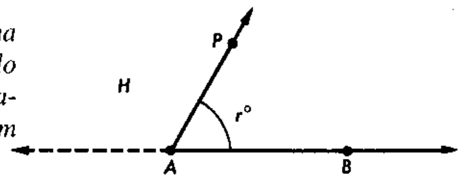
O número dado pelo Postulado da Medida do Ângulo é chamado *medida* de $\angle BAC$ e é escrito $m\angle BAC$.

Podemos construir um ângulo, onde desejarmos, com qualquer medida entre 0 e 180. É claro que, se começarmos com uma semi-reta num plano e um número r, podemos construir nosso ângulo tanto num como noutro semiplano determinado pela reta que contém a semi-reta. Temos, assim, as condições para o postulado seguinte.



POSTULADO 12. O Postulado da Construção de um Ângulo

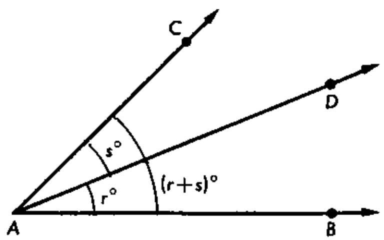
Seja $\overrightarrow{AB}$ uma semi-reta contida na origem de um semiplano H. Para todo número r entre 0 e 180 existe exatamente uma semi-reta $\overrightarrow{AP}$, com P em H, tal que $m\angle PAB = r$.



Podemos determinar medidas de ângulos por adição e subtração, usando o seguinte postulado.

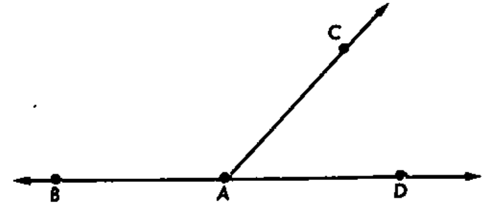
POSTULADO 13. O Postulado da Adição de Ângulos

Se D está no interior do $\angle BAC$, então $m\angle BAC = m\angle BAD + m\angle DAC$.



Disso obtemos $m\angle CAD = m\angle CAB - m\angle DAB$.

Dois ângulos formam um *par linear* se êles são assim:



Mais precisamente, temos a seguinte definição.

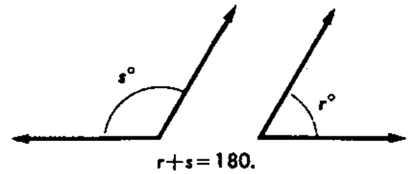
Definição

Se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$ são semi-retas opostas e $\overrightarrow{AC}$ é uma outra semi-reta qualquer então $\angle BAC$ e $\angle CAD$ formam um *par linear*.

A seguinte definição trata sòmente de medida angular. Ela não diz nada quanto à posição dos ângulos.

Definição

Se a soma das medidas de dois ângulos é 180, os ângulos se dizem *suplementares* e cada um é chamado um *suplemento* do outro.



Permite-se, no entanto, que os ângulos formem um par linear e neste caso êles são sempre suplementares.

POSTULADO 14. O Postulado do Suplemento

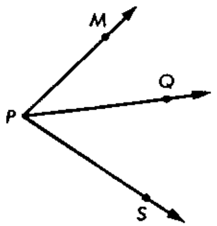
Se dois ângulos formam um par linear, então êles são suplementares.

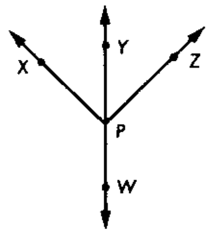
Podemos nos referir a êsses postulados, abreviadamente, como PMA, PCA, PAA e PS. Essas são, òbviamente, abreviações para Postulado da Medida de Ângulos, Postulado da Construção de um Ângulo, Postulado da Adição de Ângulos e Postulado do Suplemento.

Você deve lembrar-se que, ao discutirmos medida de distância, verificamos que podíamos usar, à nossa vontade, qualquer unidade. Se decidíssemos mudar a unidade de distância, simplesmente multiplicaríamos tôdas as distâncias por um certo número e todos os postulados de distância continuavam válidos. Isso não é mais verdade para medidas de ângulos, porque o Postulado do Suplemento determina a unidade. Segundo nossa definição de *suplementar*, o Postulado 14 nos diz que se dois ângulos formam um par linear, a soma de suas medidas é 180. Essa condição não é mais válida se duplicarmos a medida de todo ângulo ou se dividirmos a medida de cada ângulo por 2.

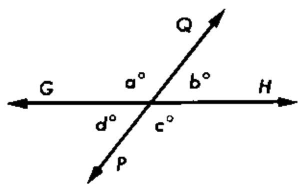
Problemas 4-3

1. Se $m\angle A = 63$ e $m\angle B = 117$, que nome recebem os $\angle A$ e $\angle B$?
2. Se, na figura, $m\angle QPS = 41$ e $m\angle QPM = 37$, quanto vale $m\angle MPS$? Que postulado apoia sua conclusão?

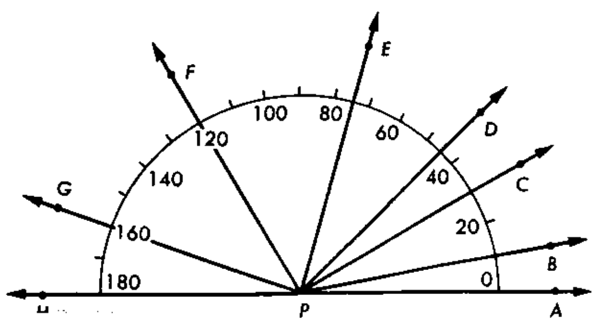




3. É dada a figura com Y, P e W colineares e $m\angle XPY = m\angle ZPY$.
   (a) Nomeie dois pares lineares
   (b) Dê três pares de ângulos suplementares.
4. Dado que A-K-F e D é um ponto não pertencente a $\overleftrightarrow{AF}$,
   (a) como são os ângulos $\angle AKD$ e $\angle FKD$?
   (b) $m\angle AKD + m\angle FKD = ?$
   Que postulado é essencial para sua resposta?
5. Na figura, $\overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{PQ}$ se interceptam, formando quatro ângulos.
   (a) Se $b = 52$, qual a medida de a?
   (b) Se $a = 110$, quais as medidas de b, c e d?



6.

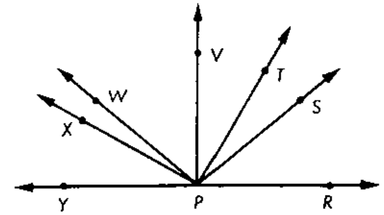


Usando a figura calcule:

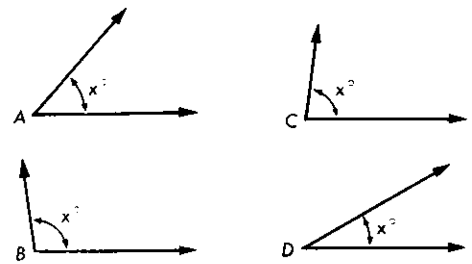
(a) $m\angle APC$.	(b) $m\angle EPD$.	(c) $m\angle GPA$.
(d) $m\angle DPB$.	(e) $m\angle FPC$.	(f) $m\angle APB + m\angle BPE$.
(g) $m\angle HPG + m\angle FPC$.		(h) $m\angle APC + m\angle CPH$.
(i) $m\angle FPA - m\angle DPA$.		(j) $m\angle FPH - m\angle FPG$.

7. Use um transferidor para determinar:

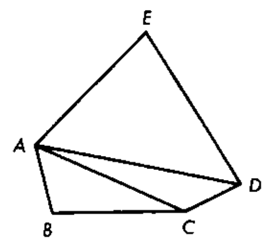
(a) $m\angle RPS$.	(b) $m\angle VPR$.
(c) $m\angle VPS$.	(d) $m\angle TPR$.
(e) $m\angle XPR$.	(f) $m\angle XPY$.
(g) $m\angle WPS$.	(h) $m\angle XPW$.
(i) $m\angle XPS$.	(j) $m\angle TPR + m\angle SPW$.



8. Com prática, você deveria ser capaz de avaliar o tamanho de ângulos com relativa precisão *sem* usar um transferidor. *Não* use um transferidor para decidir que ângulos têm medidas nos intervalos indicados. Associe o ângulo à direita com o intervalo apropriado à esquerda
   (a) $80 < x < 95$.
   (b) $55 < x < 70$.
   (c) $40 < x < 60$.
   (d) $90 < x < 105$.
   (e) $20 < x < 45$.
   (f) $110 < x < 125$.



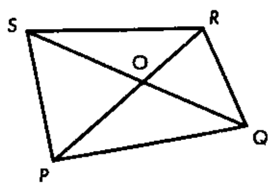
9. Usando uma régua e um transferidor, construa ângulos cujas medidas em graus são 30, 60, 15, 90, 100 e 135.
10. Usando sòmente uma régua e *não* um transferidor, desenhe ângulos cujas medidas são aproximadamente 10, 30, 45, 60, 90, 120, 135, 150. Em seguida, use um transferidor para verificar seus desenhos.
11. Na origem de um semiplano, tome pontos M, K, A tais que M-A-K. Tome $\overrightarrow{AT}$ tal que $m\angle TAK = 35$. No mesmo semiplano, tome $\overrightarrow{AV}$ de modo que $m\angle MAV = 85$. Meça $\angle TAV$ com um transferidor. A medida que você achou confere com os cálculos corretamente feitos?
12. Na figura plana
   (a) $m\angle CAB + m\angle DAC = m\angle$ ....
   (b) $m\angle EAD + m\angle DAC = m\angle$ ....
   (c) $m\angle EAD + m\angle DAB = m\angle$ ....
   (d) $m\angle EAC - m\angle DAC = m\angle$ ....



13. Determine a medida do suplemento de um ângulo cuja medida é

(a) 80.	(b) 48.	(c) 144.	(d) 25,5.
(e) n.	(f) $n + k$.	(g) $180 - n$.	(h) $90 - n$.

14. Na figura,



(a) $m\angle SPR + m\angle QPO = m\angle$ ....
(b) $m\angle RSQ + m\angle$ .... $= m\angle RSP$.
(c) $m\angle POQ + m\angle POS =$ ....
(d) $m\angle SRQ - m\angle SRO = m\angle$ ....
(e) $m\angle ROQ = 180 - m\angle$ ....
(f) $SO + OQ =$ ....

15. Se dois ângulos suplementares têm medidas iguais, qual é a medida de cada um dos ângulos?

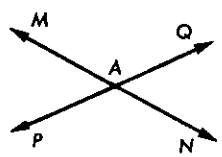
16. Se a medida de um ângulo é o triplo da medida de seu suplemento, qual é a medida do ângulo?

17. A medida de um ângulo é 24 a mais que a medida de seu suplemento. Calcule a medida dos dois ângulos.

* 18. O dôbro da medida de um ângulo é 30 a menos que cinco vêzes a medida de seu suplemento. Qual é a medida do ângulo?

* 19. Se, num plano, $m\angle BAD = 65$ e $m\angle DAC = 32$, qual o valor de $m\angle CAB$?

20. Dada a figura, com $\overleftrightarrow{MN}$ e $\overleftrightarrow{PQ}$ interceptando-se em A, que postulados ou definições justificam as seguintes afirmações?

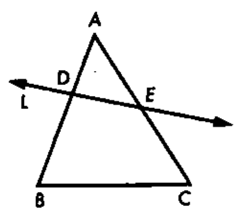


(a) $\angle PAM$ e $\angle QAM$ formam um par linear.
(b) $\angle PAM$ e $\angle QAM$ são suplementares.
(c) $m\angle PAM + m\angle QAM = 180$.
(d) $m\angle QAM + m\angle QAN = 180$.

* 21. Se $m\angle ABC + m\angle DBC = 180$ e $m\angle MAS + m\angle NAS = 180$, é verdade que $m\angle ABC + m\angle DBC = m\angle MAS + m\angle NAS$? Por quê? Se também afirmamos que $m\angle DBC = m\angle NAS$, o que podemos concluir? Por quê?

Problema Magno

Por que é verdadeira a seguinte afirmação?



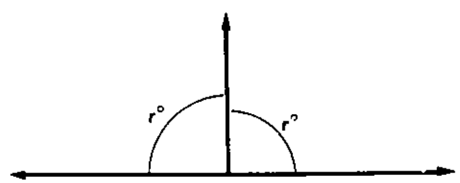
Se uma reta L intercepta dois lados do ΔABC em D e E (e D e E são distintos de A, B e C), então L não intercepta o terceiro lado.

[*Sugestão:* Consulte a Seção 3-4 e mostre que B e C estão do mesmo lado de L.]

4-4. ÂNGULOS RETOS, PERPENDICULARISMO, ÂNGULOS CONGRUENTES

Definição

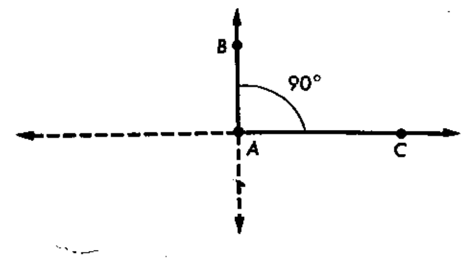
Se dois ângulos, formando um par linear, têm a mesma medida, então cada um dêles é chamado *ângulo reto.*



Nesse caso, temos $r + r = 180$ pelo Postulado do Suplemento. Portanto, poderíamos também ter dado a seguinte definição de ângulo reto.

Definição

Um *ângulo reto* é um ângulo cuja medida é 90.



Definições

Se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ formam um ângulo reto, êles se dizem *perpendiculares* e escrevemos

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}.$$

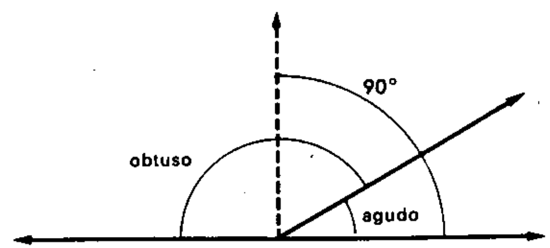
Usamos o mesmo têrmo e a mesma notação para retas e segmentos; assim se $\angle BAC$ é um ângulo reto, escrevemos

$$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}, \qquad \overline{AB} \perp \overline{AC}, \qquad \overrightarrow{AB} \perp \overline{AC},$$

e assim por diante, para qualquer combinação de retas, semi-retas ou segmentos.

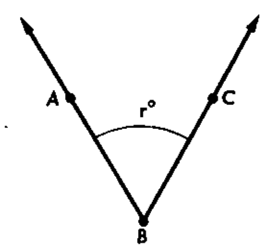
Definições

Se a soma das medidas de dois ângulos é 90, os ângulos se dizem *complementares* e cada um é chamado um *complemento* do outro. Um ângulo cuja medida é menor que 90 se diz *agudo.* Um ângulo cuja medida é maior que 90 se diz *obtuso.*



Definição

Dois ângulos de mesma medida se dizem *congruentes.*



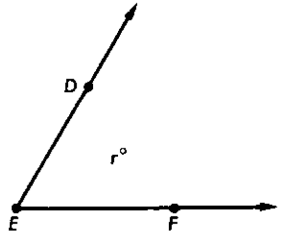
Assim $\angle ABC$ e $\angle DEF$ são *congruentes* se

$$m\angle ABC = m\angle DEF;$$

nesse caso, escrevemos

$$\angle ABC \cong \angle DEF.$$

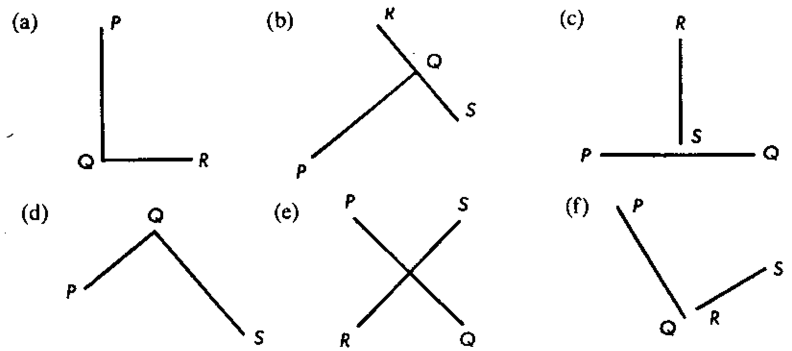
O símbolo $\cong$ lê-se "é congruente a"



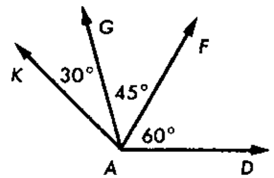
Observe que a equação $m\angle ABC = m\angle DEF$ e a congruência $\angle ABC \cong \angle DEF$ são equivalentes; êles têm exatamente o mesmo significado. Podemos substituir uma dessas afirmações pela outra sempre que quisermos.

Problemas 4-4A

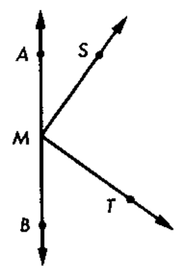
1. Nesse problema, segmentos devem ser considerados perpendiculares se assim aparentarem. Escolha os pares de segmentos perpendiculares. Se você acha que um par não é perpendicular, diga porquê.



2. Nessa figura, os ângulos têm as medidas indicadas.
   (a) Dê um par de ângulos complementares.
   (b) Que postulado torna possível afirmar que $m\angle DAG = 105$?



3. É dada a figura, com o vértice M do ângulo reto $\angle SMT$ em $\overleftrightarrow{AB}$ e $m\angle TMB = 50$.
   (a) Nomeie um par de semi-retas perpendiculares, se existirem.
   (b) Nomeie um par de ângulos complementares, se existirem.
   (c) Nomeie um par de ângulos congruentes, se existirem.
   (d) Nomeie um par de ângulos suplementares, se existirem.



4. O ponto A é origem de duas semi-retas perpendiculares $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. D é um ponto no interior do $\angle BAC$ e E é um ponto no exterior do $\angle BAC$ tal que $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AE}$.
   (a) Nomeie um par de ângulos complementares, se existirem.
   (b) Nomeie um par de ângulos suplementares, se existirem.
   (c) Nomeie um par de ângulos congruentes, se existirem.
5. Responda as seguintes perguntas:
   (a) Se $m\angle MPS = 39$ e $m\angle THN = 39$, então como são os $\angle MPS$ e $\angle THN$?
   (b) Que tipo de ângulo é o suplemento de um ângulo agudo?
   (c) Que tipo de ângulo é o complemento de um ângulo agudo?
   (d) Se $\angle ADK \cong \angle BEH$, que se pode afirmar sôbre as medidas dêsses ângulos?
6. Se a medida de um ângulo é o dôbro da medida do seu complemento, qual é a medida de cada ângulo?
7. Determine a medida do complemento de um ângulo cuja medida é
   (a) 20. (b) 68. (c) 46,5. (d) n. (e) $90-n$. (f) $45+n$.
8. Qual é a medida de um ângulo, sabendo-se que a medida de seu suplemento é 39 a mais que o dôbro da medida de seu complemento?

É fácil ver que os teoremas seguintes são verdadeiros, desde que se tenha em mente o significado dos têrmos.

Teorema 4-1

Se dois ângulos são complementares, ambos são agudos.

Teorema 4-2

Todo ângulo é congruente a si mesmo.
(Sempre temos $m\angle A = m\angle A$.)

Teorema 4-3

Dois ângulos retos quaisquer são congruentes.

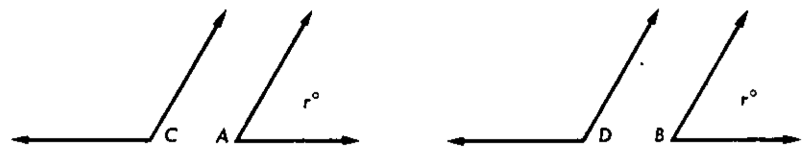
Teorema 4-4

Se dois ângulos são congruentes e suplementares então cada um é um ângulo reto.

[*Sugestão:* Se êles são congruentes, têm a mesma medida r. Mostre agora que r tem de ser 90].

Teorema 4-5

Suplementos de ângulos congruentes são congruentes.



Re-enunciado. Se (1) $\angle A \cong \angle B$, (2) $\angle A$ e $\angle C$ são suplementares e (3) $\angle B$ e $\angle D$ são suplementares, então (4) $\angle C \cong \angle D$.

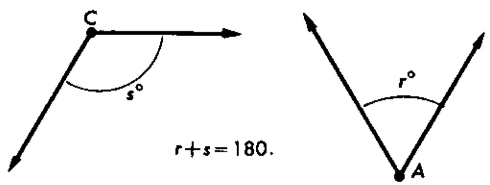
Demonstração. Seja $r = m\angle A$, como indicado na figura acima. Daremos o restante da demonstração num estilo que você poderá usar como modêlo ao fazer suas próprias demonstrações.

Afirmações	*Justificações*
1. $r + m\angle C = 180$.	$\angle A$ e $\angle C$ são suplementares.
2. $r = m\angle B$.	$\angle A \cong \angle B$.
3. $r + m\angle D = 180$.	$\angle B$ e $\angle =$ são suplementares.
4. $m\angle C = 180 - r$.	Passagem 1.
5. $m\angle D = 180 - r$.	Passagem 3.
6. $m\angle C = m\angle D$, e $\angle C \cong \angle D$.	Passagens 4 e 5.

Há vantagens nesse estilo de escrever demonstrações em duas colunas. Se você usar êsse estilo, é mais fácil organizar seu trabalho e é mais fácil lembrar, que ao fazer uma afirmação numa demonstração, você deve justificá-la.

Observe também, que antes de começar demonstrar êsse teorema, nós o re-enunciamos. Êsse é um recurso que vamos usar muitas vêzes, mais adiante. Sempre que pudermos, enunciaremos teoremas em palavras, usando pouco ou nenhum simbolismo. Os teoremas ficam então mais fáceis de serem lidos e lembrados. No re-enunciado, introduziremos a notação que será usada na demonstração.

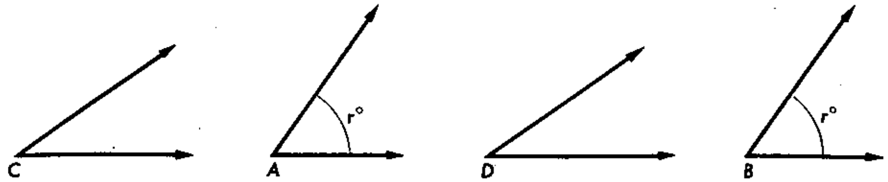
A figura dada para essa demonstração mostra um caso muito especial: dois ângulos podem ser suplementares sem que estejam dispostos de modo a serem visivelmente suplementares. Ângulos suplementares podem aparecer assim:



Em geral, uma figura é apenas uma ilustração de um teorema ou de um problema. Você não deve pensar que as figuras dadas nesse livro são, em cada caso, as únicas corretas.

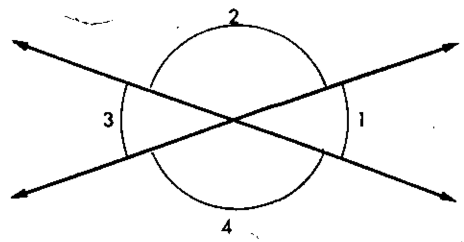
Teorema 4-6

Complementos de ângulos congruentes são congruentes.



A demonstração é muito parecida com a do Teorema 4-5 e você deve ser capaz de desenvolvê-lo sòzinho, usando a demonstração anterior como modêlo. De fato, você *deve* fazer isso. A figura acima o ajudará. Reenuncie o teorema.

Quando duas retas se interceptam, elas formam quatro ângulos. Na figura, $\angle 1$, e $\angle 3$ são chamados *ângulos opostos pelo vértice* e $\angle 2$ e $\angle 4$ também são chamados *ângulos opostos pelo vértice.* Isto é:



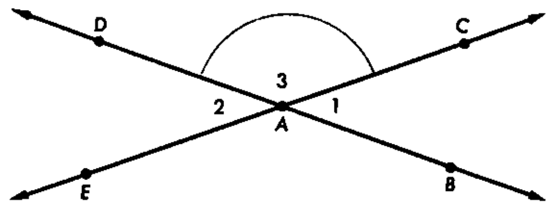
Definição

Dois ângulos são chamados *ângulos opostos pelo vértice* se os seus lados formam dois pares de semi-retas opostas.

Na figura, parece que ângulos opostos pelo vértice são congruentes e, de fato, isso sempre é o que ocorre, como será visto no próximo teorema.

Teorema 4-7. Teorema dos Ângulos Opostos pelo Vértice

Ângulos opostos pelo vértice são congruentes.



Demonstração. Temos que $\angle 1$ e $\angle 2$ são ângulos opostos pelo vértice; isto é,

(1) $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AE}$ são semi-retas opostas e $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$ são semi-retas opostas.

Portanto:

(2) $\angle 1$ e $\angle 3$ formam um par linear e $\angle 2$ e $\angle 3$ formam um par linear.

(3) $\angle 3 \cong \angle 3$.

(4) $\angle 1$ e $\angle 2$ são suplementos de ângulos congruentes.

Pelo Teorema 4-5, isso significa que

(5) $\angle 1 \cong \angle 2$.

GEORGE DAVID BIRKHOFF (1884-1944)

G. D. Birkhoff foi um dos matemáticos mais produtivos e versáteis dessa geração. Em sua vida escreveu cento e noventa trabalhos de pesquisa em vários ramos de matemática pura e aplicada. A coletânea de seus trabalhos preenche três volumes grandes. Também escreveu vários livros sôbre matemática e teoria da relatividade.

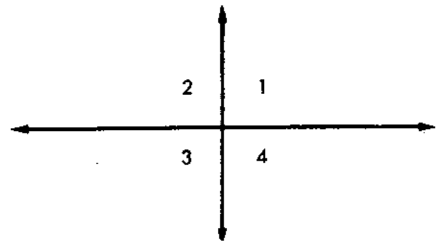
Os postulados da geometria, usados nesse livro, são modificações de um conjunto de postulados devidos a Birkhoff. Durante muitos séculos, a idéia de medida, tanto para segmentos como para ângulos, foi uma idéia central em geometria. Os postulados de Birkhoff introduziram essa idéia desde o início; êles descrevem métodos que de fato todos usam. Assim, apesar de os postulados de Birkhoff não estarem entre suas grandes contribuições para o conhecimento, êles contribuem grandemente para a clareza.

Teorema 4-8

Se duas retas que se interceptam formam um ângulo reto, elas formam quatro ângulos retos.

Demonstração. Na figura, o pequeno quadrado no vértice do $\angle 1$ indica que $\angle 1$ é um ângulo reto. Isso é dado. Precisamos provar que $\angle 2$, $\angle 3$ e $\angle 4$ são ângulos retos. As passagens principais são: (você deve saber justificar cada passagem.)

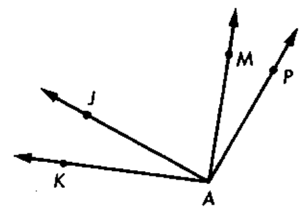
(1) $\angle 3$ é um ângulo reto.
(2) $\angle 2$ e $\angle 1$ são suplementares.
(3) $m\angle 2 + 90 = 180$.
(4) $\angle 2$ é um ângulo reto.
(5) $\angle 4$ é um ângulo reto.



Existe um certo teorema que usamos como justificação das passagens 1 e 5. A justificação da passagem 2 é um postulado. As justificações das passagens 3 e 4 são definições.

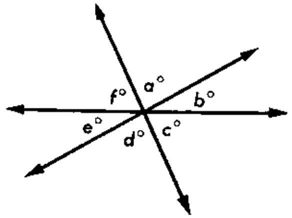
Problemas 4-4B

1. $\angle ABC \cong \angle DEH$ e $\angle ABC$ é o suplemento do $\angle DEH$. Que conclusão você pode tirar? Que postulado, definição ou teorema justifica essa conclusão?
2. Se $\angle M$ é suplementar do $\angle K$, $\angle P$ é suplementar do $\angle Q$ e $\angle Q \cong \angle M$, o que é verdade a respeito dos $\angle K$ e $\angle P$? Que afirmação justifica sua conclusão?
3. Se $\angle PAM$ e $\angle MAJ$ são complementares e $\angle KAJ$ e $\angle MAJ$ são complementares, por que $\angle KAJ \cong \angle PAM$?



4. (a) Se duas retas se interceptam, quantos pares de ângulos opostos pelo vértice são formados?
   (b) Se a medida de um dos ângulos da parte (a) é 62, qual é a medida dos outros ângulos?
   (c) Se todos os quatro ângulos da parte (a) são congruentes, qual é a medida de cada um dêles?

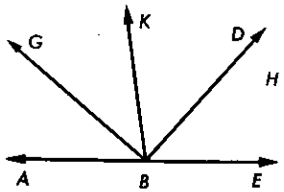
5. Na figura, três retas se interceptam no mesmo ponto. Dado $a = 85$ e $e = 30$, determine b, c, d e f.



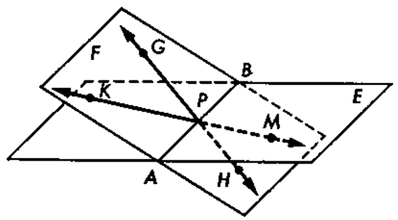
6. Se um dos ângulos de um par de ângulos opostos pelo vértice tem medida x, escreva fórmulas para as medidas dos outros três ângulos formados.
7. Demonstre o Teorema 4-3.
8. Demonstre o Teorema 4-4.

\+ 9. Seja $\overleftrightarrow{AB}$ uma reta que determina dois semiplanos H_1 e H_2. P é um ponto de H_1 tal que $m\angle PAB = 30$. Se Q é um ponto de H_2 tal que $\angle QAB \cong \angle PAB$, qual a posição B em relação ao $\angle PAQ$? Qual o valor de $m\angle PAQ$? Sendo $\overrightarrow{AQ}$ oposta a $\overrightarrow{AP}$, que relação existe entre $\angle PAB$ e $\angle QAB$? Determine $m\angle QAB$.

* 10. No semi-plano H, $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BE}$ são semi-retas opostas, $\angle ABG \cong \angle KBG$ e $\angle KBD \cong \angle DBE$. Determine $m\angle GBD$. [*Sugestão:* Seja $m\angle ABG = x$ e $m\angle DBE = y$.]

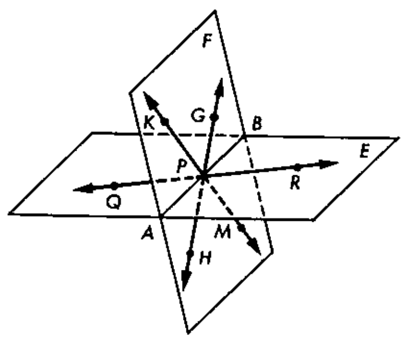


\+ 11. Na figura, o plano E intercepta o plano F em $\overleftrightarrow{AB}$. $\overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{KM}$, ambas no plano F, interceptam $\overleftrightarrow{AB}$ em P.



(a) Determine dois pares de ângulos opostos pelo vértice.
(b) Determine dois pares de ângulos suplementares.
(c) Se $\overleftrightarrow{GH} \perp \overleftrightarrow{AB}$, determine dois pares de ângulos complementares.

*+ 12. Na figura, $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{QR}$, $\overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{KM}$ interceptam-se em P. $\overleftrightarrow{QR}$ está em E, e $\overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{KM}$ estão em F. $\overleftrightarrow{AB}$ é a interseção dos planos E e F.
(a) Quais são os dois ângulos suplementares ao $\angle APG$?
(b) Quais são os dois ângulos suplementares ao $\angle HPM$?
(c) Se $\angle BPR \cong \angle KPG$, que outros ângulos têm de ser congruentes?
(d) Se $\angle RPG$ é um ângulo reto, que outros ângulos têm de ser retos?



4-5. TEOREMAS EM FORMA DE HIPÓTESE E CONCLUSÃO

Todo teorema é uma afirmação de que *se* uma afirmação é verdadeira, *então* uma outra afirmação também é verdadeira. Por exemplo, o Teorema 4-8 diz que *se* duas retas que se interceptam formam um ângulo reto, *então* elas formam quatro ângulos retos. A parte do *se* de um teorema é chamada a *hipótese;* ela diz o que é *dado.* A parte do *então* é chamada a *conclusão* (*tese*)*;* ela diz o que tem de ser *provado.* Podemos escrever o Teorema 4-8 da seguinte maneira:

Teorema 4-8

Hipótese: L_1 e L_2 formam um ângulo reto.
Conclusão: L_1 e L_2 formam quatro ângulos retos.

Anàlogamente, podemos escrever o Teorema 4-3 como se segue:

Teorema 4-3

Hipótese: $\angle A$ e $\angle B$ são ângulos retos.
Conclusão: $\angle A \cong \angle B$.

Postulados são como teoremas, só que êles não serão demonstrados. A maioria dos postulados pode ser posta na mesma forma do *se ... então* dos teoremas. Por exemplo, o Postulado da Adição de Ângulos pode ser escrito assim:

POSTULADO 13. O Postulado da Adição de Ângulos

Hipótese: D está no interior do $\angle BAC$.
Conclusão: $m\angle BAC = m\angle BAD + m\angle DAC$.

Em alguns casos, a forma hipótese-conclusão não é nem natural nem útil. Por exemplo, se quisermos dizer que o espaço contém quatro pontos não coplanares, não há vantagem em escrever

Hipótese: S é o espaço.
Conclusão: S contém quatro pontos não coplanares.

É claro que não é necessário enunciar todos os teoremas na forma hipótese-conclusão. Independentemente da forma que o teorema estiver enunciado, deve estar claro o que é dado e o que deve ser demonstrado. No entanto, na maioria das vêzes, nós deveríamos ser *capazes* de enunciar o teorema na forma hipótese-conclusão se assim quisermos, porque se não o conseguirmos há uma boa chance de não estarmos compreendendo exatamente o que o teorema diz.

Problemas 4-5

1. Identifique a hipótese e a conclusão das seguintes afirmações.
(a) Se dois ângulos são complementares, então cada um dêles é agudo.
(b) Se $a = b$ e $b = c$, então $a = c$.

(c) Se $a = b$ então $a + c = b + c$.

(d) Se dois ângulos são congruentes e suplementares, então cada um dêles é um ângulo reto.

(e) Se as dimensões de um retângulo são a e b, sua área é ab.

(f) Se dois planos se interceptam, então sua interseção é uma reta.

2. Escreva cada uma das seguintes sentenças na forma "Se... então..."

(a) Suplementos de ângulos congruentes são congruentes.

(b) A área de um triângulo de altura a e base b é $\frac{1}{2}ab$.

(c) A interseção de dois planos é uma reta.

(d) Três pontos não colineares quaisquer estão contidos em exatamente um plano.

(e) Dois ângulos que formam um par linear são suplementares.

4-6. ESCREVENDO DEMONSTRAÇÕES SIMPLES

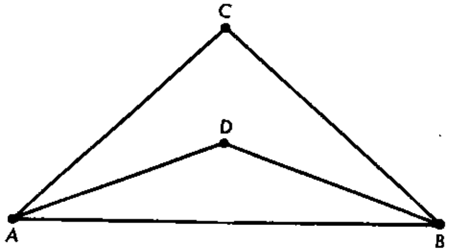
Logo mais, escrever suas próprias demonstrações constituirá uma grande parte de seus exercícios. Será melhor adquirir mais um pouco de prática em escrever demonstrações fáceis antes de atacar as mais difíceis do próximo capítulo. Provàvelmente, a melhor maneira de indicar como devem ser suas demonstrações, é dar mais alguns exemplos. Nesses exemplos e problemas você pode supor que as figuras são coplanares salvo aviso em contrário.

Exemplo 1

Dados: ΔABC e ΔABD, como na figura à direita, com $\angle DAB \cong \angle DBA$ e $\angle CAD \cong \angle CBD$,

Demonstre:

$\angle CAB \cong \angle CBA$



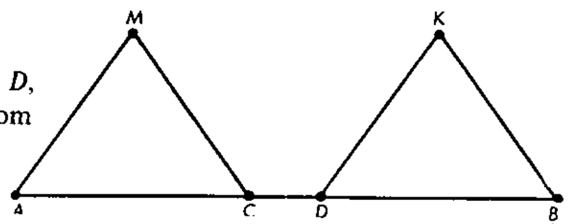
Demonstração

Afirmações	*Justificações*
1. $m\angle DAB = m\angle DBA$.	Dado.
2. $m\angle CAD = m\angle CBD$.	Dado.
3. $m\angle DAB + m\angle CAD = m\angle DBA + m\angle CBD$.	Propriedade aditiva da igualdade.
4. $m\angle CAB = m\angle CBA$.	Postulado da Adição de Ângulos.
5. $\angle CAB \cong \angle CBA$.	Definição de congruência de ângulos.

Exemplo 2

Dados: Pontos A, B, C, D, como na figura à direita, com $AD = CB$,

Demonstre: $AC = DB$



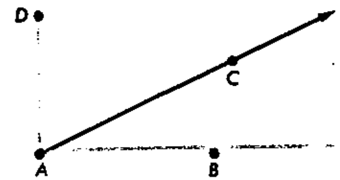
Demonstração

Afirmações	*Justificações*
1. $AC + CD = AD$.	Definição de "entre".
2. $CD + DB = CB$.	Definição de "entre".
3. $AD = CB$.	Dado.
4. $AC + CD = CD + DB$.	Substituição, nas passagens 1, 2 e 3.
5. $AC = DB$.	Propriedade da subtração na igualdade

Exemplo 3

Dados: Semi-retas $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$, com C no interior do $\angle BAD$ e com $m\angle BAC + m\angle CAD = 90$.

Demonstre: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$.



Demonstração

Afirmações	*Justificações*
1. $m\angle BAC + m\angle CAD = 90$.	Dado.
2. $m\angle BAC + m\angle CAD = m\angle BAD$.	Postulado da Adição de Ângulos.
3. $m\angle BAD = 90$.	Substituição das passagens 1 e 2.
4. $\angle BAG$ é um ângulo reto.	Definição de ângulo reto.
5. $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$.	Definição de semi-retas perpendiculares.

Problemas 4-6

1. Copie tudo o que se segue e complete a demonstração.

Dados: $m\angle A = 38$ e $m\angle B = 52$.

Demonstre: $\angle A$ é complementar ao $\angle B$.

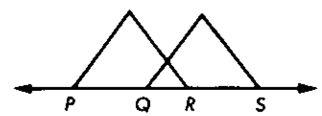
Demonstração

Afirmações	*Justificações*
1. $m\angle A =$	Dado.
2. $m\angle B =$	....
3. $m\angle A + m\angle B =$	....
4. $\angle A$ é complementar ao $\angle B$.	....

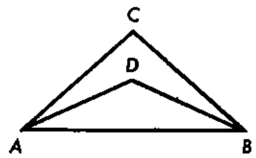
2. Copie e faça uma demonstração.

Dado: A figura com $PQ = RS$.

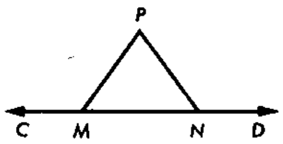
Demonstre: $PR = QS$.



3. Copie e faça uma demonstração
Dados: A figura com
$m\angle CAB = m\angle CBA.$
e $m\angle DAB = m\angle DBA.$
Demonstre: $m\angle CAD = m\angle CBD.$



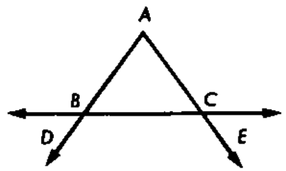
4. Copie e complete a demonstração.
Dados: A figura com $\angle PMN \cong \angle PNM.$
Demonstre: $\angle CMP \cong \angle DNP.$



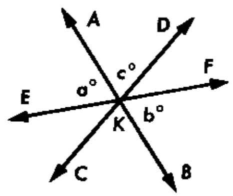
Demonstração

Afirmações	*Justificações*
1. $\angle CMP$ é suplementar ao $\angle PMN$.	Dois ângulos que formam um par linear são suplementares.
2. $\angle DNP$ é	....
3.	Dado.
4. $\angle CMP \cong \angle DNP.$	....

5. Copie e faça uma demonstração.
Dados: A figura com
$\angle DBC \cong \angle ECB.$
Demonstre: $\angle ABC \cong \angle ACB.$



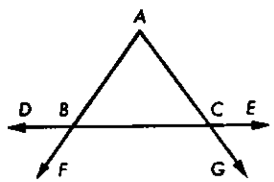
6. Copie e dê as justificações.
Dados: $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ interceptam-se em K;
$a = c.$
Demonstre: $b = c.$



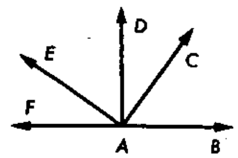
Demonstração

Afirmações	*Justificações*
1. $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ se interceptam em K.	....
2. $\angle AKE$ e $\angle BKF$ são ângulos opostos pelo vértice.	....
3. $\angle AKE \cong \angle BKF.$	....
4. $a = b.$	....
5. $a = c.$	....
6. $b = c.$	....

7. Copie e faça uma demonstração.
Dados: A figura com $\angle ABC \cong \angle ACB.$
Demonstre: $\angle DBF \cong \angle ECG.$



8. Copie e demonstre.
Dados: $\overline{AD} \perp \overline{FB}$ e $\angle BAC \cong \angle DAE.$
Demonstre: $\angle DAC \cong \angle FAE.$



Revisão do Capítulo

Nos Problemas de 1 a 15, copie e complete as afirmações dadas.

1. A cada ângulo corresponde um número real entre .... e ...., chamado a medida do ângulo.
2. O instrumento usado para medir ângulos é um ....
3. Se a soma das medidas de dois ângulos é 90, então cada ângulo é um .... do outro.
4. Ângulos cujas medidas são menores que 90, são chamados ....
5. Ângulos cujas medidas são maiores que 90, são chamados ....
6. Dois ângulos, formados pela reunião de duas semi-retas opostas e uma terceira semi-reta de mesma origem, chamam-se ....
7. Ângulos cujas medidas são iguais, são chamados ângulos ....
8. Dois ângulos que são complementares têm que ser ....
9. Se dois ângulos são congruentes, seus suplementos são ....
10. Dois ângulos que são congruentes e suplementares têm que ser ....
11. Todo triângulo tem .... lados e .... ângulos; um triângulo contém seus .... mas não contém seus ....
12. A soma das medidas de dois ângulos complementares é .... e a soma das medidas de dois ângulos suplementares é ....
13. A soma das medidas de dois ângulos .... é sempre menor que 180 e a soma das medidas de dois ângulos .... é sempre menor que ....
14. Se os lados de dois ângulos são semi-retas opostas, os ângulos se dizem ....
15. Um ponto M está no interior do $\angle GHK$ se M e .... estiverem do mesmo lado de $\overleftrightarrow{HK}$ e se M e .... estiverem do mesmo lado de ....

Os Problemas de 16 a 25 referem-se à figura abaixo (Pontos aparentemente colineares são colineares).

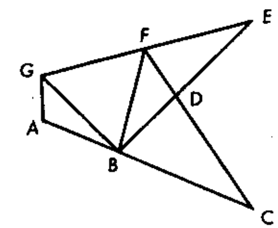
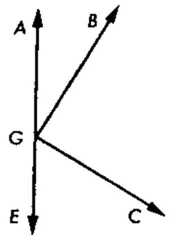


Figura para os problemas 16 a 25

16. Quantos triângulos existem nessa figura?
17. $m\angle BFC = m\angle BFD$?
18. $\angle BFC = \angle BFD$?
19. $\angle FDB \cong \angle EDC$?
20. Qual é o ângulo suplementar do $\angle ABF$?
21. $m\angle AGB + m\angle BGF =$ ....
22. $m\angle GFC + m\angle DFE =$ ....
23. Dê um par de ângulos opostos pelo vértice.
24. Se $\angle GBF$ e $\angle FBE$ são complementares, então $\overline{GB}$ e $\overline{BE}$ têm que ser ....
25. Quantos ângulos estão indicados na figura?
26. A medida de um ângulo é cinco vêzes a medida do seu complemento. Determine a medida de cada ângulo.

27. A medida do suplemento e um ângulo é cinco vêzes a medida do complemento do mesmo ângulo. Determine a medida do ângulo.

28. A medida da soma de dois ângulos é sempre a medida de um outro ângulo? Explique.



29. É dada a figura com $\overrightarrow{GA}$ oposta a $\overrightarrow{GE}$ e $\overrightarrow{GB} \perp \overrightarrow{GC}$. Copie e complete a demonstração que $\angle AGB$ e $\angle EGC$ são complementares.

Demonstração

Afirmações	*Justificações*
1. $\overrightarrow{GA}$ é oposta a $\overrightarrow{GE}$.	....
2. $\angle AGB$ e $\angle BGE$ são suplementares.	Postulado do Suplemento.
3. $m\angle AGB + m\angle BGE = 180$.	....
4. $\overrightarrow{GB} \perp \overrightarrow{GC}$.	....
5. $m\angle BGC = 90$.	Definições de perpendicular e ângulo reto.
6. $m\angle BGE = m\angle EGC + 90$.	....
7. $m\angle AGB + m\angle EGC + 90 = 180$.	Substituição da passagem 6 em 3.
8. $m\angle AGB + m\angle EGC = 90$.	....
9. $\angle AGB$ e $\angle EGC$ são complementares.	....

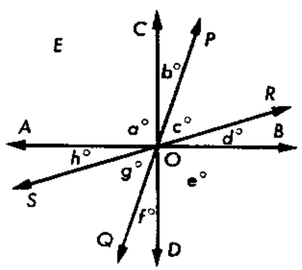
30. $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são semi-retas opostas. Os pontos E, F e H estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AB}$. Os pontos E e H estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{BF}$. Pontos A e H estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{BF}$. $\overrightarrow{BF} \perp \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BE} \perp \overrightarrow{BH}$. $m\angle FBE = 20$. Desenhe a figura e calcule
(a) $m\angle EBA$. (b) $m\angle FBH$. (c) $m\angle EBC$.

31. Existe algum ponto no plano de um triângulo tal que o ponto não esteja nem no interior nem no exterior do triângulo e nem no interior nem no exterior de qualquer ângulo do triângulo?

32. É dado o ΔABC e um ponto P no mesmo plano. P e A estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{BC}$. P e B estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$.
(a) P está no interior de que ângulo?
(b) P tem que estar no interior do ΔABC?

33. Se você soubesse que $\angle a$ e $\angle y$ são complementares, que $\angle b$ e $\angle x$ são complementares, e $\angle x \cong \angle y$, que postulado você usaria para provar que $\angle a \cong \angle b$?

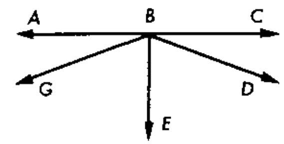
34. É verdadeira a seguinte afirmação? Se $\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{RS}$ se interceptam em O então $\angle POR \cong \angle QOS$.



35. Dados: No plano E, $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{RS}$ se interceptam em O e $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$.
Copie e complete a demonstração que
$$b + g + d = a.$$

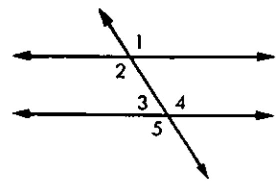
Demonstração. Aplicando duas vêzes PAA, temos $m\angle COB = b + c + d$. Mas sendo $\overleftrightarrow{CD}$ ...., $m\angle COB = a$. Portanto, $a =$ .... Mas $\angle POR$ e .... são ângulos ...., de modo que $c =$ .... Substituindo g no lugar de c, concluímos que ....

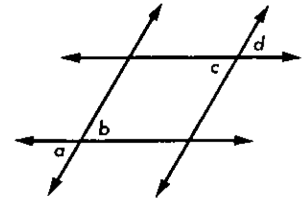
36. É a seguinte afirmação um enunciado correto do Postulado da Construção de um Ângulo?
Dada uma semi-reta $\overrightarrow{RS}$ e um número k entre 0 e 180, existe exatamente uma semi-reta $\overrightarrow{RP}$ tal que $m\angle SRP = k$.



37. Dados: A figura com $\overrightarrow{BE} \perp \overrightarrow{AC}$ e $\angle ABG \cong \angle CBD$, demonstre: $\angle GBE \cong \angle DBE$.

38. Dada a figura com $\angle 2$ e $\angle 3$ suplementares, demonstre que $\angle 1 \cong \angle 4$.





39. Se, na figura, $\angle b \cong \angle c$, demonstre que $\angle a \cong \angle d$.

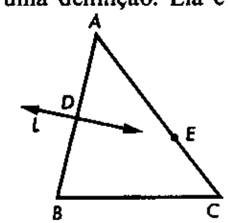
40. Numa reta L, A-B-C. Pontos D e E estão em lados opostos de L de modo que, desenhando-se $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{BE}$, $\angle CBD \cong \angle CBE$. Demonstre que
$$m\angle ABD = m\angle ABE.$$

41. José e Jorge deveriam escrever a seguinte afirmação na forma "Se ... então".
"Duas retas que se interceptam, interceptam-se exatamente em um ponto".
Jorge escreveu, "Se P é um ponto, então L_1 e L_2 se interceptam exatamente em P". José escreveu, "L_1 e L_2 se interceptam exatamente em um ponto, se elas são distintas e se interceptam". Um dêles acertou?

+ 42. Se $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ são três semi-retas distintas num plano de tal forma que duas delas nunca são opostas, é cada uma das afirmações seguintes verdadeira ou falsa? (Lembre-se de que uma só exceção fará uma sentença ser falsa).
(a) $m\angle AOB + m\angle BOC = m\angle AOC$.
(b) $m\angle AOB + m\angle BOC + m\angle AOC = 360$.

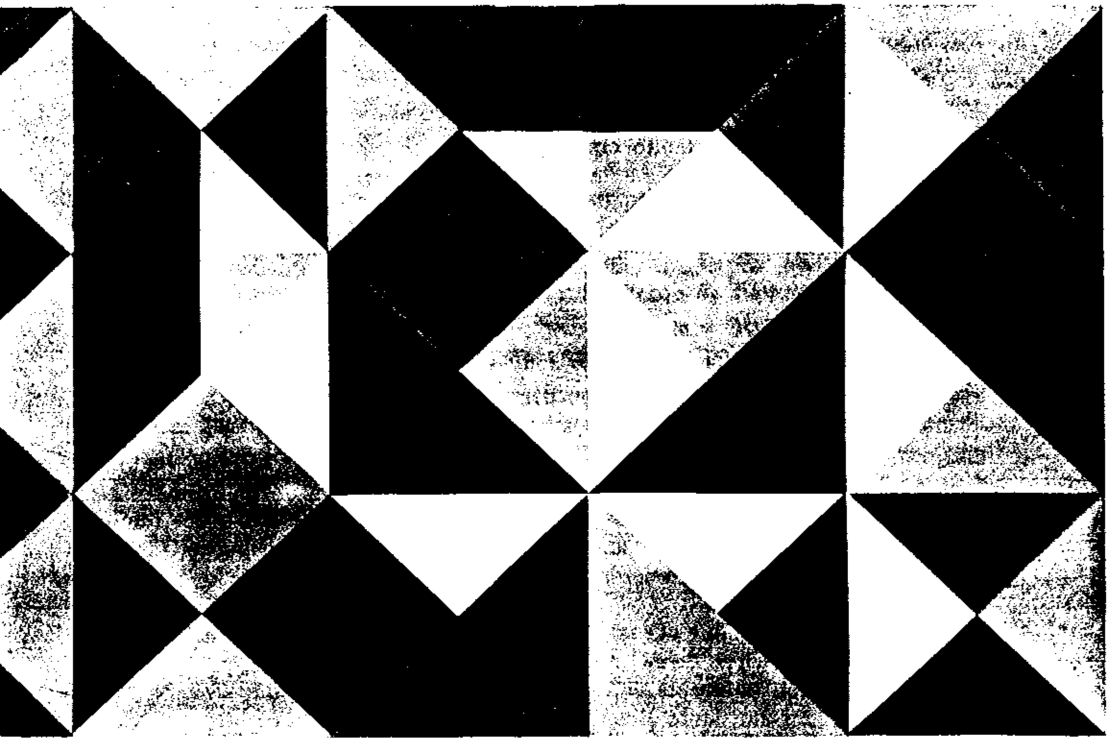
+ 43. Poderia o interior de um triângulo ser definido como a interseção de três semi-planos? Ilustre. Se o ponto X é um ponto qualquer no interior do ΔABC, escreva uma definição do interior do ΔABC. (Consulte a definição de interior de um ângulo dada na Seção 4-1).

+ 44. Fica o interior do ΔABC completamente determinado pela interseção dos interiores de dois quaisquer de seus ângulos. Ilustre e formule uma definição. Ela é equivalente às definições anteriores?



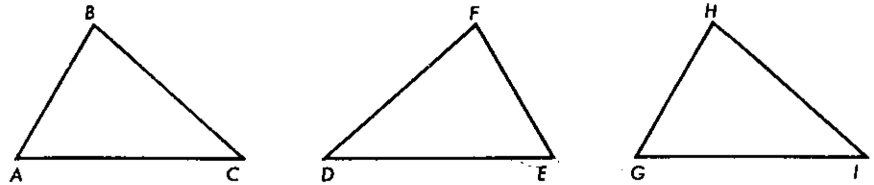
*+ 45. Explique por que a seguinte afirmação é verdadeira.
Se uma reta L intercepta ΔABC num ponto D tal que A-D-B e L não intercepta $\overline{BC}$, então L tem que interceptar $\overline{AC}$ em um ponto E tal que A-E-C.

5 CONGRUÊNCIAS



5-1. A IDÉIA DE CONGRUÊNCIA

A grosso modo, duas figuras geométricas são congruentes se têm, exatamente, a mesma forma e o mesmo tamanho. Por exemplo, na figura abaixo, todos os três triângulos são congruentes.



Um meio de descrever a situação é dizer que qualquer um dêstes triângulos pode ser transportado sôbre qualquer outro, de tal modo que coincidam exatamente. Assim, para explicar o que queremos dizer ao afirmar que dois triângulos são congruentes, temos de explicar que pontos vão se corresponder. Por exemplo, para transportar o ΔABC sôbre o ΔDEF, poríamos A sôbre E, B sôbre F e C sôbre D. Podemos escrever os pares de vértices correspondentes da seguinte maneira:

$$A \leftrightarrow E,$$
$$B \leftrightarrow F,$$
$$C \leftrightarrow D.$$

Para descrever a congruência entre o primeiro e o terceiro triângulos, devemos fazer os vértices se corresponderem assim:

$$A \leftrightarrow G,$$
$$B \leftrightarrow H,$$
$$C \leftrightarrow I.$$

Como você deveria fazer corresponder os vértices para descrever a congruência do segundo e terceiro triângulos?

Um esquema de correspondência dêste tipo é chamado uma *correspondência bijetora* (ou bijeção) entre os vértices dos dois triângulos. Se existe um tal esquema de correspondência, isto é, se os triângulos podem coincidir quando os vértices se correspondem no modo prescrito, então a correspondência é chamada *congruência* entre os dois triângulos. Por exemplo, as correspondências que acabamos de dar são congruências. Por outro lado, escrevendo

$$A \leftrightarrow F,$$
$$B \leftrightarrow D,$$
$$C \leftrightarrow E,$$

isto nos dá uma correspondência bijetora, mas *não* uma congruência, porque os triângulos não podem coincidir através dêste esquema particular.

Êste esquema leva a muitas dificuldades. $\overline{AB}$ é muito pequeno para se ajustar sôbre $\overline{FD}$, $\overline{AC}$ é muito grande para se ajustar sôbre $\overline{FD}$, e assim por diante.

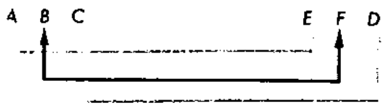
Podemos descrever as correspondências bijetoras mais ràpidamente, em apenas uma linha. Por exemplo, a correspondência,

$$A \leftrightarrow E,$$
$$B \leftrightarrow F,$$
$$C \leftrightarrow D,$$

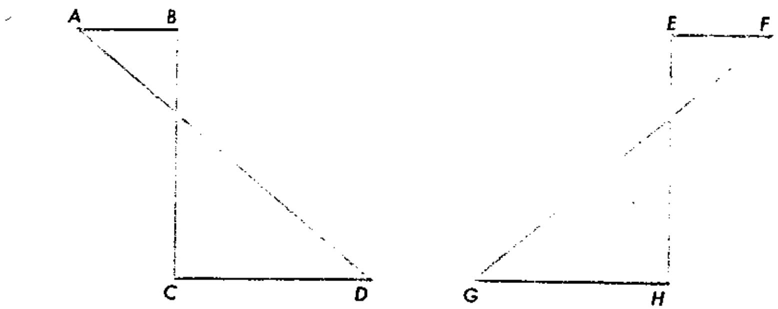
que é o primeiro exemplo que demos, pode ser escrita:

$$ABC \leftrightarrow EDF.$$

Aqui, deve-se entender que a primeira letra da esquerda corresponde à primeira letra da direita, a segunda corresponde à segunda e a terceira, à terceira:



Tomemos mais um exemplo. As duas figuras abaixo são do mesmo tamanho e forma.



Para mostrar que uma pode ser transportada sôbre a outra, devemos fazer os vértices se corresponderem assim:

$$A \leftrightarrow F,$$
$$B \leftrightarrow E,$$
$$C \leftrightarrow H,$$
$$D \leftrightarrow G,$$

Esta correspondência é uma congruência: isto é, pode-se fazer as figuras coincidirem se os vértices se corresponderem no modo dado. Resumidamente, podemos escrever a congruência em uma linha:

$$ABCD \leftrightarrow FEHG.$$

Note que a ordem, em que os *pares* correspondentes são escritos, não importa. Poderíamos ter escrito nossa lista de pares correspondentes da seguinte maneira:

$$D \leftrightarrow G,$$
$$B \leftrightarrow E,$$
$$C \leftrightarrow H,$$
$$A \leftrightarrow F;$$

e poderíamos ter escrito nossa bijeção em uma linha:

$$DBCA \leftrightarrow GEHF.$$

Importante é saber quais são os pontos que se correspondem.

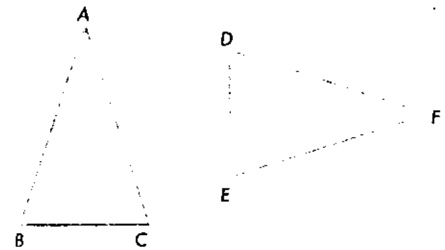
É perfeitamente possível que duas figuras sejam congruentes em mais de um modo. Aqui, a congruência

$$ABC \leftrightarrow FDE$$

é uma congruência e

$$ABC \leftrightarrow FED$$

é uma congruência diferente entre as mesmas figuras.



Òbviamente, o ΔABC coincide com si próprio. Se fizermos corresponder cada vértice a si próprio, obtemos a congruência

$$ABC \leftrightarrow ABC.$$

Esta congruência é chamada *identidade*. Entretanto, há um outro meio de fazer corresponder os vértices dêste triângulo. Podemos usar a correspondência

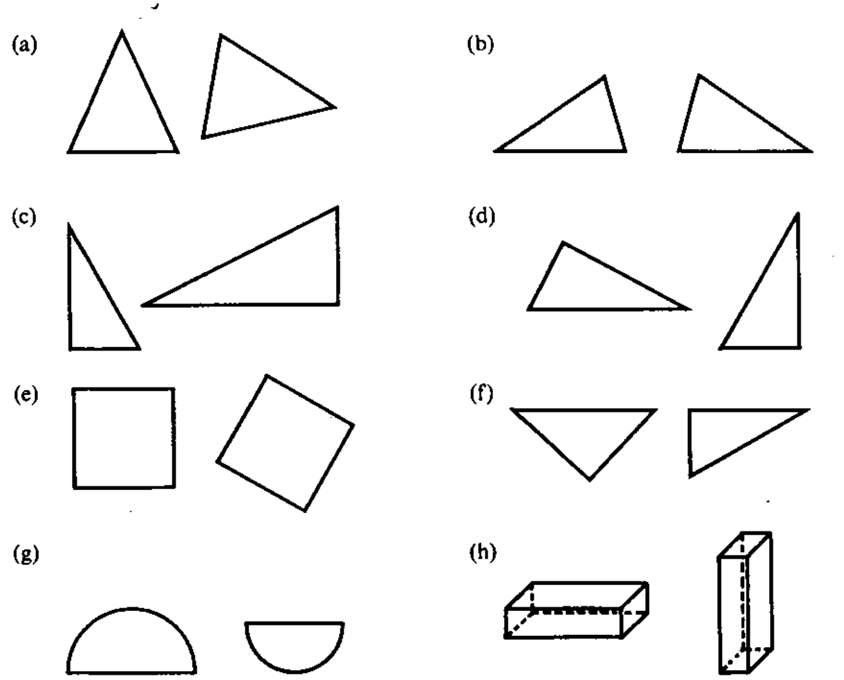
$$ABC \leftrightarrow ACB.$$

Sob esta correspondência, faz-se a figura coincidir consigo própria, com os vértices B e C trocados. Isto não é possível, de modo algum, para todos os triângulos; isto não vale, a menos que, no mínimo, dois lados do triângulo tenham o mesmo comprimento.

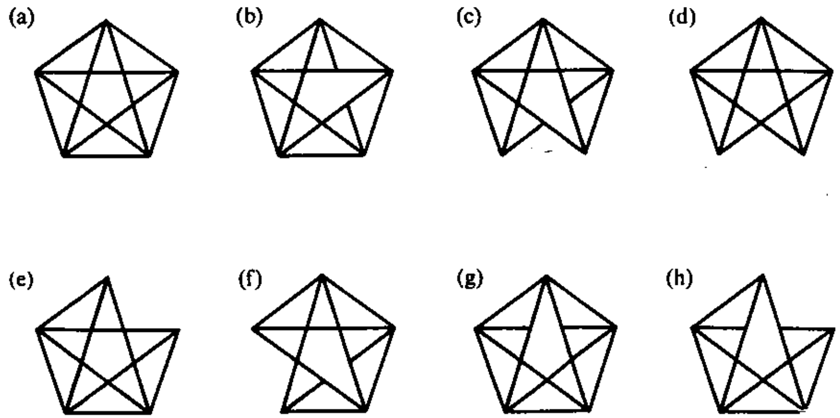
Problemas 5-1

Em alguns dos problemas desta série, você deve decidir se as figuras são congruentes ou não, simplesmente por uma inspeção visual. Isto é, correspondências, que *parecem* congruências se as figuras forem medidas com um cuidado razoável, poderão ser chamadas congruências. (Os desenhos não involvem nenhum efeito artificioso.)

1. Quais, dos seguintes pares de figuras, são congruentes?

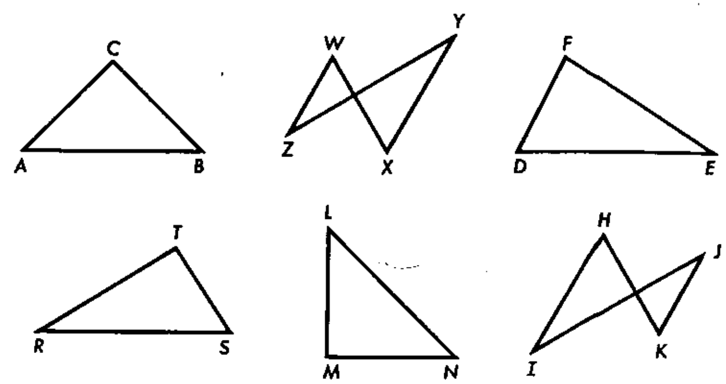


2. Quais, das figuras abaixo, não têm um par semelhante?

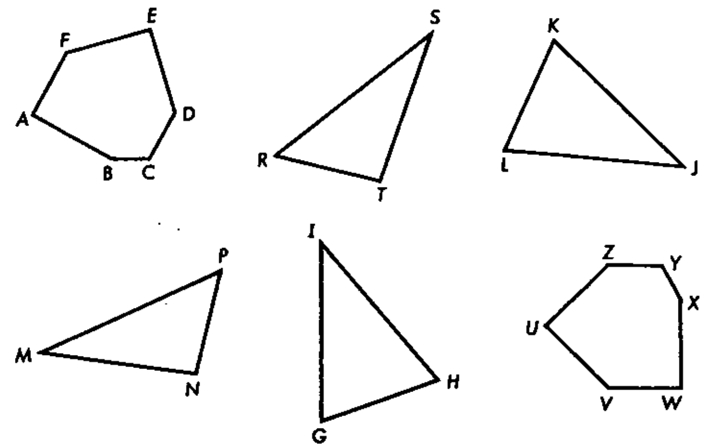


3. Olhe para as figuras a seguir. Escreva tantas congruências quantas você puder, entre estas figuras. Você deve obter seis congruências. (Você pode ignorar a congruência identidade, mas deve levar em conta a congruência, que não é a iden-

tidade, entre um triângulo e si próprio se o referido triângulo tiver dois lados congruentes. Uma congruência é $ACB \leftrightarrow LMN$.)

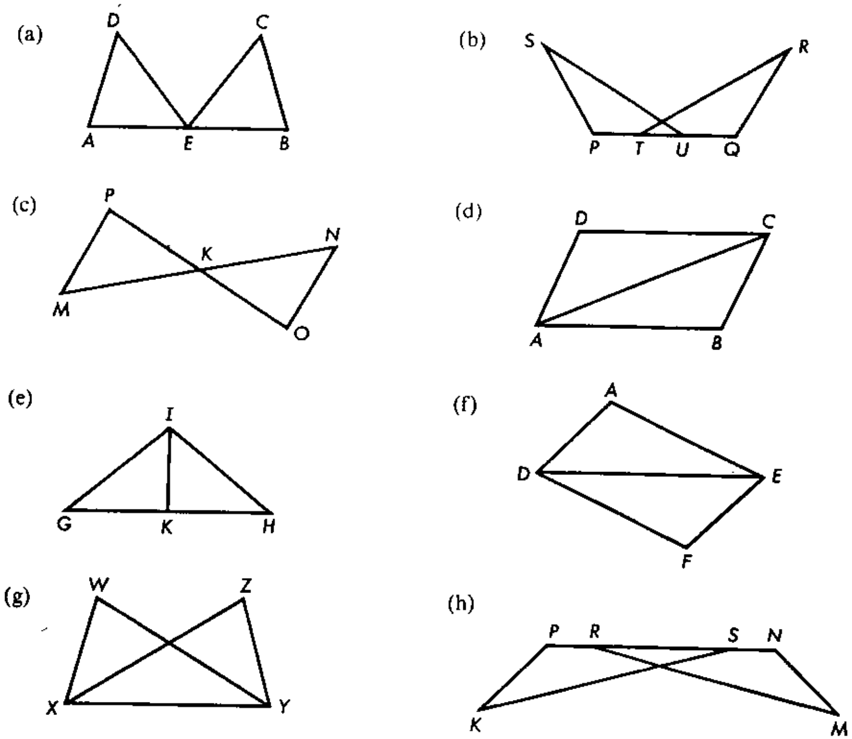


4. Siga as instruções do Problema 3 para as figuras seguintes.



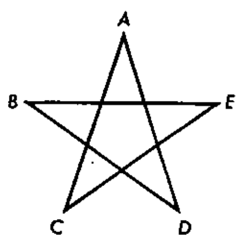
5. (a) Uma figura é congruente a si própria?
   (b) Se duas figuras são congruentes a uma terceira, são elas congruentes entre si?
   (c) São os lados de um quadrado congruentes?
   (d) São os lados de um retângulo congruentes?
   (e) São as faces opostas de um cubo congruentes?
   (f) São duas faces adjacentes de um cubo congruentes?
   (g) Duas faces opostas de um bloco retangular, como um tijolo, são congruentes?
   (h) São duas faces adjacentes de um tijolo congruentes?

6. Os seguintes pares de triângulos são congruentes. Escreva as congruências de cada par. (A primeira é $AED \leftrightarrow BEC$.)



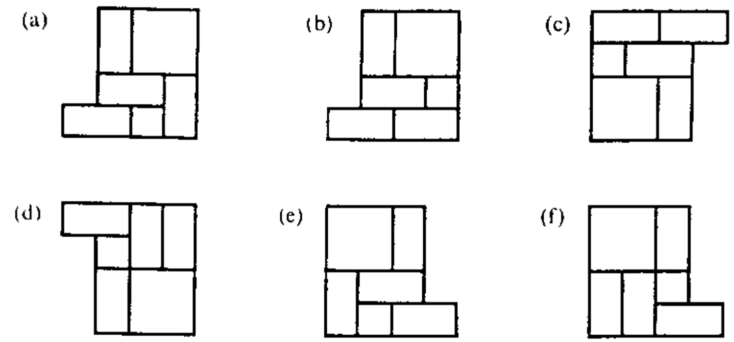
7. Sob que condições seriam congruentes os seguintes pares de figuras?
(a) Dois segmentos. (b) Duas retas. (c) Dois ângulos.
(d) Duas circunferências. (e) Dois quadrados. (f) Dois triângulos.

8. Considere a estrêla de cinco pontas $ABCDE$. Escreva tôdas as congruências entre a estrêla e si própria, começando com $ABCDE \leftrightarrow ABCDE$.

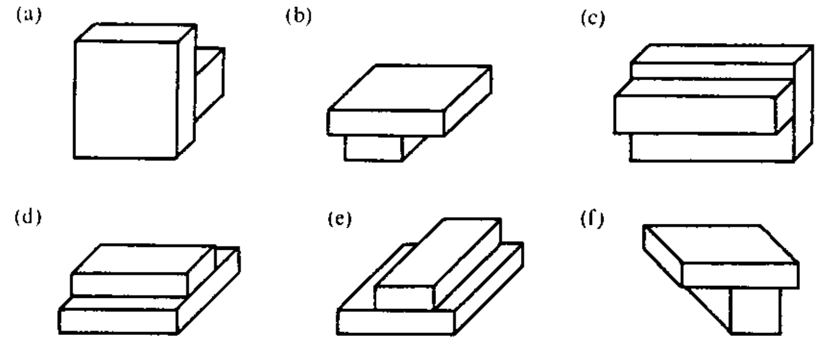


9. Seja ΔABC um triângulo equilátero, isto é $AB = BC = AC$. Escreva tôdas as congruências do triângulo, começando com a identidade $ABC \leftrightarrow ABC$. (Há mais que quatro.)

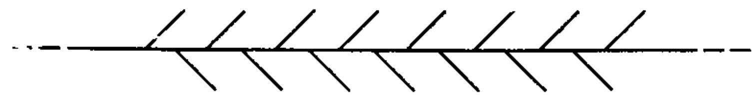
* 10. Quais, das seguintes figuras planas, podem coincidir com uma outra? Para cada par de figuras correspondentes, diga se você girou a figura no espaço, deslizou-a ou aplicou uma rotação, de modo a fazer as figuras coincidirem.



* 11. Quais destas figuras tridimensionais são congruentes?

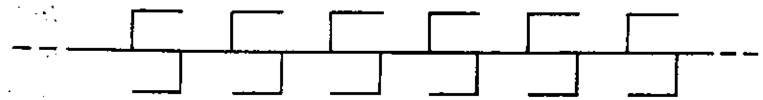


** 12. Suponha que o friso ornamental abaixo se estenda infinitamente em ambos os sentidos, do mesmo modo que uma reta. Considere um movimento horizontal do friso, que leve cada ramo sôbre o ramo sucessivo, do mesmo lado da reta. Dizemos que êste movimento induz uma congruência do friso em si próprio.



(a) Descreva movimentos de um tipo diferente que induzam congruências do friso sôbre si próprio. Quantas congruências dêste tipo existem?

(b) Descreva dois tipos de movimentos que induzam congruências do friso abaixo sôbre si próprio.



5-2. CONGRUÊNCIAS ENTRE TRIÂNGULOS

Nas seções precédentes, explicamos informalmente a idéia de congruência. Daremos, agora, algumas definições matemáticas, de modo a poder lidar com a idéia matemàticamente.

Para ângulos e segmentos, é fácil expressar exatamente o que queremos dizer.

Definições

Dois ângulos são *congruentes* se têm a mesma medida. Dois segmentos são *congruentes* se têm o mesmo comprimento.

Evidentemente, a primeira destas definições é uma repetição do que já foi visto na Seção 4-4. Òbviamente,

Teorema 5-1

Todo segmento é congruente a si mesmo.

A demonstração é evidente: porque todo segmento tem o mesmo comprimento que êle próprio. Em demonstrações posteriores, referir-nos-emos a êste teorema pela frase *congruência identidade*.

Da mesma forma que escrevemos $\angle A \cong \angle B$ para indicar que $\angle A$ e $\angle B$ são congruentes, escrevemos

$$\overline{AB} \cong \overline{CD},$$

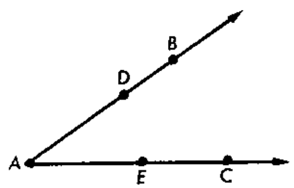
para indicar que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são congruentes. Assim

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ significa que $AB = CD$,

$\angle A \cong \angle B$ significa que $m\angle A = m\angle B$.

Cada uma das *equações* à direita é uma *equação entre números*. Cada uma das *congruências* à esquerda é uma *congruência* entre figuras geométricas. Não escrevemos = entre dois nomes de figuras geométricas a menos que queiramos dizer que as figuras são, exatamente, a mesma, e situações dêste tipo são muito raras. Um exemplo é mostrado à direita. Aqui, é correto escrever

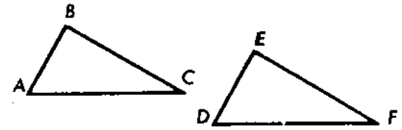
$$\angle BAC = \angle EAD,$$



porque $\angle BAC$ e $\angle EAD$ não são simplesmente congruentes, êles são *exatamente o mesmo ângulo*. Da mesma forma, $\overline{AB}$ e $\overline{BA}$ são sempre, exatamente o mesmo segmento e, assim, é correto escrever não apenas $\overline{AB} \cong \overline{BA}$ mas também $\overline{AB} = \overline{BA}$.

Considere, agora, uma correspondência

$$ABC \leftrightarrow DEF$$



entre os vértices de dois triângulos ΔABC e ΔDEF. Isto nos dá, automàticamente, uma correspondência entre os lados dos triângulos:

$$\overline{AB} \leftrightarrow \overline{DE},$$
$$\overline{AC} \leftrightarrow \overline{DF},$$
$$\overline{BC} \leftrightarrow \overline{EF},$$

e nos dá, também, uma correspondência entre os ângulos dos dois triângulos:

$$\angle A \leftrightarrow \angle D,$$
$$\angle B \leftrightarrow \angle E,$$
$$\angle C \leftrightarrow \angle F.$$

Podemos, agora, enunciar a definição de uma congruência entre dois triângulos.

Definição

Seja dada uma correspondência

$$ABC \leftrightarrow DEF$$

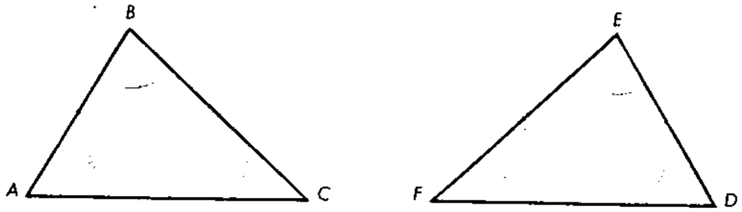
entre os vértices de dois triângulos. Se os pares de lados correspondentes são congruentes e os pares de ângulos correspondentes são congruentes, então a correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$ é chamada uma *congruência entre os dois triângulos*.

Quando escrevemos $\Delta ABC \cong \Delta DEF$, queremos dizer que a correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$ é uma congruência. Isto é uma escrita abreviada muito eficiente: a simples expressão $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ nos diz *seis* coisas de uma só vez, a saber,

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$,	ou	$AB = DE$,
$\overline{AC} \cong \overline{DF}$,	ou	$AC = DF$,
$\overline{BC} \cong \overline{EF}$,	ou	$BC = EF$,
$\angle A \cong \angle D$,	ou	$m\angle A = m\angle D$,
$\angle B \cong \angle E$,	ou	$m\angle B = m\angle E$,
$\angle C \cong \angle F$,	ou	$m\angle C = m\angle F$.

Em cada uma destas seis linhas, a congruência, à esquerda, significa a mesma coisa que a equação à direita. Podemos, portanto, usar qualquer uma das notações, de acôrdo com a conveniência. Usualmente, escreveremos $AB = DE$, ao invés de $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, porque é mais fácil de se escrever. Pela mesma razão, usualmente escreveremos $\angle A \cong \angle D$, ao invés de $m\angle A = m\angle D$. Os seis fatos, resultantes da definição acima, serão muitas vêzes mencionados através da frase "Partes correspondentes, de triângulos congruentes, são congruentes".

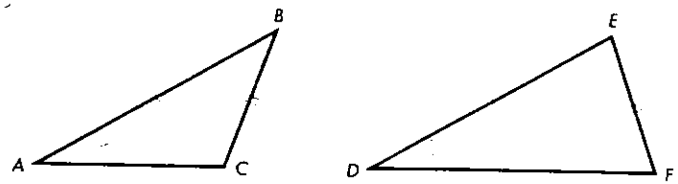
Nas figuras, é conveniente indicar congruências entre segmentos e ângulos assinalando as mesmas como é indicado abaixo.



Neste caso, as seis congruências indicadas pelos símbolos nos dizem que

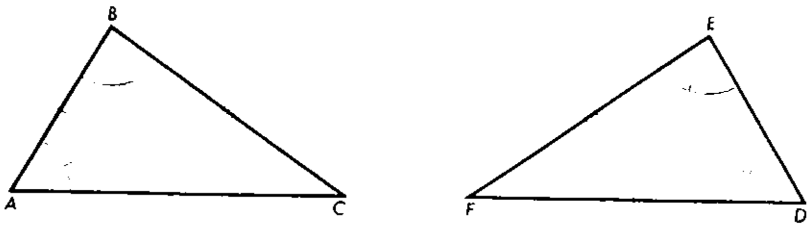
$$\Delta ABC \cong \Delta DEF.$$

Na figura seguinte, as indicações nos dizem menos coisas:



De fato, e muito simples ver que êstes dois triângulos não são congruentes, sob correspondência alguma.

Em alguns casos, podemos ter apenas informações parciais e podemos, ainda, assim, concluir que uma dada correspondência é uma congruência.



Pela correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$, temos que os três pares de lados correspondentes e dois, dos três pares de ângulos correspondentes, são congruentes. Certamente, deve seguir que $\angle C \cong \angle F$, de modo que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$. E, de fato, devemos ser capazes de conseguir isto, mesmo com menos informações. Na última parte da série seguinte de problemas, você descobrirá, por si mesmo, as condições em que podemos concluir que uma correspondência entre dois triângulos é uma congruência. Isto não é difícil, como você verá.

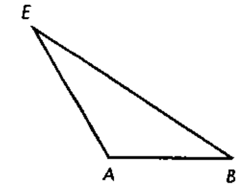
Um *lado* de um triângulo é dito *determinado* pelos (ou compreendido entre os) ângulos cujos vértices são as extremidades do segmento.

Um *ângulo* de um triângulo é dito *determinado* pelos lados do triângulo que estão contidos nos lados dêste ângulo.

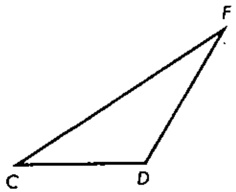
Por exemplo, no ΔABC acima, $\overline{AC}$ é determinado por (ou está compreendido entre) $\angle A$ e $\angle C$. $\angle A$ é determinado por $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

Problemas 3-2

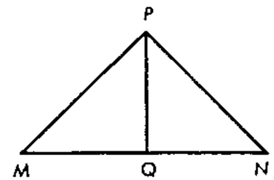
1. Se $\Delta ABE \cong \Delta DCF$, copie em seu caderno e complete as seguintes frases, colocando os símbolos que faltam. A correspondência $A\ldots\ldots \leftrightarrow \ldots CF$ é uma congruência.



$\angle A \cong \angle D.$	$\overline{AB} \cong$ ....
$\angle B \cong$	$\overline{AE} \cong$ ....
$\angle E \cong$	$\overline{BE} \cong$ ....



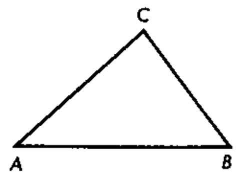
2. Dado que $\Delta MQP \cong \Delta NQP$, faça uma lista dos seis pares de partes correspondentes, congruentes, dêstes dois triângulos.



3. Para cada uma das congruências abaixo, faça uma lista dos seis pares de partes correspondentes congruentes.
   (a) $\Delta RQF \cong \Delta ABX$. Você pode fazer um esbôço dos triângulos, se você quiser.
   (b) $\Delta FHW \cong \Delta MRK$. Não use figura.
   (c) $\Delta AZW \cong \Delta BWZ$. Não use figura.
4. Escreva a congruência para os dois triângulos, que é determinada por êstes seis pares de partes congruentes:

$\overline{AK} \cong \overline{BW};$	$\angle A \cong \angle B.$
$\overline{KT} \cong \overline{WR};$	$\angle K \cong \angle W.$
$\overline{AT} \cong \overline{BR};$	$\angle T \cong \angle R.$

5. (a) No ΔABC, qual é o ângulo determinado pelos lados $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$?
(b) Qual é o lado determinado por $\angle A$ e $\angle C$?
(c) Quais os lados que determinam $\angle C$?
(d) Quais os ângulos que determinam $\overline{BC}$?



6. Considere o ΔGHK. Sem desenhar uma figura, poderia você descobrir um método fácil de decidir que lados e ângulos determinam outros ângulos e lados?
(a) $\overline{GH}$ e $\overline{HK}$ determinam $\angle H$?
(b) $\angle G$ e $\angle K$ determinam $\overline{GK}$?
(c) Que ângulo é determinado por $\overline{GH}$ e $\overline{GK}$?
(d) Que lado é determinado por $\angle G$ e $\angle H$?

[*Nota:* Nos Problemas 7 até 13, você deve usar um transferidor e uma régua para construir ângulos e segmentos.]

7. Construa um triângulo ΔRST no qual $RS = 2{,}5$ cm, $RT = 1{,}5$ cm e $m\angle R = 35$.
8. Construa um triângulo ΔABC no qual $AB = 2$ cm, $m\angle A = 45$ e $m\angle B = 60$. Se você construir vários triângulos ΔABC tendo as medidas dadas acima, quais as características comuns a êstes triângulos?
9. Construa um triângulo ΔMNP no qual $MN = 3$ cm, $NP = 2$ cm e $PM = 3{,}5$ cm. Você talvez precise de um compasso para completar esta construção.
10. Usando apenas sua régua, construa um triângulo que não tenha dois lados congruentes. Depois, construa um segundo triângulo congruente ao primeiro e descreva o processo que você usou. Existe mais de um meio de se obter o segundo triângulo a partir do primeiro? Quantas, das seis partes do primeiro triângulo, você usou para construir o segundo? Qual é o número mínimo de partes congruentes necessárias para assegurar que os dois triângulos são congruentes?
11. Construa um triângulo ΔABC no qual $m\angle A = 40$, $AC = 3$ cm e $CB = 2$ cm. Construa, então, um triângulo ΔDEF no qual $m\angle D = 40$, $DF = 3$ cm e $FE = 2$ cm. ΔABC e ΔDEF devem ser congruentes?
12. No Problema 8, você deve ter concluído que todos os triângulos ΔABC, cujas partes têm as medidas dadas, são congruentes; isto é, tôdas as partes correspondentes são congruentes. Quando isto é verdade, dizemos que as três partes dadas *determinam* um triângulo. No Problema 11, você deve ter encontrado dois triângulos que não eram congruentes mas que satisfaziam as medidas dadas. No Problema 7, quantos triângulos ficam determinados? Um ou mais? E no Problema 9? É possível atribuir medidas e ângulos e segmentos de modo que nenhum triângulo fique determinado?
* 13. Construa o triângulo determinado pelos conjuntos de medidas, dados abaixo. Se os dados permitirem dois triângulos, construa ambos. Se fôr possível de se construir mais de dois ou nenhum triângulo, explique porquê.
(a) $m\angle M = 30$, $MO = 2$, $m\angle O = 90$.
(b) $m\angle B = 55$, $AB = 5$, $BC = 3$.
(c) $m\angle G = 35$, $GH = 6$, $HI = 4$.
(d) $AB = 5$, $BC = 3$, $AC = 4$.

(e) $m\angle M = 80$, $MO = 2$, $m\angle O = 120$.
(f) $DE = 8$, $EF = 3$, $DF = 4$.
(g) $DE = 4$, $DF = 8$, $m\angle D = 60$.
(h) $m\angle A = 70$, $m\angle B = 60$, $m\angle C = 50$.

* 14. (a) Os ΔABC e ΔDEF não se interceptam e M é um ponto entre B e C. Copie em seu caderno as frases incompletas dadas abaixo e preencha os espaços em branco com um dos símbolos, $=$ e $\cong$, de modo a torná-las possivelmente verdadeiras.

(i)	ΔABC .... ΔDEF.	(v)	$\angle E$ .... $\angle F$.
(ii)	$m\angle B$ .... $m\angle E$.	(vi)	$\angle ABM$ .... $\angle ABC$.
(iii)	BC .... EF.	(vii)	$m\angle ABM$ .... $m\angle DEF$.
(iv)	$\overline{AB}$ .... $\overline{DE}$.	(viii)	AB .... DE.

(b) Em que espaços ambos os símbolos funcionam?
(c) Se $\overline{AB}$ fôsse o mesmo segmento que $\overline{DE}$, mas C e F fôssem pontos diferentes, em que espaço deveria $\cong$ mudar para $=$?

* 15. Seja dado um triângulo ΔABC. Se

$$\Delta ABC \cong \Delta BAC \quad \text{e} \quad \Delta ABC \cong \Delta ACB,$$

que conclusões podem ser feitas sôbre ΔABC? Como você prova que sua conclusão é verdadeira?

* 16. Suponha, dado $\overrightarrow{PC} \perp \overleftrightarrow{KM}$ com K-P-M, que os pontos A, B e C estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{KM}$, mas que A e B estão em lados opostos de $\overrightarrow{PC}$. A e K estão no mesmo lado de $\overrightarrow{PC}$ e $\Delta ACP \cong \Delta BCP$. Prove que $\angle KPA \cong \angle MPB$.

* 17. Se

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF \quad \text{e} \quad \Delta DEF \cong \Delta GHK,$$

que conclusão se pode usar sôbre ΔABC e ΔGHK? Como você pode provar que sua conclusão é válida? Enuncie um teorema generalizando esta situação.

Problema Magno

Uma relação de equivalência é uma relação entre os elementos de um conjunto, que tem as seguintes propriedades:

Se a, b e c são elementos do conjunto, então
(i) $a * a$. (Reflexiva)
(ii) Se $a * b$, então $b * a$. (Simétrica)
(iii) Se $a * b$ e $b * c$, então $a * c$. (Transitiva)

Ao aplicar esta definição, você deve trocar o asterisco(*) pela relação. Por exemplo, considere a relação "é natural do mesmo lugar que", no conjunto de tôdas as crianças nascidas no Hospital Municipal. Devemos ter:
(i) a é natural do mesmo lugar que a.
(ii) Se a é natural do mesmo lugar que b, então b é natural do mesmo lugar que a.

(iii) Se a é natural do mesmo lugar que b e b é natural do mesmo lugar que c, então a é natural do mesmo lugar que c.

Como tôdas estas afirmações são verdadeiras, dizemos que a relação é uma relação de equivalência.

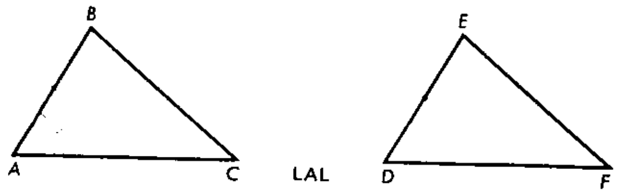
(a) Mostre que congruência para triângulos é uma relação de equivalência. Você deve explicar por que cada uma das três afirmações é verdadeira. Você pode usar, na demonstração, o Problema 17, acima.

(b) Escolha um conjunto apropriado para cada uma das seguintes relações e determine, então, quais são as relações de equivalência:
"é menor que", "é igual a", "é o inverso de", "é companheiro de classe de", "é residente na mesma cidade que", "é mais alto que", "anda mais rápido que", "está tão úmido quanto".

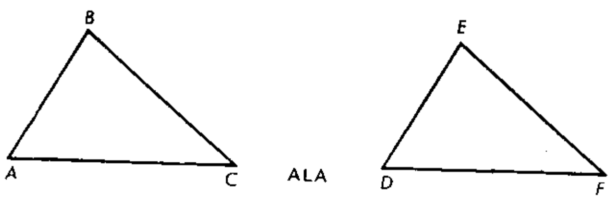
3-3. OS POSTULADOS DE CONGRUÊNCIA PARA TRIÂNGULOS

Como você, sem dúvida, já descobriu sòzinho, há pelos menos três situações nas quais podemos concluir que uma correspondência entre dois triângulos é uma congruência.

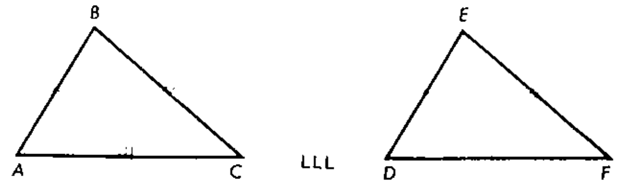
No primeiro caso, $ABC \leftrightarrow DEF$ é chamada uma *correspondência LAL*; com isto, queremos dizer que dois lados e o ângulo determinado por êles, do primeiro triângulo, são congruentes aos elementos correspondentes do segundo. ("LAL" representa "Lado Ângulo Lado".) Neste caso, segue-se que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.



No segundo caso, $ABC \leftrightarrow DEF$ é chamada uma *correspondência ALA*; com isto, queremos dizer que dois ângulos e o lado determinado por êles, no primeiro triângulo, são congruentes aos elementos correspondentes do segundo. ("ALA" representa "Ângulo Lado Ângulo".) Neste caso, segue-se que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.



Finalmente, no terceiro caso, $ABC \leftrightarrow DEF$ é chamada uma *correspondência* LLL; com isto, queremos dizer que todos os três lados do primeiro triângulo são congruentes aos lados correspondentes do segundo. ("LLL" representa "Lado Lado Lado".) Aqui, devemos ter $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.



Oficializaremos estas observações nos seguintes postulados.

POSTULADO 15. O Postulado LAL.

Tôda correspondência LAL é uma congruência.

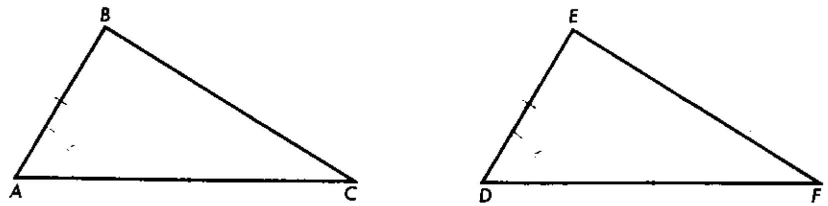
POSTULADO 16. O Postulado ALA.

Tôda correspondência ALA é uma congruência.

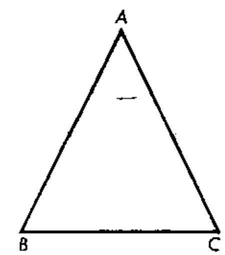
POSTULADO 17. O Postulado LLL.

Tôda correspondência LLL é uma congruência.

Em muitos casos, aplicaremos êstes postulados a correspondências entre dois triângulos diferentes. Já vimos, entretanto, que, em algumas situações, podemos estabelecer uma correspondência de um triângulo sôbre si próprio; e todos os três postulados acima se aplicam a tais casos. Assim uma correspondência LAL pode ser ilustrada da seguinte forma:

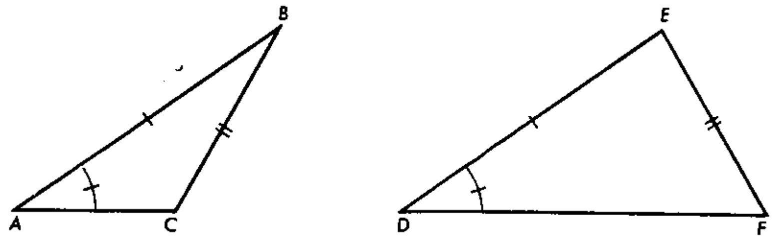


ou, possivelmente, como a figura à direita. Aqui os símbolos nos dizem que $ABC \leftrightarrow ACB$ é uma correspondência LAL. Podemos, então, aplicar o Postulado LAL e concluir que $\Delta ABC \cong \Delta ACB$



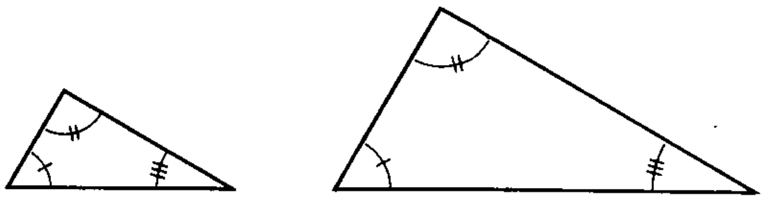
$\triangle ABC \cong \triangle ACB$.

Cuidado: Não existe o Postulado LLA!



Na figura, $ABC \leftrightarrow DEF$ é uma "correspondência LLA"; dois lados e um ângulo *não*-determinado por êles, do ΔABC, são congruentes aos elementos correspondentes de ΔDEF. Mas a correspondência, òbviamente, não é uma congruência, de fato, $\overline{DF}$ é muito maior que $\overline{AC}$, $\angle E$ é maior que $\angle B$ e $\angle F$ é muito menor que $\angle C$.

Evidentemente, se os ângulos correspondentes são congruentes, segue-se simplesmente que os dois triângulos têm a mesma *forma;* não têm, necessàriamente, o mesmo tamanho.



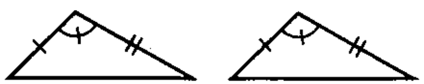
Triângulos relacionados desta forma são chamados *semelhantes.*

Daqui para frente, de modo abreviado, referir-nos-emos aos nossos três postulados de congruência simplesmente como LAL, ALA e LLL.

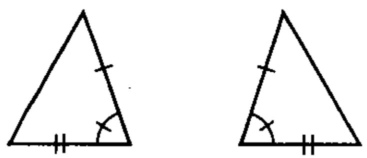
Problemas 5-3

1. Se, em cada par de triângulos esboçados abaixo, marcas semelhantes indicam partes congruentes, que triângulos são congruentes pelo Postulado LAL?

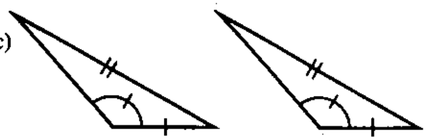
(a)



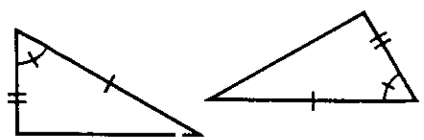
(b)



(c)

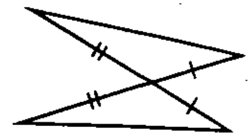


(d)

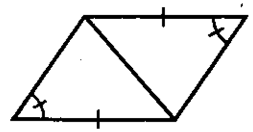


(e)

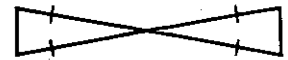
(f)



(g)

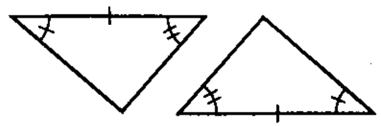


(h)

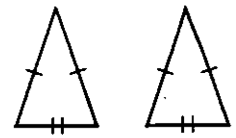


2. Se, em cada par de triângulos esboçados abaixo, marcas semelhantes indicam partes congruentes, indique os postulados (LAL, ALA, LLL), se fôr o caso, que provam que os triângulos são congruentes.

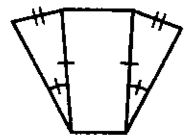
(a)



(b)

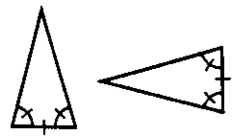


(c)

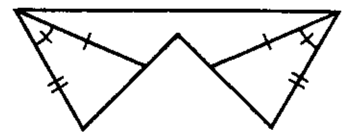


(d)

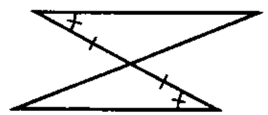
(e)



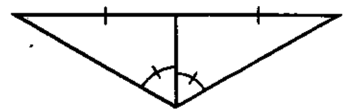
(f)



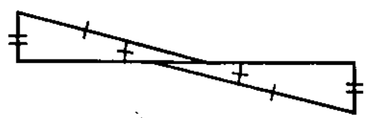
(g)



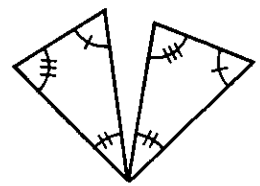
(h)



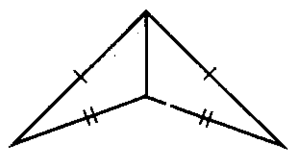
(i)



(j)



(k)



(l)

5-4. INVENTANDO SUAS PRÓPRIAS DEMONSTRAÇÕES

Você, a estas alturas, tem material básico suficiente para escrever suas próprias demonstrações geométricas. Daqui para frente, escrever suas próprias demonstrações será uma parte muito importante de seu trabalho, e as chances são de que será muito mais divertido que ler demonstrações de outras pessoas.

Tomemos um par de exemplos, para sugerir como procedemos para descobrir e escrever as demonstrações.

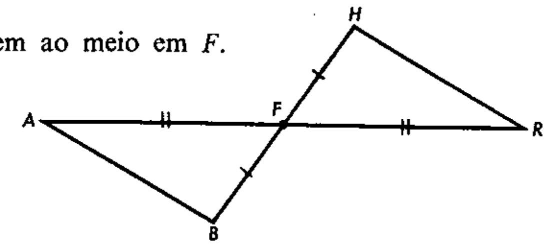
Exemplo 1

Se dois segmentos se dividem mùtuamente ao meio, então os segmentos que ligam as extremidades dos segmentos dados são congruentes.

Para começar a trabalhar num problema como êste, devemos, primeiramente, fazer uma figura e dar nomes aos vértices, usando letras maiúsculas. Estabelecemos, então, as hipóteses e as conclusões em têrmos das letras da figura.

Dados: $\overline{AR}$ e $\overline{BH}$ se dividem ao meio em F.

Demonstrar: $\overline{AB} \cong \overline{RH}$.



Indique, com símbolos na figura, as congruências que são dadas.

Depois, divida a página em duas colunas, do modo usual, e escreva no tôpo das mesmas "AFIRMAÇÕES" e "JUSTIFICAÇÕES".

Tudo isto, evidentemente, não nos servirá para nada se não tivermos imaginado uma demonstração para escrever.

Como nosso objetivo é demonstrar que dois segmentos são congruentes, devemos recordar o que sabemos sôbre segmentos congruentes. Os símbolos na figura indicam que $\overline{FB} \cong \overline{FH}$ e isto está correto, pela definição de ponto médio. Pela mesma razão, $\overline{AF} \cong \overline{RF}$. Se quisermos mostrar que $\overline{AB} \cong \overline{RH}$, nossa melhor chance é mostrar que êles são partes correspondentes de triângulos congruentes. Para fazer isto, devemos estabelecer uma correspondência entre os triângulos da figura e, então, mostrar que temos uma correspondência LAL, uma correspondência ALA ou uma correspondência LLL. A partir da figura, tudo se passa como se a correspondência devesse ser

$$AFB \leftrightarrow RFH.$$

Dois pares de lados são congruentes porque

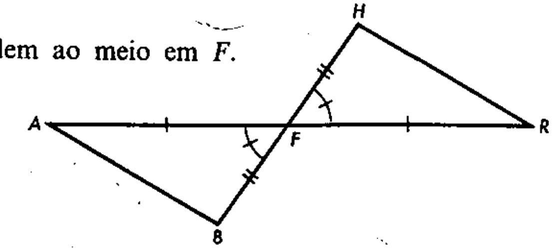
$$\overline{AF} \cong \overline{RF} \quad \text{e} \quad \overline{FB} \cong \overline{FH}.$$

E os ângulos determinados? Se êles forem congruentes, também, então podemos aplicar o Postulado LAL. Mas êles *são* congruentes porque são ângulos opostos pelo vértice. Portanto, pelo Postulado LAL, nossa correspondência é uma congruência. $\overline{AB}$ e $\overline{RH}$ são lados correspondentes e, portanto, são congruentes. Isto é o que queríamos demonstrar.

Escrita em forma de coluna dupla, nossa demonstração ficaria assim:

Dados: $\overline{AR}$ e $\overline{BH}$ se dividem ao meio em F.

Demonstrar: $\overline{AB} \cong \overline{RH}$



Demonstração

Afirmações	*Justificações*
1. $\overline{AR}$ e $\overline{BH}$ se dividem ao meio.	Dado.
2. $AF = RF$.	Definição de "dividir ao meio."
3. $FB = FH$.	Definição de "dividir ao meio".
4. $\angle AFB \cong \angle RFH$.	Ângulos opostos pelo vértice são congruentes.
5. $\Delta AFB \cong \Delta RFH$.	Postulado LAL.
6. $\overline{AB} \cong \overline{RH}$.	Definição de congruência entre triângulos.

A demonstração é dada, simplesmente, como um modêlo de como seu trabalho deve ficar. Há um limite de quão padronizada podemos esperar que a forma de uma demonstração seja. Por exemplo, nas passagens 2 e 3 indicamos as congruências entre segmentos escrevendo

$$AF = RF \quad \text{e} \quad FB = FH.$$

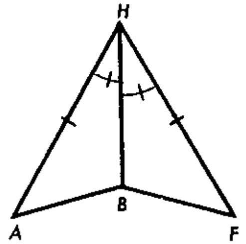
Poderíamos, igualmente bem, ter escrito

$$\overline{AF} \cong \overline{RF} \quad \text{e} \quad \overline{FB} \cong \overline{FH},$$

porque, em cada caso, a congruência entre os segmentos e a igualdade entre seus comprimentos têm o mesmo significado.

Temos, também, uma grande margem de escolha ao decidir quantos detalhes dar em uma demonstração. Conforme seu conhecimento e sua destreza crescerem, você poderá escrever demonstrações com menos detalhes. Seu professor é o melhor juiz de quando você terá adquirido o direito de proceder assim e de quando você pode omitir.

Agora, você já deve ter a idéia e, assim, damos o segundo exemplo numa forma incompleta. Seu problema é copiar o que segue, em seu caderno, e preencher os espaços em branco, de tal modo a obter uma demonstração.



Exemplo 2

Dados: $\overline{AH} \cong \overline{FH}$. $\angle AHB \cong \angle FHB$.

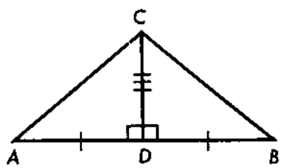
Demonstrar: $\angle A \cong \angle F$.

Demonstração

Afirmações	*Justificações*
1. $\overline{AH} \cong \overline{FH}$.	Dado.
2. $\angle AHB \cong \angle FHB$.	....
3. $\overline{HB} \cong \overline{HB}$.	Todo segmento é congruente a si próprio.
4. $\Delta AHB \cong \Delta$.........	....
5. $\angle A \cong \angle F$.	....

Problemas 5-4A

1. Copie êste problema em seu caderno e complete as informações que faltam.



Dados: A figura ao lado com

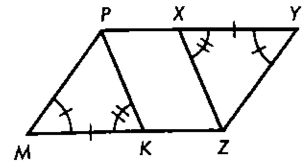
$\overline{CD} \perp \overline{AB}$ e $\overline{AD} \cong \overline{BD}$.

Demostre que: $\Delta ADC \cong \Delta BDC$.

Demonstração

Afirmações	*Justificações*
1. $\overline{AD} \cong \overline{BD}$.	Dado.
2. $\overline{CD} \perp \overline{AB}$.	....
3. $\angle ADC \cong \angle BDC$.	Definições de perpendiculares e ângulo reto.
4. $\overline{CD} \cong \overline{CD}$.	Identidade. (Todo segmento é congruente a si próprio.)
5. $\Delta ADC \cong$	....

2. Copie êste problema em seu caderno e complete as informações que faltam.



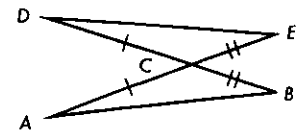
Dados: ΔMKP e ΔXYZ são tais que $\angle M \cong \angle Y$, $\angle MKP \cong \angle YXZ$, e $MK = XY$.

Demonstre que: $\overline{PK} \cong \overline{ZX}$.

Demonstração

Afirmações	*Justificações*
1. $\angle M \cong \angle Y$. $MK = XY$. $\angle MKP \cong \angle YXZ$.	....
2. $\Delta MKP \cong$	....
3. .... $\cong$	Partes correspondentes de triângulos congruentes são congruentes (pela definição de congruência entre triângulos).

3. Na figura, $\overline{AE}$ intersepta $\overline{BD}$ em C de modo que $AC = DC$ e $BC = EC$. Mostre que $\angle A \cong \angle D$, copiando a demonstração seguinte e completando as informações que faltam.

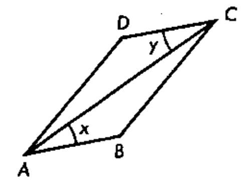


Demonstração

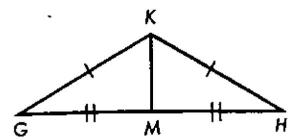
Afirmações	*Justificações*
1. $AC = DC$.	Dado.
2. $\angle ACB \cong \angle DCE$.	....
3. $BC = EC$.	....
4. $\Delta ACB \cong \Delta DCE$.	....
5. $\angle A \cong \angle D$.	Partes correspondentes de triângulos congruentes são congruentes.

[*Nota:* Ainda que as afirmações 2 e 4 pareçam muito semelhantes, uma trata de ângulos e outra de triângulos. Considere êste fato ao escrever as justificações 2 e 4.]

4. Na figura, $AB = CD$ e $m\angle x = m\angle y$. Demonstre que $m\angle ACB = m\angle DAC$.

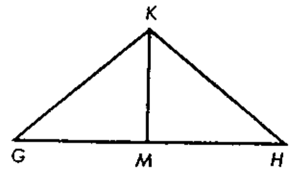


5. Copie o problema e complete a demonstração. Demonstre que, se $GK = HK$, na figura, e M é o ponto médio de $\overline{GH}$, então $\angle G \cong \angle H$.



Demonstração

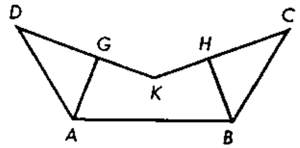
Afirmações	Justificações
1. $GK = HK$.	....
2. M é o ponto médio de $\overline{GH}$.	Dado.
3.	Definição de ponto médio.
4.	Identidade.
5. $GMK \cong HMK$.	....
6.	....



6. Demonstre que se no ΔGHK, $GK = HK$ e G-M-H tal que $\angle GKM \cong \angle HKM$, então M é o ponto médio de $\overline{GH}$.

7. Demonstre que se os segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{DF}$ se dividem ao meio em P, então $\Delta PDA \cong \Delta PFE$. (Aqui, você deve construir a figura.)

8. Dados: Um segmento $\overline{RS}$ e os pontos T e U em lados opostos de $\overleftrightarrow{RS}$ tais que $TR = UR$, $TS = US$, e $UR < US$.
Demonstre: $m\angle T = m\angle U$.



9. Dados: $DG = CH$, $\angle D \cong \angle C$,

$\overline{AG} \perp \overline{DK}$, $\overline{BH} \perp \overline{CK}$.

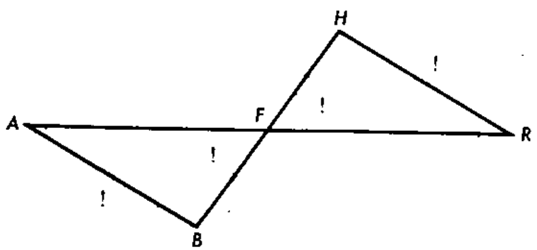
Demonstre: $AD = BC$.

10. Dados: Os pontos A, C, D e E são colineares, com A-E-D e A-D-C. B é um ponto fora de $\overleftrightarrow{AC}$ tal que $AB = CB$, $EB = DB$ e $AE = CD$.
Demonstre: $\angle ABE \cong \angle DBC$.

11. Suponha que $\overline{BQ}$ divida $\overline{PA}$ ao meio em R, mas que $BQ \neq PA$. B e Q estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{PA}$. S e C são pontos em $\overline{PR}$ e $\overline{AR}$, respectivamente, tais que $RS = RC$, $\overline{BC} \perp \overline{PA}$ e $\overline{QS} \perp \overline{PA}$. Tem-se, também, que $\angle BAR \cong \angle QPR$. Demonstre que $\overline{PA}$ divide $\overline{BQ}$ ao meio e que $\angle ABC \cong \angle PQS$.

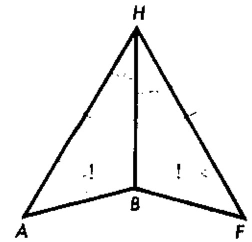
12. Suponha que $\angle HRE$ seja tal que $RH = RE$. Os pontos M e K estão sôbre os lados de $\angle HRE$ de tal modo que R-H-M e R-E-K. $\overline{EM}$ e $\overline{HK}$ se interseptam em T, com $\angle HRT \cong \angle ERT$. Demonstre que $\Delta MTH \cong \Delta KTE$.

Depois que você terminou uma demonstração, muitas vêzes achará que pode tornar a figura mais instrutiva colocando-lhe mais símbolos.

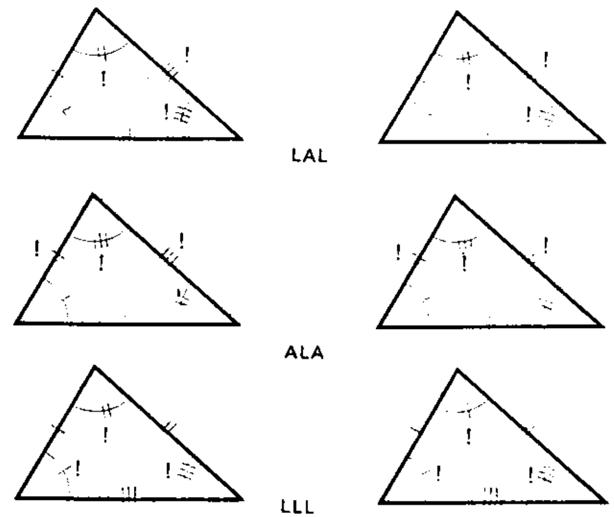


A figura anterior ilustra o Exemplo 1 com sua demonstração. Os símbolos sôbre $\overline{AF}$ e $\overline{FR}$ indicam que a congruência $\overline{AF} \cong \overline{FR}$ foi *dada*. Os símbolos em $\overline{FH}$ e $\overline{FB}$ indicam que $\overline{FH} \cong \overline{FB}$ foi *dada*. Os símbolos sôbre $\angle AFB$ e $\angle RFH$, com pontos de exclamação, indicam que a congruência $\angle AFB \cong \angle RFH$ foi *demonstrada*. Os símbolos sôbre $\overline{AB}$ e $\overline{RH}$ indicam que $\overline{AB} \cong \overline{RH}$ foi *demonstrada*.

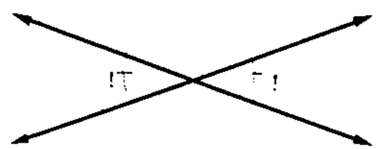
Da mesma forma, os símbolos na figura à direita nos contam o que foi dado e o que foi demonstrado no Exemplo 2.

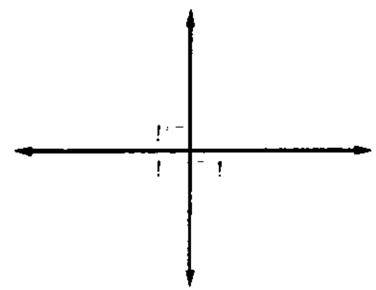


Nossos três postulados de congruência LAL, ALA e LLL, justificam, da mesma forma, todos os pontos de exclamação nas figuras abaixo.



De modo geral, é uma boa idéia colocar símbolos nas figuras, de tal maneira que elas forneçam tanto informação quanto possível. Muitas vêzes, podemos fazer uma figura que é um retrato completo de um teorema. Por exemplo, as figuras seguintes retratam teoremas que aparecem no Cap. 4. Que teoremas são êles?





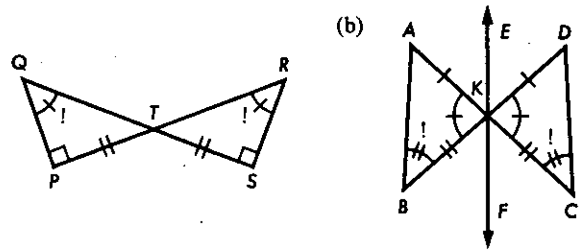
Um êrro muitas vêzes cometido nas demonstrações é que o estudante *assume* como verdadeiro exatamente aquilo que está tentando *demonstrar*. Um outro êrro comum é usar como premissa numa demonstração um teorema que é, efetivamente, uma *conseqüência* daquilo que se está tentando demonstrar. Tais argumentos são chamados circulares e não têm valor como demonstrações lógicas.

Uma espécie particularmente perniciosa de argumento circular é o uso do teorema que estamos demonstrando como argumento para uma das passagens de sua "demonstração".

Problemas 5-4B

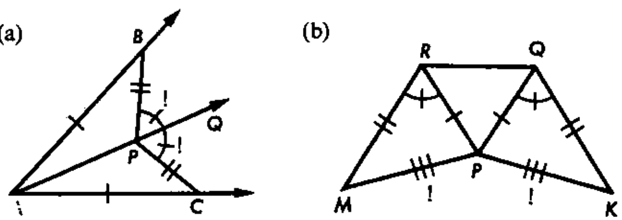
1. Cada figura está assinalada de modo a especificar as hipóteses e a conclusão. Escreva os "dados" e o "demonstre" para cada figura.

(a) (b)

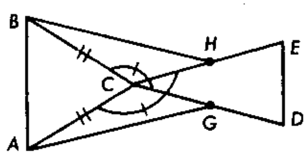


2. Siga as instruções do Problema 1 para as figuras dadas abaixo.

(a) (b)



3. Copie o problema e complete a demonstração. Dados: a figura com $AC = BC$, $DC = EC$, G ponto médio de $\overline{DC}$, H ponto médio de $\overline{EC}$, $\angle ACE \cong$ $\cong \angle BCD$. Demonstre que $AG = BH$.



Demonstração

Afirmações	*Justificações*
1. $AC = BC$.	....
2. $DC = EC$.	....
G é o ponto médio de $\overline{DC}$ ...... é	
3. $DG = GC = \frac{1}{2}DC$.	Definição de ponto médio.

Demonstração

Afirmações	*Justificações*
4. $EH = HC = \frac{1}{2}EC$.	....
5. $GC = HC$.	Passagens 2, 3 e 4 e substituição.
6. $m\angle ACE = m\angle BCD$.	Hipótese e definição de ângulos congruentes.
7. $m\angle ACG + m\angle GCH =$ $m\angle BCH + m\angle GCH$.	Postulado da Adição de Ângulos e .... na passagem 6.
8. $m\angle GCH = m\angle GCH$.	....
9. $m\angle ACG = m\angle BCH$.	Princípio da Subtração numa Igualdade.
10. $\Delta AGC \cong \Delta BHC$.	Passagens 1, 5 e 9 e o Postulado ....
11. $AG = BH$.	....

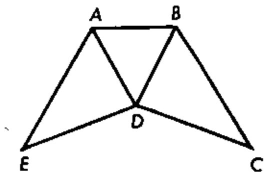
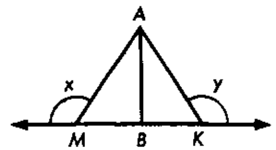


Figura para os Problemas 4, 5, 6, 7

4. Se, na figura, $AE = BC$, $AD = BD$ e $DE = DC$, demonstre que $\angle E \cong \angle C$.
5. Se, na figura, $AE = BC$, $AD = BD$ e $\angle EAD \cong$ $\angle CBD$, demonstre que $\angle BDE \cong ADC$.
6. Se, na figura, $AE = BC$, $AD = BD$ e $\angle E \cong \angle C$, pode você demonstrar que $ED = CD$? Se puder, faça-o. Se não puder, explique porque.

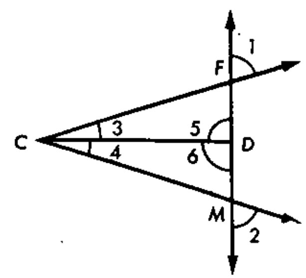
* 7. Se, na figura, $\angle E \cong \angle C$, $ED = CD$ e $\angle BDE \cong \angle ADC$, pode você demonstrar que $AE = BC$? Se puder, faça-o. Se não puder, explique porque.

8. Dados: A figura com $\overline{AB} \perp \overleftrightarrow{MK}$ e B o ponto médio de $\overline{MK}$.
Demonstre: $\angle x \cong \angle y$.



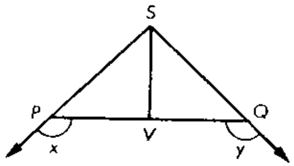
9. Suponha que a semi-reta $\overrightarrow{AE}$ divida $\overline{BK}$ ao meio em R, de tal modo que $AB = AK$. Demonstre que $\overrightarrow{AE} \perp \overline{BK}$.

10. Na figura, $CF = CM$, $\angle 1 \cong \angle 2$ e $\angle 3 \cong \angle 4$. Demonstre que $\angle 5 \cong \angle 6$.



11. Suponha que $\overline{PQ}$ e $\overline{RS}$ se interceptam em T, com P-T-Q e R-T-S, de tal forma que $RT = QT$, $\overline{PR} \perp \overline{RS}$ e $\overline{SQ} \perp \overline{PQ}$. Demonstre que $\angle P \cong \angle S$.

12. Demonstre que se, na figura, $PS = QS$, $PV = QV$ e $\angle x = \angle y$, então $\overline{SV} \perp \overline{PQ}$.



13. Se, na figura, $AB = CB$, $\angle MAE \cong \angle NCD$ e $AE = CD$, demonstre que $\Delta ABE \cong \Delta CBD$.

14. Se, na figura, $\angle EAB \cong \angle DCB$, $\angle EBA \cong \angle DBC$ e $\angle E \cong \angle D$, pode você demonstrar que $\Delta ABE \cong \Delta CBD$? Explique.

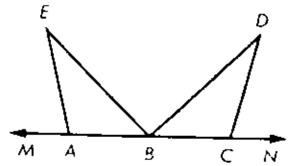
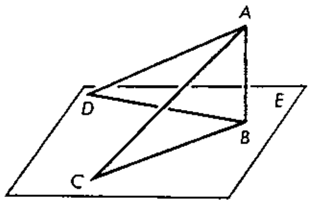
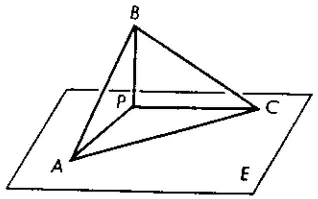


Figura para os Problemas 13, 14, 15

15. Se, na figura, $AB = CB$, $m\angle MAE = m\angle NCD$ e $m\angle ABD = m\angle CBE$, é possível demonstrar que $BE = BD$? Se a resposta fôr "sim", dê a demonstração.

16. Na figura à esquerda, abaixo, os pontos A, B, C e D são não-colineares, com B, C e D no plano E. Se $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{AB} \perp \overline{BD}$ e $BC = BD$, mostre que $AC = AD$.

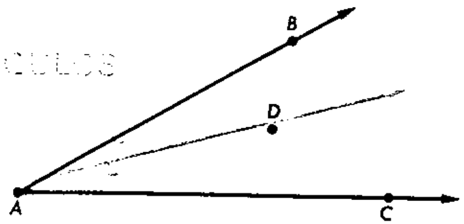




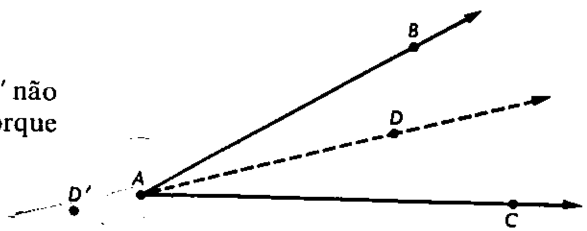
17. Se, na figura à direita, acima, $\angle ABP \cong \angle CBP$, $\overline{BP} \perp \overline{AP}$ e $\overline{BP} \perp \overline{CP}$, demonstre que $AB = CB$.

5-5. BISSETRIZES DE ÂNGULOS

As marcas na figura à direita indicam que $\overrightarrow{AD}$ *divide* $\angle BAC$ *ao meio.*



Na próxima figura, $\overrightarrow{AD'}$ não divide $\angle BAC$ ao meio porque "indica a direção errada".



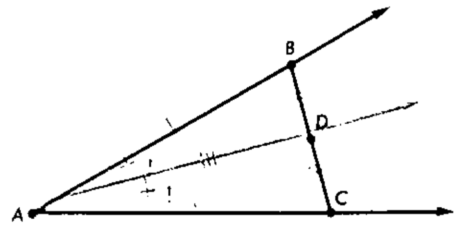
Assim, chegamos à seguinte definição.

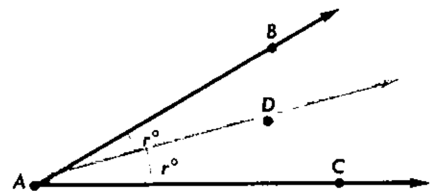
Se D está no interior de $\angle BAC$ e $\angle BAD \cong \angle DAC$, então $\overrightarrow{AD}$ *divide* $\angle BAC$ *ao meio* e $\overrightarrow{AD}$ é chamada *bissetriz* de $\angle BAC$.

Teorema 5-2

Todo ângulo possui exatamente uma bissetriz.

Demonstração. (1) Na figura à esquerda abaixo, escolha B e C, sôbre os lados de $\angle A$, de modo que $AB = AC$. Seja D o ponto médio de $\overline{BC}$. Então $ADB \leftrightarrow ADC$ é uma correspondência LLL. Pelo Postulado LLL, $\Delta ADB \cong$ $\cong \Delta ADC$. Portanto $\angle BAD \cong \angle CAD$, porque êstes são ângulos correspondentes. Assim, $\angle A$ tem uma bissetriz.



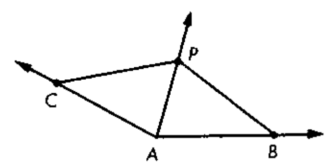


(2) Suponha que $\overrightarrow{AD}$ divida $\angle BAC$ ao meio como é visto à direita, na figura acima. Seja $r = m\angle DAC$. Então $r = m\angle DAB$, porque êstes ângulos são congruentes. Pelo Postulado 13, $r + r = m\angle BAC$ e, assim, $r = \frac{1}{2}m\angle BAC$. Mas também sabemos que D está no mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$ que B. (Por quê?) Pelo Postulado da Construção de um Ângulo, existe apenas uma semi-reta que "está no lado certo de $\overleftrightarrow{AC}$" e "que dá um ângulo com a medida correta".

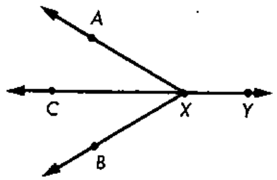
Problemas 5-5

1. Verifique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas e explique suas respostas.
(a) A bissetriz de um ângulo está inteiramente contida no interior do ângulo.
(b) A bissetriz de um ângulo forma dois ângulos agudos com os lados do ângulo.

2. Dados: $\overrightarrow{AP}$ divide $\angle BAC$ ao meio e $AC = AB$. Demonstre que $PC = PB$.

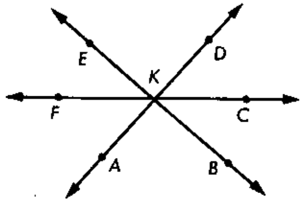


3. Os pontos A e B estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{CY}$, C está no interior de $\angle AXB$ e C-X-Y. Se $\angle AXY \cong \angle BXY$, demonstre que $\overrightarrow{XC}$ divide $\angle AXB$ ao meio.



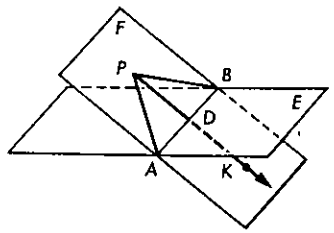
4. Dados dois ângulos que formam um par linear, demonstre que suas bissetrizes são perpendiculares.

5. Dados: $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BE}$ e $\overleftrightarrow{CF}$ se interceptam em K e $\overrightarrow{KC}$ é bissetriz de $\angle DKB$. Demonstre: $\overrightarrow{KF}$ é bissetriz de $\angle AKE$.

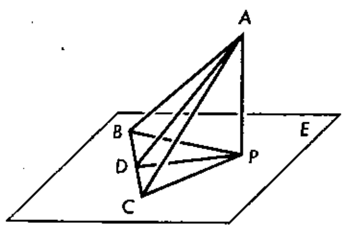


* 6. $\overleftrightarrow{MN}$ e $\overleftrightarrow{PQ}$ se interceptam em O, com M-O-N e P-O-Q. S e T são pontos no interior de $\angle QON$ tais que $\angle TOQ \cong \angle TON$ e $\angle SOQ \cong \angle SON$. $\overrightarrow{OR}$ é bissetriz de $\angle POM$. Demonstre que R, S e T são colineares.

7. Na figura, os planos E e F se interceptam em $\overleftrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{PK}$ está no plano F e intercepta $\overleftrightarrow{AB}$ em D. $PA = PB$, $\angle PAB \cong \angle PBA$ e D é o ponto médio de $\overline{AB}$. Demonstre que $\overrightarrow{PK}$ é bissetriz de $\angle APB$.



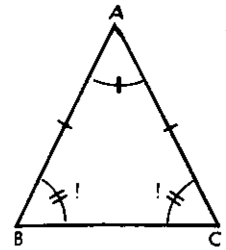
* 8. Na figura, P, B, D e C são pontos no plano E e A é um ponto fora de E. ΔABC e ΔPBC são isósceles, com $AB = AC$ e $PB = PC$, respectivamente. Se $\overrightarrow{AD}$ é bissetriz de $\angle BAC$, demonstre que $\overrightarrow{PD}$ é bissetriz de $\angle BPC$.



5-6. TRIÂNGULOS ISÓSCELES E EQUILÁTEROS

Na parte final da Seção 5-1, mencionamos um caso de correspondência entre os vértices de um triângulo ΔABC no qual pelo menos dois lados do triângulo são do mesmo comprimento. Êste, de fato, é o caso que tratamos em nosso primeiro teorema sôbre congruência.

Teorema 5-3. O Teorema do Triângulo Isósceles



Se dois lados de um triângulo são congruentes, então os ângulos opostos a êstes lados são congruentes.

Re-enunciado: Dado o triângulo ΔABC, se $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, então $\angle B \cong \angle C$.

Demonstração. Considere a correspondência

$$ABC \leftrightarrow ACB$$

entre ΔABC e si próprio. Sob esta correspondência, vemos que

$$\overline{AB} \leftrightarrow \overline{AC},$$
$$\overline{AC} \leftrightarrow \overline{AB},$$
$$\angle A \leftrightarrow \angle A.$$

Como se trata de uma correspondência LAL, segue-se pelo Postulado LAL que

$$\Delta ABC \cong \Delta ACB,$$

isto é, a correspondência $ABC \leftrightarrow ACB$ é uma congruência. Pela definição de congruência entre triângulos, todos os pares de partes correspondentes são congruentes. Portanto, $\angle B \cong \angle C$ porque êstes ângulos são elementos correspondentes.

Sabemos, agora, como a demonstração acima ficaria na forma de colunas. Os mesmos enunciados e a mesma figura serão usados.

Demonstração

Afirmações	*Justificações*
1. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. $\overline{AC} \cong \overline{AB}$.	Dado.
2. $\angle A \cong \angle A$.	Congruência identidade.
3. $\Delta ABC \cong \Delta ACB$.	Passagens 1 e 2 e LAL.
4. $\angle B \cong \angle C$.	Definição de congruência entre triângulos.

Definições

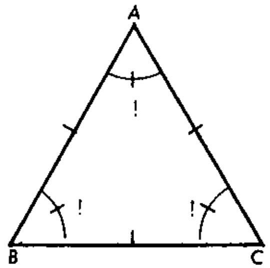
Um triângulo com dois lados congruentes é chamado *isósceles;* o outro lado é chamado *base*. Os dois ângulos que determinam a base são chamados *ângulos da base*. O ângulo oposto à base é chamado *ângulo do vértice*. Nestes têrmos, podemos enunciar o Teorema 5-3 na seguinte forma: "Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes".

Definições

Um triângulo cujos três lados são congruentes é chamado *equilátero*.
Um triângulo no qual dois lados quaisquer não são congruentes é chamado *escaleno*.
Um triângulo é chamado *equiângulo* se os seus três ângulos são congruentes.

Usando os têrmos *equilátero* e *equiângulo*, enunciamos um teorema que segue imediatamente do Teorema 5-3. Denotaremos êste teorema por Corolário 5-3.1. Um *corolário* é um teorema que é uma conseqüência imediata de um outro teorema.

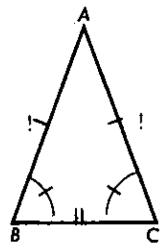
Corolário 5-3.1



Todo triângulo equilátero é equiângulo.

Reenunciado: Dado o triângulo ΔABC, se $BC = AC = AB$, então $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$.
Para demonstrar isto, aplicamos o Teorema 5-3 duas vêzes. Os detalhes são deixados para você.
O teorema seguinte pode se assemelhar ao teorema 5-3, mas, na verdade, é diferente. Uma olhada nos reenunciados mostra isto claramente. Note também a diferença nos símbolos nas figuras.

Teorema 5-4



Se dois ângulos de um triângulo são congruentes, então os lados opostos a êstes ângulos são congruentes.

Reenunciado: Dado o triângulo ΔABC, se $\angle B \cong \angle C$, então $AB = AC$.

Demonstração. Como $\angle B \cong \angle C$, $\overline{BC} \cong \overline{CB}$, e $\angle C \cong \angle B$, a correspondência

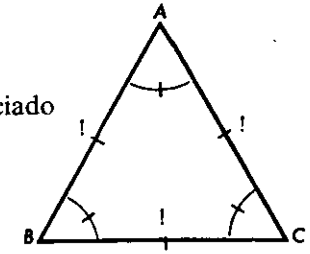
$$ABC \leftrightarrow ACB$$

é uma correspondência ALA. Portanto é uma congruência e

$$\Delta ABC \cong \Delta ACB.$$

Logo, $AB = AC$, porque lados correspondentes são congruentes.

Corolário 5-4.1

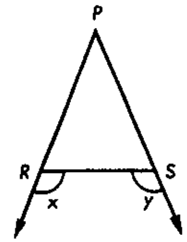


Todo triângulo equiângulo é equilátero.

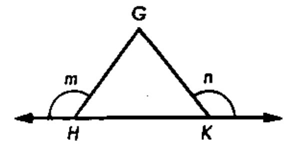
Você deve ser capaz de escrever um reenunciado e uma demonstração.

Problemas 5-6

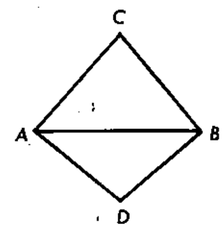
1. Selecione a expressão que complete corretamente cada sentença.
   (a) Uma bissetriz de um ângulo é
   (i) um segmento. (ii) uma semi-reta. (iii) um plano.
   (b) Um triângulo equilátero é
   (i) isósceles. (ii) escaleno. (iii) não isósceles.
   (c) Um corolário é
   (i) um teorema. (ii) uma definição. (iii) um postulado.
   (d) Se dois ângulos de um triângulo são congruentes, podemos concluir que êle tem dois lados congruentes, de acôrdo com
   (i) uma definição. (ii) um corolário (iii) um teorema.



2. Na figura, ΔPRS é isósceles com $PR = PS$. Demonstre que $\angle x \cong \angle y$.



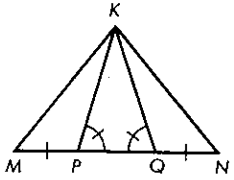
3. Se, na figura, $\angle m \cong \angle n$, demonstre que ΔGHK é isósceles.



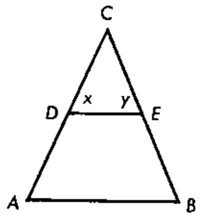
4. Dados: A figura plana $ADBC$ com $AD = BD$ e $AC = BC$.
   Demonstre: $\angle CAD \cong \angle CBD$.

Figura para os Problemas 4, 5, 6

5. Dados: A figura plana $ADBC$ com $AC = BC$ e $\angle CAD \cong \angle CBD$.
Demonstre: $AD = BD$.
6. Nos Problemas 4 e 5, era necessário que a hipótese especificasse que a figura é plana? Explique.
7. Demonstre o Corolário 5-4.1:
Todo triângulo equiângulo é equilátero.
8. Dada a figura assinalada ao lado, demonstre que ΔMNK é isósceles.



9. Dado que no triângulo ΔABC a correspondência $ABC \leftrightarrow ACB$ é uma congruência, podemos concluir que ΔABC é
(a) escaleno. (b) isósceles. (c) equilátero.
10. Dado que no triângulo ΔABC a correspondência $ABC \leftrightarrow CAB$ é uma congruência, ΔABC é
(a) escaleno. (b) isósceles. (c) equilátero.
11. Demonstre: A bissetriz do ângulo oposto à base de um triângulo isósceles divide a base ao meio e é perpendicular a ela.



12. Na figura, $AC = BC$, $\angle A \cong \angle y$ e $\angle B \cong \angle x$.
Demonstre que ΔCDE é isósceles.

* 13. Em um plano, os pontos C e D estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{AB}$ de tal modo que ΔABC é um triângulo equilátero e ΔABD é um triângulo equiângulo. Demonstre que $\angle C \cong \angle D$.
14. Sendo dados que, na figura, $\overline{PQ} \perp \overline{MQ}$, $\overline{PQ} \perp \overline{NQ}$ e $MQ = NQ$, demonstre que ΔMNP é isósceles.
15. Se, na figura, $\angle PMN \cong \angle PNM$ e $\angle MPQ \cong \angle NPQ$, demonstre que $\angle PMQ \cong \angle PNQ$.

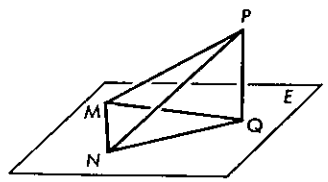
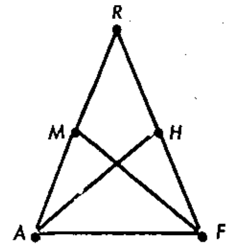


Figura para os Problemas 14 e 15

5-7. SUPERPOSIÇÃO DE TRIÂNGULOS. O USO DE FIGURAS PARA TRANSMITIR INFORMAÇÕES

Freqüentemente, nas figuras geométricas, os triângulos com os quais precisamos trabalhar não estão inteiramente separados, mas superpostos, como ΔAFM e ΔFAH na figura a seguir



Para evitar enganos e confusões nestes casos, é muito importante escrever corretamente nossas congruências:

$$\Delta AFM \cong \Delta FAH.$$

Verificamos que a correspondência $AFM \leftrightarrow FAH$ é, de fato, uma congruência e, voltamos a nos referir à congruência $\Delta AFM \cong \Delta FAH$ sempre que quisermos concluir que dois lados (ou ângulos) correspondentes são congruentes. Olhando apenas para a congruência $\Delta AFM \cong \Delta FAH$ e *não* para a figura, sabemos que

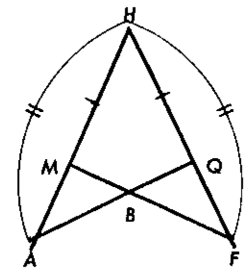
$$AF = FA, \qquad FM = AH, \qquad AM = FH$$

porque êstes são lados correspondentes, pela correspondência

Êsse modo de proceder é muito mais digno de confiança que entortar a cabeça para olhar uma figura de lado, com a esperança de evitar confusão.

Consideremos, agora, uma situação em que êste problema surge na demonstração de um teorema.

Dados: $HA = HF$; $HM = HQ$.
Demonstrar: $FM = AQ$.



Um processo muito comum de demonstrar que dois segmentos são congruentes é mostrar que os segmentos são lados correspondentes de triângulos congruentes. Se êste método puder ser usado com sucesso aqui, então devemos, primeiramente, achar os triângulos que contêm $\overline{FM}$ e $\overline{AQ}$. Êstes são ΔHMF e ΔHQA e êstes triângulos estão superpostos. Neste ponto, o problema se reduz a demonstrar que os triângulos são, de fato, congruentes. A demonstração escrita na forma de colunas, é dada abaixo.

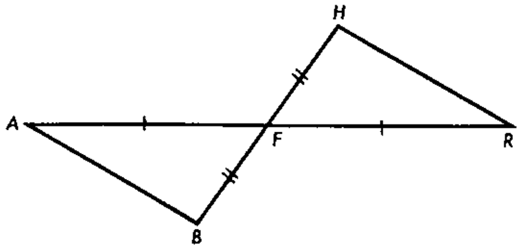
Demonstração

Afirmações	*Justificações*
1. $HA = HF$.	Dado.
2. $\angle H \cong \angle H$.	Um ângulo é congruente a si próprio.
3. $HM = HQ$.	Por quê?
4. $\Delta HMF \cong \Delta HQA$.	Por quê?
5. $FM = AQ$.	Por quê?

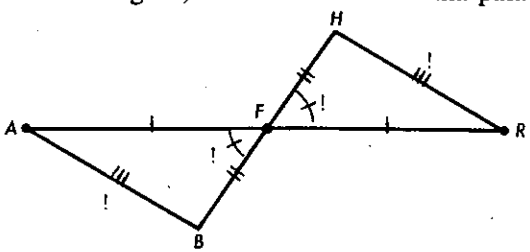
Uma demonstração estritamente lógica não deve depender de uma figura, mas deve seguir dos postulados, definições e teoremas prèviamente demonstrados. Mas os geômetras usam figuras de um modo muito livre, como uma abreviação para explicar como era o problema à primeira vista. Com êste espírito, enunciamos o Exemplo 1, no início da Seção 5-4 da seguinte maneira.

Dados: $\overline{AR}$ e $\overline{BH}$ dividem-se ao meio em F.

Demonstrar: $\overline{AB} \cong \overline{RH}$.



Explicamos, depois, que todo o teorema poderia ser transmitido através de marcas adicionais na figura, sem o uso de nenhuma palavra, assim:

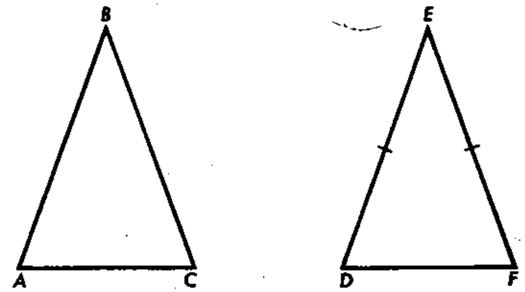


Para prosseguir sem usar nenhuma figura, teremos de reenunciar o Exemplo 1 na seguinte forma.

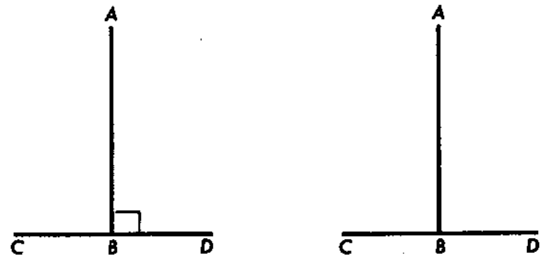
Exemplo 1

Sejam A, B, F, H e R cinco pontos não colineares situados em um mesmo plano. Se (1) F está entre A e R, (2) F está entre B e H, (3) $AF = FR$ e (4) $BF = FH$, então (5) $AB = RH$.

As duas primeiras afirmações do exemplo, usando figura, são certamente muito mais fáceis de se interpretar que a terceira e são igualmente corretas, uma vez que você tenha entendido como as figuras são usadas como uma escrita abreviada. Usaremos figuras para indicar a colinearidade de pontos, a ordem de pontos numa reta, a localização de pontos no interior de ângulos e, em geral, a posição relativa de pontos, retas e planos. Por outro lado, você não deve concluir que segmentos ou ângulos são congruentes simplesmente porque parecem ser. Para transmitir êste tipo de informação através de uma figura, temos de *assinalar* a figura do modo usual.



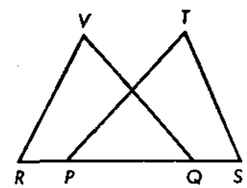
Por exemplo, a figura à direita nos conta que $\overline{DF} \cong \overline{EF}$, mas a figura da esquerda não nos diz que $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, mesmo que medições muito cuidadosas sugiram que êste deve ser o caso.



Da mesma forma, a figura à esquerda, acima, conta-nos que $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ mas a figura à direita, não.

Problemas 5-7

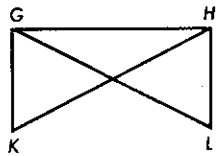
1. Na figura, $RV = ST$, $RQ = SP$ e $\angle VRQ \cong \angle TSP$. Complete a demonstração de que $QV = PT$.

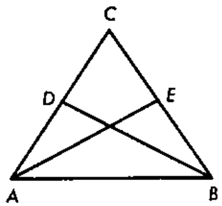


Demonstração

Afirmações	*Justificações*
1. $RV = ST.$	....
1. $\angle VRQ \cong \angle TSP.$	....
3.	Dado.
4. $\Delta RQV \cong$	....
5.	....

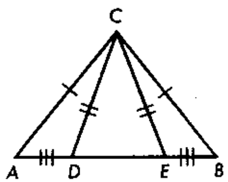
2. Se. na figura, $\overline{KG} \perp \overline{GH}$, $\overline{LH} \perp \overline{GH}$ e $\angle KHG \cong \angle LGH$, demonstre que $\overline{KH} \cong \overline{LG}$.





3. Dados $AC = BC$ e $\angle CAE \cong \angle CBD$, demonstre que $\Delta ACE \cong \Delta BCD$.

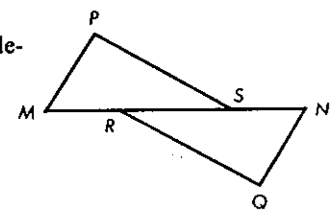
4. Na figura, $AC = BC$, $DC = EC$ e $AD = BE$. Complete a demonstração de que $\angle ACE \cong \angle BCD$.



Demonstração

Afirmações	*Justificações*
1. $AC = BC.$ $DC = EC.$	Dado.
2. $AD = BE.$	....
3. $DE = DE.$	....
4. $AD + DE = BE + DE.$	Propriedade da Adição de Igualdades.
5. $AE = BD.$	Definição de "entre" e passagem 4.
6.	....
7. $\angle ACE \cong \angle BCD.$	....

5. Se, na figura, $PM = QN$, $PS = QR$ e $MR = NS$, demonstre que $\angle PSN \cong \angle QRM$.



6. Se, na figura, $AF = BG$, $\angle A \cong \angle B$ e $AE = BD$, demonstre que $EF = DG$.

* 7. Se, na figura, $\angle A \cong \angle B$, $AD = BE$ e $\angle ADG \cong \angle BEF$, demonstre que $\angle CFE \cong \angle CGD$.

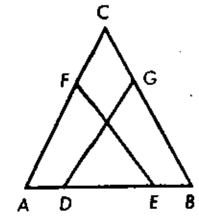
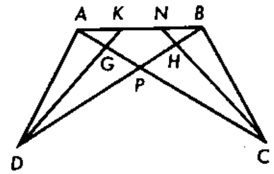
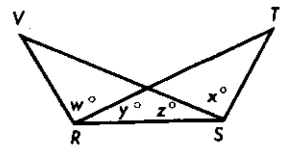


Figura para os Problemas 6 e 7

* 8. Se, na figura à esquerda, $AD = BC$, $AC = BD$, $AK = BN$ e $AG = BH$, demonstre que $KG = NH$.





9. Dada a figura plana acima, à direita, com $w = x$ e $y = z$, demonstre que $RV = ST$.

10. Se, na figura, $\angle x \cong \angle y$ e $\angle m \cong \angle n$, demonstre que $AC = BC$.

* 11. Se, na figura, $DF = EF$ e $\angle x \cong \angle y$, demonstre que ΔAFB é isósceles.

* 12. Se, na figura, $AC = BC$ e $DC = EC$, demonstre que $DF = EF$.

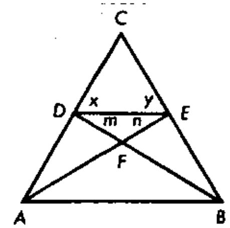


Figura para os Problemas 10, 11, 12

13. Se, na figura, $MK = MQ$, $ML = MP$ e $KL = QP$, qual é o ângulo congruente a $\angle KML$? Demonstre sua resposta.

* 14. Se, na figura, $MK = MQ$, $\angle K \cong \angle Q$, $\overline{PM} \perp \overline{MK}$ e $\overline{LM} \perp \overline{MQ}$, demonstre que $\angle L = \angle P$.

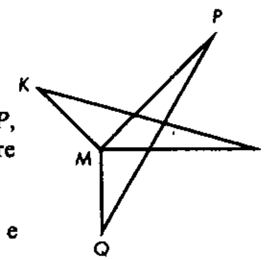
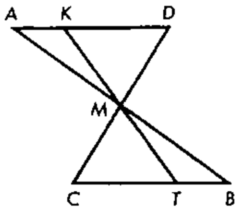


Figura para os Problemas 13 e 14

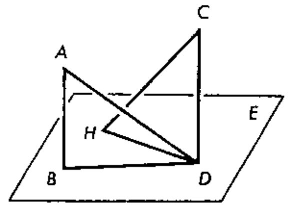
15. Tomam-se os pontos B e C nos lados de $\angle A$ de tal modo que $AB = AC$. Uma reta por B é perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$ em D e uma reta por C é perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ em E. Se $AD = AE$, demonstre que $BD = CE$.

* 16. A reta L é perpendicular a $\overline{XY}$ e divide $\overline{XY}$ ao meio em S. Os pontos R e T são os pontos médios de $\overline{XS}$ e $\overline{YS}$, respectivamente. Os pontos A e B são tomados sôbre L em lados opostos de $\overleftrightarrow{XY}$, de tal modo que $AX = BY$ e $AT = BR$. Demonstre que $AS = BS$.

* 17. Demonstre que se $\angle D \cong \angle DKM$ e $KM = CM = TM$, então $AD = BC$.



18. Na figura, B, H e D estão no plano E; A e C, fora de E. Se $\overline{AB} \perp \overline{BD}$, $\overline{CD} \perp \overline{HD}$, $AB = HD$ e $CD = BD$, demonstre que $AD = HC$.



19. (a) Demonstre que se, na figura, X é o ponto médio de $\overline{MN}$, $MZ = NY$ e $XZ = XY$, então $\angle Y \cong \angle Z$.
(b) É necessário que M, N, X, Y e Z sejam coplanares?

* 20. (a) Se, na figura, M, N, X, Y e Z são coplanares, X é o ponto médio de $\overline{MN}$, $\angle M \cong \angle N$ e $\angle MXY \cong \angle NXZ$, demonstre que $\angle Y \cong \angle Z$.
(b) É necessário que M, N, X, Y e Z sejam coplanares? Explique.

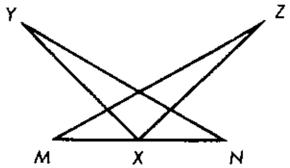
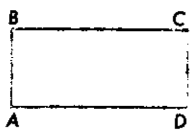
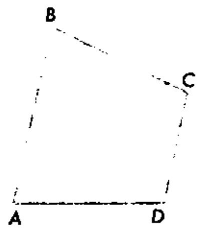


Figura para os Problemas 19 e 20

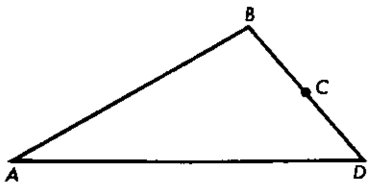
5-8. QUADRILÁTEROS, QUADRADOS E RETÂNGULOS

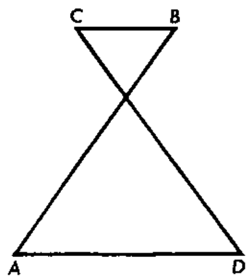
Um quadrilátero é uma figura de quatro lados. Exemplos:





Uma figura como a que está abaixo à esquerda *não* é um quadrilátero.

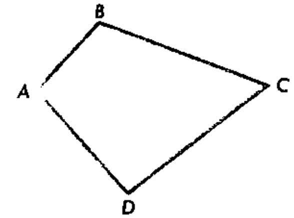




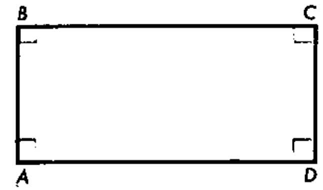
Não é permitido, também, que os lados de um quadrilátero se cruzem. A figura à direita acima *não* é um quadrilátero.

As definições abaixo são enunciadas de modo a incluir os casos que queremos incluir e a excluir os casos que queremos excluir.

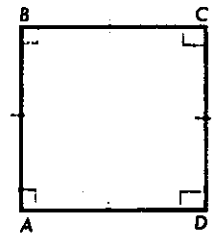
Sejam A, B, C e D quatro pontos coplanares. Se três quaisquer dêstes pontos não são colineares e os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ se interceptam apenas em suas extremidades, então a reunião dos quatro segmentos é chamada quadrilátero. Os quatro segmentos são chamados *lados* e os pontos A, B, C e D são chamados *vértices*. Os ângulos $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ e $\angle CDA$ são chamados *ângulos* do quadrilátero e podem ser denotados abreviadamente por $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ e $\angle D$.



Se os quatro ângulos de um quadrilátero são ângulos retos, então o quadrilátero é um *retângulo*.

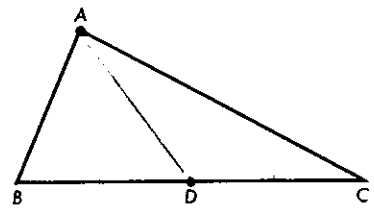


Se os quatro ângulos são retos e todos os quatro lados são congruentes, então o quadrilátero é um quadrado.



Um quadrilátero é denotado por $\square ABCD$.

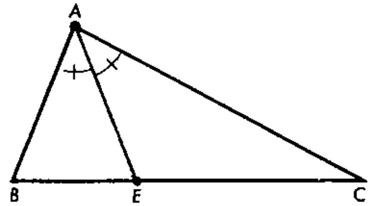
Nesta figura, os símbolos nos dizem que $\overline{AD}$ é uma *mediana* de $\triangle ABC$. Isto pode ser enunciado formalmente como se segue.



Uma *mediana* de um triângulo é um segmento cujas extremidades são um vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto.

Todo triângulo tem três medianas — uma para cada vértice.

Os símbolos nesta figura indicam que $\overline{AE}$ é uma *bissetriz* de ΔABC.



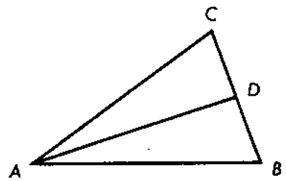
Definição

Um segmento é uma *bissetriz* de um triângulo se (1) está contido na semi-reta que é bissetriz de um ângulo do triângulo e (2) suas extremidades são, uma o vértice dêste ângulo e a outra, um ponto do lado oposto.

Problemas 5-8

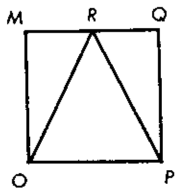
1. Construa um triângulo escaleno, suas três medianas e suas três bissetrizes.

2. Dados: ΔABC, cuja mediana $\overline{AD}$ é perpendicular ao lado $\overline{BC}$.
Demonstre: $\overline{AD}$ divide $\angle BAC$ ao meio e ΔABC é isósceles.



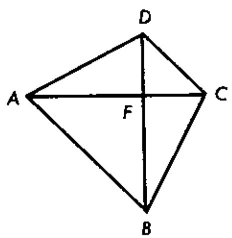
3. Demonstre: A mediana em relação à base de um triângulo isósceles é perpendicular à base e divide ao meio o ângulo oposto à base.

4. Dado que $\square MOPQ$ é um quadrado onde R é ponto médio de $\overline{MQ}$, demonstre que ΔROP é isósceles.



5. No $\square GKHM$, $\angle G$ e $\angle H$ são ângulos retos, $GK = MH$ e $GH = MK$. G e H estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{MK}$. Demonstre que $\square GKHM$ é um retângulo.

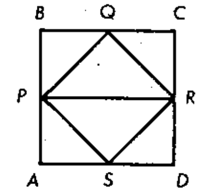
6. Em $\square ABCD$, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ em F, $AC = BD$ e $FD = FC$. Demonstre que $\Delta ACD \cong \Delta BDC$.



7. Demonstre: As medianas em relação aos lados congruentes de um triângulo isósceles são congruentes.

8. Demonstre: Em um triângulo isósceles, as bissetrizes em relação aos ângulos da base são congruentes.

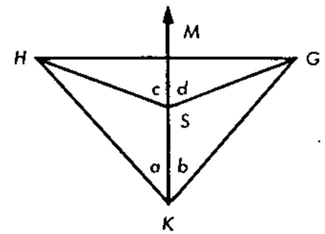
9. $\square ABCD$ é um quadrado e P, Q, R e S são os pontos médios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, respectivamente. Demonstre que $\angle PQR \cong \angle PSR$.



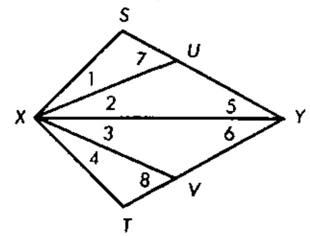
10. $\square ABFH$ é um quadrado. X é um ponto em $\overrightarrow{AH}$ e Y um ponto em $\overrightarrow{BF}$ tais que $AX = BY$. Demonstre que $AY = BX$.

11. $\overrightarrow{AP}$ é bissetriz de $\angle BAC$. D é um ponto de $\overrightarrow{AB}$ e E um ponto de $\overrightarrow{AC}$ tais que $AD = AE$. Demonstre que $PD = PE$.

* 12. Dado que, na figura, $\overline{KM}$ é bissetriz de $\angle HKG$ e $\angle HSG$, demonstre que $\overline{KM} \perp \overline{HG}$.

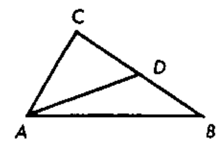


* 13. Se, na figura, $XU = XV$ e $\angle 1 \cong \angle 2 \cong \angle 3 \cong \angle 4$, demonstre que $\angle 5 \cong \angle 6$ e $\angle 7 \cong \angle 8$.

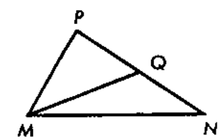


Problema Magno

(a) Com base nos teoremas demonstrados até aqui, poderia você demonstrar que se $\overline{AC} \cong \overline{MP}$, $\overline{BC} \cong \overline{NP}$ e a mediana $\overline{AD} \cong$ mediana $\overline{MQ}$, então $\Delta ABC \cong \Delta MNP$? Caso fôr possível, faça-o. Caso não, explique porquê.

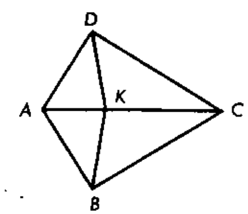


(b) Com base nos teoremas demonstrados até aqui, poderia você demonstrar que se $\overline{AC} \cong \overline{MP}$, $\overline{AB} \cong \overline{MN}$ e mediana $\overline{AD} \cong$ mediana $\overline{MQ}$, então $\Delta ABC \cong \Delta MNP$? Caso fôr possível, faça-o. Caso não, explique porquê.



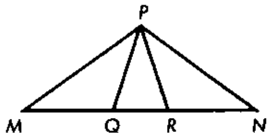
Problemas Suplementares

1. Dados: $DC = BC$ e $DK = BK$.
Demonstre: $AD = AB$.



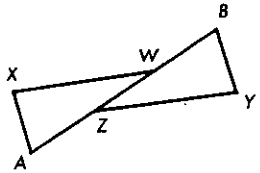
2. Dados dois triângulos congruentes, demonstre que a mediana em relação a um lado de um triângulo é congruente à mediana em relação ao lado correspondente do outro triângulo

3. Se, na figura, $MQ = PQ = PR = NR$, demonstre que ΔMNP é isósceles.

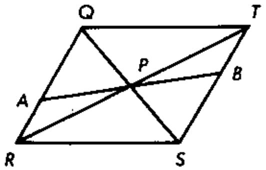


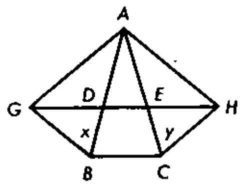
4. É dado o triângulo ΔRST, com S-X-T de tal modo que $SX = SR$. Q é um ponto tal que R-Q-T e $\overrightarrow{SQ}$ divide $\angle RST$ ao meio. Trace $\overline{QX}$. Que ângulo é congruente a $\angle R$? Demonstre a congruência.

5. Se, na figura, $XW = ZY$, $AX = BY$ e $AZ = BW$, que ângulo é congruente a $\angle A$? Demonstre a congruência.

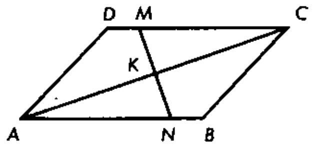


6. Dada a figura na qual $\overline{QS}$ e $\overline{RT}$ se dividem ao meio em P. demonstre que $AP = BP$.

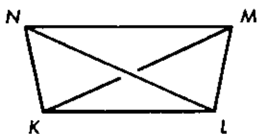




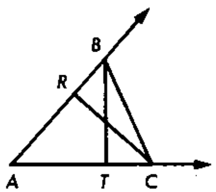
7. Se, na figura, $AB = AC$, $AD = AE$ e $\angle x \cong \angle y$, então $AG = AH$.
8. Demonstre que a bissetriz em relação a cada ângulo de um triângulo equilátero é uma mediana no triângulo.
9. (a) Na figura, $AD = BC$, $AB = DC$ e $\overline{MN}$ divide $\overline{AC}$ ao meio em K. $\overline{AC}$ divide $\overline{MN}$ ao meio? Demonstre sua resposta.
   (b) É preciso que todos os pontos da figura sejam coplanares?



10. (a) Na figura, $NK = ML$ e $MK = NL$. Demonstre que $\angle MNK \cong \angle NML$.
    (b) É preciso que $\overline{KM}$ e $\overline{NL}$ se interceptem?

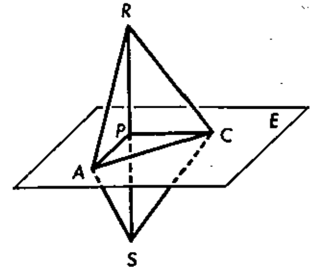


11. Dados: A figura com $AB = AC$ e $\angle RCB \cong \angle TBC$. Demonstre: $RC = BT$.



12. Demonstre que, dados dois triângulos congruentes, a bissetriz em relação a um ângulo de um triângulo é congruente à bissetriz em relação ao ângulo correspondente do outro triângulo.

* 13. Na figura, A, P e C estão no plano E, R e S estão em lados opostos de E. Se $\overline{AP} \perp \overline{RS}$, $RP = SP$ e $RC = SC$, demonstre que
(a) $\overline{CP} \perp \overline{RS}$,
(b) $\angle ACR \cong \angle ACS$.

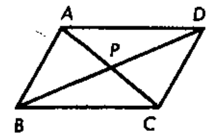


* 14. Em $\overleftrightarrow{AB}$, tem-se A-C-B e $\overrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$. O ponto P está no interior de $\angle ACD$ e o ponto Q está no interior de $\angle BCD$ de tal modo que $\angle PCA \cong \angle QCB$. Se $\overline{CD} \perp \overline{PQ}$, então $PC = QC$.

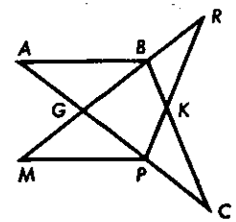
* 15. $\overline{AP}$ e $\overline{BC}$ se dividem ao meio em N da mesma forma que $\overline{AC}$ e $\overline{BQ}$ em K. Demonstre que $QC = PC$.

* 16. Dado ΔABC qualquer seja D um ponto no lado de $\overleftrightarrow{AB}$ oposto a C e tal que ΔABD seja equilátero. Seja E um ponto no lado de $\overleftrightarrow{BC}$ oposto a A de tal modo que $\Delta ABCE$ seja equilátero. Demonstre que $AE = CD$.

* 17. Dado $\square ABCD$, como na figura, com $AB = DC$ e $AD = BC$, demonstre que $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se dividem ao meio.



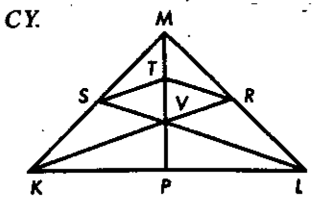
* 18. Na figura, os pontos G e B dividem $\overline{MR}$ em três partes congruentes, o mesmo acontecendo com os pontos G e P em relação a $\overline{AC}$. Se $AG = BG$, mostre que $\angle R \cong \angle C$.



$^+$ 19. Escreva uma definição cuidadosa do que se entende por "C e D dividem $\overline{AB}$ em três partes congruentes".

*$^+$ 20. Se $\overleftrightarrow{XY}$ é perpendicular a cada uma das três semi-retas distintas $\overrightarrow{XA}$, $\overrightarrow{XB}$ e $\overrightarrow{XC}$ com $XA = XB = XC$, demonstre que $AY = BY = CY$.

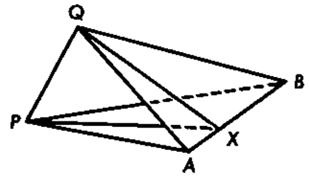
* 21. Dados: ΔKVL é isósceles com $KV = LV$ e $\overline{MP}$ contém a mediana $\overline{VP}$ de ΔKVL.
Demonstre: $ST = RT$.



*$^+$ 22. (a) $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ se dividem ao meio em K. Demonstre que $AC = BD$ e $AD = BC$.
(b) Suponha, agora, que K divide $\overline{EF}$ ao meio. Poderia você encontrar seis pares de segmentos congruentes, nenhum dos quais contendo K?
(c) Se $\overline{EF}$ não está no mesmo plano de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, como mudaria sua conclusão, na parte (b)? Tente visualizar uma figura, ou faça um esbôço ou um modêlo.

$^+$ 23. É dado $\angle BAC$ tal que $AB = AC$; R está em $\overline{AB}$ e T em $\overline{AC}$ de tal modo que $RC = TB$. Com base nestas informações, você pode demonstrar que $AR = AT$? Em caso afirmativo, faça-o; caso negativo, explique porquê.

*+ 24. ΔPAB e ΔQAB estão em planos distintos mas têm em comum o lado $\overline{AB}$. Se $\Delta PAB \cong \Delta QAB$ e X é um ponto qualquer de $\overline{AB}$, então $\angle XPQ \cong \angle XQP$.

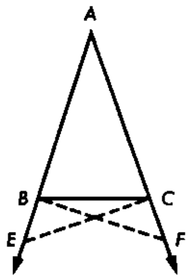


*+ 25. Complete a demonstração de Euclides do teorema que afirma serem congruentes os ângulos da base de um triângulo isósceles.

Dados: $\angle BAC$ com $AB = AC$.

Demonstre: $\angle ACB \cong \angle ABC$.

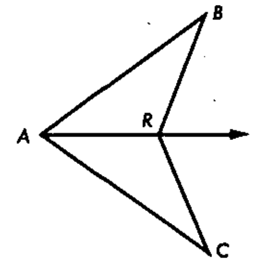
[*Sugestão:* Em primeiro lugar, tome um ponto E tal que A-B-E e um ponto F tal que A-C-F de modo que $AE = AF$. Trace $\overline{BF}$ e $\overline{CE}$.]



Revisão do Capítulo

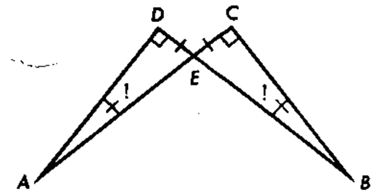
1. Indique se é falsa ou verdadeira cada afirmação abaixo.
   (a) Se na correspondência $ABC \leftrightarrow KLM$, $\overline{AC} \cong \overline{KM}$, $\overline{AB} \cong \overline{KL}$ e $\angle A \cong \angle K$, então a correspondência é uma congruência.
   (b) Se $\overline{AC} = \overline{BD}$, podemos concluir que ou $A = B$ e $C = D$, ou $A = D$ e $B = C$.
   (c) Dois triângulos são congruentes se os três ângulos de um triângulo são congruentes aos três ângulos do outro triângulo.
   (d) Se, no ΔDEF, $m\angle D = m\angle E = m\angle F$, então ΔDEF é equilátero.
   (e) A mediana de um triângulo divide ao meio um ângulo do triângulo.
   (f) Se $\Delta XYZ \cong \Delta BAC$, então $\angle X \cong \angle A$.
   (g) Se, no ΔABC, $\angle A \cong \angle C$, então $AB = AC$.
   (h) Se $\Delta XYZ \cong \Delta ZXY$, então ΔXYZ é equilátero.
   (i) Dois triângulos são congruentes se dois lados e um ângulo de um são congruentes a dois lados e um ângulo do outro.
   (j) Não existe nenhum ΔABC no qual $\angle A = \angle B$.
2. Defina "segmentos congruentes".
3. Defina "bissetriz de um ângulo".
4. Defina "bissetriz de um triângulo".
5. Copie em seu caderno e complete: Se uma bissetriz de um triângulo é também uma mediana, então o triângulo é ....
6. Copie em seu caderno e complete: Um quadrilátero que tem quatro ângulos retos é chamado ....
7. Copie em seu caderno e complete: no ΔPRQ, $\angle Q$ é determinado por .... e .... e $\angle P$ e $\angle R$ determinam ....
8. ΔABC e ΔPQR, cada um, têm dois lados que medem 7 e um ângulo cuja medida é 40. Êstes triângulos são congruentes? Sim ou não? Por que?

9. Se, na figura, $AB = AC$ e $\overrightarrow{AR}$ é bissetriz de $\angle BAC$, demonstre que
   (a) $RB = RC$,
   (b) $\overrightarrow{AR}$ contém a bissetriz de $\angle BRC$.

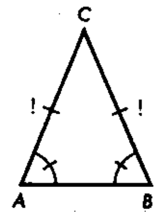


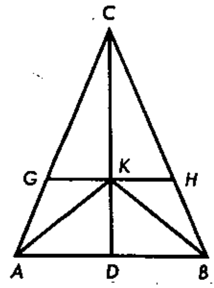
10. Demonstre: Se ΔABC é equilátero, então $\Delta ABC \cong \Delta CAB \cong \Delta ACB$.

11. Escreva uma hipótese e uma conclusão de acôrdo com os símbolos na figura ao lado.



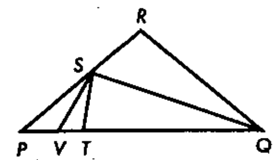
12. Escreva o teorema sugerido pela figura à esquerda, abaixo.



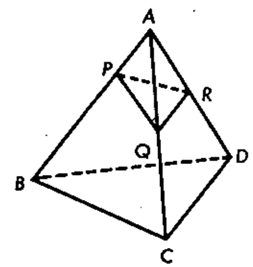


13. Na figura plana à direita, acima, $AC = BC$ e $AK = BK$. Faça uma lista de tôdas as conclusões que se seguem desta figura. (É preciso que você seja capaz de demonstrar cada uma destas conclusões.)

* 14. Num triângulo isósceles, ΔPQR, a bissetriz de um ângulo da base, $\angle Q$, intercepta o lado oposto em S. T é um ponto da base $\overline{PQ}$ tal que $ST = PT$. $\overline{SV}$ divide $\angle PST$ ao meio. Demonstre que $\angle TSV \cong \angle RQS$.



* 15. Na figura, A, B, C e D são pontos não coplanares e $AB = AC = AD = BC = BD = CD$. Q e R são pontos médios de $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$, respectivamente, e P é um ponto qualquer de $\overline{AB}$. Demonstre que ΔPQR é isósceles.



*+ 16. Seja L a origem de dois semiplanos H_1 e H_2. A e B são dois pontos de L, M um ponto de H_1 e R um ponto de H_2 de tal forma que $\angle MAB \cong \angle RAB$ e $AM = AR$.
   (a) Demonstre que ΔMRB é isósceles.
   (b) É preciso que $\overline{MR}$ intercepte L?
   (c) A resposta ao caso (a) requer que H_1 e H_2 sejam coplanares?

6 UM EXAME MAIS DETALHADO DE UMA DEMONSTRAÇÃO

6-1. COMO FUNCIONA UM SISTEMA DEDUTIVO

No Cap. 1, tentamos explicar em têrmos gerais como iria ser nosso estudo de geometria. Após a experiência adquirida desde então, você está numa posição muito melhor para compreender a explicação.

A idéia de um conjunto, os métodos da álgebra e o processo de argumentação lógica são coisas *com* as quais estivemos trabalhando. A geometria em si é *no* que estivemos trabalhando. Começamos com *ponto*, *reta* e *plano* como têrmos primitivos; e até agora usamos dezessete postulados. Algumas vêzes, foram definidos novos têrmos fazendo apêlo aos postulados. (Por exemplo, a distância PQ foi definida como sendo o número positivo dado pelo Postulado da Distância). Algumas vêzes, as definições foram baseadas sòmente nos têrmos não definidos. (Por exemplo, um conjunto de pontos é *colinear* se todos os pontos do conjunto estiverem na mesma *reta*.) Mas sempre construímos nossas definições em têrmos que eram, de algum modo, já conhecidos. Agora já empilhamos definições umas sôbre as outras, tantas vêzes, que a lista é bem comprida; e, de fato, o comprimento da lista é uma das razões principais por que tivemos que ser cuidadosos, desde o princípio, e manter a lista em ordem.

Anàlogamente, tôdas as afirmações que fizemos sôbre geometria são fundamentalmente baseadas nos postulados. Demonstramos, algumas vêzes, teoremas diretamente a partir dos postulados e algumas vêzes baseamos nossas demonstrações em teoremas já demonstrados. Mas em todos os casos, a cadeia de argumentos pode ser traçada de volta aos postulados.

Seria uma boa idéia, nesse ponto, reler a segunda metade do Cap. 1. Ela parecerá mais clara, agora, do que na primeira vez. É muito mais fácil olhar para trás e compreender o que você fêz, do que compreender uma explicação sôbre o que você ainda vai fazer.

6-2. DEMONSTRAÇÕES INDIRETAS (OU POR REDUÇÃO AO ABSURDO)

Observamos no Cap. 1 que a melhor maneira de aprender argumentação lógica é fazer algumas. Em geral, isso é verdade. Mas existe um tipo de demonstração que exige uma discussão especial. No Teorema 3-1 usamos o que é chamado uma *demonstração indireta*, também chamada demonstração por redução ao absurdo. O teorema e sua demonstração foram os seguintes:

Teorema 3-1

Se duas retas distintas se interceptam, a interseção contém sòmente um ponto.

Demonstração. Se duas retas distintas se interceptassem em dois pontos distintos P e Q, haveria duas retas contendo P e Q. O Postulado da reta

Possìvelmente você já viu êste tipo de raciocínio anteriormente. Talvez você já conheça a demonstração que $\sqrt{2}$ é irracional e essa demonstração é indireta. Em todo caso, certamente você já ouviu em conversações comuns afirmações dêsse tipo, muitas vêzes. As duas seguintes observações são exemplos de demonstrações indiretas:

Exemplo 1

"Não deve estar chovendo lá fora.
Se estivesse chovendo, essas pessoas entrando pela porta estariam molhadas, mas elas não estão".

Exemplo 2

"Hoje não deve ser o dia do jôgo de futebol.
Se o jôgo fôsse hoje, o estádio agora já estaria cheio de pessoas, mas você e eu somos as únicas pessoas aqui".

Nos dois casos, quem fala deseja mostrar que uma certa afirmação é verdadeira. Ela começa sua demonstração supondo que a afirmação a ser provada é falsa; ela, em seguida, observa que isso leva a uma conclusão que contradiz um fato conhecido. No primeiro caso, a pessoa que está falando começa com a hipótese de que está chovendo; isso leva à conclusão de que as pessoas entrando pela porta deveriam estar molhadas; e isso contradiz o fato conhecido de que as pessoas não estão molhadas. Anàlogamente, no segundo caso, a pessoa que está falando supõe que haja um jôgo de futebol naquele dia; e isso leva a uma contradição do fato de que o estádio contém apenas duas pessoas.

Na demonstração do Teorema 3-1, começamos supondo que duas retas distintas se interceptam em dois pontos distintos. Isso contradiz o Postulado da Reta. Portanto, a suposição é errada e isso significa que o teorema está certo.

Muitas vêzes, nossas demonstrações indiretas em geometria serão tão curtas e simples quanto esta; elas não serão mais que observações de bom-senso. Mas tais observações de bom-senso são parte do ABC do raciocínio matemático, e seria difícil prosseguir sem elas.

Problemas 6-2

1. Só para argumentar, aceite as seguintes hipóteses e em seguida complete lògicamente cada conclusão.
   (a) *Hipótese:* Todos os meninos gostam de jogar futebol. Meu irmão tem 14 anos.
   Conclusão: Meu irmão ....
   (b) *Hipótese:* Sòmente pessoas negligentes cometem erros. Eu nunca sou negligente.
   Conclusão: Eu ....

   (c) *Hipótese:* João sempre ri ao contar uma piada. João está contando uma piada.
   Conclusão: João ....
   (d) *Hipótese:* Em qualquer triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes. No ΔABC, $AC = BC$.
   Conclusão: ....
2. Quais dos seguintes argumentos são exemplos de raciocínio indireto?
   (a) A temperatura lá fora deve estar abaixo de 0. Se não estivesse abaixo de 0 não haveria gêlo nas vidraças. Mas há gêlo, logo a temperatura lá fora está abaixo de 0.
   (b) Deve estar na hora do almôço. Se não estivesse, eu não estaria com fome. Mas eu estou com muita fome. Portanto deve estar na hora do almôço.
   (c) O concêrto deve ter terminado. Tantas pessoas saem do teatro apenas no fim do concêrto. Muitas pessoas estão saindo do teatro. Logo o concêrto terminou
3. Já deve ter passado das 16 horas. Se ainda não fôsse 16 horas, eu estaria ouvindo o barulho da construção. Eu não ouço nenhum barulho.
   Nesse exemplo de demonstração indireta, identifique
   (a) a afirmação a ser demonstrada,
   (b) a hipótese feita,
   (c) a conclusão resultante da hipótese, e
   (d) o fato conhecido que contradiz (c).
4. Dona Maria comprou um conjunto de utensílios de cozinha anunciados como sendo de aço inoxidável. Após usar os utensílios durante algumas semanas, ela descobriu que algumas das peças começaram enferrujar. Então concluiu que o conjunto não era de aço inoxidável e o devolveu exigindo restituição do pagamento. Responda as questões do Problema 3.
5. Demonstre que a bissetriz de qualquer ângulo de um triângulo escaleno não pode ser perpendicular ao lado oposto.
6. Demonstre que dois ângulos quaisquer de um triângulo escaleno não podem ser congruentes.
7. + Que conclusões você pode tirar das seguintes hipóteses, sendo que p, q e r representam afirmações distintas?
   Se p é verdadeira, então q é verdadeira.
   Se q é verdadeira, então r é verdadeira.
   p é verdadeira.
8. + Que conclusões você pode tirar das seguintes hipóteses?
   Se p é verdadeira, então q é verdadeira.
   Se r é verdadeira, então s não é verdadeira.
   Se q é verdadeira, então s é verdadeira.
   p é verdadeira.
   Você usou raciocínio indireto em algum lugar? Explique.

\+ 9. Se K é azul, então M é vermelho.
Se K é verde, então M é amarelo.
Se M é vermelho, então J é azul.
(a) K é azul, portanto M é .... e J é ....
(b) M é amarelo. É possível tirar alguma conclusão a respeito de K? Em caso afirmativo, que conclusão?
(c) J não é azul. É possível tirar alguma conclusão a respeito de K? Em caso afirmativo, que conclusão?

\+ 10. Que conclusão é conseqüência das seguintes informações?
(a) Ninguém pode pertencer ao clube de natação a não ser que saiba tocar flauta.
(b) Nenhuma tartaruga sabe tocar flauta.
(c) Ninguém pode usar calções listrados na piscina do clube a não ser que pertença ao clube de natação.
(d) Eu sempre uso calções listrados na piscina do clube.
[*Sugestão:* Converta cada afirmação numa sentença na forma "se ... então" e faça um diagrama do argumento como nos Problemas 7 e 8. Por exemplo, seja p "alguém é um membro do clube de natação", etc.]

\+ 11. Que conclusão segue das seguintes hipóteses?
Leões mansos têm dentes afiados.
Leões que comem pessoas nunca ficam doentes.
Leões que nunca comem pessoas têm dentes não afiados.
Meu leão tem pneumonia.
Você usou raciocínio indireto? Explique.

6-3. TEOREMAS SÔBRE RETAS E PLANOS

É agora mais fácil demonstrar os outros teoremas do Cap. 3. Por questão de conveniência, vamos novamente enunciar os postulados em que se baseavam as demonstrações.

POSTULADO 4. O Postulado da Reta.

Para cada par de pontos distintos existe exatamente uma reta que os contém.

POSTULADO 5.

(*a*) *Todo plano contém pelo menos três pontos não-colineares.*
(*b*) *O espaço contém pelo menos quatro pontos não-coplanares.*

POSTULADO 6.

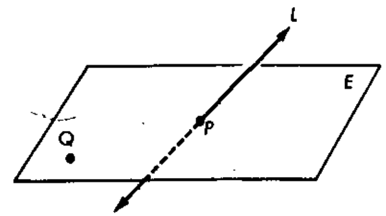
Se dois pontos de uma reta estão em um plano, então a reta está contida nesse plano.

POSTULADO 7. O Postulado do Plano

Três pontos quaisquer pertencem pelo menos a um plano, e três pontos não-colineares quaisquer pertencem a exatamente um plano.

Vamos prosseguir agora demonstrando o seguinte teorema.

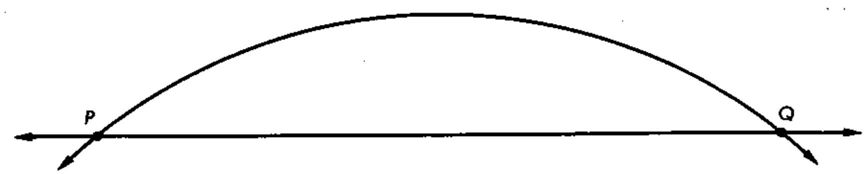
Teorema 3-2



Se uma reta intercepta um plano que não a contém, a interseção contém sòmente um ponto.

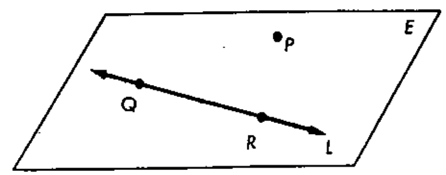
Demonstração. É dada a reta L e o plano E. Por hipótese, temos
(1) L intercepta E em pelo menos um ponto P, e
(2) E não contém L.
Vamos dar uma demonstração indireta e portanto começaremos supondo que
(3) L intercepta E em algum outro ponto Q.
Precisamos mostrar que (3) leva a contradição de um fato conhecido e de fato isso acontece: Se P e Q estão em E, segue-se pelo Postulado 6 que L está contida em E. Isso contradiz (2). Portanto (3) é falsa. Logo o Teorema 3-2 é verdadeiro.

É claro que a figura para essa demonstração tem uma aparência bastante peculiar. Indicamos um ponto Q apenas para lembrar da notação da demonstração. A demonstração em si mostra que um tal ponto não pode existir. De fato, figuras para demonstrações indiretas sempre parecerão ridículas, pela excelente razão delas descreverem situações impossíveis. Se tivéssemos desenhado uma figura para o Teorema 3-1, ela teria aparência pior ainda:



Essa figura sugere uma situação impossível na qual duas retas se interceptam em dois pontos distintos.

Teorema 3-3



Dados uma reta e um ponto fora da reta, existe exatamente um plano que os contém.

Seja L a reta dada e P um ponto dado. Para demonstrar o teorema, precisamos mostrar duas coisas:

(1) existe um plano E contendo P e L;
(2) existe sòmente um plano E contendo P e L.

Afirmações (1) e (2), juntas, nos dizem que existe *exatamente* um plano contendo P e L.

Demonstração de (1). Sejam Q e R dois pontos quaisquer de L. Pelo Postulado 7 existe um plano E, contendo P, Q e R. Pelo Postulado 6, E contém L. Assim E contém P e L.

Demonstração de (2). Essa demonstração será indireta. *Suponha* que exista um outro plano E' contendo P e L. Então E' conterá P, Q e R.

Mas P, Q e R são não-colineares. A razão é que L é a única reta que contém Q e R (por quê?) e L não contém P.

Assim temos dois planos distintos E e E' contendo os pontos não-colineares P, Q e R. Isso contradiz o Postulado 7.

Observe que êsse teorema e sua demonstração dividem de modo natural em duas partes, ilustrando a distinção entre *existência* e *unicidade*. A primeira parte da demonstração mostra a *existência* do plano E contendo P e L. A segunda metade mostra a *unicidade* do plano contendo P e L. Quando provamos a existência, mostramos que existe *no mínimo um* objeto de certo tipo. Quando provamos unicidade, mostramos que existe *no máximo um*. Se pudermos demonstrar ambas as partes, então sabemos que existe *exatamente um*.

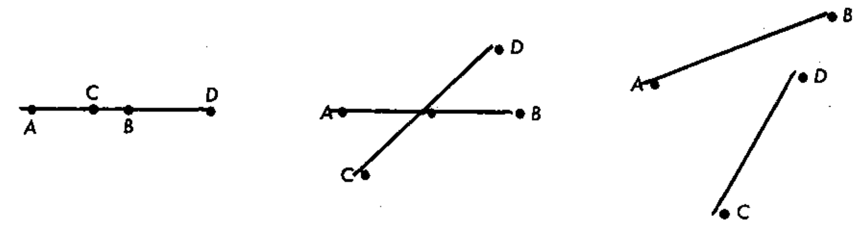
No entanto, existência e unicidade não andam sempre juntos; em muitos casos, podemos ter uma, sem ter a outra, e muitas vêzes não temos nenhuma. Por exemplo, para pulgas num vira-lata, podemos, em geral, provar existência mas não unicidade. (De fato, feliz é o cachorro que só tem uma pulga). Anàlogamente, se x é racional então *existem* inteiros p e q tais que

$$x = \frac{p}{q}.$$

Mas êsses inteiros não são únicos, pois também temos

$$x = \frac{2p}{2q} = \frac{3p}{3q},$$

e assim por diante. Para a filha mais velha de certa senhora, òbviamente temos unicidade mas não necessàriamente existência; em algumas famílias tôdas as crianças são homens. Para pontos comuns a dois segmentos distintos, não temos necessàriamente nem existência, nem unicidade; a interseção pode conter um segmento, ou exatamente um ponto ou nenhum ponto.

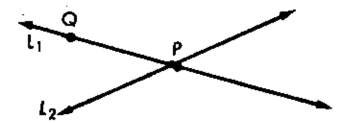


A frase "um e sòmente um" é usada muitas vêzes no lugar de "exatamente um" para dar ênfase ao duplo valor da afirmação.

Nosso teorema seguinte se divide em duas partes, da mesma maneira que o precedente.

Teorema 3-4

Dadas duas retas que se interceptam, existe exatamente um plano que as contém.



São dadas as retas L_1 e L_2 interceptando-se em P. Precisamos mostrar duas coisas:

(1) *Existência.* Existe um plano E contendo L_1 e L_2.
(2) *Unicidade.* Existe sòmente um plano E contendo L_1 e L_2.

Daremos a demonstração na forma de coluna dupla.

Demonstração de (1)

Afirmações	*Justificações*
1. L_1 contém um ponto Q distinto de P.	Pelo Postulado da Régua, tôda reta contém infinitos pontos.
2. Q não está em L_2.	Pelo Teorema 3-1, L_1 intercepta L_2 sòmente em P.
3. Existe um plano contendo Q e L_2.	Teorema 3-3.
4. E contém L_1.	Pelo Postulado 6, pois E contém P e Q.

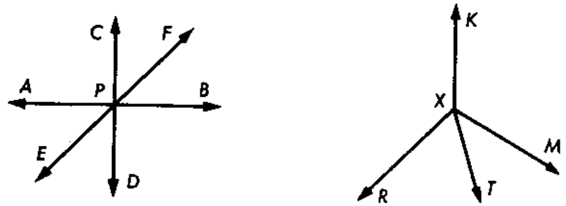
Demonstração de (2)

Afirmações	*Justificações*
5. *Suponha* que um outro plano E' contenha L_1 e L_2.	Comêço de demonstração indireta.
6. E' contém Q	Q está em L_1.
7. E e E' contêm Q e L_2	Passagens 3, 4, 5 e 6.
8. E é o único plano contendo L_1 e L_2.	Passagem 7 contradiz o Teorema 3-3.

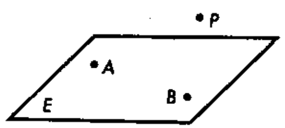
Observe que a demonstração de (2) lhe dá um modêlo de como escrever demonstrações indiretas na forma de coluna-dupla. Estritamente falando, a sentença "comêço de demonstração indireta" não é uma "justificação"; é simplesmente uma explicação do que tínhamos em mente ao escrever a passagem 5.

Problemas 6-3

1. Que teorema pode ser re-enunciado como "Duas retas que se interceptam determinam um plano"?
2. Se as três retas na figura abaixo, à esquerda, não são tôdas coplanares, quantos planos elas determinam? Descreva os planos nomeando as retas que os determinam.



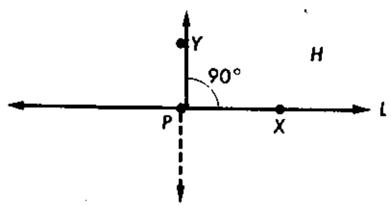
3. Na figura acima, à direita, três das semi-retas nunca são coplanares. Quantos planos elas determinam? Descreva cada plano pelos pontos que o determinam.
4. Que postulado ou teorema, enunciado na Secção 6-3, garante a unicidade de um ponto cuja existência não pode ser garantida?
5. Como indicado na figura, os pontos A e B estão no plano E e o ponto P está acima do plano E. Que postulado ou teorema garante que $\overleftrightarrow{AB}$ está contida em E? Há um segundo plano implícito na figura. Qual é? Qual é sua interseção com E? Se um quarto ponto Q estiver abaixo do plano E mas não colinear com P e A ou P e B, nomeie os planos assim determinados. Desenhe a figura.



6. Explique o uso da frase "um e sòmente um".
7. Suponha que você deseja demonstrar que num plano, por um ponto dado de uma reta dada, existe no máximo uma perpendicular à reta dada. Você estaria demonstrando existência ou unicidade? Se sua demonstração é indireta, que suposições você faria para iniciar seu argumento?

6-4. PERPENDICULARES

Usando uma régua e um transferidor, é fácil desenhar a perpendicular a uma reta dada, por um ponto dado da mesma. Simplesmente marcamos um ângulo de 90°, como na figura, com vér-



tice no ponto dado P, um lado $\overrightarrow{PX}$ na reta dada L e o outro lado em um dos semiplanos determinados por L. Essa perpendicular deve ser única, pois só existe uma marcação 90° no transferidor.

Vamos agora descrever essa situação num teorema e demonstrá-lo com base em nossos postulados.

Teorema 6-1

Num plano dado, por um ponto dado de uma reta dada, existe uma e uma só reta perpendicular à reta dada.

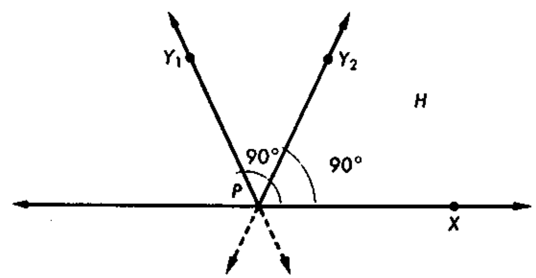
Re-enunciado. Seja E um plano e seja L uma reta em E e seja P um ponto de L. Então

(1) existe uma reta M em E tal que M contém P e $M \perp L$; e

(2) existe sòmente uma reta M nessas condições.

Demonstração de (1). Seja H um dos dois semiplanos em E, determinados por L e seja X um ponto qualquer de L, distinto de P. (Veja a figura abaixo). Pelo Postulado da Construção de um Ângulo, existe uma semi-reta $\overrightarrow{PY}$, com Y em H, tal que $m\angle YPX = 90$. Seja $M = \overleftrightarrow{PY}$. Então $M \perp L$ em P.

Demonstração de (2). Suponha agora que tanto M_1 como M_2 são perpendiculares a L em P. Vamos mostrar que $M_1 = M_2$.



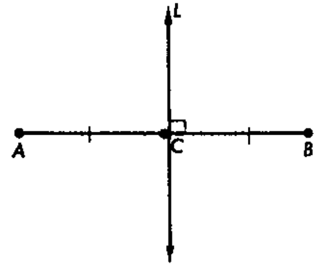
M_1 e M_2 contêm as semi-retas $\overrightarrow{PY_1}$ e $\overrightarrow{PY_2}$, com Y_1 e Y_2 em H. Pela definição de "perpendicular" e Teorema 4-8, os ângulos $\angle Y_1PX$ e $\angle Y_2PX$ são ângulos retos, como indicado na figura. Pelo Postulado da Construção de um Ângulo, isso significa que $\overrightarrow{PY_1}$ e $\overrightarrow{PY_2}$ são a mesma semi-reta. Como M_1 e M_2 têm mais de um ponto em comum, elas não podem ser distintas. Portanto $M_1 = M_2$.

Observe que para provar a unicidade das perpendiculares a L por P, tivemos que nos restringir a um plano dado. No espaço, tôda reta tem infinitas perpendiculares em cada um de seus pontos, da mesma forma que, numa carroça, todos os raios da roda são perpendiculares ao eixo.

As marcas na figura seguinte indicam que L é a *mediatriz de* $\overline{AB}$.

Definição

Num plano dado, a *mediatriz* de um segmento é a reta perpendicular ao segmento, passando pelo seu ponto médio.



Todo segmento $\overline{AB}$ tem um e sòmente um ponto médio C; e por C existe uma e uma só reta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$. Portanto a mediatriz existe e é única.

O teorema seguinte dá uma outra descrição da mediatriz.

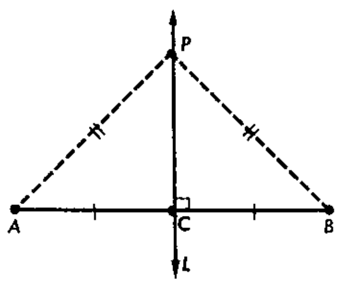
Teorema 6-2. O Teorema da Mediatri-

A mediatriz de um segmento, em um plano, é o conjunto de todos os pontos do plano equidistantes das extremidades do segmento.

Re-enunciado. Seja L a mediatriz de $\overline{AB}$ no plano E. Então

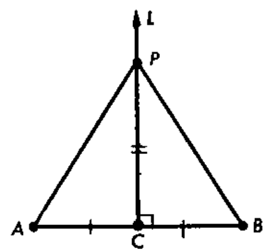
(1) se P está em L, $PA = PB$, e

(2) se $PA = PB$, então P está em L.



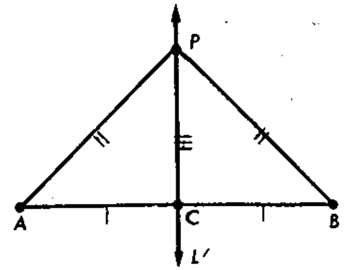
Isso é um exemplo da caracterização completa de um conjunto de pontos. Para *caracterizar* um conjunto de pontos, damos uma condição que (1) é satisfeita pelos pontos do conjunto dado e (2) não é satisfeita por mais nenhum outro ponto. Nesse caso, o conjunto de pontos é a mediatriz de AB e a condição é $PA = PB$. Portanto, o re-enunciado do teorema bem como sua demonstração dividem-se naturalmente em duas partes.

Demonstração de (1). Seja C o ponto médio de $\overline{AB}$, e seja P um ponto qualquer de L. Se $P = C$, então òbviamente $PA = PB$. Suponha, então, que P é diferente de C, de modo que P não está em $\overleftrightarrow{AB}$. Temos $PC = PC$ por identidade; $\angle PCA \cong \angle PCB$ porque ambos são ângulos retos; e $CA = CB$ porque C é o ponto médio. Por LAL, temos $\Delta PCA \cong$ $\cong \Delta PCB$. Portanto $PA = PB$.



Demonstração de (2). É dado que P está no plano E e $PA = PB$. Se P está em $\overleftrightarrow{AB}$, então $P = C$ porque $\overline{AB}$ tem sòmente um ponto médio. Se P não está em $\overleftrightarrow{AB}$, seja L' a reta $\overleftrightarrow{PC}$. Então $PC = PC$, $CA = CB$ e $PA = PB$. (Por quê?) Por LLL, temos

$$\Delta PCA \cong \Delta PCB,$$



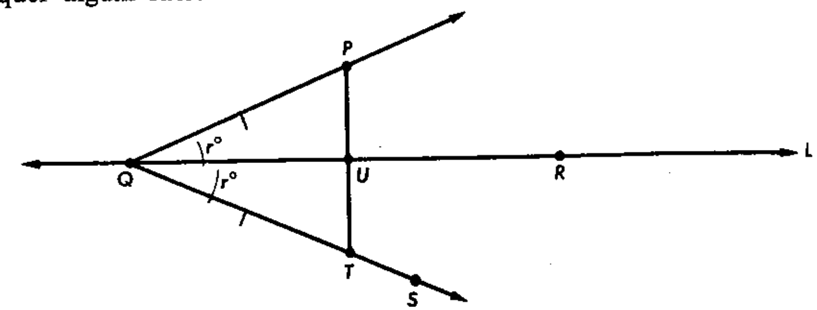
como antes. Portanto, por definição, $\angle PCB$ é um ângulo reto e portanto $L' \perp \overline{AB}$ em C. Pelo Teorema 6-1, perpendiculares são únicas. Portanto $L' = L$. Portanto P está em L, como queríamos demonstrar.

Corolário 6-2.1

São dados um segmento $\overline{AB}$ e uma reta L no mesmo plano. Se dois pontos de L são, cada um, equidistantes de A e B, então L é a mediatriz de $\overline{AB}$.

Demonstração. Pelo Teorema 6-2, L contém dois pontos da mediatriz de $\overline{AB}$. Como dois pontos determinam uma reta, isso significa que L é a mediatriz de $\overline{AB}$.

Vimos que não existe realmente nenhum problema em construir a perpendicular a uma reta por um ponto qualquer *da* reta: simplesmente marcamos um ângulo de 90°. Se o ponto não estiver *sôbre* a reta, a construção requer algum raciocínio.



É dada a reta L e um ponto P não em L. Queremos construir uma reta por P, perpendicular a L. (Estamos, é claro, trabalhando num plano E contendo L e P.)

Sejam Q e R dois pontos quaisquer de L. Para obter a perpendicular, primeiramente desenhamos a semi-reta $\overrightarrow{QP}$ e medimos $\angle PQR$. Em seguida desenhamos uma semi-reta $\overrightarrow{QS}$, com S no semiplano oposto, determinado por L, em relação a P, como indicado na figura, de modo que

$$\angle SQR \cong \angle PQR.$$

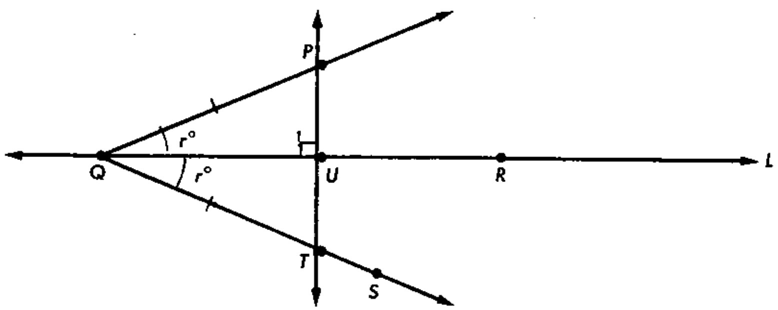
(Que postulado permite isso?) Marcamos, em seguida, um ponto T em $\overrightarrow{QS}$ de modo que $TQ = PQ$. Então $\overline{TP}$ intercepta L em um ponto U. (Por quê?). Agora, $QU = QU$, $\angle PQU \cong \angle TQU$ e $TQ = PQ$. Portanto, por LAL, $\Delta PQU \cong \Delta TQU$ e $\angle PUQ$ e $\angle TUQ$ são ângulos retos. Portanto $\overleftrightarrow{TP} \perp L$ e desenhamos a perpendicular a L por P.

Com base nessa discussão, você deve ser capaz de completar a demonstração do seguinte teorema na forma de coluna-dupla.

Teorema 6-3

Por um ponto dado, fora de uma reta, existe pelo menos uma reta perpendicular à reta dada.

Re-enunciado. Seja L uma reta e P um ponto não em L. Então existe uma reta que é perpendicular a L e contém P.



Demonstração

Afirmações	*Justificações*
1. L contém dois pontos Q e R.	Postulado da Régua.
2. Existe uma semi-reta $\overrightarrow{QS}$, com S e P em semiplanos opostos relativamente a reta L, tal que $\angle SQR \cong \angle PQR$.	?
3. Existe um ponto T em $\overrightarrow{QS}$ tal que $TQ = PQ$.	?
4. T e P estão em semiplanos opostos em relação a L.	P e S estão em semiplanos opostos em relação a L, S e T estão no mesmo semiplano.
5. $\overline{TP}$ intercepta L em um ponto U.	?
6. $\Delta PQU \cong \Delta TQU$.	?
7. $\angle PUQ$ é um ângulo reto.	?
8. $\overleftrightarrow{PU} \perp L$.	?

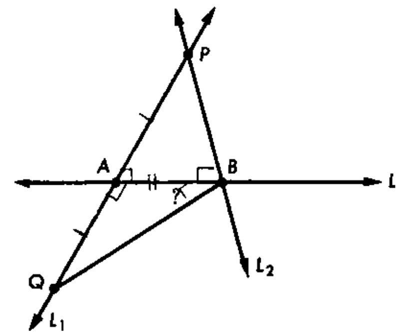
Essa demonstração, como nós a escrevemos, não permite a possibilidade de $Q = U$. Ao escolhermos o ponto Q, ao acaso, em L, poderia acontecer que $\overleftrightarrow{PQ} \perp L$. Mas, é claro que se isso acontecer não há nada a demonstrar, porque já temos nossa perpendicular, a saber, a reta $\overleftrightarrow{PQ}$.

Assim, a perpendicular a uma reta, por um ponto fora da reta, *existe*. Vamos mostrar agora que a perpendicular é *única*.

Teorema 6-4

Por um ponto dado, fora de uma reta, existe no máximo uma reta perpendicular à reta dada.

Demonstração. A demonstração é indireta, como a maioria das demonstrações de unicidade. Suponha que L_1 e L_2 são duas retas distintas por P, cada uma perpendicular a L. Sejam A e B os pontos onde L_1 e L_2 interceptam L. Seja Q o ponto, na semi-reta oposta a $\overrightarrow{AP}$, para o qual $AQ = AP$. (Teorema 2.1). Por LAL, temos



$$\Delta PAB \cong \Delta QAB.$$

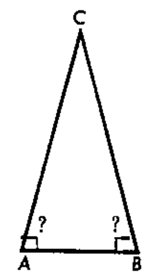
(Pela figura, isso parece não ser verdade, mas lembre-se que a figura ilustra uma situação impossível; nosso trabalho, na demonstração, é mostrar que a situação desenhada é impossível).

Portanto $\angle PBA \cong \angle QBA$, por serem ângulos correspondentes. Portanto $\overleftrightarrow{BQ} \perp L$ em B. Portanto há duas retas L_2 e $\overleftrightarrow{BQ}$ que são perpendiculares a L em B. Isso contradiz o Teorema 6-1, que afirma existir sòmente uma reta perpendicular a uma reta dada, por um de seus pontos, num plano dado. Portanto nossa suposição de que havia duas perpendiculares a L por P é falsa.

Corolário 6-4.1

Nenhum triângulo tem dois ângulos retos.

Demonstração. No ΔABC, se $\angle A$ e $\angle B$ fôssem ângulos retos, haveria duas perpendiculares a $\overleftrightarrow{AB}$ por C. Pelo Teorema 6-4 isso é impossível.



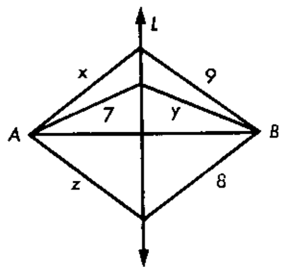
Definições

Um *triângulo retângulo* é um triângulo que tem um ângulo reto. O lado oposto ao ângulo reto é chamado a *hipotenusa* e os outros dois lados são chamados os *catetos.*

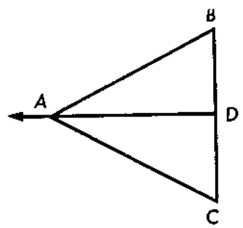
O teorema precedente nos dá o direito de falar *do* ângulo reto de um triângulo retângulo.

Problemas 6-4

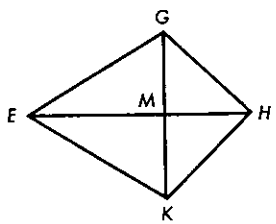
1. Se num plano M, com ponto A na reta L, $\overrightarrow{AT} \perp L$ e $\overrightarrow{AQ} \perp L$, que conclusão você pode tirar relativamente a $\overleftrightarrow{AQ}$ e $\overleftrightarrow{AT}$? Por quê?
2. Que teorema nos diz que o vértice oposto à base de um triângulo isósceles está na mediatriz da base?



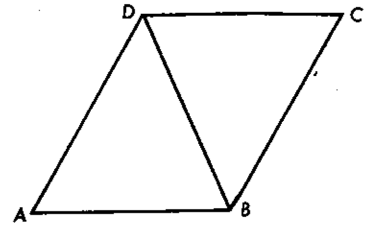
3. Na figura, L é a mediatriz de $\overline{AB}$. Se os comprimentos dos segmentos são como indicados, determine x, y e z.



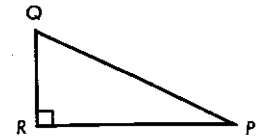
4. Se D é o ponto médio de $\overline{BC}$ e $\overleftrightarrow{AD} \perp \overline{BC}$, demonstre que o $\triangle ABC$ é isósceles. *Não* use triângulos congruentes na sua demonstração.



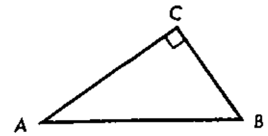
5. Num plano, $GE = KE$, $GM = KM$ e H está em $\overleftrightarrow{EM}$. Demonstre que $GH = KH$ *sem* usar triângulos congruentes.
6. A reta L é a mediatriz de $\overline{QT}$. P é um ponto do mesmo lado da reta L que Q. $\overline{PT}$ intercepta L em R. Demonstre $PT = PR + RQ$.
7. (a) Num plano, quantas perpendiculares a uma reta existem, por um ponto da reta?
   (b) No espaço, quantas perpendiculares a uma dada reta existem, por um ponto da reta?



8. Copie a figura. Usando régua e transferidor construa perpendiculares a $\overleftrightarrow{DB}$ por A e por C. Construa a perpendicular a $\overleftrightarrow{DC}$ por B e a perpendicular a $\overleftrightarrow{BC}$ por A:
9. Que teorema nos permite dizer, "*a* perpendicular a uma reta por um ponto fora desta"?



10. (a) No ΔPQR, se R é um ângulo reto, $\overline{PQ}$ é chamado a ...., e $\overline{RQ}$ e $\overline{RP}$ são chamados os ....

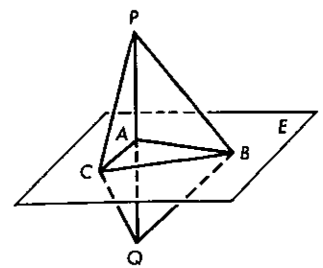


    (b) No ΔABC, se $\angle C$ é um ângulo reto, a hipotenusa é .... e os catetos são .... e ....

11. Demonstre que se a mediana relativamente à hipotenusa de um triângulo retângulo é perpendicular à hipotenusa, então o triângulo retângulo é isósceles.

* 12. É dado ΔABC com $AC = BC$. As bissetrizes dos ângulos da base, $\angle A$ e $\angle B$, se interceptam em F. Demonstre que $\overleftrightarrow{CF}$ é perpendicular a $\overline{AB}$. (Não é necessário usar triângulos congruentes em sua demonstração).

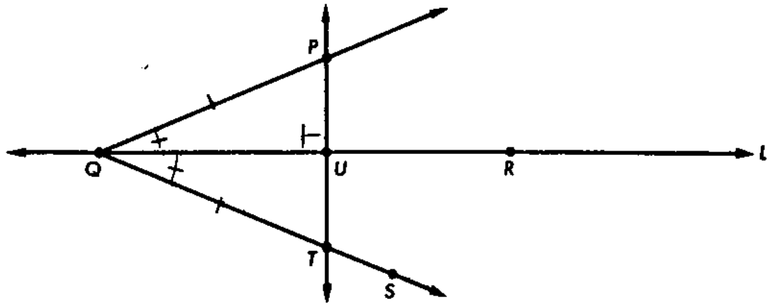
* 13. Uma diagonal de um quadrilátero divide ao meio dois ângulos de um quadrilátero. Demonstre que ela divide ao meio a outra diagonal.



* 14. A, B e C estão no plano E. P e Q estão em semi-espaços opostos em relação a E. Dado que $PB = QB$, A é ponto médio de $\overline{PQ}$ e $\angle PBC \cong \angle QBC$, demonstre que $\overline{PQ} \perp \overline{AC}$.

6-5. INTRODUÇÃO DE CONJUNTOS AUXILIARES NAS DEMONSTRAÇÕES. O USO DA PALAVRA "SEJA"

Você provàvelmente reparou que, em algumas de nossas demonstrações, introduzimos pontos e retas que não eram dados no enunciado do teorema. Lembre-se, por exemplo, quando, na Seção 6-4, quisemos mostrar que existe sempre uma perpendicular a uma reta dada por um ponto fora da reta.



Sòmente eram dados a reta L e o ponto P, mas para obter a perpendicular $\overleftrightarrow{TP}$, tivemos que introduzir os pontos Q e R, as semi-retas $\overrightarrow{QP}$ e $\overrightarrow{QS}$ e o ponto T.

Em cada passagem da demonstração em coluna dupla desse teorema (Teorema 6-3), as afirmações garantem que realmente existem pontos e semi-retas do tipo que queremos. E se você completou corretamente a coluna das justificações, em cada passagem você se referiu a um postulado (ou talvez a um teorema) que justificava a afirmação.

Na maior parte do tempo, porém, as justificações em tais casos eram muito simples; e ao escrever demonstrações correntes, usamos muitas vêzes uma linguagem informal. Na discussão que precedia o Teorema 6-3, você viu um exemplo disso. Dissemos

> "*Sejam* Q e R dois pontos quaisquer de L. Para obter a perpendicular, primeiramente *desenhamos* a semi-reta $\overrightarrow{QP}$..."

Os matemáticos muitas vêzes falam dessa maneira, e não há razão para que não o façam. Mas se você não estiver seguindo cuidadosamente o que está acontecendo, êsse tipo de linguagem pode fàcilmente levar a mal-entendidos. Algumas vêzes pode parecer que os matemáticos simplesmente "impõem" que as coisas sejam aquilo que êles querem que elas sejam. Isso, claro, não é o que êles estão fazendo. Quando dizemos, "sejam Q e R dois pontos quaisquer de L", estamos afirmando que L contém dois pontos e estamos afirmando saber o porquê. Tendo demonstrado os Teoremas 6-3 e 6-4, sabemos que perpendiculares existem e são únicas. Temos portanto o direito de dizer "seja L' a perpendicular a L por P". Isso é uma maneira abreviada de mencionar ambos os teoremas de uma só vez. [*Pergunta:* Se conhecêssemos o Teorema 6-3 mas não o 6-4, que tipo de afirmação abreviada teríamos o direito de fazer?]

Em demonstrações formais de coluna dupla, quando introduzimos conjuntos auxiliares, precisamos mencionar postulados e teoremas como justificações. Uma lista dos postulados e teoremas que vamos usar, para êsse propósito, encontra-se abaixo. São afirmações que nos dizem que algum ponto, reta ou plano existe, ou é único, ou ambos.

POSTULADO 4. O Postulado da Reta

Para cada par de pontos distintos existe exatamente uma reta que os contém.

POSTULADO 5

(*a*) *Todo plano contém pelo menos três pontos não-colineares.*
(*b*) *O espaço contém pelo menos quatro pontos não-coplanares.*

Teorema 2-1

Seja $\overrightarrow{AB}$ uma semi-reta e seja x um número positivo. Então existe exatamente um ponto P de $\overrightarrow{AB}$ tal que $AP = x$.

Teorema 2-2

Todo segmento tem exatamente um ponto médio.

Teorema 3-1

Se duas retas distintas se interceptam, a interseção contém sòmente um ponto.

Teorema 3-2

Se uma reta intercepta um plano que não a contém, a interseção contém sòmente um ponto.

POSTULADO 7. O Postulado do Plano

Três pontos quaisquer pertencem pelo menos a um plano, e três pontos não-colineares quaisquer pertencem a exatamente um plano.

Teorema 3-3

Dados uma reta e um ponto fora da reta, existe exatamente um plano que os contém.

Teorema 3-4

Dadas duas retas que se interceptam, existe exatamente um plano que as contém.

POSTULADO 12. O Postulado da Construção de um Ângulo

Seja $\overrightarrow{AB}$ uma semi-reta contida na origem do semiplano H. Para todo número r entre 0 e 180 existe exatamente uma semi-reta $\overrightarrow{AP}$, com P em H, tal que $m\angle PAB = r$.

Teorema 5-2

Todo ângulo possui exatamente uma bissetriz.

Teorema 6-1

Num plano dado, por um ponto dado de uma reta dada, existe uma e uma só reta perpendicular à reta dada.

Teorema 6-3

Por um ponto dado, fora de uma reta, existe pelo menos uma reta perpendicular à reta dada.

Teorema 6-4

Por um ponto dado, fora de uma reta, existe no máximo uma reta perpendicular à reta dada.

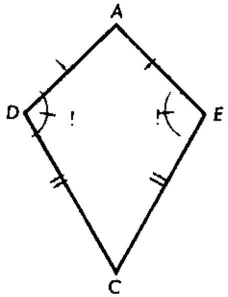
Entre os teoremas e postulados que demos até agora, êsses são os que vamos usar ao introduzir conjuntos auxiliares. Mas êles certamente não nos ajudarão na demonstração de novos teoremas, a não ser que possamos imaginar um conjunto que seja *útil* introduzir. De fato, imaginar conjuntos *úteis* é realmente a parte mais difícil e mais interessante da nossa tarefa; as citações de teoremas são simplesmente modos de têrmos certeza de que nosso trabalho está em ordem.

Não existem regras fixas para inventar demonstrações; aprendemos pela prática. Vamos olhar para alguns exemplos.

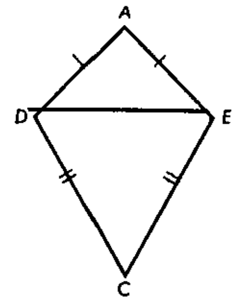
Exemplo 1

Dado: A figura plana com $AD = AE$ e $CD = CE$.

Demonstre: $\angle D \cong \angle E$.



Como todos nossos postulados e teoremas relacionados com congruência lidaram com triângulos, parece razoável que nossa figura deva mostrar alguns triângulos. Conseguimos isso fàcilmente introduzindo $\overline{AC}$ ou $\overline{DE}$.

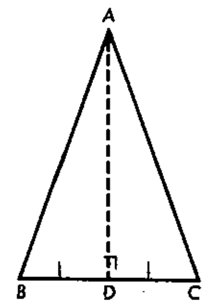


Suponha que introduzimos $\overline{DE}$, de modo que nossa figura se pareça com a da direita. Isso nos permite completar a demonstração, pois $m\angle ADE = m\angle AED$ e $m\angle CDE = m\angle CED$ nos dá $m\angle ADC = m\angle AEC$ pelo Postulado da Adição de Ângulos.

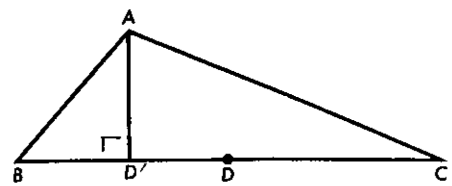
Cuidado: Antes de você "introduzir" alguma coisa, tenha certeza de que ela existe. Nada é mais fácil que descrever objetos imaginários, colocando apressadamente palavras umas atrás das outras. Considere, por exemplo, o seguinte "teorema" e sua "demonstração".

"Teorema"

Em qualquer ΔABC, temos $\angle B \cong \angle C$.



"*Demonstração*". Seja D um ponto entre B e C tal que $BD = DC$ e $\overline{AD} \perp \overline{BC}$. Então $\angle ADB \cong \angle ADC$ pois ambos são retos. Portanto $ADB \leftrightarrow ADC$ é uma correspondência LAL. Portanto $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ e $\angle B \cong \angle C$.

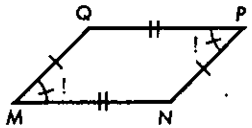


Êsse "teorema" é ridículo e portanto sua demonstração deve estar errada. E não é difícil ver que a demonstração vai por caminhos errados desde o início, com o uso impensado da palavra "seja". A não ser que $\angle B \cong \angle C$, o ponto médio de $\overline{BC}$ e o pé da perpendicular de A são dois pontos distintos. Portanto, na maioria dos casos o ponto D que estamos introduzindo não existe de maneira alguma. Observe que isso teria sido bastante evidente, se o autor da demonstração errada tivesse tido a idéia de usar um triângulo escaleno na sua figura. Boas figuras não são garantia contra erros, mas elas ajudam bastante.

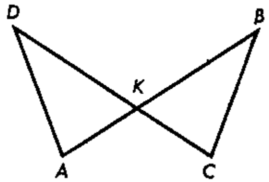
Problemas 6-5

1. Demonstre o teorema enunciado no Exemplo 1 da pág. 158, introduzindo $\overline{AC}$.

2. É dada a figura com as marcas. Demonstre que $\angle M \cong \angle P$.

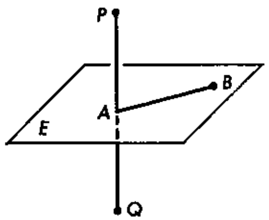


3. Dada a figura com $AD = CB$ e $AB = CD$, demonstre que $AK = CK$.



4. Faça uma lista dos postulados e teoremas dados nas páginas 157 e 158, usando 4 no lugar de Postulado 4, 2-1 no lugar de Teorema 2–1 e assim por diante. Se um postulado ou teorema garante existência, coloque E após o número na sua lista; se garante unicidade, coloque U; se existência e unicidade, coloque EU. Por exemplo, Postulado 4 deverá aparecer na sua lista como "4EU".

5. São dados os pontos A e B num plano E e pontos P e Q em semi-espaços opostos, relativamente ao plano E e tais que $PA = QA$ e $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{PQ}$. Demonstre que B é equidistante de P e Q. Como entra o Teorema 3-4 na sua demonstração?

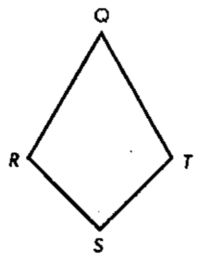


6. Dados: Q, R, S e T são coplanares. $QR = QT$.

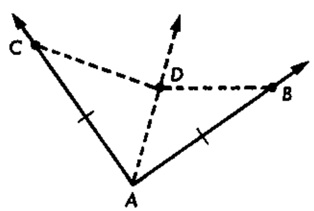
$$m\angle R = m\angle T.$$

Demonstre: $SR = ST$.

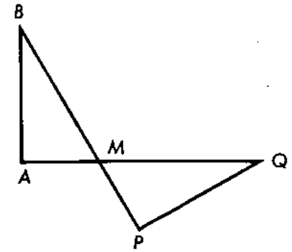
Sua demonstração é válida se Q, R, S e T não forem coplanares?



7. Ache o êrro na seguinte "demonstração". Os pontos B e C são tomados sôbre os lados do $\angle A$, de modo que $AB = AC$. D é um ponto qualquer no interior do $\angle A$. Introduza a semi-reta que divide ao meio o $\angle A$ e contém D. Introduza $\overline{DC}$ e $\overline{DB}$. Por definição de bissetriz, $\angle DAC \cong \angle DAB$. $AD = AD$ por identidade. Portanto $\Delta ADC \cong \Delta ADB$ pelo caso LAL e $DB = DC$. Assim D é eqüidistante de B e C.



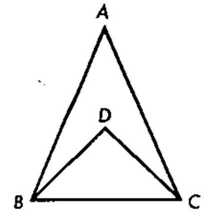
8. Dados: $AB = PQ$ e
$BP = AQ$.
Demonstre: (a) $\angle A \cong \angle P$,
(b) $\Delta ABM \cong \Delta PQM$.



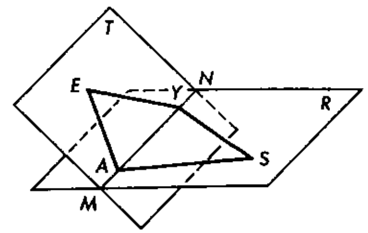
* 9. Dados: $AH = RD$, $\angle A \cong \angle R$ e H, A, R e D são coplanares.
Demonstre: $\angle H \cong \angle D$.

* 10. Esboce uma segunda solução do Problema 9, introduzindo segmentos auxiliares diferentes dos que você usou primeiro.

* 11. Invente duas demonstrações para a afirmação seguinte e diga qual das demonstrações não depende da exigência de serem A, B, C e D coplanares.
Dados: $AB = AC$ e $BD = CD$, na figura.
Demonstre: $\angle ABD \cong \angle ACD$.

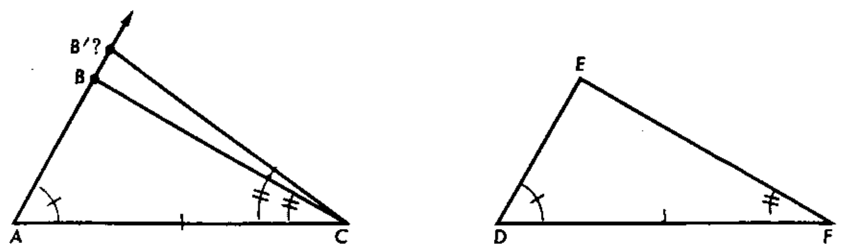


* 12. Na figura, os planos R e T se interceptam em $\overleftrightarrow{MN}$. E está em T, S em R e $\overleftrightarrow{MN}$ contém A e Y. Se $EY = EA$ e $SY = SA$, demonstre que $\angle EAS \cong \angle EYS$.



6-6. ELIMINANDO O POSTULADO ALA.

No capítulo precedente, baseamos nosso estudo de congruência de triângulo em três postulados LAL, ALA e LLL. Na verdade, o único dêsses que, realmente, precisamos aceitar como postulado é o LAL; admitindo apenas o LAL, os outros podem ser demonstrados. Consideremos primeiramente o caso do ALA.



É dada uma correspondência ALA

$$ABC \leftrightarrow DEF,$$

como indicado na figura, de modo que

$$\begin{aligned} \angle A &\cong \angle D, \\ (1) \quad AC &\cong DF, \\ \angle C &\cong \angle F. \end{aligned}$$

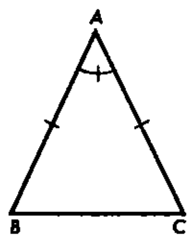
Precisamos mostrar que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

Demonstração

Afirmações	*Justificações*
2. $\overrightarrow{AB}$ contém um ponto B' tal que $AB' = DE$.	Teorema 2-1
3. $AB'C \leftrightarrow DEF$ é uma correspondência LAL.	Passagens 1 e 2,
4. $\Delta AB'C \cong \Delta DEF$	LAL.
5. $\angle ACB' \cong \angle DFE$	Ângulos correspondentes.
6. $\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{CB}$	Postulado da Construção de um Ângulo.
7. $B' = B$	Duas retas distintas se interceptam no máximo em um ponto.
8. $\Delta ABC \cong \Delta DEF$	Passagens 4 e 7.

6-7. ELIMINANDO O POSTULADO LLL.

Vamos mostrar agora que o postulado LLL também pode ser demonstrado como teorema.



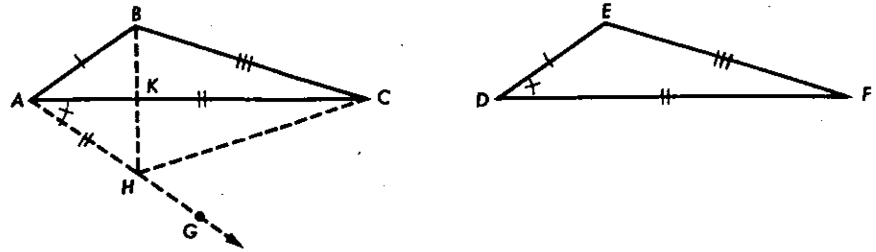
Primeiramente lembramos que ao provar o Teorema do Triângulo Isósceles, sòmente usamos o LAL. Como $ABC \leftrightarrow ACB$ é uma correspondência LAL, sabemos que $\Delta ABC \cong \Delta ACB$ e assim

$$\angle B \cong \angle C.$$

Podemos portanto usar o Teorema do Triângulo Isósceles para demonstrar o LLL, sem cometer o êrro de argumentar de forma circular.

Suponhamos agora que nos é dada uma correspondência LLL

$$ABC \leftrightarrow DEF$$



Demonstração

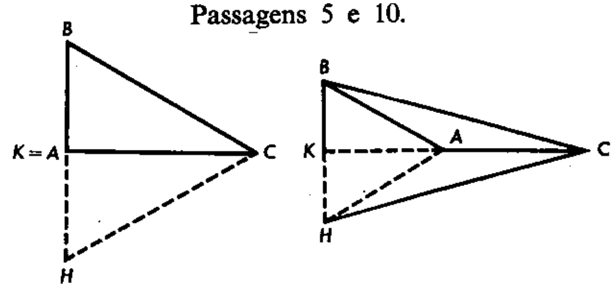
Afirmações	*Justificações*
1. $AB = DE$, $AC = DF$, $BC = EF$.	Dados.
2. Existe um ponto G no lado oposto de $\overleftrightarrow{AC}$ relativamente a B, tal que $\angle CAG \cong \angle D$.	Postulado da Construção de um Ângulo.
3. Existe um ponto H de $\overrightarrow{AG}$ tal que $AH = DE$.	Teorema 2-1.
4. $AHC \leftrightarrow DEF$ é uma correspondência LAL.	Passagens 1, 2 e 3.
5. $\Delta AHC \cong \Delta DEF$.	LAL.

Assim temos uma reprodução congruente do ΔDEF ao lado do ΔABC. Isso termina a primeira metade da demonstração. Na segunda metade, vamos mostrar que $\Delta ABC \cong \Delta AHC$. A seguinte demonstração se aplica ao caso visto na figura, no qual $\overline{BH}$ intercepta $\overleftrightarrow{AC}$ em um ponto entre A e C.

Demonstração (cont.)

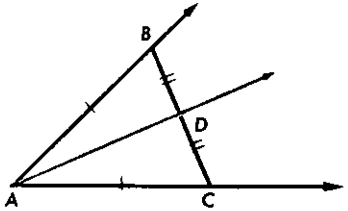
Afirmações	*Justificações*
6. $\angle ABH \cong \angle AHB$.	Teorema do Triângulo Isósceles.
7. $\angle HBC \cong \angle CHB$.	Teorema do Triângulo Isósceles.
8. $\angle ABC \cong \angle AHC$.	Postulado da Adição de Ângulos.
9. $ABC \leftrightarrow AHC$ é uma correspondência LAL.	Passagens 1, 5 e 8.
10. $\Delta ABC \cong \Delta AHC$.	LAL.
11. $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.	Passagens 5 e 10.

Existem, é claro, dois outros casos a considerar:



A demonstração, nesses casos, fica para você.

6-8. "ESTAR ENTRE" E SEPARAÇÃO



Se você estava prestando muita atenção, talvez tenha percebido duas situações onde nossas demonstrações não foram completas. Na demonstração do Teorema 5-2, realmente precisávamos saber que o ponto médio D de $\overline{BC}$ estava no interior do $\angle BAC$.

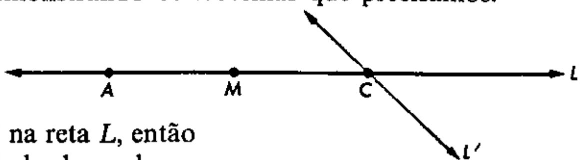
Precisávamos dessa informação para saber que $\overrightarrow{AD}$ satisfazia a definição de bissetriz.

Anàlogamente, na demonstração do LLL, na seção anterior, para usar adição de ângulo na passagem 8, precisávamos saber que o ponto K estava no interior do $\angle AHC$.

Rigorosamente falando, essas afirmações exigem demonstrações. Mas as demonstrações são omitidas em quase todos os livros, incluindo Euclides e muitos dos livros-textos. Isso não é necessàriamente um mal. A geometria é, mui acertadamente, guiada pelo bom-senso; é o bom-senso, em primeiro lugar que nos diz que nossos postulados são razoáveis. E o estudo da geometria já tinha mais de dois mil anos, antes que certas pessoas conseguissem escrever postulados realmente adequados para as demonstrações de teoremas geométricos.

Desde que tenhamos, entretanto, os postulados e desde que aprendamos a usá-los, podemos muito bem colocar nosso trabalho numa ordem melhor, enunciando e demonstrando os teoremas que precisamos.

Teorema 6-5

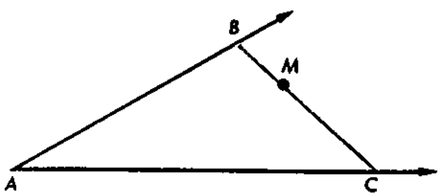


Se M está entre A e C na reta L, então M e A estão no mesmo lado de qualquer outra reta que contenha C.

Demonstração. Seja L' uma outra reta, contendo C e suponha que A e M estão em semiplanos opostos em relação a L'. Então $\overline{AM}$ contém um ponto D de L'. Mas $\overline{AM}$ está em L e L intercepta L' sòmente em C. Portanto $C = D$. Portanto, por definição de segmento, C está entre A e M. Isso é impossível, porque M está entre A e C. [Veja Afirmação (2) na pág. 35.]

Isso leva fàcilmente ao teorema que precisávamos nas demonstrações de Teorema 5-2 e LLL.:

Teorema 6-6



Se M está entre B e C, e A é qualquer ponto não em $\overleftrightarrow{BC}$, então M está no interior de $\angle BAC$.

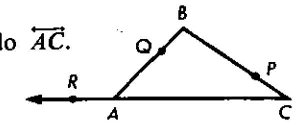
Demonstração. Pelo teorema precedente sabemos que (1) M e B estão num mesmo semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AC}$. Com outra aplicação do teorema precedente sabemos que (2) M e C estão num mesmo semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AB}$. Por definição de interior de um ângulo, isso significa que M está no interior do $\angle BAC$.

Problemas 6-8

[*Observação:* Nesse conjunto de problemas, nenhuma informação deve ser tirada de figuras.]

+ 1. Desenhe uma figura para a seguinte afirmação e justifique sua validade: Em qualquer triângulo, todos os pontos de um lado do triângulo, distintos dos vértices, estão no interior do ângulo oposto ao lado.

+ 2. É dada a reta $\overleftrightarrow{AC}$, com um ponto R tal que R-A-C, um ponto B não em $\overleftrightarrow{AC}$ e os pontos P e Q em $\overline{BC}$ e $\overline{BA}$ tais que B-P-C e B-Q-A. Complete cada uma das afirmações seguintes e prepare-se para justificar suas respostas.



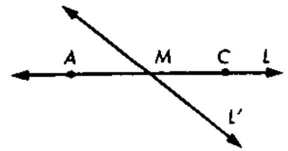
(a) P está no interior do $\angle$ ....

(b) Q e B estão no .... semiplano determinado $\overleftrightarrow{AC}$.

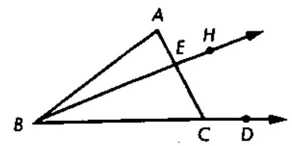
(c) P e B estão .... $\overleftrightarrow{AC}$.

(d) Q e P estão .... $\overleftrightarrow{AC}$.

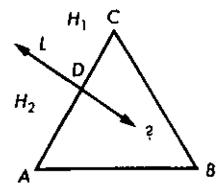
(e) R e P estão .... $\overleftrightarrow{AB}$.



+ 3. Demonstre: Se M estiver entre A e C na reta L, então A e C estão em semiplanos opostos relativamente a qualquer outra reta que contém M.



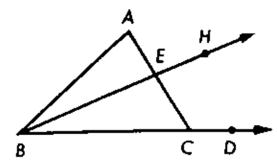
+ 4. Dados os pontos coplanares A, B, C, D, E e H tais que A, B e C são não-colineares, B-C-D, A-E-C e B-E-H, demonstre que A e H estão no mesmo lado de $\overleftrightarrow{BD}$.



*+ 5. Demonstre: Num plano, se uma reta intercepta um lado de um triângulo que não seja vértice, então ela deve interceptar pelo menos um outro lado do triângulo.

[*Sugestão:* Sejam H_1 e H_2 os semiplanos determinados pela reta origem L, com C em H_1. Há três casos a considerar: B está em L, B está em H_1 e B está em H_2.]

*+ 6. Dados os pontos coplanares A, B, C, D, E e H tais que A, B e C são não-colineares, B-C-D, A-E-C e B-E-H, demonstre que H está no interior do $\angle ACD$.

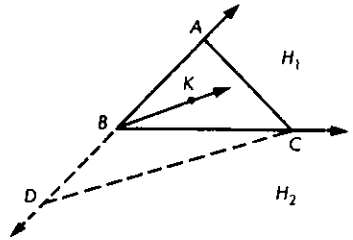


[*Sugestão:* Pela definição de interior de um ângulo você precisa mostrar que A e H estão num mesmo lado de $\overleftrightarrow{CD}$ (veja Problema 4) e que D e H estão num mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$.]

*+ 7. O seguinte teorema, cuja veracidade parece tão óbvia, é freqüentemente aceito sem demonstração.

Se K é um ponto no interior do $\angle ABC$, então $\overrightarrow{BK}$ intercepta $\overline{AC}$.

Você deveria ser capaz de dar uma demonstração, após responder as questões abaixo. Você pode usar outros problemas dessa série para justificar seus argumentos.



(a) Sejam H_1 e H_2 os semiplanos de origem $\overleftrightarrow{BC}$ com A em H_1.
Tome qualquer ponto D na semi-reta oposta a $\overrightarrow{BA}$. Desenhe $\overline{DC}$ formando ΔDAC. Por que está D em H_2?

(b) Por que está K em H_1? Que teorema mostra que todo ponto de $\overrightarrow{BK}$, salvo B, está em H_1?

(c) Por que todo ponto de $\overline{DC}$ salvo C está em H_2?

(d) Por que $\overline{DC}$ não intercepta $\overrightarrow{BK}$?

(e) Por que $\overline{DC}$ não intercepta a semi-reta oposta a $\overrightarrow{BK}$?

(f) Por que $\overline{DC}$ não intercepta $\overleftrightarrow{BK}$?

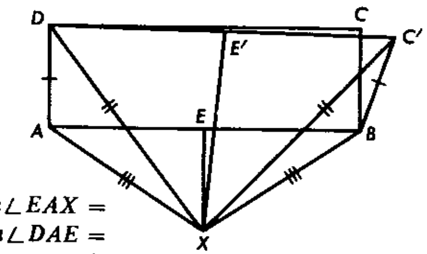
(g) Por que $\overleftrightarrow{BK}$ tem que interceptar $\overline{AC}$?

(h) Por que a semi-reta oposta a $\overrightarrow{BK}$ não intercepta $\overline{AC}$?

(i) Por que $\overrightarrow{BK}$ intercepta $\overline{AC}$?

Problema Magno

O seguinte argumento, não válido, que tenta demonstrar que um ângulo obtuso é congruente a um ângulo reto, dá ênfase à importância de se saber em que semi-plano determinado por uma reta está um certo ponto. Suponha que $\square ABCD$ é um retângulo e que o lado $\overline{BC}$ é puxado para fora de modo que $BC' = BC$ e o $\angle ABC'$ é obtuso. Seja X a interseção da mediatriz de $\overline{AB}$ com a mediatriz de $\overline{DC'}$. Se X estiver abaixo de $\overleftrightarrow{AB}$, como na figura, temos

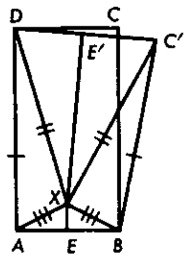


$$\Delta AXD \cong \Delta BXC'$$

pelo Teorema LLL e assim

$$m\angle DAX = m\angle C'BX.$$

Também, $\Delta EAX \cong \Delta EBX$ por LLL e assim $m\angle EAX = m\angle EBX$. Segue-se, por subtração, que $m\angle DAE = m\angle C'BE$. Se X estiver acima de $\overleftrightarrow{AB}$, como na segunda figura, obtemos, exatamente como antes,



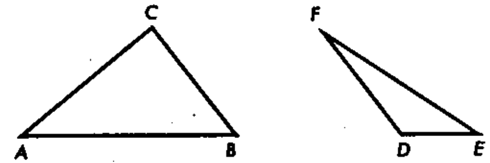
$$m\angle DAX = m\angle C'BX, \quad m\angle EAX = m\angle EBX$$

e a igualdade desejada, $m\angle DAE = m\angle C'BE$, segue por adição. O que está errado com o argumento acima?

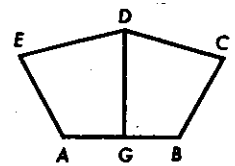
[*Sugestão:* Tente desenhar uma figura exata para o caso em que $m\angle ABC$ é sòmente um pouco menor que 180. Que parte da "demonstração" é válida nesse caso?]

Revisão do Capítulo

1. Se você tentasse demonstrar cada afirmação abaixo pelo método indireto, com que suposição, em cada afirmação, você começaria?
   (a) Se nenhum par de ângulos de um triângulo é congruente, então êle não é isósceles.
   (b) Dada uma reta e um ponto fora dela, existe no máximo uma reta pelo ponto perpendicular à reta dada.
   (c) Se um ponto é equidistante dos extremos de um segmento, êle pertence à mediatriz do segmento.
   (d) Se duas retas coplanares são perpendiculares a uma mesma reta, elas são paralelas.
   (e) Num plano, existe no máximo uma reta perpendicular a uma reta dada num ponto dado desta reta.
   (f) $\sqrt{2}$ não é um número racional.
   (g) Zero não tem inverso multiplicativo.
2. Defina "mediatriz de um segmento".
3. Enuncie o Teorema da Mediatriz.
4. Copie cada triângulo certificando-se de que cada um é escaleno. Construa a mediatriz de cada lado de cada triângulo. Alguma das mediatrizes é bissetriz de um dos ângulos dos triângulos?



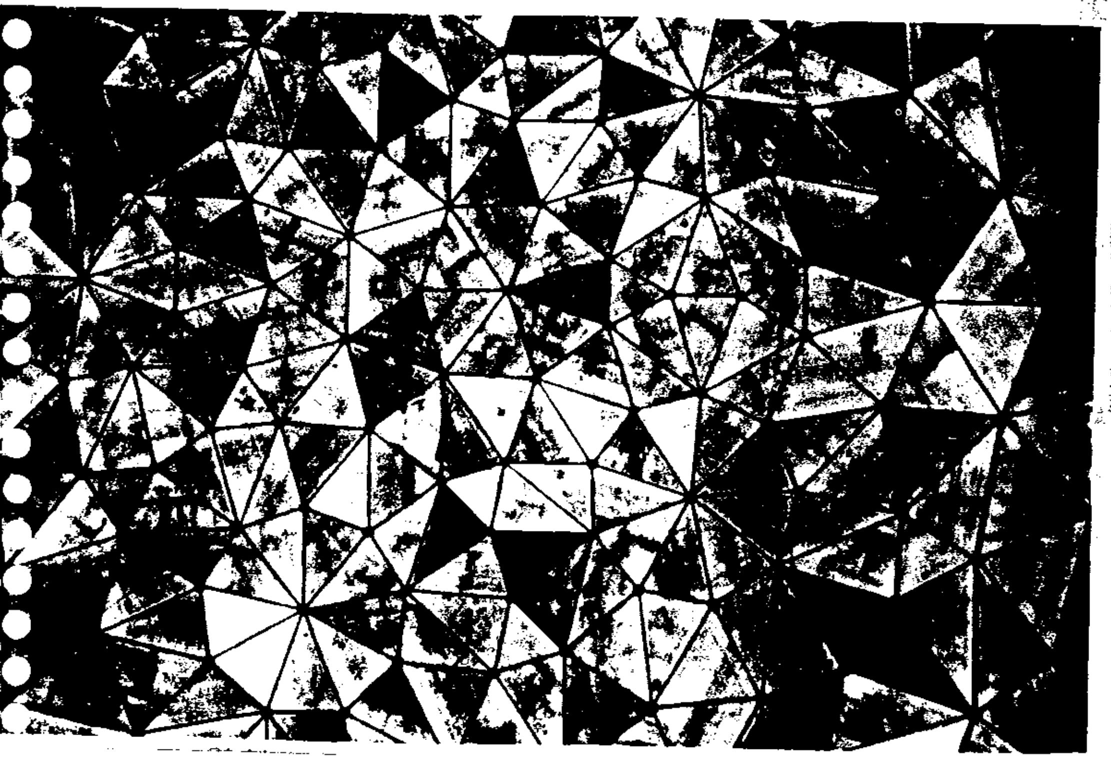
5. Indique, para cada afirmação abaixo, se ela é verdadeira ou falsa.
   (a) Num plano existe no máximo duas perpendiculares a uma reta por um ponto da mesma.
   (b) Demonstrar que "existe exatamente uma" significa demonstrar existência e unicidade.
   (c) O lado maior de qualquer triângulo é chamado hipotenusa.
   (d) Num triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é chamado hipótese.
6. Na figura, $AE = BC$, $ED = CD$, G é o ponto médio de $\overline{AB}$ e $\angle E \cong \angle C$. Demonstre que
$$\overline{DG} \perp \overline{AB}.$$



* 7. A reta L é a mediatriz de $\overline{BC}$ sendo A o ponto médio de $\overline{BC}$. Os pontos K e G estão num mesmo semiplano determinado por $\overleftrightarrow{BC}$. K e B estão num mesmo semiplano determinado por L, G e C também, de modo que $\angle BAK \cong \angle CAG$. A perpendicular a $\overline{BC}$ por B intercepta $\overrightarrow{AK}$ em D e a perpendicular a $\overline{BC}$ em C intercepta $\overrightarrow{AG}$ em E. Demonstre que $\overline{BE}$ intercepta $\overline{CD}$ em L.

* 8. $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são coplanares e congruentes. A mediatriz de $\overline{AD}$ e a mediatriz de $\overline{BC}$ se interceptam em X. Demonstre que $\Delta ABX \cong \Delta DCX$.

7 DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS



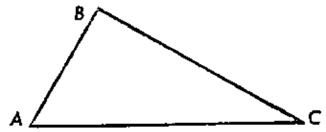
7-1. CONJECTURAS RAZOÁVEIS

Até agora, em nosso estudo da geometria do triângulo, lidamos apenas com condições sob as quais podemos dizer que dois segmentos têm comprimentos iguais ou que dois ângulos têm a mesma medida. Procederemos agora ao estudo de condições sob as quais poderemos dizer que um segmento é mais comprido que outro (isto é, tem um comprimento maior), ou um ângulo é mais aberto que outro (isto é, tem uma medida maior).

Não começaremos, entretanto, demonstrando teoremas. Começaremos, ao contrário, fazendo algumas conjecturas razoáveis sôbre tipos de afirmações que devem ser verdadeiras. (Estas afirmações não devem ser chamadas de teoremas até que sejam demonstradas.)

Olhemos o seguinte exemplo: Dado um triângulo com dois lados de comprimento desiguais, o que podemos dizer sôbre os ângulos opostos a êstes lados? Observe que êste problema é sugerido de forma natural pelo Teorema 5-3, que afirma: se dois lados de um triângulo têm o mesmo comprimento, então os ângulos opostos a êles têm a mesma medida.

Você pode investigar esta situação esboçando um triângulo com dois lados de comprimentos visìvelmente desiguais:



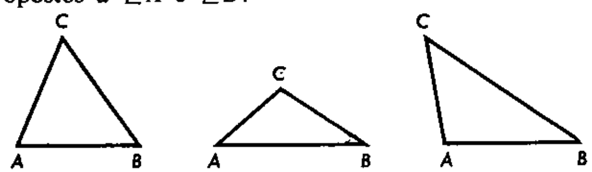
Aqui, BC é maior que AB e $m\angle A$ é maior que $m\angle C$. Depois de esboçar mais alguns exemplos, provàvelmente você estará convencido de que a seguinte afirmação deve ser verdadeira.

Se dois lados de um triângulo são de comprimentos desiguais, então os ângulos opostos a êles são de medidas desiguais e o maior ângulo se opõe ao maior lado.

Experimente, agora, o mesmo tipo de procedimento com os seguintes problemas.

Problemas 7-1

1. Em cada um dêstes triângulos, $m\angle A > m\angle B$. Que conjecturas pode você fazer sôbre os lados opostos a $\angle A$ e $\angle B$?

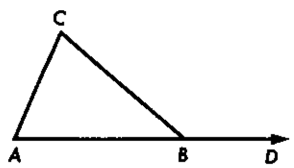


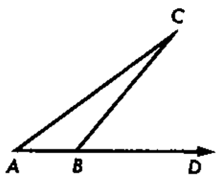
2. Considere três pontos quaisquer. Chame-os de A, B e C. É verdade que $AB + BC > AC$? Que se pode dizer de $BC + AC$ comparado com AB? E BC comparado com $AC + AB$? Que afirmação geral sugerem as respostas que você encontrou?
3. Considere vários triângulos escalenos de diferentes formas. Para cada um dêles, verifique qual o maior lado e o maior ângulo. Que conjectura deve ser verdadeira?
4. Desenhe os triângulos ΔRST e ΔABC tais que

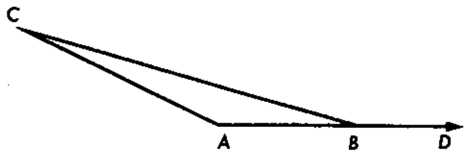
$$RS = AB, \qquad ST = BC, \qquad \text{e} \qquad m\angle RST > m\angle ABC.$$

Compare RT e AC.

5.







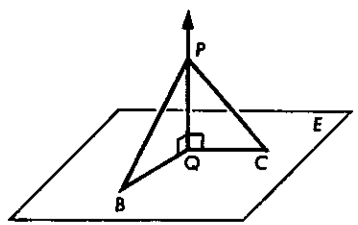
Que conjectura sôbre $m\angle CBD$ e $m\angle BAC$ é sugerida pelos triângulos vistos acima? Na terceira figura, se o vértice C fôsse removido para bem distante de A e B, à esquerda, a sua conjectura ainda se verificaria? Você é capaz de descobrir um meio de demonstrá-la?

6. Desenhe um triângulo, ΔMOP. Seja K um ponto entre M e o ponto médio de $\overline{MP}$; trace $\overline{KO}$. Para os triângulos ΔMOP e ΔKOP, temos $PO = PO$, $\angle P \cong \angle P$ e $MP > KP$. Uma pessoa apressada poderia pensar que $MO > KO$. Mostre que isto não acontece sempre.
7. São dados uma reta L e um ponto P, fora de L. Seja Q o pé da perpendicular a L por P e seja A um outro ponto de L. Que conjectura envolvendo PQ e PA parece ser verdadeira?

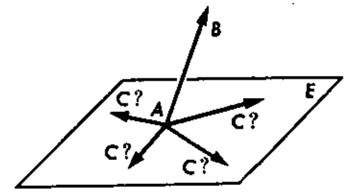
\+ 8. Verifique se o seguinte procedimento descreve um processo válido de dividir um ângulo em três partes de mesma medida. Faça alguns desenhos para ajudá-lo a decidir.

Sôbre os lados de um ângulo, $\angle A$, tome os pontos B e C de modo que $AB = AC$. Trace $\overline{BC}$ e divida êste segmento, com os pontos D e E, em três partes tais que $BD = DE = EC$. Trace $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AE}$. Então $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AE}$ dividem $\angle A$ em três partes de mesma medida.

\+ 9. $\overline{QC}$ e $\overline{QB}$ são segmentos não-colineares, contidos em um plano E. P é um ponto fora de E, tal que $\angle PQB$ e $\angle PQC$ são ângulos retos; $QC < QB$. Escreva uma proposição cuja conclusão relacione PB e PC e que você ache que é verdadeira.



*+ 10. A é um ponto num plano E, $\overrightarrow{AB}$ uma semi-reta não contida em E e $\overrightarrow{AC}$ uma semi-reta contida em E. Considerando diferentes posições de $\overrightarrow{AC}$, descreva tão cuidadosamente quanto possível as posições de $\overrightarrow{AC}$ que tornem $m\angle BAC$ o maior possível e o menor possível. Não se espera nenhuma demonstração, mas você deve dar a resposta com base em seu conhecimento do espaço.



7-2. DESIGUALDADES PARA NÚMEROS, SEGMENTOS E ÂNGULOS

As desigualdades entre segmentos e ângulos são definidas em têrmos dos números que medem êstes segmentos e ângulos.

Definição

$\overline{AB} < \overline{CD}$ se $AB < CD$.

Em palavras: Um segmento é *menor* que outro se seu comprimento fôr menor. Da mesma forma,

Definição

$\angle A < \angle B$ se $m\angle A < m\angle B$.

Antes de proceder ao estudo das desigualdades entre segmentos e ângulos, devemos recordar, da Seção 2-2, as leis que governam as desigualdades entre números.

O-1. TRICOTOMIA

Para todo x e y, uma e apenas uma das seguintes condições se verifica: $x < y$, $x = y$, $x > y$.

O-2. TRANSITIVIDADE

Se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$.

O-3. A LEI DA ADIÇÃO

Se $a < b$ e $x \leq y$, então $a + x < b + y$.

O-4. A LEI DA MULTIPLICAÇÃO

Se $x < y$ e $a > 0$, então $ax < ay$.

A álgebra que usaremos ao lidar com as desigualdades geométricas será muito simples. Não precisaremos nem mesmo de O-4. Precisaremos, entretanto, do seguinte teorema.

Teorema 7-1

Se $a = b + c$ e $c > 0$, então $a > b$.

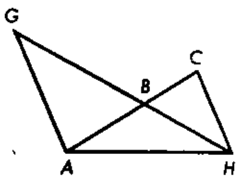
Demonstração. Como $a - b = c$, temos $a - b > 0$. Portanto

$$(a-b) + b > 0 + b \text{ e } a > b.$$

Problemas 7-2

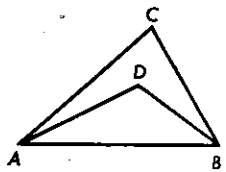
1. Para cada um dos seguintes exemplos, identifique a propriedade de ordem ilustrada.
   (a) Se $m > 7$ e $n < 7$, então $n < m$.
   (b) Se $4 < 6$, então $14 < 21$.
   (c) Se $AB < 13$, então $AB \neq 13$.
   (d) Se $x - y = 7$ e $y < 3$, então $x < 10$.
   (e) Se $\angle A < \angle C$ e $\angle B > \angle C$, então $\angle A < \angle B$.
   (f) Se $RS < GH$ e $ST < HK$, então $RS + ST < GH + HK$.

2. Se, na figura,
   $$AB < GB \quad \text{e} \quad BC < BH,$$
   demonstre que $AC \neq GH$.



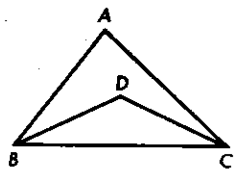
3. Os pontos A, B e C são colineares, da mesma forma que os pontos G, H e K o são. Os pontos estão dispostos de tal forma que $AB < GH$ e $BC < HK$. Conclui-se daí que $AC < GK$? Sim ou não? Por quê?

4. Dados: A figura com
   $$\angle DAB < \angle DBA \quad \text{e} \quad \angle DAC < \angle DBC.$$
   Demonstre: $\angle CAB < \angle CBA$.

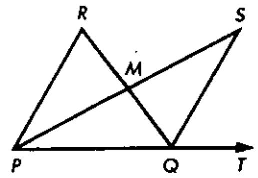


5. Explique cuidadosamente por que o Teorema 7–1 tem a seguinte conseqüência:
   Se D é um ponto interior de $\angle ABC$, então $\angle ABC > \angle ABD$ e $\angle ABC > \angle CBD$.

6. Na figura, $BD = CD$. Demonstre que
   $$\angle ABC > \angle DCB.$$



7. Dada a figura com M ponto médio de $\overline{PS}$ e $\overline{RQ}$, demonstre que $\angle RQT > \angle R$.



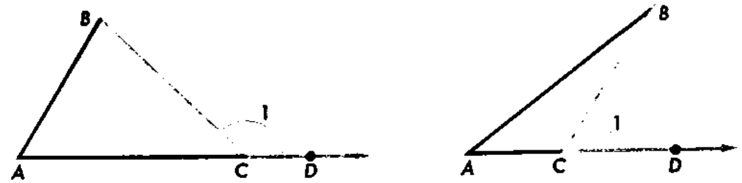
* 8. Use a Propriedade O-2 para demonstrar que qualquer número negativo é menor que qualquer número positivo.

* 9. Suponha que a Propriedade O-3 tenha sido enunciada, simplesmente, como:
   Quaisquer que sejam a, b e x, se $a < b$, então $a + x < b + x$.
   Mostre que a outra forma de O-3 deve seguir como um teorema:
   Quaisquer que sejam a, b, x e y, se $a < b$ e $x < y$, então $a + x < b + y$.
   [*Sugestão:* Demonstre que $a + x < b + x$ e $x + b < y + b$ e use O-2.]

*+ 10. Considere a figura do Problema 7, mas admita apenas a seguinte hipótese: S e P estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{RQ}$, P-Q-T, e S e R estão no mesmo lado de $\overleftrightarrow{PT}$. Demonstre que S está no interior de $\angle RQT$.

7-3. O TEOREMA DO ÂNGULO EXTERNO

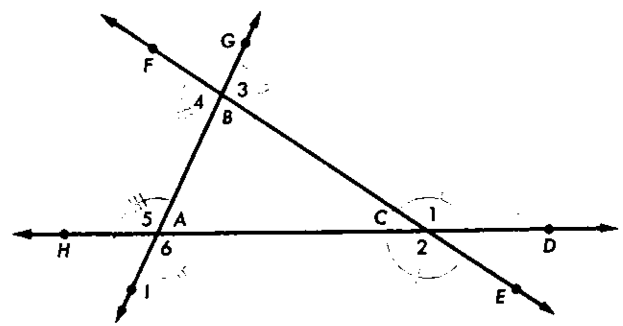
Nas figuras abaixo, $\angle 1$ é um *ângulo externo* do ΔABC:



Definição

Se C está entre A e D, então $\angle BCD$ é um ângulo externo de ΔABC.

Todo triângulo possui seis ângulos externos, como se vê na figura abaixo.



Êstes formam três pares de ângulos opostos pelo vértice; os ângulos em cada par são congruentes, como é indicado na figura.

Todo ângulo externo de um triângulo forma um par linear com um dos ângulos do próprio triângulo. Por exemplo, na figura, $\angle 1$ e $\angle C$ de ΔABC formam um par linear. Os outros dois ângulos do triângulo são chamados ângulos internos *não adjacentes.*

Definição

$\angle A$ e $\angle B$ do ΔABC são chamados ângulos internos *não adjacentes* aos ângulos externos $\angle BCD$ e $\angle ACE$.

Da mesma forma, $\angle A$ e $\angle C$ são os ângulos internos não adjacentes a $\angle ABF$ e $\angle CBG$.

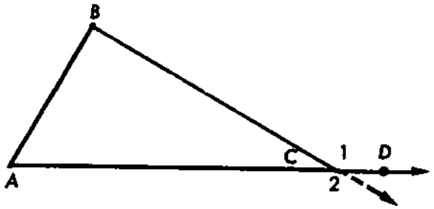
O teorema seguinte é a chave para o estudo das desigualdades geométricas.

Teorema 7-2. O Teorema do Ângulo Externo

Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um de seus ângulos internos não adjacentes.

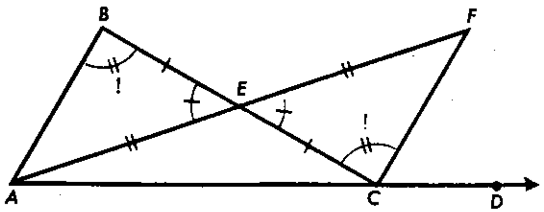
Re-enunciado: Dado ΔABC, com C entre A e D, então

$$\angle BCD > \angle B.$$



Primeiramente, observamos que o re-enunciado traduz, de fato, todo o conteúdo do teorema. O re-enunciado nos diz que $\angle 1 > \angle B$. Por uma mudança de notação (trocando A e B), concluímos que $\angle 2 > \angle A$. Desde que $\angle 1 \cong \angle 2$, segue-se que $\angle 1 > \angle A$. Portanto, $\angle 1$ é maior que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes.

Procedemos, agora, à demonstração.



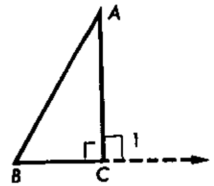
Demonstração

Afirmações	*Justificações*
1. Seja E o ponto médio de $\overline{BC}$.	?
2. Seja F um ponto da semi-reta oposta a $\overrightarrow{EA}$, tal que $EF = EA$.	?
3. $\angle BEA \cong \angle CEF$.	?
4. $\Delta BEA \cong \Delta CEF$.	?
5. $m\angle B = m\angle ECF$.	?
6. $m\angle BCD = m\angle ECF + m\angle FCD$.	Postulado da Adição de Ângulos
7. $m\angle BCD = m\angle B + m\angle FCD$.	Afirmações 5 e 6.
8. $m\angle BCD > m\angle B$.	Teorema 7-1.
9. $\angle BCD > \angle B$.	Definição de > para ângulos.

O Teorema do Ângulo Externo tem um corolário simples.

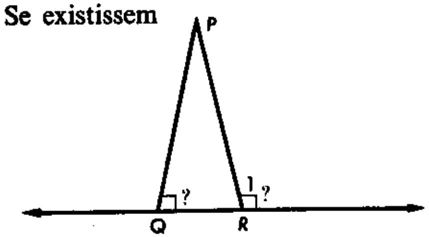
Corolário 7-2.1

Se um triângulo tem um ângulo reto, então seus outros ângulos são agudos.



(Se $\angle C$ é um ângulo reto, $\angle 1$ também o é. O Teorema do Ângulo Externo nos diz que $\angle 1 > \angle B$ e que $\angle 1 > \angle A$. Portanto $m\angle B < 90$ e $m\angle A < 90$.)

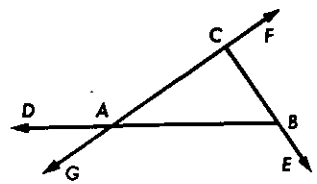
Se já conhecêssemos o Teorema do Ângulo Externo no último capítulo, poderíamos ter concluído de um modo muito mais simples que a perpendicular a uma reta, por um ponto fora dela, é única. Se existissem duas perpendiculares a L por P, então $\angle 1$ deveria ser congruente a $\angle PQR$, o que é impossível: $\angle 1$ é um ângulo externo de ΔPQR e $\angle PQR$ é um de seus ângulos internos não adjacentes.



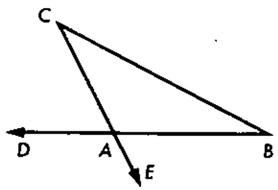
Problemas 7-3

1. (a) Na figura, dê os ângulos internos não adjacentes a $\angle ABE$.

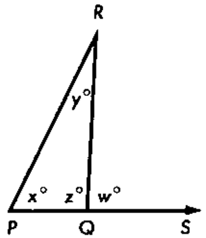
   (b) Que ângulo externo tem $\angle ABC$ e $\angle BAC$ como ângulos internos não adjacentes?



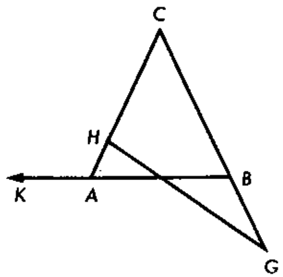
2. (a) Na figura, quais são os ângulos externos do triângulo ΔABC?
   (b) Qual a relação que existe entre $m\angle DAC$ e $m\angle B$? Por quê?
   (c) Qual a relação que existe entre $m\angle DAC$ e $m\angle BAE$? Por quê?
   (d) Qual a relação que existe entre $m\angle DAC$ e $m\angle BAC$? Por quê?

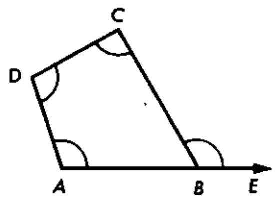


3. Use a figura apenas para interpretar a notação; copie em seu caderno e complete cada afirmação com base nos teoremas que você já viu demonstrados até aqui:
   (a) Se $x = 40$ e $y = 30$, então $w >$ ....
   (b) Se $x = 72$ e $y = 73$, então w ....
   (c) Se $y = 54$ e $z = 68$, então w ....
   (d) Se $w = 112$, então x ....
   (e) Se $w = 150$, então z ....
   (f) Se $x = 25$ e $z = 90$, então w ....
   (g) Se $z = 90$, então x .... e y ....

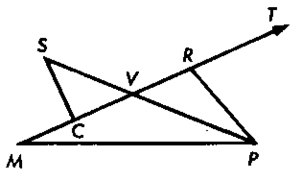


4. Dada a figura à esquerda, abaixo, demonstre que $\angle CAK > \angle G$.



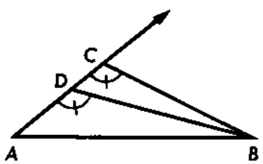


5. A figura à direita, acima, é uma ilustração desta afirmação: Um ângulo externo de um quadrilátero é maior que qualquer um de seus ângulos internos não adjacentes.
   Esta afirmação é verdadeira? Explique.
6. (a) Na figura, $\overrightarrow{PS}$ é bissetriz de $\angle RPM$.
   Demonstre que $\angle SCM > \angle SPM$.
   (b) Demonstre que se $\angle SCV \cong \angle PRV$, então $\angle PRT > \angle S$.



7. Dados dois segmentos quaisquer, $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$, pode-se afirmar alguma coisa a respeito de AB e DE que seja sempre verdade? O que é? Dê uma razão para sua resposta.

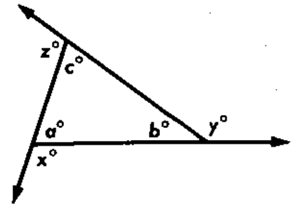
8. Explique porque as marcas na figura indicam uma situação impossível.



+ 9. Demonstre o seguinte teorema:
   A soma das medidas de dois ângulos quaisquer de um triângulo é menor que 180.

Reenunciado: Se os ângulos de um triângulo têm medidas como indicadas na figura, então

$$a + b < 180,$$
$$b + c < 180,$$
$$a + c < 180.$$

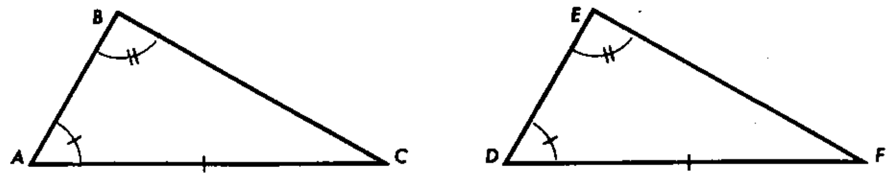


+ 10. Demonstre o seguinte teorema:
   Os ângulos da base de um triângulo isósceles são agudos.
   [*Sugestão:* Use o teorema do Problema 9.]

7-4. TEOREMAS DE CONGRUÊNCIA BASEADOS NO TEOREMA DO ÂNGULO EXTERNO

Definição

Dada uma correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$ entre dois triângulos:



se um par de lados correspondentes são congruentes e dois pares de ângulos correspondentes são congruentes, então a correspondência é chamada *correspondência LAA* (Aqui, evidentemente, LAA quer dizer Lado Ângulo Ângulo.)

Teorema 7-3. O Teorema LAA

Tôda correspondência LAA é uma congruência.

Se os lados congruentes são determinados pelos ângulos congruentes, então já sabemos, por ALA, que a correspondência é uma congruência. Podemos portanto, assumir, no reenunciado, que temos o tipo de correspondência sugerido pela figura acima.

Reenunciado: Dados ΔABC e ΔDEF, se

$$\angle A \cong \angle D, \qquad \angle B \cong \angle E, \qquad \text{e} \qquad \overline{AC} \cong \overline{DF},$$

então

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF.$$

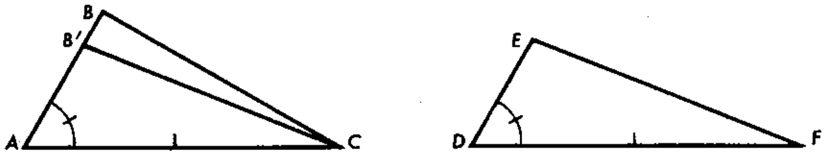
Demonstração. Há três possibilidades para AB e DE:

$$(1) \quad AB = DE,$$
$$(2) \quad AB < DE,$$
$$(3) \quad AB > DE.$$

Se (1) se verifica, então o teorema vale, porque, neste caso, $ABC \leftrightarrow DEF$ é uma correspondência LAL. Mostraremos que (2) e (3) são impossíveis.

Suponha que (2) se verifique: $AB < DE$. Seja B' o ponto de $\overrightarrow{AB}$ tal que $AB' = DE$. Então $\Delta AB'C \cong \Delta DEF$, por LAL. Portanto $\angle AB'C \cong \angle DEF$. Logo, $\angle ABC \cong \angle AB'C$. (Por quê?) Mas isto é impossível, porque o Teorema do Ângulo Externo nos diz que $\angle ABC > \angle AB'C$.

De um modo muito parecido, podemos mostrar que (3) $AB > DE$ é impossível. Você deve ser capaz de fornecer os detalhes.



Desde que (2) e (3) são impossíveis, (1) deve se verificar e $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ por LAL. Isto completa a demonstração.

Vimos, no último capítulo, que não existe o Teorema LLA. Isto é, uma correspondência LLA não é, necessàriamente, uma congruência. Para o caso de triângulos *retângulos*, porém, podemos demonstrar um teorema dêsse tipo.

Teorema 7-4

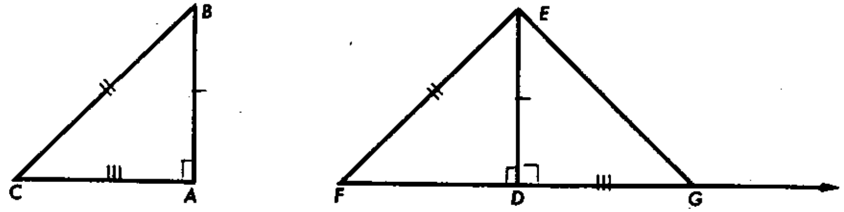
É dada uma correspondência entre dois triângulos retângulos. Se a hipotenusa e um cateto de um dos triângulos são congruentes às partes correspondentes do segundo triângulo, então a correspondência é uma congruência.

Reenunciado: São dados ΔABC e ΔDEF, tais que

$$m\angle A = m\angle D = 90,$$
$$AB = DE, \qquad BC = EF.$$

Então

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF.$$



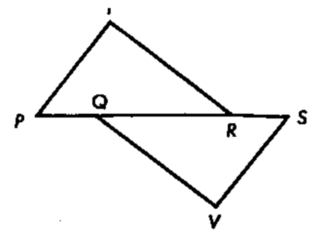
Demonstração

Afirmações	*Justificações*
1. Existe um ponto G, na semi-reta oposta a $\overrightarrow{DF}$, tal que $DG = AC$.	?
2. $\Delta DEG \cong \Delta ABC$.	?
3. $EG = BC$.	?
4. $\angle G \cong \angle C$.	?
5. $EG = EF$.	Passagem 3 e hipótese.
6. $\angle F \cong \angle G$.	?
7. $DEF \cong \Delta DEG$.	Passagens 5 e 6 e LAA.
8. $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.	Passagens 2 e 7.

Problemas 7-4

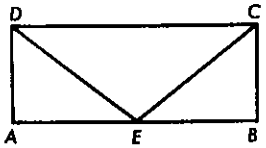
1. Faça um sumário de todos os métodos que você conhece, até agora, para demonstrar congruência entre triângulos.

2. Dados: $\overline{PT} \perp \overline{RT}$, $\overline{SV} \perp \overline{QV}$, $RT = QV$, $PQ = SR$.
   Demonstre: $PT = SV$.



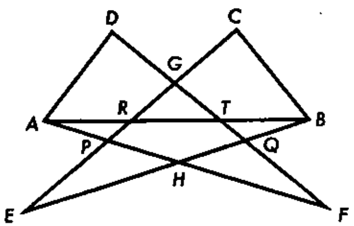
3. Na figura, $\overline{CD}$ divide $\overline{AB}$ ao meio e $\angle C \cong \angle D$. Demonstre que $\overline{AB}$ divide CD ao meio.

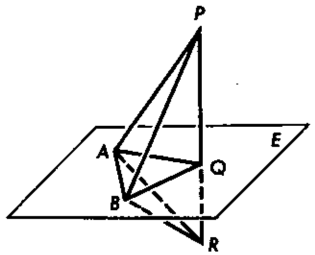
4. Dados $\angle K \cong \angle J$ e $MR = NR$. Demonstre: $MK = NJ$.
5. A partir do ponto médio de um lado de um triângulo, traçam-se segmentos perpendiculares aos outros dois lados. Demonstre que, se os segmentos são congruentes, o triângulo é isósceles.



6. Dados: E é o ponto médio de $\overline{AB}$, $\overline{AD} \perp \overline{AB}$, $\overline{BC} \perp \overline{AB}$ e $\angle ADE \cong \angle BCE$.
   Demonstre: $\angle EDC \cong \angle ECD$.
7. Os pontos K e M dividem $\overline{GH}$ em três partes congruentes, com G-K-M. Os pontos J e I, do mesmo lado de $\overleftrightarrow{GH}$, estão sôbre as perpendiculares a $\overline{GH}$ por G e H, respectivamente, de tal modo que $JM = IK$. $\overline{JM}$ e $\overline{IK}$ se interceptam em P. Demonstre que ΔPKM é isósceles.

* 8. É dada a figura, com os ângulos retos $\angle D$ e $\angle C$ e $\Delta APR \cong \Delta BQT$. Demonstre que $\Delta ADF \cong \Delta BCE$.





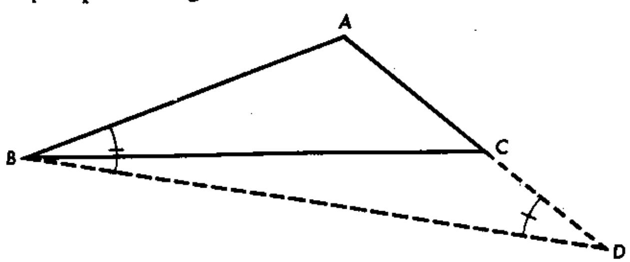
*+ 9. A, B e Q estão no plano E, $\overline{AQ} \perp \overline{PR}$, $\overline{BQ} \perp \overline{PR}$ e $\angle PAB \cong \angle PBA$. Demonstre que $\angle PAR \cong \angle PBR$.

7-5. DESIGUALDADES NUM TRIÂNGULO

Procederemos, agora, à demonstração de alguns dos teoremas que foram motivo para nossas conjecturas no início do capítulo.

Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a êles não são congruentes e o maior ângulo se opõe ao maior lado.

Reenunciado: Em qualquer triângulo ΔABC, se $AB > AC$, então $\angle C > \angle B$.



Demonstração. Seja D um ponto de $\overrightarrow{AC}$, tal que $AD = AB$. Então $\angle ABD \cong \angle D$, porque os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes. Desde que $AD = AB > AC$, C deve estar entre A e D. Portanto, pelo Postulado da Adição de Ângulos,

$$m\angle ABD = m\angle ABC + m\angle CBD.$$

Portanto

$$m\angle ABC < m\angle ABD.$$

(Por quê?) Estamos, até agora, usando medidas de ângulos, e assim reescrevemos o que está acima simplesmente como

$$ABC < \angle ABD.$$

Como $\angle ABD \cong \angle D$, segue-se que $\angle ABC < \angle D$.

Mas sabemos pelo Teorema do Ângulo Externo que

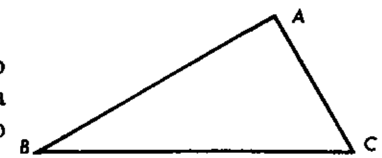
$$\angle D < \angle ACB.$$

Portanto

$$\angle ABC < \angle ACB.$$

Portanto, em ΔABC, temos $\angle B < \angle C$, como queríamos demonstrar.

Teorema 7-6



Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a êstes ângulos não são congruentes e o maior lado se opõe ao maior ângulo.

Reenunciado: Em qualquer triângulo ΔABC, se $\angle C > \angle B$, então $AB > AC$.

Demonstração. Há três possibilidades para os números AB e AC:

$$(1) \quad AB < AC,$$
$$(2) \quad AB = AC,$$
$$(3) \quad AB > AC.$$

Se (1) fôsse verdade, então seguiria pelo teorema precedente que $\angle C < \angle B$ e isto é falso. Portanto (1) não é possível.

Se (2) fôsse verdade, então $\angle B$ e $\angle C$ seriam os ângulos da base de um triângulo isósceles. Disto, resultaria que $\angle B \cong \angle C$, o que é falso. Portanto, (2) não é possível.

A única possibilidade restante é (3), que é o que queríamos demonstrar.

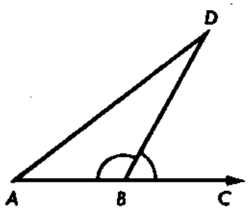
O que está acima é, simplesmente, um modo conveniente de escrever uma demonstração indireta. Poderíamos ter dito a mesma coisa, de um modo mais formal, como se segue:

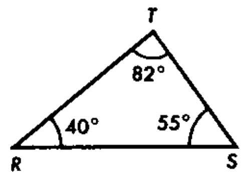
"Suponha que o teorema é falso. Então, $AB = AC$ ou $AB < AC$. $AB = AC$ é impossível, porque .... $AB < AC$ é impossível porque .... Portanto, o teorema não é falso. Logo, é verdadeiro".

Mas o esquema que usamos, antes, é pròvàvelmente mais simples de se seguir e vamos usá-lo novamente. A idéia é fazer uma lista de tôdas as "possibilidades" numa dada situação e então mostrar que apenas uma delas é, de fato, possível.

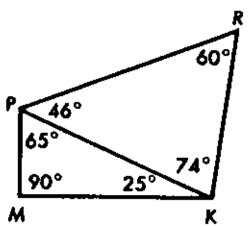
Problemas 7-5

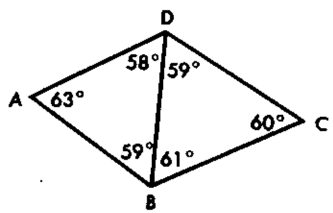
1. No ΔABC, $AB = 12$, $BC = 7$ e $AC = 9$. Dê o maior ângulo e também o menor.
2. No ΔPQR, $m\angle P = 72$, $m\angle Q = 37$, $m\angle R = 71$. Dê o maior lado e também o menor.
3. Na figura, $\angle ABD > \angle DBC$. Demonstre que $AD > BD$.



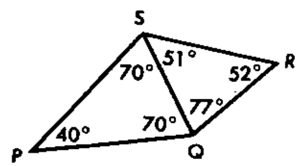


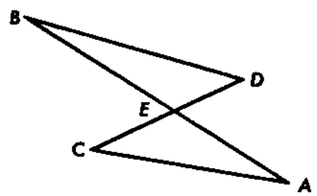
4. Dê todos os lados, da figura acima, à direita, na ordem crescente de comprimento.
5. É dada a figura à esquerda, abaixo, com os ângulos medindo como indicado. Demonstre que $\overline{PR}$ é o maior segmento.





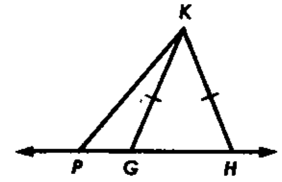
6. Na figura à direita, acima, se os ângulos têm as medidas indicadas, qual é o segmento de maior comprimento?
7. Se os ângulos têm as medidas indicadas, qual é o menor segmento?

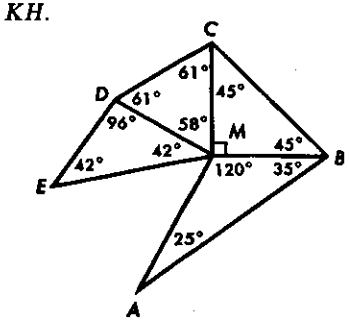




8. $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ se interceptam em E, $\angle C > \angle A$ e $\angle D > \angle B$. Demonstre que $AB > CD$.

* 9. No triângulo isósceles ΔKGH, $KG = KH$; P é um ponto de $\overleftrightarrow{GH}$ não em $\overline{GH}$. Demonstre que PK é sempre maior que KG e KH.





* 10. Se os ângulos, na figura à direita, acima, têm as medidas indicadas, qual é o menor segmento?

7-6. TEOREMAS RECÍPROCOS

Os Teoremas 7-5 e 7-6 estão relacionados de um modo muito especial; são chamados *recíprocos* um do outro. A relação entre êles é mais fàcilmente percebida se nós os enunciarmos da seguinte forma:

Teorema 7-5′

Dado ΔABC, se $AB > AC$, então $\angle C > \angle B$.

Teorema 7-6′

Dado ΔABC se $\angle C > \angle B$, então $AB > AC$.

Tivemos muitas vêzes esta situação, antes. Por exemplo:

Teorema 5-3

Se dois lados de um triângulo são congruentes, então os ângulos opostos a êstes lados são congruentes.

Teorema 5-4

Se dois ângulos de um triângulo são congruentes, então os lados opostos a êstes ângulos são congruentes.

Aqui, também, a relação se torna mais clara se enunciarmos os teoremas de outra forma.

Teorema 5-3′

Dado ΔABC, se $AB = AC$, então $\angle C \cong \angle B$.

Teorema 5-4′

Dado ΔABC, se $\angle C \cong \angle B$, então $AB = AC$.

Após demonstrarmos um teorema que tenha a forma simples "se ...., então ....", é, usualmente, uma boa idéia investigar a afirmação recíproca. *Precisamos* fazer uma investigação separada em cada caso, porque pode, fàcilmente, acontecer que a recíproca não seja um teorema. Por exemplo, sabemos que se dois ângulos são opostos pelo vértice, então êles são congruentes. A recíproca diz que se dois ângulos são congruentes, então são opostos pelo vértice; isto não é apenas uma frase falsa, mas também ridícula. Da mesma forma, se $x = y$, então $x^2 = y^2$. A afirmação recíproca diria que se $x^2 = y^2$, então $x = y$. Assim, a recíproca é falsa: não prevê a possibilidade $x = -y$.

Se acontece que um teorema e seu recíproco são verdadeiros, então podemos combiná-los em um teorema único, usando a frase "*se, e sòmente se*". Por exemplo, podemos combinar os Teoremas 7-5 e 7-6 da seguinte forma:

Teorema

Dado ΔABC, $AB > AC$ se, e sòmente se, $\angle C > \angle B$.

Do mesmo modo, podemos combinar os Teoremas 5-3 e 5-4 assim:

Teorema

Dois ângulos de um triângulo são congruentes se, e sòmente se, os lados opostos a êles são congruentes.

Problemas 7-6

1. Escreva a recíproca de cada afirmação. Tente decidir se a afirmação e a recíproca são verdadeiras ou falsas.
   (a) Se você tem mais de 20 anos, então você tem o direito de votar.
   (b) Você vê leões e elefantes, se você está na África.
   (c) Qualquer pessoa que tenha escarlatina, está sèriamente doente.
2. Siga as instruções do Problema 1.
   (a) Se dois ângulos são congruentes, êles são ângulos retos.
   (b) Se dois ângulos formam um par linear, então êles são suplementares.
   (c) Um ponto sôbre a mediatriz de um segmento é equidistante das extremidades do segmento.
   (d) Dois ângulos são agudos se são complementares.
3. Quando se pediu que desse a recíproca da afirmação: "Se eu segurar um fósforo aceso por muito tempo, queimar-me-ei", João disse: "Queimar-me-ei, se segurar um fósforo aceso por muito tempo". A afirmação de João é a recíproca da afirmação original? Discuta o problema.

4. (a) É verdadeira a recíproca de tôda afirmação verdadeira? Justifique a resposta.
   (b) A recíproca de uma afirmação falsa pode ser verdadeira? Justifique a resposta.
5. Combine os seguintes teoremas em um único, usando "se, e sòmente se,".

   Todo triângulo equilátero é equiângulo.
   Todo triângulo equiângulo é equilátero.
6. Separe o seguinte teorema em dois, na forma "se..., então...":

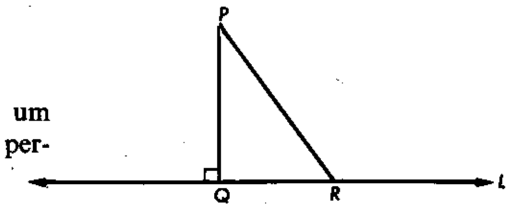
   Um triângulo é equilátero se, e sòmente se, a bissetriz de cada ângulo do triângulo é a mediatriz do lado oposto.

   Qual dos dois teoremas corresponde à parte que vem depois de "sòmente se" no teorema enunciado?

7-7. DISTÂNCIA ENTRE UMA RETA E UM PONTO. A DESIGUALDADE TRIANGULAR

Teorema 7-7

O menor segmento ligando um ponto a uma reta é o segmento perpendicular à reta.



Reenunciado: É dada uma reta L e um ponto P fora de L. Se $\overline{PQ} \perp L$ em Q e R é um ponto qualquer de L, então $PQ < PR$.

Demonstração. Por hipótese, $m\angle Q = 90$. Pelo Corolário 7-2.1, $\angle R$ é agudo. Assim, $m\angle R < m\angle Q$. Pelo Teorema 7-6, $PR > PQ$.

A distância entre um ponto P e uma reta L deve ser a distância *mínima* entre P e os pontos de L. À luz do teorema precedente, sabemos que existe esta distância mínima e onde ocorre. Podemos, portanto, escrever nossa definição da seguinte forma:

Definição

A *distância* entre uma reta e um ponto fora dela é o comprimento do segmento perpendicular à reta pelo ponto. A distância entre uma reta e um ponto na própria reta é definida como 0.

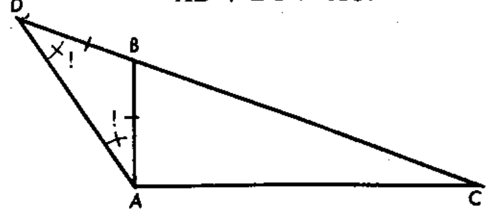
O teorema seguinte nos diz, sem nenhuma surprêsa, que "não se corta caminho dando voltas".

Teorema 7-8. A Desigualdade Triangular

A soma dos comprimentos de dois lados quaisquer de um triângulo é maior que o comprimento do terceiro lado.

Re-enunciado: Num triângulo qualquer ΔABC, temos

$$AB + BC > AC.$$



Demonstração. Seja D um ponto da semi-reta oposta a $\overrightarrow{BC}$, de tal modo que $BD = BA$, como está indicado na figura. Então

$$DC = DB + BC$$

porque B está entre D e C. Portanto

$$(1) \quad DC = AB + BC.$$

Ora

$$m\angle DAC = m\angle DAB + m\angle BAC$$

porque B está no interior de $\angle DAC$. Portanto

$$m\angle DAC > m\angle DAB.$$

Mas

$$m\angle D = m\angle DAB$$

porque $BD = BA$. Portanto

$$(2) \quad m\angle DAC > m\angle D.$$

Aplicando o Teorema 7-6 ao triângulo ΔADC, obtemos

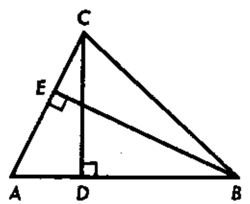
$$(3) \quad DC > AC.$$

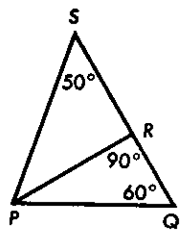
Combinando (1) e (3), obtemos $AB + BC > AC$, como queríamos demonstrar.

Problemas 7-7

1. Copie em seu caderno, preencha os espaços em branco e enuncie os teoremas usados.

   Para a figura à esquerda, abaixo, podemos afirmar que $CD <$ .... e $CD <$ .... e que $BE <$ .... e $BE <$ ....





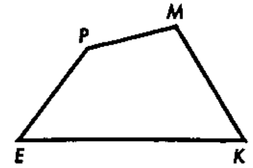
2. Copie em seu caderno e preencha os espaços em branco.

   Usando as medidas dos ângulos vistos na figura, coloque PS, PR e PQ na ordem correta. .... < .... < .... Cite os teoremas nos quais se baseiam suas conclusões.

3. Demonstre que a soma dos comprimentos das diagonais de um quadrilátero é menor que o perímetro do mesmo.

4. Dada a figura, demonstre que

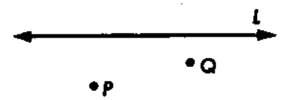
$$EP + PM + MK > EK.$$



5. Você pode resolver êste problema através de experiências com casos particulares ou, talvez, raciocinando. Suponha que você tenha que desenhar um triângulo tendo dois lados de comprimento 3 cm e 7 cm. O terceiro lado deve ter comprimento menor que .... e maior que ....

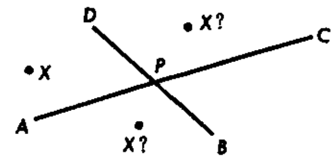
6. Dois lados de um triângulo têm comprimentos j e k. Se $j < k$, quais são as restrições sôbre x, o comprimento do terceiro lado?

7. São dados uma reta L e dois pontos, P e Q, de um mesmo lado de L. Ache o ponto R de L para o qual $PR + RQ$ é o menor possível. [*Sugestão:* Isto é fácil se você resolveu o Problema 6 de Problemas 6-4.]



8. São dados dois segmentos, $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, interceptando-se em P. Demonstre que se X é um ponto do plano de $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, distinto de P, então

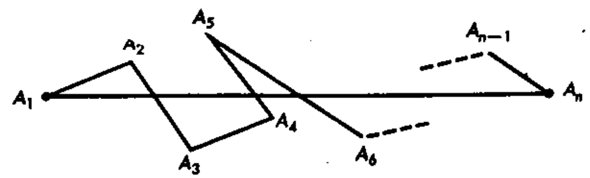
$$XA + XB + XC + XD$$
$$> PA + PB + PC + PD.$$



   Êste resultado valerá se X não estiver no plano de $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$?

*+ 9. Sejam A, B e C três pontos não necessàriamente distintos. Demonstre que $AB + BC \geq AC$. (Há diversos casos a considerar.)

*+ 10. Demonstre que a menor poligonal de um ponto a outro é o segmento que os une.

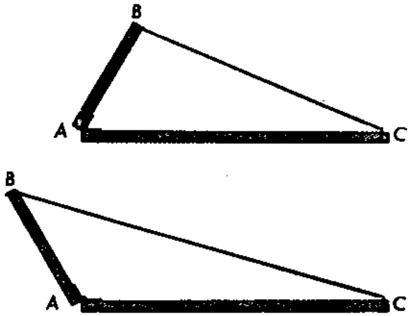


Re-enunciado: Dados n pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, demonstre que

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n \geq A_1A_n.$$

7-8. O TEOREMA DA DOBRADIÇA E SEU RECÍPROCO

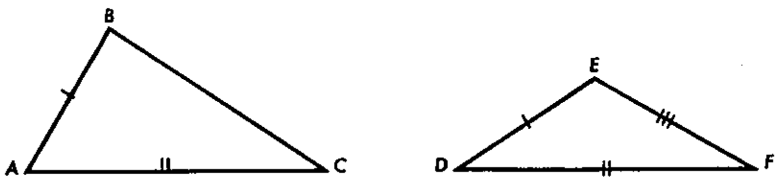
Considere duas varetas, ligadas por uma dobradiça em A, com as outras extremidades B e C ligadas por um elástico. Conforme a dobradiça se abre, o elástico se torna mais longo. Pondo êste fato em linguagem geométrica, obtemos o seguinte teorema.



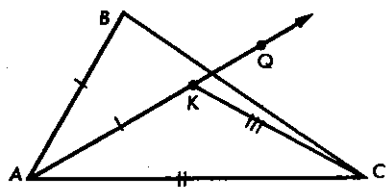
Teorema 7-9. O Teorema da Dobradiça

Se dois lados de um triângulo são congruentes, respectivamente, a dois lados de um segundo triângulo e se o ângulo determinado por êles no primeiro triângulo é maior que o ângulo correspondente no segundo, então o terceiro lado do primeiro triângulo é maior que o terceiro lado do segundo.

Re-enunciado: Dados os triângulos ΔABC e ΔDEF, com $AB = DE$ e $AC = DF$, se $\angle A > \angle D$, então $BC > EF$. (Você pode achar que esta nova forma é muito mais simples de se entender que o próprio teorema.)

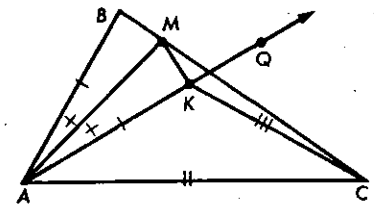


Demonstração. 1.ª *passagem.* Primeiramente, construímos ΔAKC, com K no interior de $\angle BAC$, de tal modo que $\Delta AKC \cong \Delta DEF$:



Para fazer isto, tomamos, em primeiro lugar, $\overrightarrow{AQ}$ com Q e B de um mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$, de tal modo que $\angle QAC \cong \angle D$ (pelo Postulado da Construção de um Ângulo). Tomamos então um ponto K de $\overrightarrow{AQ}$ tal que $AK = DE$ (pelo Teorema 2-1). Por LAL, temos $\Delta AKC \cong \Delta DEF$, que é o que queríamos.

2.ª *passagem.* Agora, dividimos $\angle BAK$ ao meio e seja M o ponto onde a bissetriz intercepta $\overline{BC}$.



Estamos, agora, com a demonstração quase pronta. Por LAL, temos

$$\Delta AMB \cong \Delta AMK.$$

Portanto $MB = MK$. Aplicando a Desigualdade Triangular (Teorema 7-8) ao ΔCKM, obtemos

$$CK < CM + MK.$$

Portanto

$$CK < CM + MB$$

porque $MB = MK$. Desde que

$$CK = EF \text{ e } CM + MB = BC,$$

temos

$$EF < BC,$$

que é o que queríamos.

O recíproco do Teorema da Dobradiça também é verdadeiro.

Teorema 7-10. O Recíproco do Teorema da Dobradiça

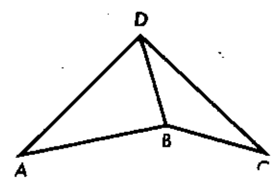
Se dois lados de um triângulo são congruentes, respectivamente, a dois lados de um segundo triângulo e se o terceiro lado do primeiro triângulo é maior que o terceiro lado do segundo, então o ângulo determinado pelos dois lados, no primeiro triângulo, é maior que o ângulo determinado pelos lados correspondentes no segundo.

Re-enunciado: Dados os triângulos ΔABC e ΔDEF, com $AB = DE$ e $AC = DF$, se $BC > EF$, então $\angle A > \angle D$.

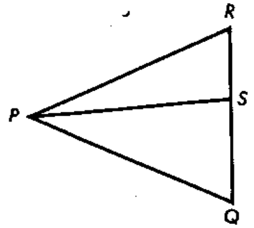
Para deduzir êste teorema do Teorema da Dobradiça, usamos o mesmo método aplicado para deduzir o Teorema 7-6 do Teorema 7-5. Ou seja, mostramos que $\angle A < \angle D$ e $\angle A \cong \angle D$ são impossíveis, de modo que a única possibilidade restante é $\angle A > \angle D$. Para a primeira metade da demonstração, precisamos do Teorema da Dobradiça; para a segunda, precisamos de LAL. Você deve fornecer os detalhes restantes sòzinho.

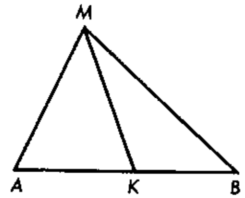
Problemas 7-8

1. Na figura, $AD = CD$ e $\angle ADB > \angle CDB$. Demonstre que $AB > BC$.

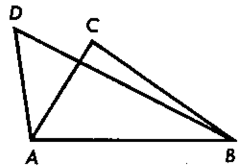


2. No triângulo isósceles ΔPQR, S é um ponto da base que não é o ponto médio. Demonstre que $\overline{PS}$ não divide $\angle RPQ$ ao meio.



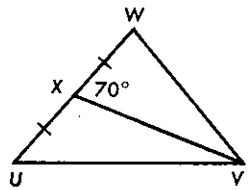


3. São dados: o triângulo ΔABM com a mediana $\overline{MK}$ e $\angle MKB > \angle MKA$. Demonstre: $AM < MB$.



4. ΔABC e ΔABD têm em comum o lado $\overline{AB}$ e $AC = AD$. Se C está no interior de $\angle DAB$, demonstre que $BD > BC$.

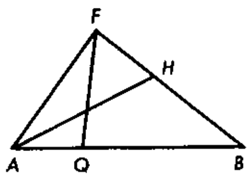
5. No triângulo ΔRST, $RT > ST$ e M é o ponto médio de $\overline{RS}$. $\angle TMR$ é agudo ou obtuso? Explique a resposta.

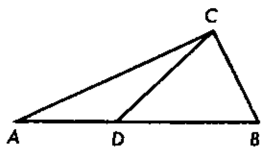


6. Dada a figura ao lado, demonstre que

$$\angle W > \angle U.$$

7. Na figura, $FH = AQ$ e $AH > FQ$. Demonstre que $AB > FB$.



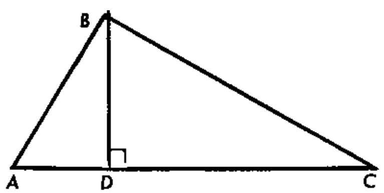


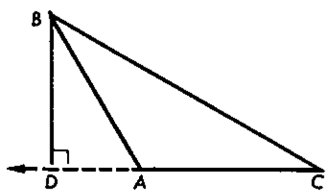
* 8. Dada a figura com $AD = BC$, demonstre que $AC > DB$.

* 9. No ΔABC, A-F-C e A-D-B de tal modo que $FC = DB$. Se $AB > AC$, demonstre que $FB > CD$.

7-9. ALTURAS DE TRIÂNGULOS

Em cada uma das figuras abaixo, o segmento $\overline{BD}$ é uma *altura* do triângulo ΔABC:





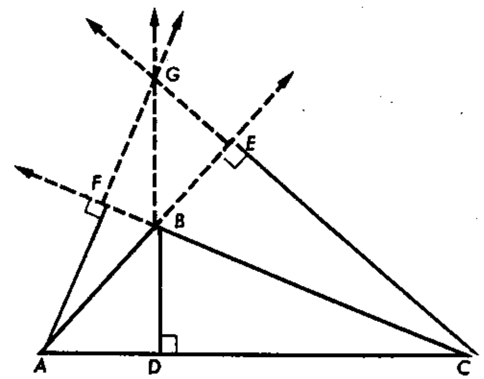
Em cada caso, $\overline{BD}$ é o segmento perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$ por B e é chamado *altura* de B a $\overleftrightarrow{AC}$. Note que o pé dêste segmento perpendicular não está, necessàriamente, no segmento $\overline{AC}$. Mas todos os casos são levados em conta na seguinte definição.

Definição

Uma *altura* de um triângulo é um segmento perpendicular, por um vértice do triângulo, à reta que contém o lado oposto.

[*Pergunta:* É possível para uma altura de um triângulo ser um *lado* do triângulo? Caso afirmativo, em que condições isto acontece?]

Evidentemente, todo triângulo tem três alturas, uma a partir de cada vértice, como é visto abaixo:



Aqui, $\overline{BD}$ é a altura por B, $\overline{AF}$ a altura por A e $\overline{CE}$ a altura por C. Observe que neste caso particular, ainda que nenhum dos segmentos $\overline{BD}$, $\overline{AF}$ e $\overline{CE}$ têm ponto em comum, as retas que os contêm parecem se interceptar em um ponto G.

Infelizmente, a mesma palavra "altura" é usada de dois outros modos.

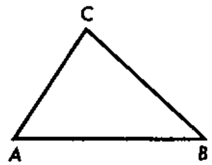
(1) Algumas vêzes, o *comprimento* de uma altura é, também, chamado altura. Assim, se a distância BD é 6, podemos dizer que a altura por B é 6.

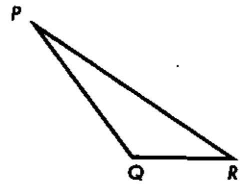
(2) Uma *reta contendo* uma altura também é chamada altura. Assim, na figura acima, as retas $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{AF}$ e $\overleftrightarrow{CE}$ podem ser chamadas de alturas. Êste é o modo como usaremos a palavra, no Cap. 15, ao mostrar que as três alturas de um triângulo sempre se interceptam em um ponto. Se uma altura tivesse que ser um segmento, êste teorema seria, evidentemente, falso como se vê na figura acima.

Êste triplo uso de uma única palavra pode, fàcilmente, levar a dúvidas, mas, em geral, isso não acontece porque, em muitos casos, podemos inferir do contexto qual o significado pretendido.

Problemas 7-9

1. Copie o ΔABC. Note que é escaleno. Trace a bissetriz do ângulo $\angle C$. Depois, coloque a mediana de C a $\overline{AB}$. Finalmente, trace a altura de C a $\overline{AB}$. Se você tomou cuidado, verá que êstes segmentos são distintos. Em que espécie de triângulo a bissetriz, a mediana e altura seriam o mesmo segmento?



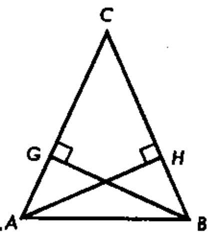


2. Copie o triângulo obtuso ΔPQR e trace as três alturas.

3. Demonstre que a altura relativa à base de um triângulo isósceles é também uma mediana.

4. Demonstre o seguinte teorema:

   As alturas relativas aos lados congruentes de um triângulo isósceles são congruentes.



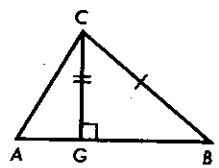
(A figura mostra o caso em que $m\angle C < 90$. Considere, também, $m\angle C = 90$ e $m\angle C > 90$.)

5. Demonstre: As alturas de um triângulo equilátero são congruentes.
6. Demonstre a recíproca do teorema do Problema 4:

   Se duas alturas de um triângulo são congruentes, o triângulo é isósceles.

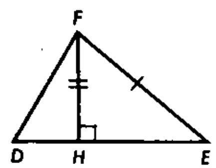
7. Demonstre o seguinte teorema:

   Dada a correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$, se $AB = DE$, $BC = EF$ e a altura por C é congruente à altura por F, então a correspondência é uma congruência.



Dados: $AB = DE$ e $BC = EF$. Alturas $\overline{CG}$ e $\overline{FH}$, com $CG = FH$.

Demonstre: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.



8. Demonstre que o perímetro de um triângulo é maior que a soma das três alturas.

Revisão do Capítulo

1. Para cada exemplo, identifique a propriedade de ordem ilustrada:

   (a) Se $r > 6$ e $6 > t$, então $t < r$.

   (b) Se $MP = 3$ e $RS = 7$, então $MP + RS = 10$.

   (c) Se $DK \geq 11$ e $DK \leq 11$, então $DK = 11$.

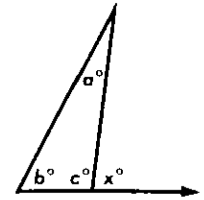
2. Se D é um ponto no interior de $\angle ABC$, explique porque $\angle ABC > \angle DBC$.

3. Copie e complete:

   Se $a = 20$, então x ....

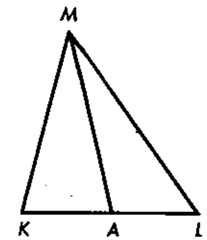
   Se $b = 65$, então x ....

   Se $c = 100$, então x ....

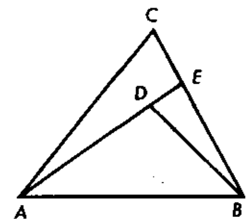


4. Defina distância entre um ponto e uma reta. Defina altura de um triângulo.

5. Demonstre: Se uma mediana de um triângulo não é perpendicular ao lado que divide ao meio, então pelo menos dois lados do triângulo não são congruentes.



6. Três cabos de metal de igual comprimento mantêm a prumo uma árvore recentemente plantada, ao nível do solo. Se os três cabos se prendem à árvore na mesma altura, serão êles presos ao solo a iguais distâncias do pé da árvore? Por quê?
7. Em um triângulo equilátero, uma mediana, uma bissetriz e uma altura são traçadas a partir de vértices diferentes. Como serão seus comprimentos, quando comparados?



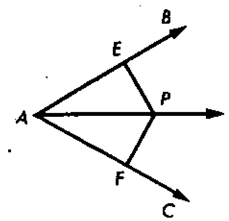
8. Dada a figura, demonstre que $\angle ADB > \angle C$.

9. Em ΔABC, $AC > AB$. Demonstre que se D é um ponto entre B e C, então $AD < AC$.
10. Demonstre o seguinte teorema:

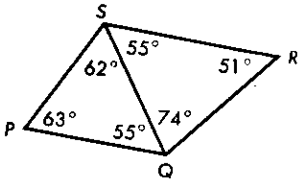
    Qualquer ponto da bissetriz de um ângulo é equidistante dos lados do ângulo.

Dados: $\overrightarrow{AP}$ é bissetriz de $\angle BAC$,
$\overline{PE} \perp \overrightarrow{AB}$,
$\overline{PF} \perp \overrightarrow{AC}$.

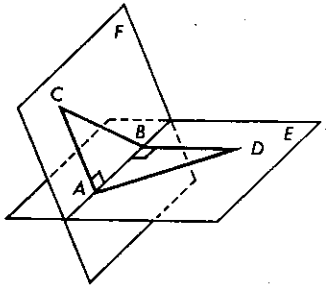
Demonstre: $PE = PF$.



11. Com os ângulos tendo as medidas indicadas na figura, qual é o menor segmento? Explique seu raciocínio.



12. Os planos E e F se interceptam em $\overleftrightarrow{AB}$. C é um ponto em F e D um ponto em E. $CB = AD$. $\overline{CA} \perp \overline{AB}$ e $\overline{DB} \perp \overline{AB}$. Demonstre que $CA = DB$.

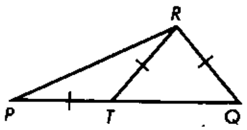


13. Traçam-se três segmentos, a partir de um ponto interior de um triângulo, até os três vértices, tendo comprimentos r, s e t. Demonstre que $r + s + t$ é maior que metade do perímetro do triângulo.

14. Demonstre: Se $\overline{AM}$ é uma mediana de ΔABC, então os segmentos perpendiculares a $\overleftrightarrow{AM}$ por B e C são congruentes.

15. Na figura, $PT = TR = RQ$. Demonstre que

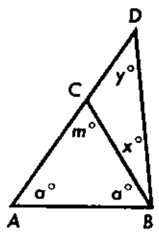
$$PR > RQ.$$



* 16. Demonstre o seguinte teorema:

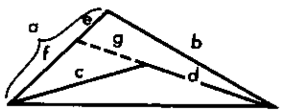
Se dois segmentos oblíquos (não perpendiculares) são traçados até uma reta, a partir de um ponto de uma perpendicular à reta, o segmento cuja extremidade, na reta, estiver mais afastada do pé da perpendicular, é o segmento maior.

* 17. Dados: $AC = BC$, $AB < AC$ e A-C-D. Demonstre que ΔABD é escaleno.

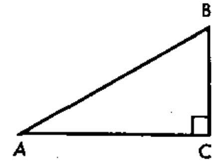


* 18. Demonstre: A soma das distâncias de um ponto no interior de um triângulo, às extremidades de um lado é menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados; isto é, demonstre que

$$a + b > c + d.$$



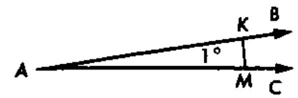
* 19. Em ΔABC, $\angle C$ é um ângulo reto. Se $m\angle B = 2m\angle A$, então $AB = 2BC$. [*Sugestão:* Introduza a bissetriz de $\angle B$.]



* 20. (a) Dado ΔABC com $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$, demonstre que $|a - b| < c$.
(b) Enuncie, em palavras, a generalização da parte (a) como um teorema.

*+ 21. A soma das medidas dos ângulos de um triângulo é menor que 270.

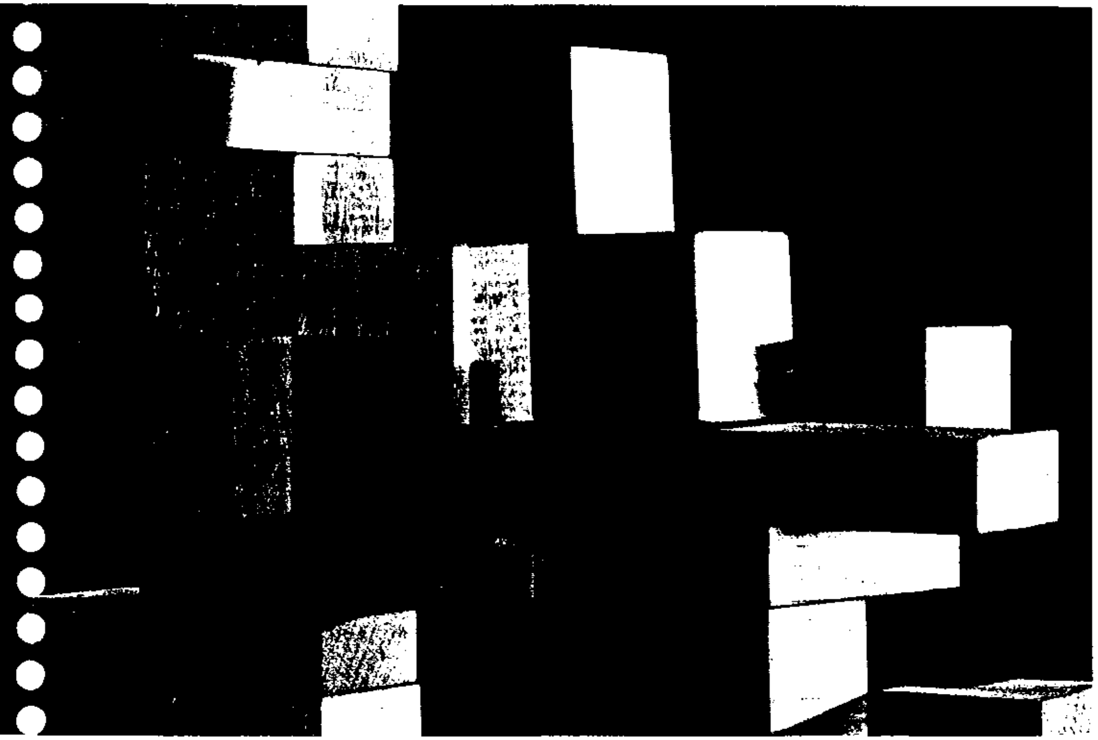
+ 22. Com base nos postulados que enunciamos e nos teoremas que demonstramos até aqui, neste livro, é impossível demonstrar que a soma dos três ângulos de um triângulo é 180. Entretanto, podemos, fàcilmente, construir um triângulo especial e demonstrar que a soma das medidas de seus ângulos é menor que 181. Seja $\angle BAC$ com medida 1 (Postulado da Construção de um Ângulo). Em $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, tome os pontos K e M tais que $AK = AM$. A soma das medidas dos ângulos de ΔAKM é menor que 181. Por quê? Se fizermos $m\angle A = \frac{1}{2}$, o que poderemos dizer da soma dos ângulos?



Problema Magno

$\overleftrightarrow{BD}$ intercepta $\overleftrightarrow{AC}$ em B, entre A e C. As perpendiculares a $\overleftrightarrow{BD}$ por A e C encontram $\overleftrightarrow{BD}$ em P e Q, respectivamente. Demonstre que P e Q não estão de um mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$.

8 RETAS E PLANOS PERPENDICULARES NO ESPAÇO



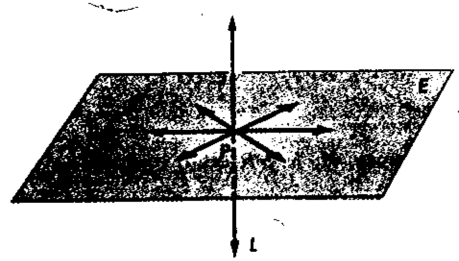
8-1. A DEFINIÇÃO DE PERPENDICULARISMO PARA RETAS E PLANOS

Nesse capítulo, trataremos de figuras que não estão contidas num único plano. Portanto, antes de você começar a ler valeria a pena rever o Cap. 3, onde foram introduzidas as idéias da geometria no espaço.

Perpendicularismo entre retas e planos é assim definido:

Definições

Uma reta e um plano são *perpendiculares* se se interceptarem e se cada reta contida no plano, e passando pelo ponto de interseção, é perpendicular à reta dada. Se a reta L e o plano E são perpendiculares, escrevemos $L \perp E$ ou $E \perp L$. Se P é o ponto de interseção, dizemos que $L \perp E$ em P.

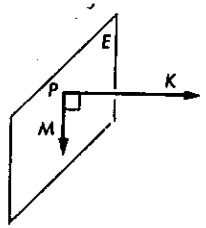


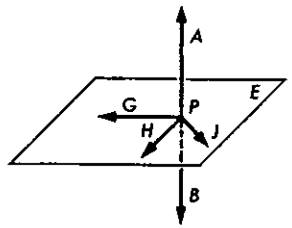
Na figura, mostramos três retas em E passando por P. De acôrdo com nossa definição, as três são perpendiculares a L em P, apesar de talvez, não darem essa impressão. (Nos desenhos em perspectiva, retas perpendiculares não parecem necessàriamente perpendiculares). Observe que se tivéssemos exigido que apenas *uma* reta em E fôsse perpendicular a L, isso não significaria nada; é fácil você se convencer de que *todo* plano por P contém uma reta nessas condições. Por outro lado, vamos ver que se E contém *duas* retas perpendiculares a L em P, então $L \perp E$ em P. Vamos tratar dessa idéia na seção seguinte.

Problemas 8-1

1. A figura à direita representa o plano E.
   (a) Algum ponto fora da figura pertence a E?
   (b) O plano E deve conter todos os pontos fora da figura?
2. (a) Desenhe um plano perpendicular a uma reta vertical.
   (b) Desenhe um plano perpendicular a uma reta horizontal.
   (c) Em cada plano das partes (a) e (b) desenhe três retas que passam pelo ponto de interseção com a reta original. Enuncie para cada caso a relação existente entre cada uma dessas três retas e a reta original.
3. Releia a definição de perpendicularismo de uma reta e um plano e decida se a seguinte afirmação é verdadeira, com base nessa definição:
   Se uma reta é perpendicular a um plano então ela é perpendicular a tôda reta do plano passando pelo ponto de interseção.

4. Se $\angle KPM$ é um ângulo reto e $\overrightarrow{PM}$ está em E, pode você concluir que E é perpendicular a $\overrightarrow{PK}$? Sim? Por quê? Não? Por quê?

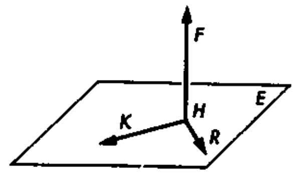




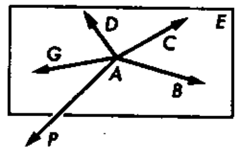
5. Dado que G, H, J e P estão no plano E e que $\overleftrightarrow{AB} \perp E$ em P, quais dos seguintes ângulos têm que ser retos?

$\angle APJ$, $\angle HPJ$, $\angle GPH$, $\angle GPB$, $\angle HPB$, $\angle HPA$.

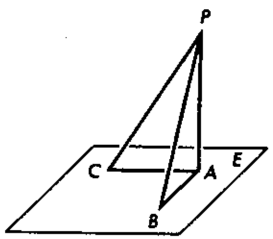
6. Na figura, H, K e R estão num plano E e F não está em E.
   (a) Quais são os planos determinados pelos pontos da figura?
   (b) Se $\overrightarrow{HR}$ é perpendicular ao plano HKF, quais ângulos têm que ser ângulos retos?

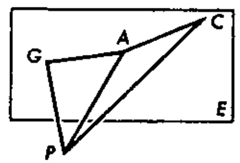


7. Os pontos A, B, C, D e G estão num plano vertical e $\overrightarrow{AP} \perp E$. Nomeie todos os ângulos que têm que ser retos.



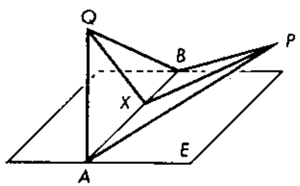
8. Dada a figura com A, B e C no plano E, $\overline{PA} \perp E$ e $PC = PB$, demonstre que $AC = AB$.





9. Os pontos A, G e C estão num plano vertical E e P é um ponto "na frente" de E. Se $\overline{PA} \perp E$ e $AG = AC$, demonstre que $PG = PC$.

10. Os pontos colineares A, B e X estão num plano E e os pontos P e Q estão num dos semi-espaços determinados por E. Se $PB = QB$ e $PA = QA$, demonstre que $PX = QX$. Sua demonstração continua válida se P e Q estiverem em semi-espaços opostos? e se P e Q estiverem em E?



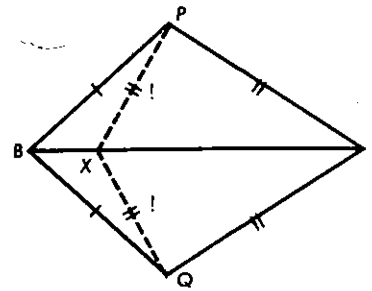
8-2. UM LEMA

No fim da seção anterior dissemos que se E contém duas retas perpendiculares a L em P, então $E \perp L$ em P. A demonstração dêsse teorema é bastante comprida. Para fazê-la parecer um pouco mais simples, vamos primeiramente demonstrar um teorema preliminar para ajudar à demonstração principal. Tais "teoremas auxiliares" são chamados *lemas*. Êsse têrmo vem de uma palavra grega significando *ramo*. Assim um lema é um ramo de uma demonstração comprida.

Nosso lema é fácil de demonstrar.

Teorema 8-1

Se B e C são equidistantes de P e Q, então todo ponto entre B e C é equidistante de P e Q.



O re-enunciado é sugerido pela figura. Observe que P, B, X e C devem estar num único plano, porque X está em $\overleftrightarrow{BC}$ e algum plano contém $\overleftrightarrow{BC}$ e P. Mas pode muito bem acontecer que ΔBPC e ΔBQC estejam em planos diferentes e é neste caso, exatamente, que vamos precisar do teorema.

Demonstração. (1) Nos é dado que $BP = BQ$ e $CP = CQ$ como indicado na figura. Por LLL segue-se que $\Delta BPC \cong \Delta BQC$.

(2) Portanto $\angle PBC \cong \angle QBC$.

(3) Por LAL segue-se que $\Delta PBX \cong \Delta QBX$.

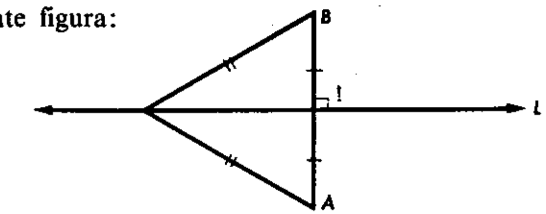
(4) Portanto $PX = QX$ e X é equidistante de P e Q, como queríamos demonstrar.

Vamos também precisar do Corolário 6-2.1 do Cap. 6.

Corolário 6-2.1

São dados um segmento $\overline{AB}$ e uma reta L no mesmo plano. Se dois pontos de L são equidistantes de A e B, então L é a mediatriz de $\overline{AB}$.

Vamos precisar dêsse corolário sòmente no caso especial descrito pela seguinte figura:

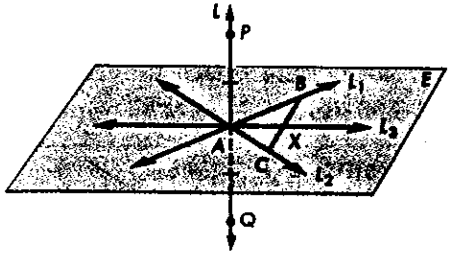


8-3. TEOREMA FUNDAMENTAL SÔBRE PERPENDICULARISMO.

Teorema 8-2

Se uma reta é perpendicular a duas retas que se interceptam, em seu ponto de interseção, então ela é perpendicular ao plano que as contém.

Re-enunciado. Sejam L_1 e L_2 duas retas num plano E que se interceptam em A. Seja L a reta que é perpendicular a L_1 e L_2 em A. Então L é perpendicular a tôda reta L_3 que está em E e contém A.



Demonstração. (1) Sejam P e Q dois pontos de L, equidistantes de A. Então L_1 e L_2 são as *mediatrizes* de $\overline{PQ}$ (em dois planos diferentes, é claro).

(2) Cada uma das retas L_1 e L_2 contém pontos nos dois semiplanos determinados em E por L_3. Sejam B e C pontos de L_1 e L_2 situados em semiplanos opostos determinados por L_3 em E. Então a reta L_3 *contém um ponto X entre B e C.*

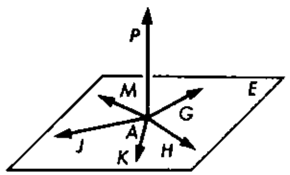
(3) Por (1) e pelo Teorema 6-2, *cada um dos pontos B e C é equidistante de P e Q.*

(4) Pelo Teorema 8-1, *X é equidistante de P e Q.*

(5) Assim L_3 contém o ponto médio de $\overline{PQ}$ e contém um outro ponto X que é equidistante de P e Q. Pelo Corolário 6-2.1, $L_3 \perp L$, como queríamos demonstrar.

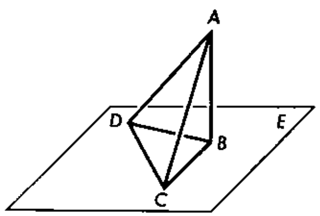
Problemas 8-3

1. Dados os pontos A, G, H, K, J e M no plano E, $\overleftrightarrow{AP} \perp \overleftrightarrow{AG}$, $\overleftrightarrow{AP} \perp \overleftrightarrow{AJ}$ e A, G e J não colineares, demonstre que $\overleftrightarrow{AP}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{AK}$ e a $\overleftrightarrow{AM}$.

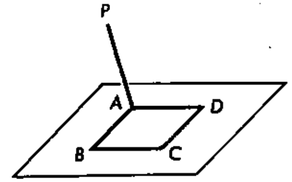


2. Qual é a relação entre L, a reta de interseção de duas paredes da sua sala de aula e F, o plano do chão? Explique. É L perpendicular a tôda reta de F? Quantas retas em F são perpendiculares a L?

3. Na figura, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{DB} \perp \overline{BC}$ e $\overline{AB} = \overline{DB}$. Demonstre que $\Delta ABC \cong \Delta DBC$. $\overline{AB} \perp E$? Sim? Por quê? Não? Por quê?

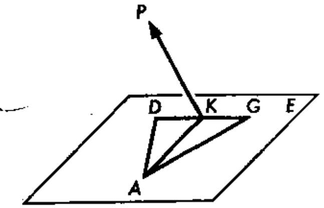


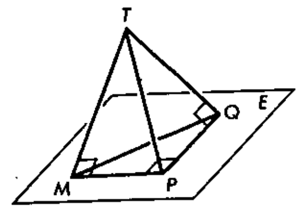
4. O quadrado $\square ABCD$ está no plano E. P é um ponto não em E e tal que $\overline{PA} \perp \overline{AB}$.
   (a) Nomeie todos os planos determinados por pares de segmentos.
   (b) Pelo menos um dos segmentos é perpendicular a um dos planos da parte (a). Que segmento? Que plano? Como o Teorema 8-2 pode ajudá-lo a dar a resposta correta?



5. No Problema 3, que segmento é perpendicular a que plano?

6. Dado que K é o ponto médio de $\overline{DG}$, $AD = AG$ e $\overline{KP} \perp \overline{AK}$, e P não está no plano ADG, se existir um segmento perpendicular a um plano, nomeie o segmento e o plano.

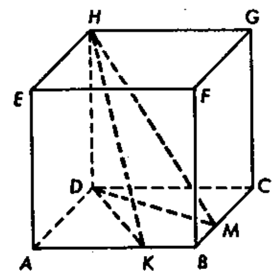




7. Na figura, $\overline{PQ} \perp \overline{MP}$, $\overline{PQ} \perp \overline{TQ}$ e $\overline{MP} \perp \overline{MT}$. É algum segmento da figura perpendicular a algum plano da figura? Nomeie tais pares se existirem.

8. $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são segmentos congruentes que se dividem ao meio em M. A reta L é perpendicular a $\overline{AB}$ e a $\overline{CD}$ em M. P é um ponto qualquer de L. Desenhe uma figura e demonstre que P é equidistante de A, B, C e D.

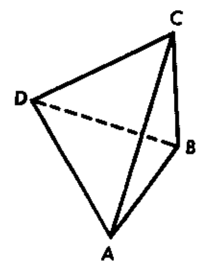
* 9. Dado o cubo que se vê aqui, com $BK = BM$, demonstre que H é equidistante de K e de M. Você poderá usar as seguintes propriedades de um cubo na sua demonstração: (a) As doze arestas de um cubo são congruentes. (b) Quaisquer duas arestas que se interceptam são perpendiculares.



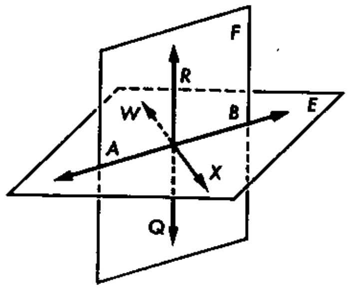
10. Se A, B, C e D são não-coplanares.

$$AD = DC, \qquad BC = BA$$

e $\angle DBA$ é um ângulo reto, então pelo menos um dos segmentos da figura é perpendicular a um dos planos. Que segmento e que plano? Demonstre sua resposta.



* 11. Na figura, os planos E e F se interceptam em $\overleftrightarrow{AB}$. $\overleftrightarrow{RQ}$ está em F e $\overleftrightarrow{WX}$ está em E. $\overleftrightarrow{RQ} \perp \overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{WX} \perp F$. Demonstre que $\overleftrightarrow{RQ} \perp E$.

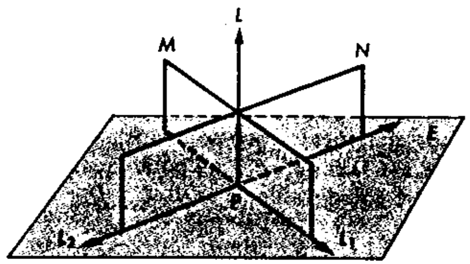


8-4. EXISTÊNCIA E UNICIDADE

A parte difícil dêsse capítulo acabou quando demonstramos o Teorema 8-2. Os outros fatos que precisamos saber são relativamente fáceis.

Teorema 8-3

Por um ponto de uma reta passa um plano perpendicular a esta reta.



Demonstração. Sejam L e P a reta e o ponto dados.

(1) Sejam M e N dois planos distintos quaisquer contendo L. *Pergunta:* Como sabemos que *existem* dois planos distintos contendo L? Lembre-se do Postulado 5 e Teorema 3-3.

(2) Existe uma reta L_1 em M, perpendicular a L em P. (Teorema 6-1).

(3) Existe uma reta L_2 em N, perpendicular a L em P. (Teorema 6-1).

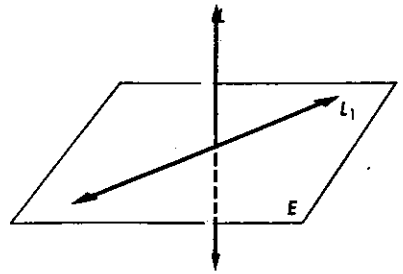
(4) Existe um plano E, contendo L_1 e L_2. (Teorema 3-4).

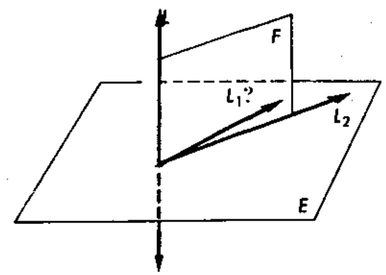
(5) $E \perp L$ em P [por (2), (3) e Teorema 8-2].

Teorema 8-4

Se uma reta e um plano são perpendiculares, então o plano contém tôda reta perpendicular à reta dada, no seu ponto de interseção com o plano dado.

Re-enunciado. Se uma reta L é perpendicular ao plano E no ponto P e L_1 é uma reta perpendicular a L em P, então L_1 está contida em E.





Demonstração

Afirmações	*Justificações*
1. L e L_1 estão contidas no plano F.	?
2. A interseção de F e E é uma reta L_2.	?
3. $L_2 \perp L$ em P.	Definição de $E \perp L$.
4. $L_1 \perp L$ em P.	Dado.
5. L_1 e L_2 são a mesma reta.	Pelo Teorema 6-1, existe uma só reta em F que é perpendicular a L em P.
6. L_1 está contida em E.	Pela passagem 2, L_2 está em E e pela passagem 5, $L_1 = L_2$.

O Teorema 8-4 nos permite mostrar que o plano perpendicular, dado pelo Teorema 8-3, é único.

Teorema 8-5

Por um ponto de uma reta existe sòmente um plano perpendicular a esta reta.

Demonstração. Se existissem dois planos perpendiculares, sua interseção seria uma única reta. Isso é impossível, pois cada um dêles contém *tôdas* as retas que são perpendiculares a uma dada reta num dado ponto.

Lembremos que a mediatriz de um segmento, num plano dado, era caracterizada como o conjunto de todos os pontos do plano equidistantes das extremidades do segmento. Para o plano perpendicular a um segmento pelo seu ponto médio, no espaço, temos um teorema de caracterização exatamente do mesmo tipo.

Teorema 8-6

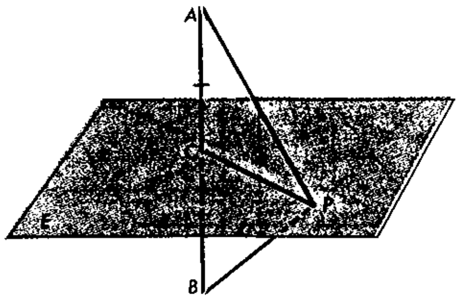
O plano perpendicular a um segmento, passando pelo seu ponto médio é o conjunto de todos os pontos equidistantes das extremidades do segmento.

Re-enunciado. Seja E o plano perpendicular a $\overline{AB}$, pelo seu ponto médio. Então

(1) se P está em E, $PA = PB$;

(2) se $PA = PB$, P está em E.

Na figura, C é o ponto médio de $\overline{AB}$. Observe que o nôvo enunciado consta de duas partes como é de se esperar para uma caracterização completa de um conjunto.

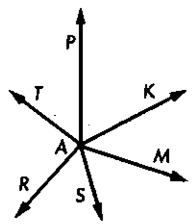


Para demonstrar (1) você precisa conhecer a definição de perpendicularismo entre uma reta e um plano, e a caracterização de mediatrizes num plano. Para demonstrar (2) você também precisa do Teorema 8-5. Os detalhes dessas duas demonstrações ficam para você.

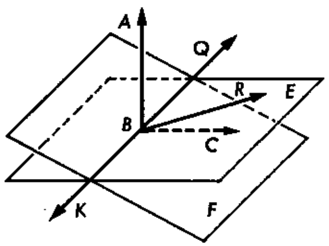
Problemas 8-4

1. (a) Quantas retas são perpendiculares a uma reta, em um ponto dado desta?
   (b) Quantos planos são perpendiculares a uma reta em um ponto dado desta?

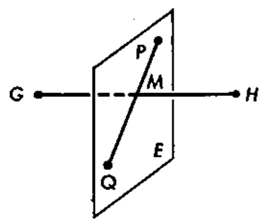
2. Dado que $\overrightarrow{AP}$ é perpendicular a $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{AR}$ e $\overrightarrow{AT}$, quantos planos são determinados pelas semi-retas que se interceptam? Existem mais de três pontos na figura que são coplanares? Em caso afirmativo, por quê? (Suponha que nenhuma terna de pontos é colinear).



3. Os planos E e F se interceptam em $\overleftrightarrow{KQ}$. $\overleftrightarrow{AB} \perp E$ com B em $\overleftrightarrow{KQ}$. R está em E e C está em F.
   $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BR}$? Por quê?
   $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{KQ}$? Por quê?
   $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$? Por quê?

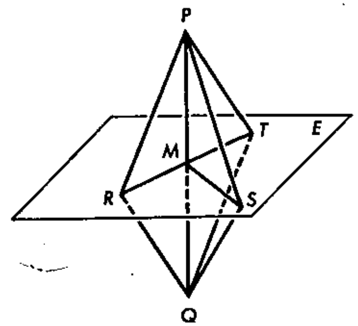


4. Na figura, $\overline{GH} \perp E$ em M, $MG = MH$ e $\overline{PQ} \perp \overline{GH}$ em M. E contém $\overline{PQ}$? Por quê?

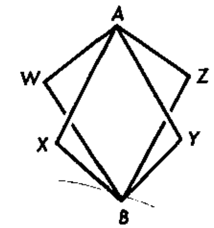


5. Dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são perpendiculares e se cortam ao meio em K. Um plano Z contém $\overline{AB}$ mas não contém $\overline{CD}$. É Z perpendicular a $\overline{CD}$ pelo seu ponto médio? Desenhe uma figura para ilustrar sua conclusão.

6. O plano E é perpendicular a $\overline{PQ}$ pelo seu ponto médio, como visto na figura.
   (a) $PR =$ ....
   $TQ =$ ....
   $PS =$ ....
   $\angle PTM \cong$ ....
   $\Delta PTM \cong$ ....
   (b) $MR = MS = MT$? Explique.



7. É dada a figura, sendo que nem todos os pontos são coplanares. Se $AW = BW$, $AX = BX$, $AY = BY$ e $AZ = BZ$, demonstre que W, X, Y e Z são coplanares.



8. Demonstre o Teorema 8-6.

* 9. Escreva Teoremas 8-3 e 8-5 como um só teorema, usando "exatamente um".

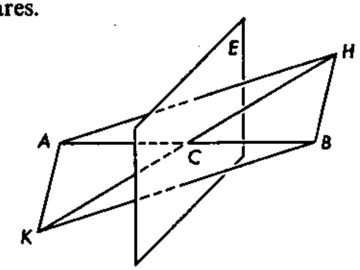
* 10. Escreva Teorema 8-6 usando "se, e sòmente se".

* 11. Poderíamos ter demonstrado o Teorema 8-5 antes de demonstrar o Teorema 8-3? Explique.

*+ 12. Demonstre o seguinte teorema:
   Se L é uma reta que intercepta o plano E no ponto M, existe pelo menos uma reta L' em E tal que $L' \perp L$.

*+ 13. É verdadeira a seguinte afirmação? Demonstre sua resposta. Quatro pontos, cada um equidistante de dois pontos fixos, são coplanares com os dois pontos fixos se, e sòmente se, os quatro pontos são colineares.

*+ 14. Na figura, E é o plano perpendicular a $\overline{AB}$ pelo seu ponto médio C. H e B estão num dos semi-espaços determinados por E, K e A também estão num dos semi-espaços determinados por E e são tais que K-C-H, $\overline{HB} \perp \overline{AB}$ e $\overline{KA} \perp \overline{AB}$. Demonstre que
   (a) $\overline{AK}$ e $\overline{BH}$ são coplanares e
   (b) $AH = BK$.



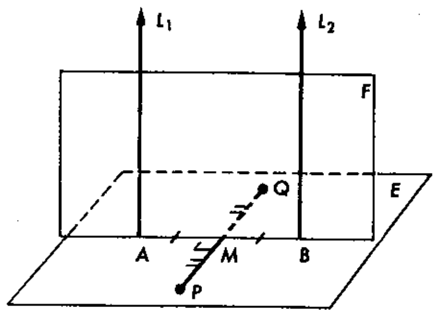
8-5. RETAS E PLANOS PERPENDICULARES: RESUMO

Os teoremas seguintes são um resumo de alguns dos fatos básicos sôbre retas e planos perpendiculares. Algumas demonstrações são fáceis, mas bastante compridas e não vamos parar para fazê-las tôdas aqui. Vamos, porém, dar-lhe uma amostra do tipo de raciocínio que é envolvido, dando várias sugestões para a demonstração do teorema seguinte.

Teorema 8-7

Duas retas perpendiculares a um mesmo plano são coplanares.

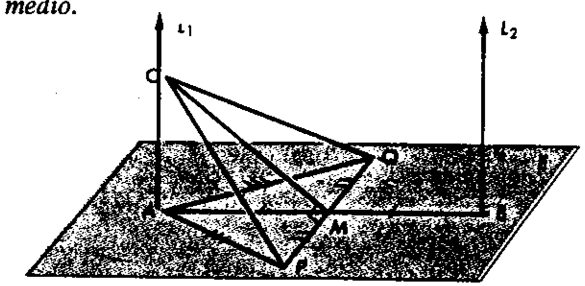
Para se ter uma idéia de como a demonstração deve ser feita, consideremos primeiramente a situação, *caso* o teorema seja verdadeiro; isto é, supondo que as duas retas estão realmente contidas num mesmo plano, *que* plano será êsse?



É-nos dado que $L_1 \perp E$ em A e $L_2 \perp E$ em B; e estamos *supondo* que L_1 e L_2 estão num plano F. Na figura mostramos o ponto médio M de $\overline{AB}$ e também mostramos um segmento $\overline{PQ}$ em E tal que $\overline{AB}$ e $\overline{PQ}$ se cortam ao meio e formam ângulos retos.

Certamente parece que $\overline{PQ} \perp F$ em M. Se isso fôr verdade, então F é o *plano perpendicular a* $\overline{PQ}$ *pelo seu ponto médio.*

Até agora, é claro, não demonstramos nada, porque estávamos supondo que o teorema fôsse verdadeiro. Mas temos agora uma pista quanto à maneira de fazer a demonstração: primeiramente devemos construir $\overline{PQ}$ em E tal que $\overline{PQ}$ e $\overline{AB}$ se cortem ao meio e formem ângulos retos; *devemos então mostrar que* L_1 *e* L_2 *estão contidas no plano perpendicular a* $\overline{PQ}$ *pelo seu ponto médio.*



Essa idéia funciona. As principais passagens da demonstração são:

(1) $AP = AQ$ (como indicado na figura).
(2) $\Delta CAP \cong \Delta CAQ$.
(3) $CP = CQ$.
(4) C está no plano perpendicular a $\overline{PQ}$ pelo seu ponto médio. Seja F êsse plano.
(5) L_1 está em F.

Exatamente da mesma maneira, concluímos que

(6) L_2 está em F.

Portanto o plano que estávamos procurando é de fato o plano perpendicular a $\overline{PQ}$ pelo seu ponto médio; êsse plano contém L_1 e L_2 e portanto L_1 e L_2 são coplanares.

Talvez você ache que a discussão que nos levou para essa demonstração é mais valiosa que a demonstração em si. Uma demonstração, uma vez feita, é lógica mas o processo que o levou a pensar nela raras vêzes é lógico. Você tem que encontrar seu caminho da melhor maneira possível. E um dos melhores métodos para fazer isso é o que ilustramos no começo desta seção.

Os teoremas dêsse capítulo, até agora, dão informação incompleta sôbre planos e retas perpendiculares. Os seguintes teoremas preencherão as lacunas.

Teorema 8-8

Por um ponto dado passa um e sòmente um *plano* perpendicular a uma *reta* dada.

Teorema 8-9

Por um ponto dado passa uma e sòmente uma reta perpendicular a um *plano* dado.

Êsses teoremas transmitem muita informação em poucas palavras. Cada um dêles tem dois casos, dependendo se o ponto dado está, ou não, na reta ou plano dados. Em cada um dêsses quatro casos, o teorema nos afirma a existência e unicidade. Isso significa que precisamos ao todo de oito demonstrações. Duas delas já foram dadas nos Teoremas 8-3 e 8-5.

O Teorema 8-9 nos assegura a existência de uma única perpendicular a um plano dado de um ponto exterior. Portanto, faz sentido dar a seguinte definição, análoga à que segue o Teorema 7-7.

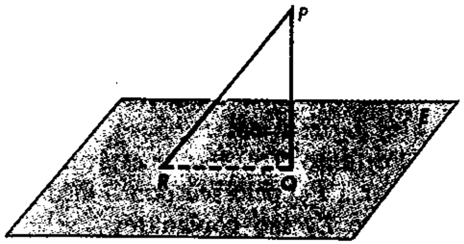
Definição

A *distância* a um plano de um ponto exterior é o comprimento do segmento perpendicular do ponto ao plano.

Teorema 8-10

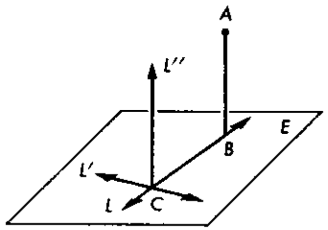
O menor segmento ligando um ponto externo a um plano é o segmento perpendicular.

A demonstração é muito semelhante à do Teorema 7-7. Dado o segmento perpendicular $\overline{PQ}$ e qualquer outro segmento $\overline{PR}$ de P até E, começamos a demonstração passando um plano pelas retas $\overleftrightarrow{PR}$ e $\overleftrightarrow{PQ}$. O resto da demonstração fica por sua conta.



Problemas 8-5

1. De um ponto A não no plano E, é traçado, o menor segmento ao plano E interceptando E em B. L e L' são retas em E tais que L contém B e $L' \perp L$. Se L'' é desenhado de modo que $L'' \perp L$ e $L'' \perp L'$, mostre que L'' e $\overleftrightarrow{AB}$ são coplanares.

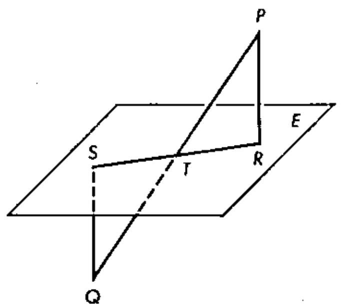


2. Demonstre o seguinte caso especial do Teorema 8-9. Por um ponto fora de um plano dado, existe no máximo uma reta perpendicular ao plano.

*3. P e Q estão em semi-espaços opostos em relação a E mas são equidistantes do plano E. As perpendiculares de P e Q a E interceptam E em R e S, respectivamente. Demonstre que

(a) $\overline{PQ}$ intercepta $\overline{SR}$ no ponto T, e

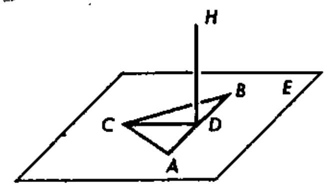
(b) T é ponto médio de $\overline{SR}$.



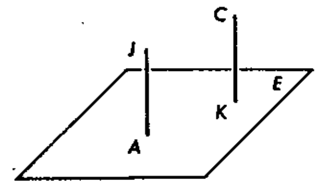
Revisão do Capítulo

1. Use uma figura, se necessário, para ajudá-lo a decidir se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa.
   (a) Se dois planos se interceptam, sua interseção é uma reta.
   (b) Três retas podem se interceptar num só ponto de modo a ser cada reta perpendicular às outras duas.
   (c) Se uma reta é perpendicular a duas retas distintas, ela é perpendicular ao plano que contém as duas retas.
   (d) A interseção de dois planos pode ser um segmento.
   (e) Por um ponto dum plano existe exatamente uma reta perpendicular ao plano.
   (f) Para cada quatro pontos existe um plano que os contém.
   (g) Se uma reta intercepta um plano em sòmente um ponto, existem pelo menos duas retas no plano perpendiculares à primeira reta.

   (h) Sòmente uma reta pode ser desenhada por um ponto dado, perpendicular a uma reta dada.
   (i) Se três retas se interceptam aos pares mas nenhum ponto pertence às três retas, então elas são coplanares.
   (j) Três planos podem separar o espaço em oito regiões.
2. Copie e complete: O conjunto de todos os pontos equidistantes dos extremos de um segmento é .... do segmento.
3. Copie e complete: A distância a um plano de um ponto fora do plano é ....
4. Copie e complete: Se uma reta é perpendicular a duas retas .... então ela é perpendicular ao .... que as contém.
5. Na figura, ΔABC é equilátero no plano E e $\overline{CD}$ divide ao meio o $\angle BCA$. Se $\overline{HD}$ é perpendicular a $\overline{CD}$, pelo menos um dos segmentos da figura é perpendicular a um dos planos. Que segmento? Que plano?



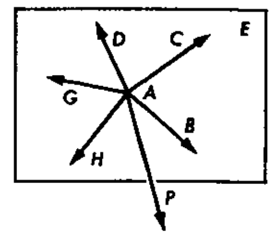
6. O plano E contém os pontos A e K; $\overline{JA} \perp E$, $\overline{CK} \perp E$, mas $A \neq K$. Quantos planos são determinados por A, K, C e J? Explique.



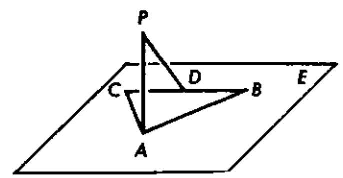
7. Se as traves num campo de futebol são perpendiculares ao chão, então elas são coplanares mesmo sem uma barra entre elas. Que teorema apóia essa conclusão? Se elas não forem perpendiculares ao chão, ainda assim poderão ser coplanares? Colocar uma barra entre elas garantirá que elas serão sempre coplanares?
8. $\overrightarrow{AP}$ é perpendicular ao plano vertical E, e A, B, C, D, G e H são pontos em E. Quanto vale

$$m\angle DAP + m\angle CAP?$$

Se $\angle CAB$ é um ângulo reto, pelo menos uma semi-reta diferente de $\overrightarrow{AP}$ e um plano diferente de E são perpendiculares. Nomeie todos os pares nessas condições.



9. ΔABC está num plano E. P é um ponto não em E tal que $\overline{PA} \perp \overline{AB}$, $\overline{PA} \perp \overline{AC}$ e $\overline{PD} \perp \overline{BC}$ com D em $\overline{BC}$. O que é verdade: $PA > PD$, $PA = PD$ ou $PA < PD$? Por quê?



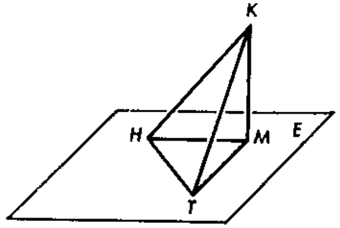
10. ΔHMT está no plano E. $HM = TM$ e $\overline{KM} \perp E$.
O que é verdade:

$$\angle KHT > \angle KTH,$$
$$\angle KHT \cong \angle KTH,$$

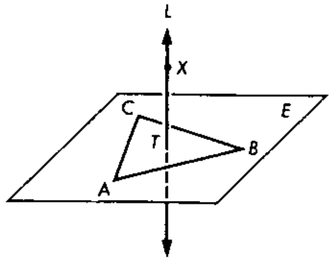
ou

$$\angle KHT < KTH?$$

Por quê?

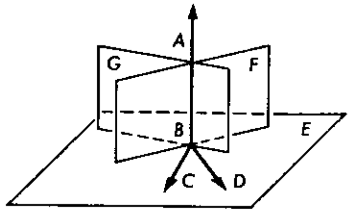


11. Dados: Plano E contém ΔABC.
Reta $L \perp E$ em T. T é equidistante de A, B e C. X é um ponto qualquer de L.
Demonstre: X é equidistante de A, B e C.



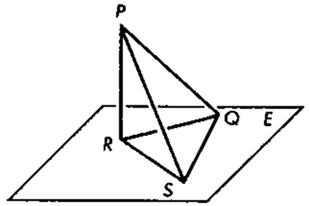
12. Demonstre que se A e B são equidistantes de P e Q, então todo ponto de $\overleftrightarrow{AB}$ é equidistante de P e Q.

13. Dado: $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BD}$ estão num plano E;
plano $F \perp \overleftrightarrow{BD}$ em B; plano $G \perp \overleftrightarrow{BC}$ em B; G e F se interceptam em $\overleftrightarrow{AB}$.
Demonstre: $\overleftrightarrow{AB} \perp E$.

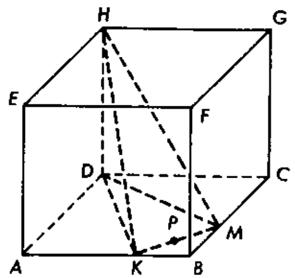


14. Na figura, ΔRSQ está no plano E e $\overline{PR} \perp E$.
Se $\angle PQR \cong \angle PSR$, $\angle PQS \cong \angle PSQ$.

15. Na figura, se $\overline{PR} \perp E$, $PR > RS$, $\overline{SQ} \perp \overline{RQ}$ e $\overline{SQ} \perp \overline{PQ}$, demonstre que $PQ > QS$.



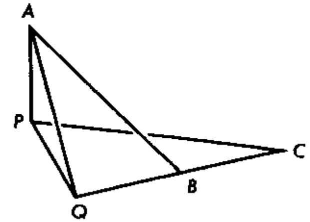
* 16. Dado o cubo visto na figura com $BK = BM$ e P ponto médio de $\overline{KM}$, demonstre que o plano HDP é o plano perpendicular a $\overline{KM}$ pelo seu ponto médio. Você pode usar as propriedades do cubo, dadas no Problema 9, do conjunto 8-3.



* 17. Demonstre que, dadas quatro semi-retas quaisquer $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, e $\overrightarrow{AE}$, não podem satisfazer a condição de que cada uma seja perpendicular às outras três.

Problema Magno

Dado: $\overline{AP} \perp \overline{PQ}$, $\overline{AP} \perp \overline{PC}$, $\overline{PQ} \perp \overleftrightarrow{BC}$, Q-B-C.
Demonstre: $\overline{AQ} \perp \overleftrightarrow{BC}$.
[*Sugestão:* Tome R em $\overleftrightarrow{BC}$ tal que $QR = QB$.]



9 RETAS PARALELAS EM UM PLANO

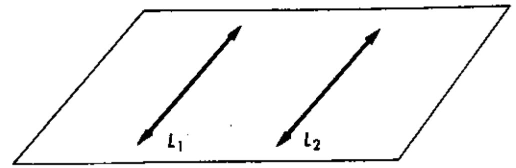
9-1. CONDIÇÕES QUE GARANTEM PARALELISMO

Duas retas podem estar situadas no espaço de três modos:

(1) Elas se interceptam em um ponto. Neste caso, o Teorema 3-4 nos diz que elas devem ser coplanares.

(2) *Não* são coplanares e *não* se interceptam. Neste caso, são chamadas *reversas*. Por exemplo, considere a reta L_1, que vem do fundo e vai até à frente de sua sala, ao longo do assoalho e a reta L_2, que vai da esquerda para a direita, no teto. Estas retas são reversas.

(3) Finalmente, as duas retas podem estar num mesmo plano, sem se interceptarem. Neste caso, dizemos que as retas são *paralelas*.



Definição

Duas retas não-coplanares são chamadas *reversas*.

Definição

Duas retas são *paralelas* se (1) são coplanares e (2) não se interceptam.

O teorema seguinte nos permite falar *do* plano que contém duas retas paralelas.

Teorema 9-1

Duas retas paralelas estão contidas em exatamente um plano.

Demonstração. Se L_1 e L_2 são paralelas, então sabemos, de início, a partir da definição, que elas estão contidas em um plano E. Precisamos mostrar que estão contidas em um único plano.

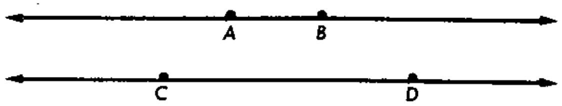
Seja P um ponto de L_2. Pelo Teorema 3-3, existe apenas um plano contendo L_1 e P. Portanto, existe apenas um plano contendo L_1 e L_2, porque todo plano que contém L_2, contém P.

Escreveremos

$$L_1 \parallel L_2$$

para significar que L_1 e L_2 são paralelas. Se dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ estão contidos em retas paralelas, diremos, resumidamente, que os segmentos são paralelos e escreveremos $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

O mesmo diremos de duas semi-retas, uma semi-reta e um segmento e assim por diante.



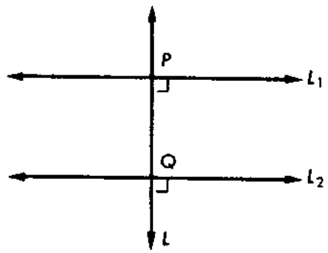
Por exemplo, dado que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, podemos também escrever

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}, \qquad \overline{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}, \qquad \overrightarrow{BA} \parallel \overleftrightarrow{CD},$$

e assim por diante, mais doze modos semelhantes.

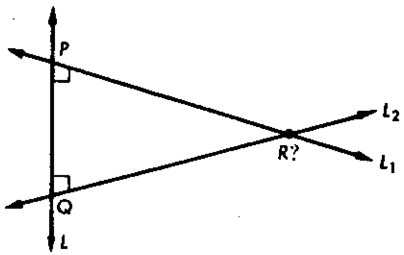
Com base na definição, não parece ser fácil dizer quando duas retas são paralelas. Cada uma das retas se prolonga infinitamente nos dois sentidos e, para dizer se as retas se interceptam, pode parecer que precisamos examinar as duas retas inteiras. Em algumas situações, entretanto, podemos dizer que duas retas são paralelas olhando apenas para um pequeno segmento de cada uma, como mostra o teorema seguinte.

Teorema 9-2



Duas retas em um plano são paralelas se ambas forem perpendiculares a uma mesma reta.

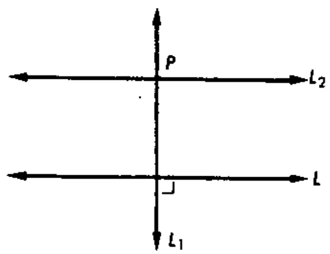
Demonstração. Dados: $L_1 \perp L$ em P, $L_2 \perp L$ em Q, L_1 e L_2 são coplanares. Precisamos mostrar que elas não se interceptam.



Suponha que L_1 intercepte L_2 em um ponto R. Então, existem duas perpendiculares a L, por R. Pelo Teorema 6-4, isto é impossível. Portanto $L_1 \parallel L_2$. [*Pergunta:* Que método de demonstração foi usado aqui?]

O Teorema 9-2 nos permite mostrar que existem retas paralelas.

Teorema 9-3



Seja L uma reta e P um ponto fora de L. Então existe pelo menos uma reta por P, paralela a L.

Demonstração. Seja L_1 a perpendicular a L por P. Seja L_2 a perpendicular a L_1 por P (no plano que contém L e P.) Pelo Teorema 9-2, $L_2 \parallel L_1$.

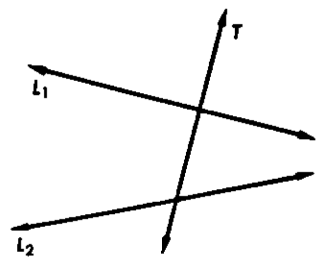
Pode parecer natural, como próximo passo, demonstrar que a paralela dada pelo Teorema 9-3 é única. Isto é, podemos tentar demonstrar o seguinte:

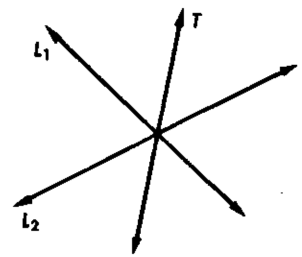
Por um ponto fora de uma reta dada, existe apenas uma paralela a essa reta.

É um fato, entretanto, que esta afirmação não pode ser demonstrada como teorema, com bases nos postulados que temos, até aqui. Ela deve ser tomada como um nôvo postulado. Êste postulado tem uma história longa e interessante. Por cêrca de dois mil anos, o livro-texto padrão de geometria foi "*Os Elementos*" de Euclides, escrito por volta de 300 A.C. Nesse livro, Euclides usou um postulado que diz que a paralela é única. De modo geral, os matemáticos gostam de supor o mínimo e demonstrar o máximo. Por esta razão, muitos dêles tentaram fazer do Postulado das Paralelas de Euclides um teorema. Ninguém conseguiu. Finalmente, no século dezenove, descobriu-se que o Postulado das Paralelas *não podia* ser demonstrado com base nos outros postulados.

Mais tarde, voltaremos a esta questão. Por enquanto, investiguemos um pouco mais a fundo as condições nas quais podemos dizer que duas retas são paralelas.

Na figura à esquerda, abaixo, a reta T é uma *transversal* em relação às retas coplanares L_1 e L_2.



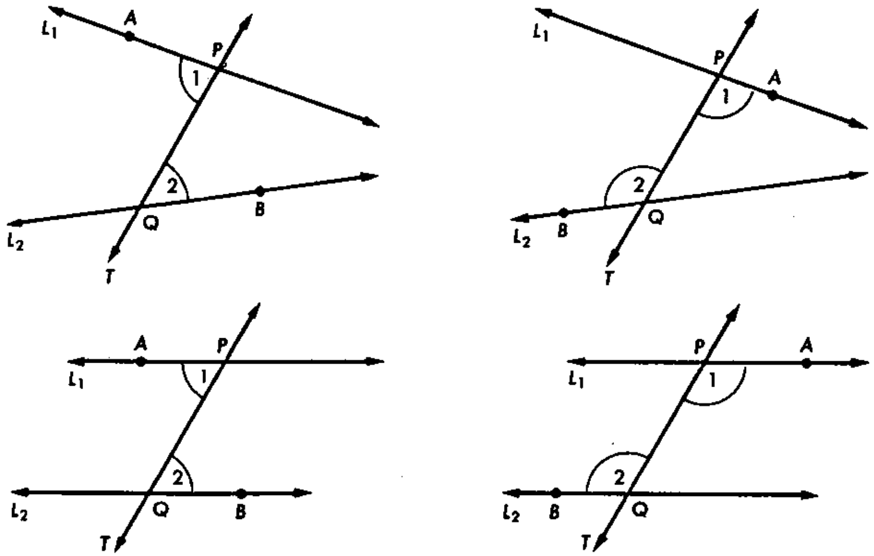


Na figura à direita, T *não* é uma transversal. Mais precisamente:

Definição

Uma *transversal* em relação a duas retas coplanares é uma reta que as intercepta em dois pontos distintos.

Em cada uma das figuras seguintes, $\angle 1$ e $\angle 2$ são *ângulos alternos-internos.*



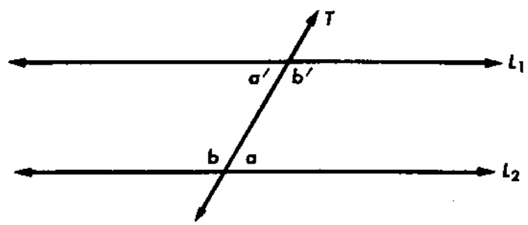
Observe que as retas cortadas pela transversal podem não ser paralelas. Os símbolos nas figuras sugerem como devemos descrever ângulos alternos-internos em uma definição.

Definição

Dadas duas retas L_1 e L_2, cortadas por uma transversal T nos pontos P e Q, sejam A um ponto de L_1 e B um ponto de L_2, tais que A e B estão em lados opostos de T. Então $\angle APQ$ e $\angle PQB$ são *ângulos alternos-internos*.

Teorema 9-4

Se duas retas são cortadas por uma transversal e se um par de ângulos alternos-internos é formado por ângulos congruentes, então o outro par de angulos alternos-internos também é formado por ânguios congruentes.

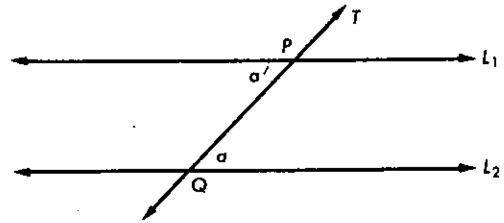


Isto é, se $\angle a \cong \angle a'$, então $\angle b \cong \angle b'$. E se $\angle b \cong \angle b'$, então $\angle a \cong \angle a'$. A demonstração fica para você.

O teorema seguinte é uma generalização do Teorema 9-2. Isto é, inclui o Teorema 9-2 como caso particular. Desde que êle se aplica a um número maior de casos que o Teorema 9-2, é portanto mais útil. As letras AIP no nome dêste teorema querem dizer "Alternos-Internos-Paralelas". A recíproca do Teorema 9-5, que será o Teorema 9-8, será chamada, anàlogamente, de "Teorema PIA".

Teorema 9-5. O Teorema AIP

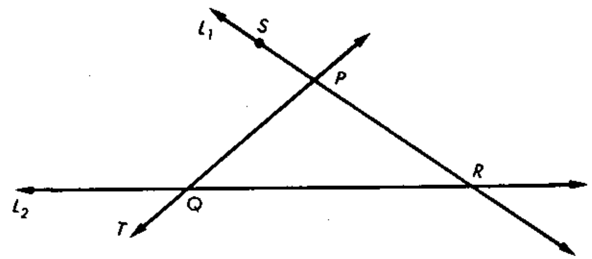
Dadas duas retas cortadas por uma transversal, se um par de ângulos alternos-internos é formado por ângulos congruentes, então as retas são paralelas.



Demonstração. Seja T uma transversal, interceptando L_1 e L_2 em P e Q. É dado que um par de ângulos alternos-internos é formado por ângulos congruentes. Pelo teorema precedente, temos

(1) *ambos* os pares de ângulos alternos-internos são formados por ângulos congruentes.

Suponha, agora, que L_1 intercepte L_2 em um ponto R. Mostraremos que isto leva a uma contradição de (1).



Seja S um ponto de L_1, no lado de T oposto a R. Então $\angle SPQ$ é um ângulo externo do triângulo ΔPQR e $\angle PQR$ é um de seus ângulos internos não adjacentes. Pelo Teorema do Ângulo Externo,

(2) $\angle SPQ > \angle PQR$.

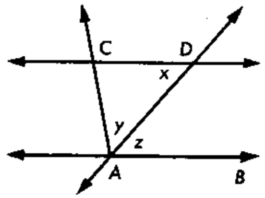
Isto contradiz (1), porque êstes ângulos são alternos-internos. Portanto, L_1 não intercepta L_2 e $L_1 \| L_2$, como queríamos demonstrar.

Problemas 9-1

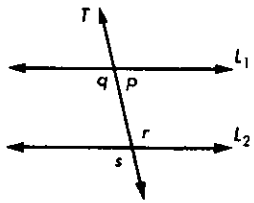
[*Nota:* Nos problemas dêste capítulo, quando os mesmos são enunciados por meio de figuras, estas são supostas planas, a menos que seja estabelecido o contrário.]

1. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?
   (a) Se duas retas não estão contidas em um mesmo plano, elas podem ser paralelas.
   (b) A definição de retas paralelas afirma que as retas devem manter sempre a mesma distância entre elas.
   (c) Se duas retas são perpendiculares a uma mesma reta em pontos distintos, elas são paralelas.
   (d) Se duas retas em um plano são cortadas por uma transversal, os ângulos alternos-internos são congruentes.

2. Dados: $\overrightarrow{AD}$ é bissetriz de $\angle CAB$ e $CA = CD$.
   Demonstre: $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$.



3. É verdade que $L_1 \parallel L_2$ se
   (a) $m\angle q = 100$ e $m\angle r = 100$?
   (b) $m\angle p = 80$ e $m\angle r = 100$?
   (c) $m\angle s = 120$ e $m\angle p = 60$?
   (d) $m\angle r = 90$ e $m\angle p = 90$?

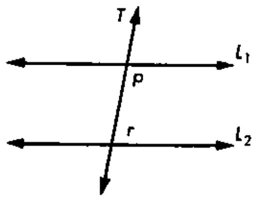


4. É possível encontrar duas retas no espaço que nem são paralelas e nem se encontram?

5. Demonstre o seguinte teorema:

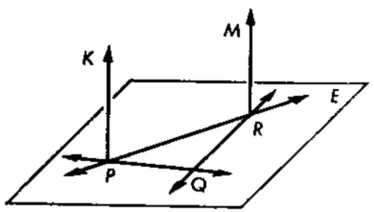
   Se duas retas são cortadas por uma transversal e um par de ângulos internos que contêm pontos de um mesmo lado da transversal, são suplementares, então as retas são paralelas.

   Dados: L_1, L_2 e T. $\angle p$ e $\angle r$ são suplementares.
   Demonstre: $L_1 \parallel L_2$.

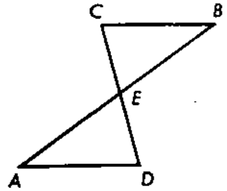


6. Dados uma reta L e um ponto P fora de L, mostre como usar um transferidor e uma régua para desenhar uma reta por P paralela a L.

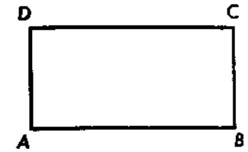
7. Na figura, P, Q e R são três pontos não-colineares em um plano E, $\overleftrightarrow{PK} \perp E$ e $\overleftrightarrow{RM} \perp E$. Demonstre que $\overleftrightarrow{PK} \parallel \overleftrightarrow{RM}$.



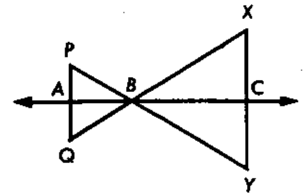
8. $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ se dividem ao meio em E. Demonstre que $\overline{AD} \parallel \overline{CB}$.



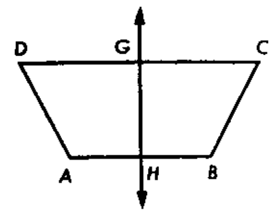
9. Dado o quadrilátero $\square ABCD$, com os ângulos retos $\angle A$ e $\angle B$ e $AD = BC$, demonstre que $\angle D \cong \angle C$. [*Sugestão:* trace $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.] Você pode demonstrar, também, que $\angle D$ e $\angle C$ são ângulos retos?



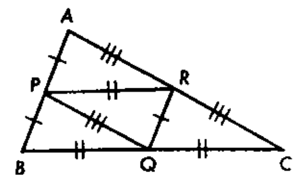
10. Na figura, A, B e C são colineares, $AP = AQ$, $BP = BQ$, $BX = BY$ e $CX = CY$. Demonstre que $\overline{PQ} \parallel \overline{XY}$.



* 11. Dados: $\square ABCD$ com H ponto médio de $\overline{AB}$, G ponto médio de $\overline{DC}$, $AD = BC$ e $\angle A \cong \angle B$.
   Demonstre:
   $\overleftrightarrow{GH} \perp \overline{DC}$,
   $\overleftrightarrow{GH} \perp \overline{AB}$,
   $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.



* 12. Dados: $\triangle ABC$, no qual
   $AP = PB = RQ$,
   $BQ = QC = PR$,
   $AR = RC = PQ$.
   Demonstre: $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$.



Por que isto *não* demonstra que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180?

Problema Magno

Suponha que as seguintes definições sejam aceitas.

Uma *reta vertical* é uma reta contendo o centro da Terra.

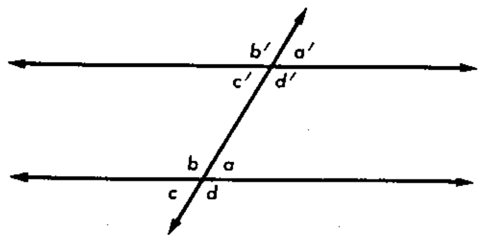
Uma *reta horizontal* é uma reta perpendicular a alguma reta vertical.

(a) É possível duas retas horizontais serem paralelas?
(b) É possível duas retas verticais serem paralelas?
(c) É possível duas retas verticais serem perpendiculares?

(d) É possível duas retas horizontais serem perpendiculares?
(e) Tôda reta vertical seria uma reta horizontal?
(f) Tôda reta horizontal seria uma reta vertical?
(g) Pode uma reta horizontal ser paralela a uma reta vertical?
(h) Tôda reta seria horizontal?

9-2. ÂNGULOS CORRESPONDENTES

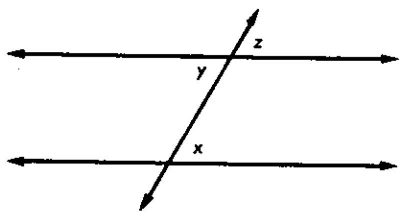
Na figura abaixo, os ângulos assinalados com a e a' são chamados *ângulos correspondentes.*



Da mesma forma, b e b' são ângulos correspondentes; os pares c e c', e d e d' também formam ângulos correspondentes. Para ser exato:

Definição

Se duas retas são cortadas por uma transversal, se $\angle x$ e $\angle y$ são ângulos alternos-internos e se $\angle y$ e $\angle z$ são ângulos opostos pelo vértice, então $\angle x$ e $\angle z$ são *ângulos correspondentes.*



Você deve demonstrar os dois teoremas seguintes.

Teorema 9-6

Dadas duas retas cortadas por uma transversal, se um par de ângulos correspondentes é formado por ângulos congruentes, então qualquer par de ângulos alternos-internos é formado por ângulos congruentes.

(Lembre-se do Teorema dos Ângulos Opostos pelo Vértice.)

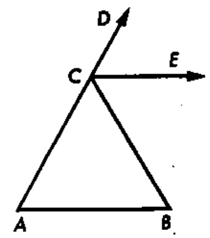
Teorema 9-7

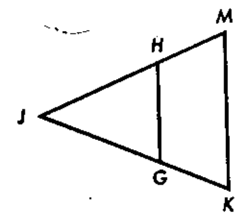
Dadas duas retas cortadas por uma transversal, se um par de ângulos correspondentes é formado por ângulos congruentes, então as retas são paralelas.

Tudo se passa como se as afirmações recíprocas dos Teoremas 9-5 e 9-6 fôssem verdadeiras. Isto é, quando duas retas são cortadas por uma transversal, então os ângulos alternos-internos são congruentes e os ângulos correspondentes também. A demonstração destas recíprocas, entretanto, requer o Postulado das paralelas. Enunciaremos, portanto, êste postulado na secção seguinte e vamos usá-lo daí para frente.

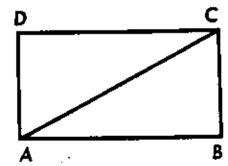
Problemas 9-2

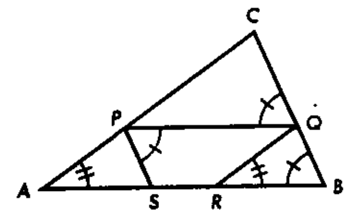
1. Na figura, $AC = BC$ e $\angle DCE \cong \angle B$. Demonstre que $\overline{CE} \parallel \overline{AB}$.





2. Dados: ΔKMJ com $KJ = MJ$, $GJ = HJ$, e $\angle HGJ \cong \angle HMK$. Demonstre: $\overline{GH} \parallel \overline{KM}$.
3. Na figura, $\angle B$ e $\angle D$ são ângulos retos e $DC = AB$. Demonstre que $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.





4. Na figura, por que $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$? $\overline{AC} \parallel \overline{QR}$? $\overline{PS} \parallel \overline{BC}$?

9-3. O POSTULADO DAS PARALELAS

POSTULADO 18. O Postulado das Paralelas

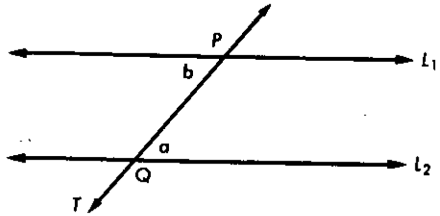
Por um ponto fora de uma reta, existe sòmente uma reta paralela à reta dada.

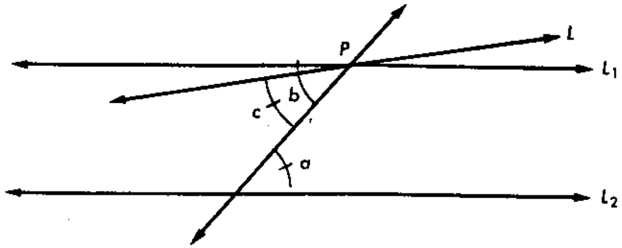
Observe que, desde que demonstramos que as paralelas *existem*, o postulado precisa apenas dizer que a paralela existente é única. É a unicidade das paralelas que nos dá os recíprocos dos teoremas da seção precedente. Começamos com o recíproco do Teorema 9-5.

Teorema 9-8. O Teorema PIA

Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos alternos-internos são congruentes.

Demonstração. São dadas duas paralelas L_1 e L_2 e uma transversal T, interceptando as paralelas em P e Q. Suponha que $\angle a$ e $\angle b$ *não* são congruentes. Seja L a reta por P para a qual os ângulos alternos-internos *são* congruentes. Ou seja, na figura abaixo, $\angle a \cong \angle c$. Pelo Postulado da Construção de um Ângulo, L é unica; isto significa que $L \neq L_1$. fica que $L \neq L_1$.





Pelo Teorema 9-5, $L \parallel L_2$. Como $L \neq L_1$, segue-se que existem duas retas por P, paralelas a L_2. Isto contradiz o Postulado das Paralelas. Portanto,

$$\angle a \cong \angle b,$$

como queríamos demonstrar.

As demonstrações dos quatro teoremas seguintes são curtas e diretas, de modo que as deixamos para você.

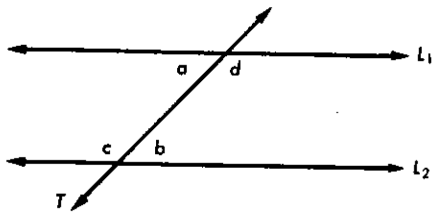
Teorema 9-9

Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, cada par de ângulos correspondentes é formado por ângulos congruentes.

Teorema 9-10

Se duas paralelas são cortadas por uma transversal, os ângulos internos do mesmo lado da transversal são suplementares.

Re-enunciado: Sendo dadas as retas L_1 e L_2, com $L_1 \parallel L_2$ e uma transversal T, então $\angle b$ e $\angle d$ são suplementares, da mesma forma que $\angle a$ e $\angle c$ o são.



Teorema 9-11

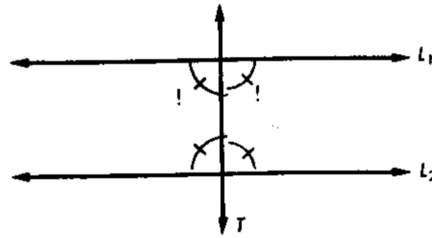
Em um plano, se duas retas são paralelas a uma terceira, são elas paralelas entre si.

O mesmo teorema vale para o caso em que as três retas não são coplanares. (Veja o Corolário 10-4.2.) Mas o teorema não pode ser demonstrado no caso geral pelos métodos dêste capítulo.

Teorema 9-12

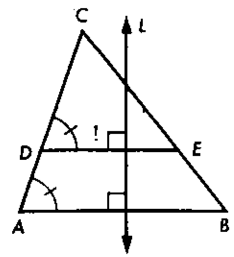
Em um plano, se uma reta é perpendicular a uma de duas retas paralelas, então é perpendicular à outra.

Uma rápida demonstração dêste teorema é sugerida pela figura à direita. (Um ângulo é um ângulo reto se, e sòmente se, é congruente a um ângulo com o qual forma um par linear.)

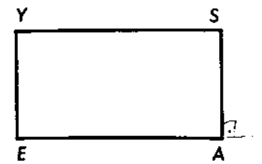


Uma observação final: Se você usou uma demonstração indireta no Teorema 9-9, você usou um processo muito trabalhoso. Veja a definição de ângulos correspondentes e lembre-se do Teorema dos Ângulos Opostos pelo Vértice.

Problemas 9-3



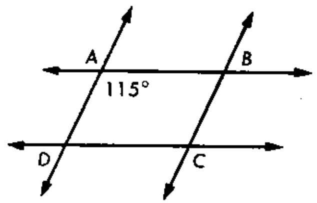
1. Dada a figura com $\angle CDE \cong \angle A$ e $L \perp \overleftrightarrow{AB}$, demonstre que $L \perp \overleftrightarrow{DE}$.



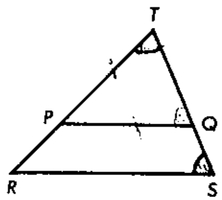
2. Dados: O quadrilátero $\square EASY$ com os ângulos retos $\angle E$, $\angle A$ e $\angle S$.
Demonstre: $\overline{EY} \perp \overline{SY}$.

3. Demonstre que uma reta paralela à base de um triângulo isósceles e que intercepta os outros dois lados do triângulo, em pontos distintos, forma um outro triângulo isósceles.

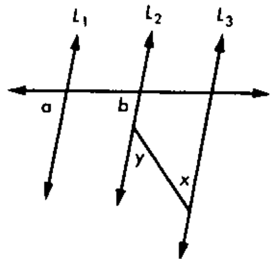
4. Se $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$ e $m\angle BAD = 115$, quanto vale $m\angle ADC$? Se, além disso, $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, quanto vale $m\angle BCD$?



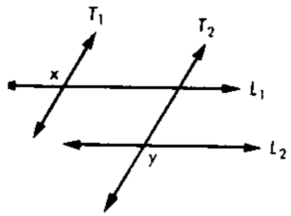
5. Dados: Na figura $RT = RS$, $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{RS}$.
Demonstre: $PQ = PT$.



6. Na figura, $\angle x \cong \angle y$ e $\angle a \cong \angle b$.
Demonstre que $L_1 \parallel L_3$.

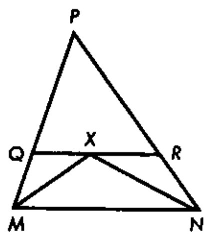


7. Dada a figura com $L_1 \parallel L_2$ e $T_1 \parallel T_2$, demonstre que $\angle x \cong \angle y$.

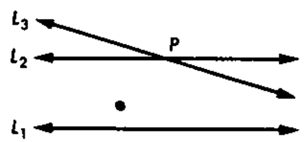


8. $\overline{AC}$ e $\overline{DB}$ se interceptam em E, com A-E-C e D-E-B, de tal modo que $AD = BC$ e $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. Demonstre que $\overline{AC}$ e $\overline{DB}$ se dividem ao meio, em E.

9. No ΔPMN, $\overrightarrow{MX}$ é bissetriz de $\angle M$, $\overrightarrow{NX}$ é bissetriz de $\angle N$ e $\overline{QR}$, passando por X, é paralelo a $\overline{NM}$. Demonstre que ΔQMX e ΔRXN são isósceles.



* 10. Demonstre o seguinte teorema, por um método indireto:
Dadas duas retas paralelas, L_1 e L_2, se uma terceira reta L_3, no mesmo plano, intercepta uma das paralelas, então intercepta também a outra.

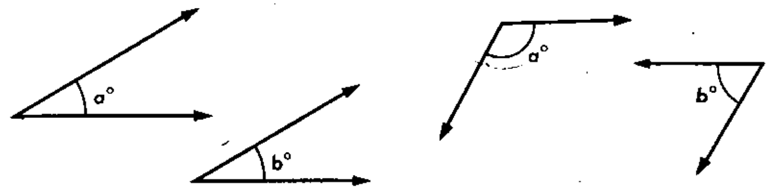


11. Se duas paralelas são cortadas por uma transversal, então as bissetrizes de dois ângulos correspondentes quaisquer são paralelas.

12. Demonstre o seguinte teorema:

Em um plano, se os lados de um ângulo são paralelos aos lados de um outro, os dois ângulos são (a) congruentes ou (b) suplementares.

[*Observação:* A figura mostra apenas dois casos, mas demonstrações semelhantes e igualmente simples podem ser feitas para todos os outros casos. Como sugestão, veja o Problema 7, desta série.]



(a) $a = b$. (b) $a + b = 180$.

* 13. No triângulo ΔABC, a bissetriz de $\angle A$ intercepta $\overline{BC}$ em D. A mediatriz de $\overline{AD}$ intercepta $\overline{AC}$ em G. Demonstre que $\overline{GD} \parallel \overline{AB}$.

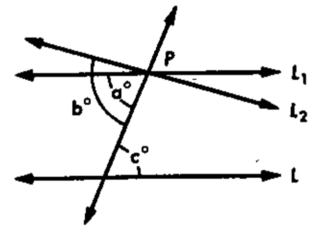
* 14. No triângulo ΔFGH, a bissetriz de $\angle F$ e a bissetriz de $\angle G$ se interceptam em C. A paralela a $\overline{FG}$ por C intercepta $\overline{FH}$ em A e $\overline{GH}$ em B. Demonstre que o perímetro de ΔABH é igual à soma de FH e GH.

* 15. Dado ΔABC, demonstre que se A está em uma paralela a $\overline{BC}$, então $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$.

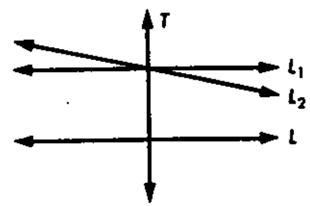
+ 16. Se o Teorema 9-8 fôr tomado como postulado ao invés do Postulado das Paralelas, êste último pode ser demonstrado como teorema.

Dada uma reta L e um ponto P, fora de L, então existe no máximo uma reta L_1 contendo P e paralela a L.

[*Sugestão:* $a = c = b$?]



+ 17. Mostre que se o Teorema 9-12 fôr tomado como postulado, então o Postulado das Paralelas segue como teorema.

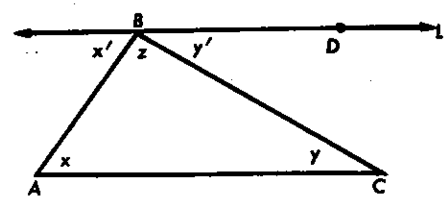


9-4. TRIÂNGULOS

Teorema 9-13

Para todo triângulo, a soma das medidas dos ângulos é 180.

Demonstração. Dado ΔABC, seja L a reta por B paralela a $\overline{AC}$. Sejam $\angle x$, $\angle x'$, $\angle y$, $\angle y'$ e $\angle z$ como na figura.

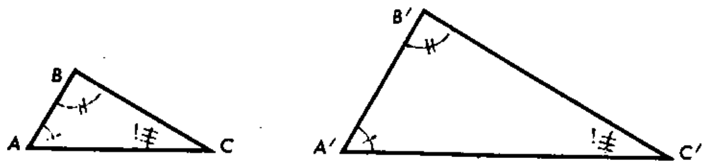


Afirmações	*Justificações*
1. $m\angle x = m\angle x'$.	Ângulos alternos-internos.
2. $m\angle y = m\angle y'$.	Idem.
3. $m\angle ABD = m\angle z + m\angle y'$.	Postulado de Adição de Ângulos
4. $m\angle x' + m\angle ABD = 180$.	Postulado do Suplemento.
5. $m\angle x' + m\angle z + m\angle y' = 180$.	Passagens 3 e 4.
6. $m\angle x + m\angle z + m\angle y = 180$.	Passagens 1, 2 e 5.

Dêste teorema obtemos corolários muito importantes.

Corolário 9-13.1

Dada uma correspondência entre dois triângulos, se dois pares de ângulos correspondentes são formados de ângulos congruentes, então o terceiro par de ângulos correspondentes também o é.



Corolário 9-13.2

Os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares.

Corolário 9-13.3

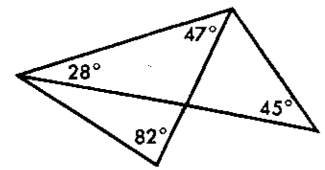
Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a êste ângulo externo.

Òbviamente, usamos o Postulado das Paralelas para demonstrar o Teorema 9-13. Isto não foi por conveniência; na realidade, o teorema *não pode* ser demonstrado sem o uso do Postulado das Paralelas. Descobriu-se, no século dezenove, que existe uma espécie de geometria (atualmente chamada geometria *hiperbólica*) na qual o Postulado das Paralelas de Euclides não se verifica. A geometria hiperbólica não é apenas um respeitável ramo da Matemática, mas também muito útil em física. Na geometria hiperbólica, o Teorema 9-13 não apenas não pode ser demonstrado, como, ao contrário, é *falso*. Muitas outras coisas estranhas acontecem. Por exemplo, na geometria hiperbólica, modelos em escala são impossíveis, porque nenhum par de figuras tem a mesma forma a menos que elas tenham exatamente o mesmo tamanho.

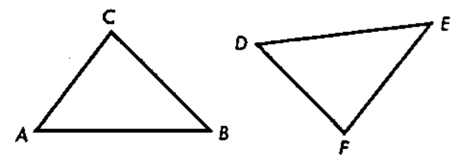
A geometria euclideana é, entretanto, uma aproximação excelente do espaço físico; e é, evidentemente, a geometria que todos devem estudar em primeiro lugar.

Problemas 9-4

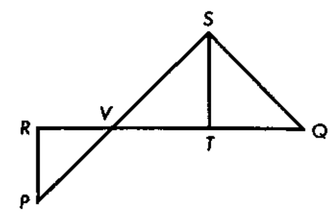
1. Se dois ângulos de um triângulo têm as medidas seguintes, qual é a medida do terceiro ângulo?
   (a) 64 e 59. (b) 26 e 134. (c) k e $2k$.
   (d) u e v. (e) 90 e n. (f) $60 + a$ e $60 - a$.
2. As medidas dos ângulos de um triângulo estão na razão de 1:2:3. Ache as medidas de cada ângulo.
3. A medida de um ângulo de um triângulo é 25 a mais que a medida de um segundo ângulo e a medida do terceiro é 19 a menos que duas vêzes a medida do segundo. Calcule cada medida.
4. Na figura ao lado, determine a medida de cada ângulo.



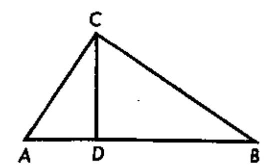
5. Sendo dado que $\angle A \cong \angle D$ e $\angle B \cong \angle E$, explique por que você pode ou não pode concluir que
   (a) $\angle C \cong \angle F$.
   (b) $\overline{AB} \cong \overline{DE}$.



6. A medida de um ângulo de um triângulo é cinco vêzes a de um segundo ângulo, e a medida de um ângulo externo, pelo terceiro vértice, é 120. Ache a medida de cada ângulo do triângulo.
7. Na figura, $\overline{PR} \perp \overline{RQ}$, $\overline{ST} \perp \overline{RQ}$, e $\overline{SQ} \perp \overline{PS}$. Demonstre que $\angle P \cong \angle Q$.

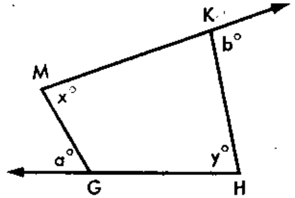


8. No triângulo ΔABC, $\angle ACB$ é um ângulo reto e $\overline{CD} \perp \overline{AB}$. Demonstre que $\angle A \cong \angle BCD$.

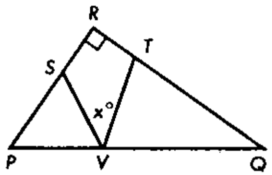


9. Demonstre: Se a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo é paralela a um lado do triângulo, então o triângulo é isósceles.

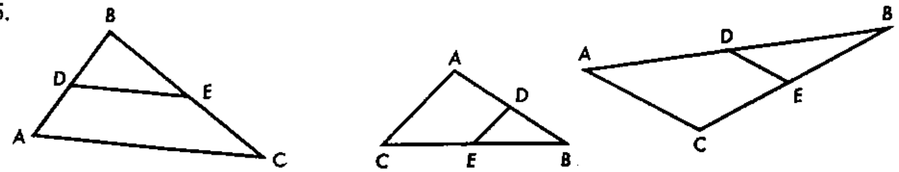
10. Demonstre: Se uma reta contendo um vértice de um triângulo isósceles é paralela à base do triângulo, então ela é bissetriz de cada ângulo externo, pelo mesmo vértice.
11. Por que o Postulado das Paralelas é essencial para a demonstração do Teorema 9-13?
12. Dados: A figura.
    Demonstre: $a + b = x + y$.
    [*Sugestão:* Trace $\overline{MH}$.]



* 13. No ΔABC, $\angle C$ é um ângulo reto e M é um ponto da hipotenusa tal que $AM = CM$. Demonstre que M é equidistante de A, B e C.
* 14. Dados: No ΔPQR, $\angle R$ é um ângulo reto, $QT = QV$ e $PS = PV$.
    Demonstre: $x = 45$.
    [*Sugestão:* Seja $m\angle P = a$. Escreva as fórmulas para as medidas dos outros ângulos.]



* 15.

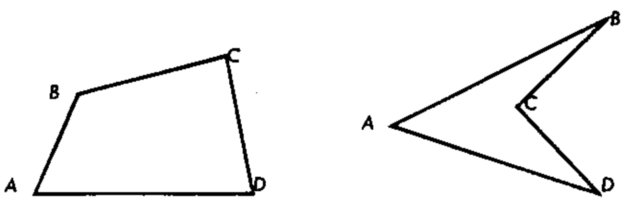


Considere os três triângulos acima. O que parece ser verdadeiro a respeito de $\overline{DE}$ e $\overline{AC}$, em cada caso? Quanto é DE comparado com AC, em cada caso? O que são D e E? As respostas sugerem alguma propriedade importante sôbre triângulos? Escreva uma conjectura envolvendo $\overline{DE}$ e $\overline{AC}$, e DE e AC. Você pode achar um exemplo mostrando que a conjectura é falsa? Você pode demonstrá-la?

* 16. No triângulo ΔABC, $AC = BC$. D é um ponto de $\overrightarrow{BC}$ com C-B-D e E é um ponto de $\overline{AB}$ com A-E-B tal que $BD = BE$. $\overleftrightarrow{DE}$ intercepta $\overline{AC}$ em F. Demonstre que $m\angle CFE = 3(m\angle D)$.

9-5. QUADRILÁTEROS EM UM PLANO

Lembramos, da Seção 5-8, a definição de um quadrilátero.

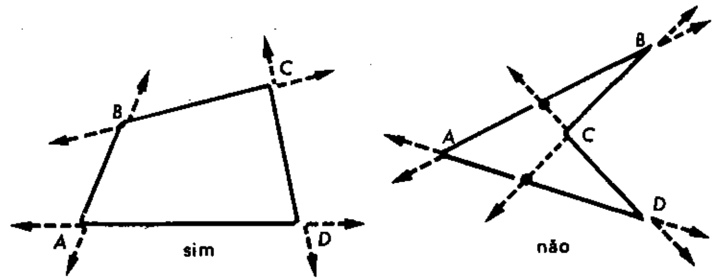


Definição

Sejam A, B, C e D quatro pontos em um mesmo plano. Se três quaisquer dêstes pontos não são colineares e os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ se interceptam apenas nas extremidades, então a reunião dêstes quatro segmentos é chamada *quadrilátero*. Os quatro segmentos são chamados *lados* e os quatro pontos A, B, C e D são chamados *vértices* do quadrilátero. Os ângulos $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ e $\angle CDA$ são chamados *ângulos* do quadrilátero.

O quadrilátero é denotado por $\square ABCD$. Os ângulos de $\square ABCD$ podem ser denotados, abreviadamente, por $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ e $\angle D$.

Na figura anterior, o quadrilátero da esquerda é chamado *conexo*, mas o da direita, não. Para ver como a diferença entre êstes quadriláteros pode ser descrita, traçamos as retas que contêm os lados de cada um dêles.



A definição seguinte descreve a propriedade da convexidade.

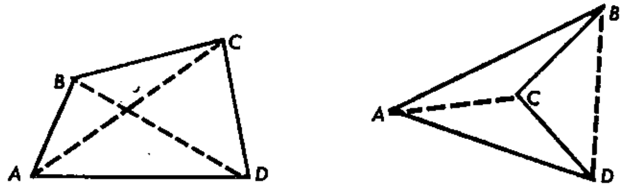
Definição

Um quadrilátero é *convexo* se dois quaisquer de seus vértices estão sempre de um mesmo lado de qualquer reta que contém um lado do quadrilátero.

A figura à esquerda, acima, satisfaz a definição. A da direita, não. (Por quê? O que é que você precisa exibir para mostrar que um quadrilátero *não* é convexo?)

Definições

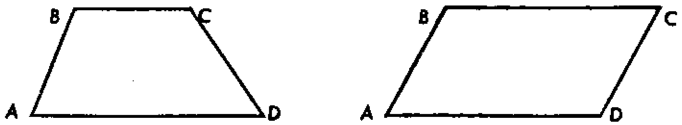
Dois lados de um quadrilátero são *opostos* se não se interceptam. Dois ângulos são *opostos* se não têm um lado do quadrilátero em comum. Dois lados são *consecutivos* se têm em comum uma extremidade. Dois ângulos são *consecutivos* se têm um lado do quadrilátero em comum. Uma *diagonal* de um quadrilátero é um segmento ligando dois vértices não consecutivos.



Desta forma, no quadrilátero $\square ABCD$, os seguintes pares de lados e ângulos são opostos: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$; $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$; $\angle A$ e $\angle C$; $\angle B$ e $\angle D$. Alguns dos pares consecutivos são: $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$; $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$; $\angle D$ e $\angle A$; $\angle A$ e $\angle B$. As diagonais de $\square ABCD$ são $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

Definição

Um *trapézio* é um quadrilátero que tem dois lados paralelos.



Observe que esta definição permite que *ambos* os pares de lados opostos sejam paralelos. Se isto acontece, temos um *paralelogramo*.

Definição

Um *paralelogramo* é um quadrilátero no qual ambos os pares de lados opostos são paralelos.

As demonstrações dos teoremas seguintes são imediatas.

Teorema 9-14

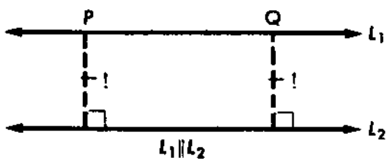
Tôda diagonal separa um paralelogramo em dois triângulos congruentes. Isto é, se $\square ABCD$ é um paralelogramo, então $\Delta ABC \cong \Delta CDA$.

Teorema 9-15

Em um paralelogramo, dois lados opostos quaisquer são congruentes.

Corolário 9-15.1

Se duas retas são paralelas, então todos os pontos de uma delas estão à mesma distância da outra.



Recordamos, da Seção 7-7, que a distância entre uma reta e um ponto fora dela é definida como sendo o comprimento do segmento perpendicular à reta pelo ponto. Algumas vêzes nos referiremos ao Corolário 9-15.1 dizendo "retas paralelas são sempre equidistantes".

Definição

A *distância entre duas retas paralelas* é a distância de um ponto qualquer de uma delas à outra.

Teorema 9-16

Em um paralelogramo, dois ângulos opostos quaisquer são congruentes.

Teorema 9-17

Em um paralelogramo, dois ângulos consecutivos quaisquer são suplementares.

Teorema 9-18

As diagonais de um paralelogramo se dividem ao meio.

Dado que $\square ABCD$ é um paralelogramo, os teoremas precedentes nos permitem tirar várias conclusões sôbre suas propriedades. Podemos, agora, considerar o problema inverso: o que é que precisamos saber sôbre $\square ABCD$ para concluir que é um paralelogramo?

Teorema 9-19

Um quadrilátero, no qual ambos os pares de lados opostos são congruentes, é um paralelogramo.

Teorema 9-20

Se dois lados de um quadrilátero são paralelos e congruentes, então o quadrilátero é um paralelogramo.

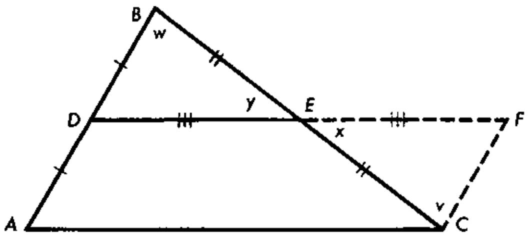
Teorema 9-21

Se as diagonais de um quadrilátero se dividem ao meio, então o quadrilátero é um paralelogramo.

O teorema seguinte não é óbvio, nem sua demonstração. Daremos a demonstração completa.

Teorema 9-22

O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e seu comprimento é a metade do comprimento dêste.



Re-enunciado: Dado o triângulo ΔABC, se D e E são os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, então $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ e $DE = \frac{1}{2}AC$.

Demonstração. Seja F o ponto na semi-reta oposta a $\overrightarrow{ED}$, tal que $EF = DE$. Temos agora a situação descrita pelas marcas na figura. A notação da demonstração abaixo segue A da figura.

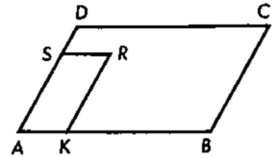
Afirmações	*Justificações*
1. $EF = DE$.	Definição de F.
2. $EB = EC$.	Definição de ponto médio.
3. $\angle x \cong \angle y$.	Teorema dos Ângulos Opostos pelo Vértice.
4. $\Delta EFC \cong \Delta EDB$.	LAL.
5. $\angle v \cong \angle w$.	Ângulos correspondentes.
6. $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CF}$.	AIP (Teorema 9-5).
7. $DB = FC$.	Lados correspondentes.
8. $AD = DB$.	Definição de ponto médio.
9. $AD = FC$.	Passagens 7 e 8.
10. $\square ADFC$ é um paralelogramo.	Teorema 9-20.
11. $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$.	Definição de paralelogramo.
12. $DE = \frac{1}{2}DF$.	Passagem 1.
13. $DE = \frac{1}{2}AC$.	Passagem 12 e Teorema 9-15.

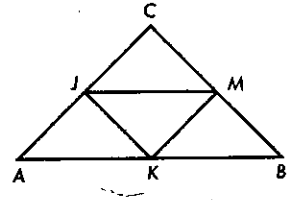
Problemas 9-5

1. A medida de um ângulo de um paralelogramo é 45. Quais são as medidas dos outros ângulos?

2. Dois ângulos consecutivos de um paralelogramo medem $(x + 30)$ e $(2x - 60)$, respectivamente. Determine, em números, a medida de cada ângulo do paralelogramo.

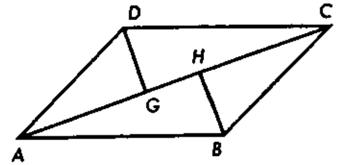
3. Na figura, $\square ABCD$ e $\square AKRS$ são paralelogramos. Qual a relação entre $\angle D$ e $\angle R$? entre $\angle R$ e $\angle C$? Demonstre sua resposta.





4. Na figura, $\square AKMJ$ e $\square BMJK$ são paralelogramos. Se $KJ = KM$, então ΔABC é isósceles.

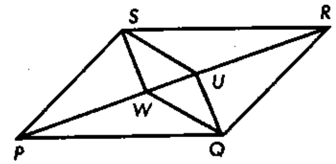
5. Dados um paralelogramo e uma diagonal, demonstre que os segmentos perpendiculares à diagonal a partir de vértices opostos, são paralelos e congruentes.



6. $\square PQRS$ é um paralelogramo.

$$PW = PS \text{ e } RU = RQ.$$

Demonstre que $\square SWQU$ é um paralelogramo.

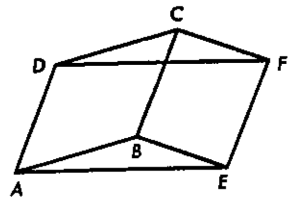


7. Dado um triângulo isósceles e um ponto P, da base, distinto dos vértices, traçando-se por P uma paralela a cada lado congruente: (1) forma-se um paralelogramo e (2) o perímetro do paralelogramo é igual à soma dos comprimentos dos lados congruentes do triângulo.

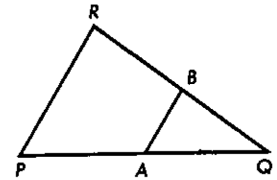
8. A afirmação seguinte é verdadeira? Explique.

   Um trapézio é um paralelogramo se, e sòmente se, suas diagonais se dividem ao meio.

9. Em uma figura plana, $\square ABCD$ e $\square BEFC$ são paralelogramos. Demonstre que $\square AEFD$ é um paralelogramo.



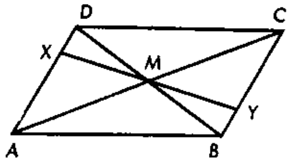
10. No triângulo ΔPQR, A e B são os pontos médios de $\overline{PQ}$ e $\overline{RQ}$, respectivamente. Se $RP = 16$, $m\angle P = 58$ e $m\angle Q = 38$, quanto valem AB e $m\angle ABR$?



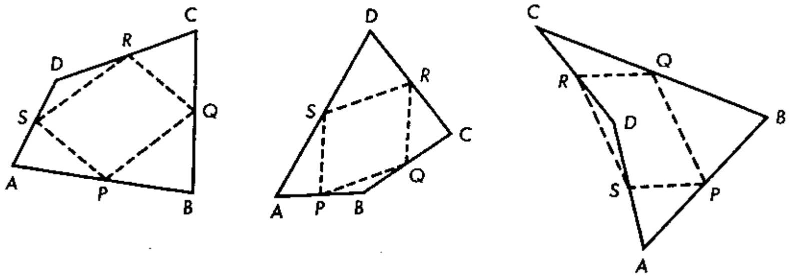
11. Dados um triângulo qualquer, ΔABC, e os pontos médios de cada lado, P, Q e R, demonstre que o perímetro do ΔPQR é metade do perímetro do ΔABC.

12. (a) As diagonais de um quadrilátero sempre se interceptam?
(b) Esboce um quadrilátero $\square ABCD$ no qual B e D estão no mesmo lado da diagonal $\overline{AC}$.

13. As diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ do paralelogramo $\square ABCD$ se interceptam em M. Demonstre que se os pontos X e Y estão em lados opostos do paralelogramo, de tal forma que $\overline{XY}$ contém M, então M divide $\overline{XY}$ ao meio.

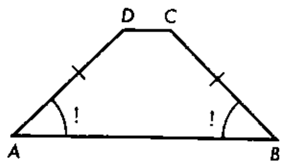


14. Enuncie e demonstre um teorema sugerido pelas figuras dadas, onde P, Q, R e S são pontos médios. [*Sugestão:* Introduza uma diagonal do $\square ABCD$.]



15. Demonstre: Os segmentos que ligam os pontos médios de lados opostos de um quadrilátero qualquer se dividem ao meio. [*Sugestão:* Veja o Problema 14.]

16. Na figura, $\square ABCD$ é um trapézio, com $DC < AB$. Demonstre que se $AD = BC$ então $\angle A \cong \angle B$. [*Sugestão:* Veja o Corolário 9-15.1.]



17. Um trapézio tendo no mínimo um par de lados opostos congruentes é chamado *trapézio isósceles.* Demonstre que todo paralelogramo é um trapézio isósceles. A afirmação recíproca é verdadeira?

18. Demonstre: Se dois ângulos consecutivos de um trapézio são congruentes, mas não suplementares, então o trapézio é isósceles.

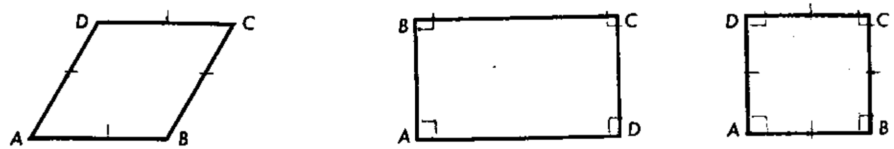
+ 19. Demonstre que se $\square ABCD$ é um paralelogramo, então D é um ponto interior ao $\angle ABC$.

+ 20. Demonstre que as diagonais de um paralelogramo se dividem ao meio. [*Sugestão:* Use o Problema 19 desta série e o Problema 7 de Problemas 6-8.]

9-6. LOSANGO, RETÂNGULO E QUADRADO

Definições

Um *losango* é um paralelogramo cujos lados são todos congruentes.
Um *retângulo* é um paralelogramo cujos ângulos são todos retos.
Um *quadrado* é um retângulo cujos lados são todos congruentes.



Como antes, deixamos as demonstrações dos teoremas seguintes para você.

Teorema 9-23

Se um paralelogramo tem um ângulo reto, então tem quatro ângulos retos e o paralelogramo é um retângulo.

Teorema 9-24

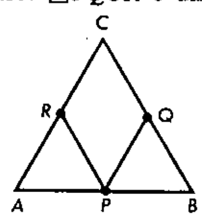
Em um losango, as diagonais são perpendiculares entre si. [*Sugestão:* Veja o Corolário 6-2.1.]

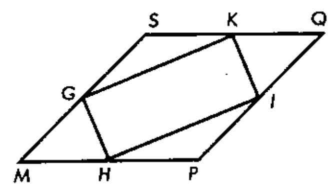
Teorema 9-25

Se as diagonais de um quadrilátero se dividem ao meio e são perpendiculares, então o quadrilátero é um losango.

Problemas 9-6

1. Indique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.
(a) Um retângulo é um trapézio.
(b) Um quadrado é um paralelogramo.
(c) Um losango é um quadrado.
(d) Um retângulo é um quadrado.
(e) Um quadrado é um retângulo.
(f) Um quadrado é um losango.
(g) As diagonais de um losango se dividem ao meio.
(h) As diagonais de um retângulo são perpendiculares entre si.
(i) As diagonais de um quadrado são perpendiculares e se dividem ao meio.
(j) Se as diagonais de um quadrilátero são perpendiculares, o quadrilátero é um losango.
2. Demonstre: As diagonais de um retângulo são congruentes.
3. Demonstre: As diagonais de um losango são bissetrizes dos ângulos do losango.
4. Dados: ΔABC com $AC = BC$; P, Q e R são pontos médios.
Demonstre: $\square PQCR$ é um losango.





5. Dados: O losango $\square MPQS$, os pontos médios G, H, I e K.
Demonstre: $\square GHIK$ é um retângulo.

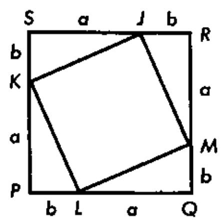
6. Para quais dos seguintes quadriláteros — paralelogramo, retângulo, losango, quadrado — pode se demonstrar as seguintes propriedades?
(a) As diagonais se dividem ao meio.
(b) As diagonais são congruentes.
(c) Ângulos consecutivos são congruentes.
(d) As diagonais são bissetrizes dos ângulos do quadrilátero.
(e) As diagonais são perpendiculares.
(f) Ângulos opostos são congruentes.
(g) As diagonais são congruentes e perpendiculares.

7. As seguintes condições seriam suficientes para demonstrar que um quadrilátero é um paralelogramo? um retângulo? um losango? um quadrado? Considere cada caso separadamente.
(a) O quadrilátero tem dois pares de lados paralelos.
(b) Três de seus ângulos são ângulos retos.
(c) O quadrilátero é equilátero.
(d) Suas diagonais são congruentes e perpendiculares.
(e) Cada par de ângulos consecutivos são suplementares.
(f) Dois lados são paralelos.
(g) Suas diagonais se dividem ao meio.
(h) Suas diagonais são congruentes, perpendiculares e se dividem ao meio.

* 8. Demonstre: Se no quadrilátero $\square ABCD$, $\angle A \cong \angle C$ e $\angle B \cong \angle D$, então $\square ABCD$ é um paralelogramo. [*Sugestão:* Introduza uma diagonal. Use o Teorema 9-13 e o Problema 7 de Problemas 9-1.]

* 9. É dado o paralelogramo $\square ABCD$ com $AD > AB$. A bissetriz do $\angle A$ intercepta $\overline{BC}$ em G e a bissetriz do $\angle B$ intercepta $\overline{AD}$ em H. Demonstre que $\square ABGH$ é um losango.

10. Dados: $\square PQRS$ é um quadrado. J, K, L e M separam os lados em segmentos, como se vê na figura, de comprimentos a e b.
Demonstre: $\square JKLM$ é um quadrado.



* 11. Chamaremos *papagaio* um quadrilátero no qual apenas uma diagonal é mediatriz da outra. Demonstre que um papagaio tem dois pares de lados congruentes, mas que seus lados opostos não são congruentes.

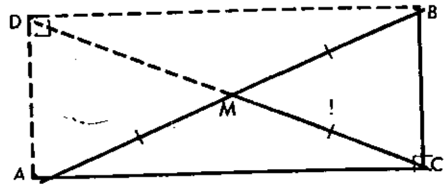
*+ 12. No quadrilátero convexo $\square ABCD$, $\overline{AD}$ é o lado menor e $\overline{BC}$ é o lado maior. Demonstre que $\angle D > \angle B$. [*Sugestão:* Trace uma diagonal. Êste teorema é verdadeiro se $\square ABCD$ não fôr necessàriamente convexo?]

9-7. ALGUNS TEOREMAS SÔBRE TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

Nosso conhecimento dos quadriláteros nos dá algumas informações sôbre triângulos retângulos.

Teorema 9-26

A mediana em relação à hipotenusa de um triângulo retângulo tem por comprimento a metade do comprimento da hipotenusa.

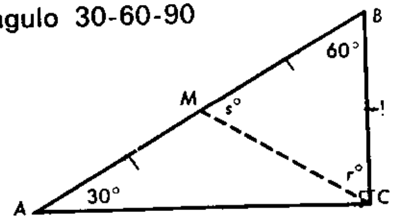


Demonstração. Dado ΔABC, com $\angle C$ reto, e M ponto médio de $\overline{AB}$, tome um ponto D em $\overrightarrow{CM}$ tal que $\square ADBC$ seja um paralelogramo. (Como você acha êste ponto?) Então $\square ADBC$ é um retângulo. (Por quê?) Temos, também, $CD = AB$. (Por quê?) Portanto, $CM = \frac{1}{2}AB$, que é o que queríamos.

O teorema abaixo nos diz alguma coisa sôbre a forma de certos triângulos especiais.

Teorema 9-27. O Teorema do Triângulo 30-60-90

Se um ângulo agudo de um triângulo retângulo mede 30, então o comprimento do lado oposto é metade do comprimento da hipotenusa.



Demonstração. Dado ΔABC, com um ângulo reto em C e $m\angle A = 30$, seja M o ponto médio da hipotenusa $\overline{AB}$. Então, pelo Teorema 9-26, sabemos que

$$AM = MB = MC,$$

como está indicado na figura.

Ora, $m\angle B = 60$. (Por quê?) Portanto, $r = 60$, pelo Teorema do Triângulo Isósceles.

Mas

$$r + s + 60 = 180.$$

Portanto, $s = 60$ e ΔMBC é equiângulo. Logo, ΔMBC é equilátero. Assim,

$$BC = MC = \tfrac{1}{2}AB,$$

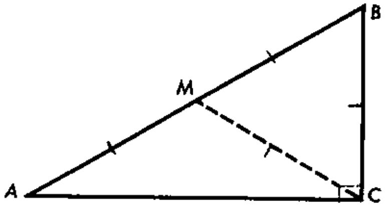
como queríamos demonstrar.

Vamos nos referir a êste teorema muitas vêzes, dizendo que "num triângulo 30-60-90, a hipotenusa tem o dôbro do comprimento do cateto menor".

A recíproca dêste teorema também é verdadeira.

Teorema 9-28

Se o comprimento de um cateto de um triângulo retângulo é metade do comprimento da hipotenusa, então o ângulo oposto a êste cateto mede 30.

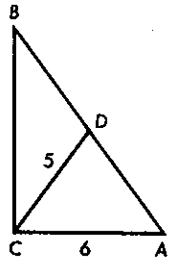


Demonstração. Dado ΔABC, com um ângulo reto em C e $BC = \frac{1}{2}AB$, seja M o ponto médio de $\overline{AB}$. Então, $AM = MB = BC$. Pelo Teorema 9-26, $MC = MB$. (Agora, todos os símbolos da figura estão justificados.)

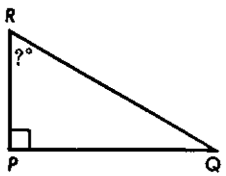
Como ΔMBC é equilátero, é equiângulo. Portanto, $m\angle B = 60$. Pelo Corolário 9-13.2, $m\angle A = 30$, como queríamos demonstrar.

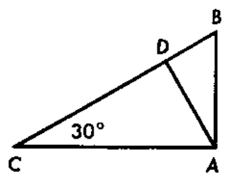
Problemas 9-7

1. No triângulo ΔABC, $\angle C$ é um ângulo reto, $AC = 6$, e o comprimento da mediana $\overline{DC}$ é 5. Quanto vale AB?



2. Na figura, $RQ = 2RP$. Então $m\angle R = ?$





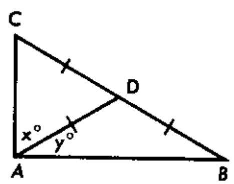
3. Na figura, $\overline{AC} \perp \overline{AB}$ e $\overline{AD} \perp \overline{BC}$. Se $BC = 12$, determine DB.

4. Em um triângulo equilátero, ΔGHK, a altura $\overline{GM}$ mede 9. Por M, traçam-se perpendiculares aos outros dois lados. Demonstre que êstes segmentos perpendiculares são congruentes e calcule seus comprimentos.

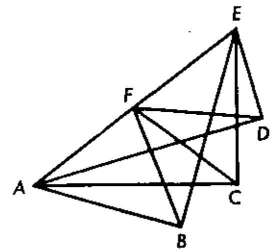
5. Demonstre o recíproco do Teorema 9-26:

   Em um triângulo, se uma mediana tem por comprimento a metade do comprimento do lado que divide ao meio, então o triângulo é retângulo e o lado em questão é a hipotenusa.

   Dados: ΔABC, a mediana $\overline{AD}$, $AD = \frac{1}{2}BC$.
   Demonstre: ΔABC é um triângulo retângulo e $\overline{BC}$ é a hipotenusa. [*Sugestão:* Demonstre que $x + y = 90$.]

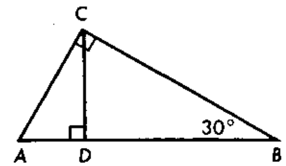


6. Na figura, F é o ponto médio de $\overline{AE}$ e $\angle ABE$, $\angle ACE$ e $\angle ADE$ são ângulos retos. Demonstre que F é equidistante de A, B, C, D e E.



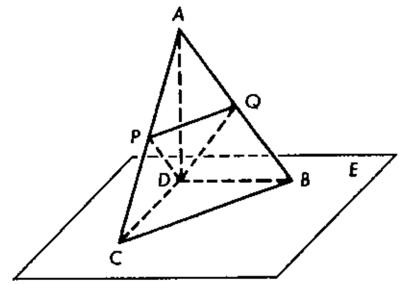
7. ΔPQR é isósceles, com $PR = QR = a$. L é uma reta qualquer por R, mas não contendo P ou Q. X e Y são dois pontos de L à distância a de R. Demonstre que $\overline{XP} \perp \overline{YP}$ e $\overline{XQ} \perp \overline{YQ}$.

8. Em um triângulo retângulo, a altura em relação à hipotenusa separa esta em dois segmentos. Demonstre que num triângulo 30-60-90, os comprimentos dêstes segmentos estão na razão 1:3.



9. Dado um triângulo equilátero ΔABC, na semi-reta oposta a $\overrightarrow{BA}$, tome um ponto D tal que $BD = AC$. Demonstre que $m\angle BCD = 30$.

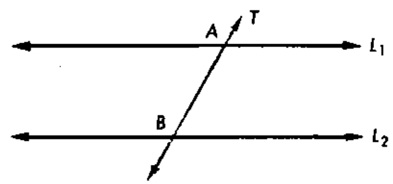
10. Na figura, ΔABC é equilátero, $\overline{AD} \perp E$ e P e Q são os pontos médios de $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente. Demonstre que ΔPDQ é equilátero.



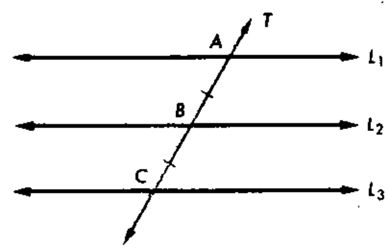
9-8. TRANSVERSAIS A VÁRIAS PARALELAS

Definições

Se uma transversal intercepta duas retas L_1 e L_2 nos pontos A e B, então dizemos que L_1 e L_2 *determinam* (ou interceptam) o segmento $\overline{AB}$ sôbre a transversal.



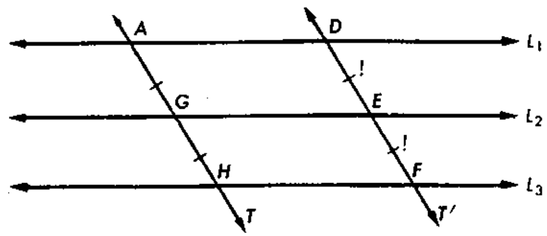
Suponha que são dadas três retas L_1, L_2 e L_3 e uma transversal que as intercepta nos pontos A, B e C. Se $AB = BC$, então dizemos que as três retas *determinam segmentos congruentes* sôbre a transversal.



Mostraremos que se três paralelas determinam segmentos congruentes sôbre uma transversal, então elas determinam segmentos congruentes sôbre qualquer outra transversal. Nosso primeiro passo é demonstrar o teorema seguinte.

Teorema 9-29

Se três retas paralelas determinam segmentos congruentes sôbre uma transversal T, então elas determinam segmentos congruentes sôbre qualquer transversal T' paralela a T.

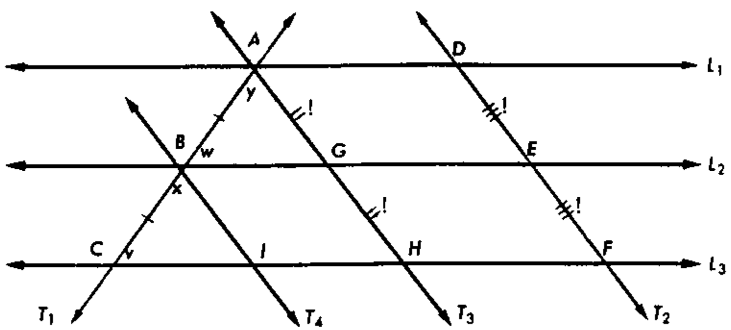


Demonstração. Primeiramente, observamos que $\square AGED$ e $\square GHFE$ são paralelogramos. (Por quê?) É dado que $AG = GH$. Pelo Teorema 9-15, $AG = DE$ e $GH = EF$. Portanto, $DE = EF$.

Podemos, agora, demonstrar o teorema no caso geral.

Teorema 9-30

Se três paralelas determinam segmentos congruentes sôbre uma transversal, então elas determinam segmentos congruentes sôbre qualquer outra transversal.



Demonstração. Sejam L_1, L_2 e L_3 as três paralelas e T_1 e T_2 as duas transversais. Na notação da figura, sabemos que $AB = BC$ e desejamos demonstrar que $DE = EF$. Já sabemos que isto se verifica se $T_1 \parallel T_2$. Podemos, portanto, supor que T_1 e T_2 *não* são paralelas.

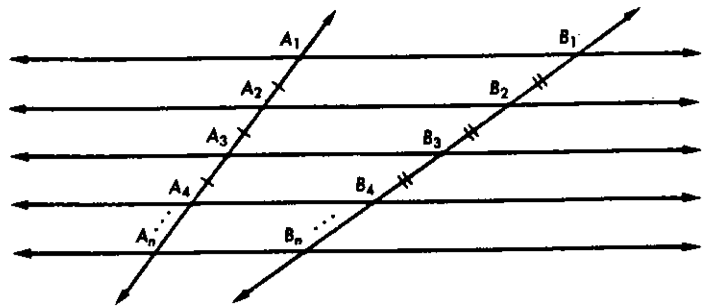
Seja T_3 a paralela a T_2 por A e seja T_4 a paralela a T_2 por B. (Lembre-se do Teorema 9-11.)

Afirmações	*Justificações*
1. $AB = BC$.	Dado.
2. $\angle x \cong \angle y$.	Teorema 9-9.
3. $\angle v \cong \angle w$.	Teorema 9-9.
4. $\Delta ABG \cong \Delta BCI$.	ALA.
5. $AG = BI$.	Lados correspondentes.
6. $BI = GH$.	Lados opostos de um paralelogramo são congruentes.
7. $AG = GH$.	Passagens 5 e 6.
8. $DE = EF$.	Teorema 9-29.

Vale a mesma conclusão para um número qualquer de paralelas.

Corolário 9-30.1

Se três ou mais paralelas determinam segmentos congruentes sôbre uma transversal, então elas determinam segmentos congruentes sôbre qualquer outra transversal.



Isto é, dado que

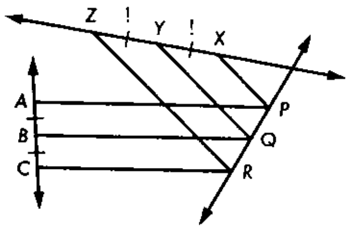
$$A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \cdots,$$

segue-se que

$$B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = \cdots,$$

e assim por diante. Isto segue por aplicações repetidas do teorema que acabamos de demonstrar.

Problemas 9-8



1. Dados: $AB = BC$,

   $\overleftrightarrow{AP} \parallel \overleftrightarrow{BQ} \parallel \overleftrightarrow{CR}$,

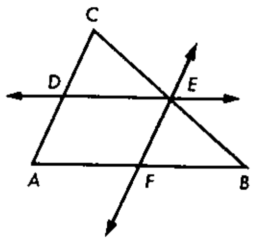
   $\overleftrightarrow{PX} \parallel \overleftrightarrow{QY} \parallel \overleftrightarrow{RZ}$.

   Demonstre: $XY = YZ$.

   $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{XZ}$ devem ser coplanares para que a demonstração valha?

2. Demonstre o seguinte teorema:

   Se uma reta divide ao meio um lado de um triângulo e é paralela a um segundo lado, então divide ao meio, também, o terceiro lado.

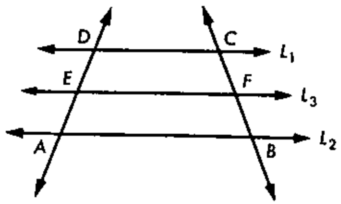


3. Na figura,

   $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overline{AB}, \quad \overleftrightarrow{EF} \parallel \overline{AC}$,

   e D é o ponto médio de $\overline{AC}$. Demonstre que

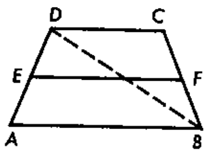
   $\Delta CDE \cong \Delta EFB$.



4. Se uma transversal corta as paralelas L_1 e L_2 em D e A e uma outra transversal corta L_1 e L_2 em C e B, então $\square ABCD$ é um trapézio. Sendo $L_3 \parallel L_1$, por que L_3 também é paralela a L_2? Se L_3 contém E, o ponto médio de $\overline{AD}$, por que L_3 contém F, o ponto médio de $\overline{BC}$? L_3 contém $\overline{EF}$? Por quê? O segmento $\overline{EF}$ é chamado *mediana* do trapézio $\square ABCD$; os lados paralelos $\overline{AB}$ e $\overline{CE}$ são chamados *bases* do trapézio.

   (a) Demonstre que a mediana de um trapézio divide ambas as diagonais ao meio.

   (b) Demonstre que o comprimento da mediana de um trapézio é metade da soma dos comprimentos das bases; isto é, demonstre que



$$EF = \tfrac{1}{2}(AB + CD).$$

   [*Sugestão:* Use uma diagonal e o Teorema 9-22.]

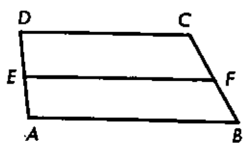
5. $\square ABCD$ é um trapézio com $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. $\overline{EF}$ é a mediana (veja o Problema 4).

   (a) Se $AB = 12$ e $DC = 7$, então $EF = ?$

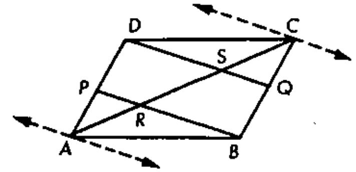
   (b) Se $AB = 14$ e $DC = 14$, então $EF = ?$

   (c) Se $DC = 6$ e $EF = 14$, então $AB = ?$

   (d) Se $AB = 27$ e $EF = 18$, então $DC = ?$



6. Demonstre que, em um paralelogramo, os dois segmentos que unem um par de vértices opostos aos pontos médios de um par de lados opostos dividem a diagonal em três segmentos de comprimentos iguais.



   Dados: $\square ABCD$ é um paralelogramo.
   P e Q são pontos médios.

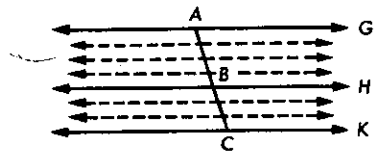
   Demonstre: $AR = RS = SC$.

   [*Sugestão:* $\overline{DQ}$ é paralelo a $\overline{RB}$?]

+ 7. No Problema 6, se K é o ponto médio de $\overline{DC}$ e M é o ponto médio de $\overline{AB}$, $\overline{BK}$ e $\overline{DM}$ conterão os pontos S e R? Por quê?

+ 8. No Problema 6, se $\overline{DB}$ e $\overline{AC}$ se interceptam em E, demonstre que $ES = \frac{1}{6}AC$.

*+ 9. Na figura, as retas paralelas são igualmente distanciadas umas das outras e dividem $\overline{AC}$ em 7 segmentos congruentes. Dados $AB = 2$ e $BC = 1\frac{1}{2}$, 7 é o menor número de segmentos congruentes no qual qualquer conjunto de paralelas dividirá $\overline{AC}$, desde que estas paralelas incluam $\overleftrightarrow{AG}$, $\overleftrightarrow{BH}$ e $\overleftrightarrow{CK}$. Nestas mesmas condições, qual será o menor número de segmentos congruentes se

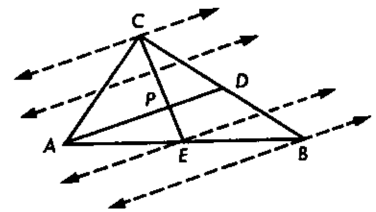


   (a) $AB = 4$, $BC = 1$?
   (b) $AB = 3{,}5$, $BC = 1$?
   (c) $AB = 15$, $BC = 3$?
   (d) $AB = 1{,}3$, $BC = 0{,}8$?
   (e) $AB = 1{,}414$, $BC = 1$?
   (f) $AB = \sqrt{2}$, $BC = 1$?
   (g) $AB = \sqrt{3}$, $BC = 2\sqrt{3}$?
   (h) $AB = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{3}$?

Problema Magno

Use a figura como sugestão para ajudá-lo a demonstrar o seguinte teorema.

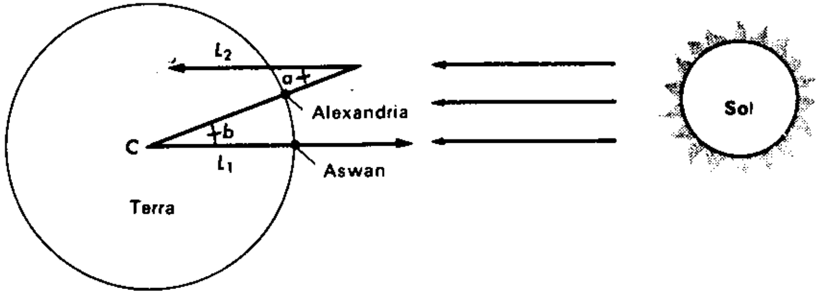
As medianas de um triângulo se interceptam em um ponto comum cuja distância a qualquer vértice é dois terços do comprimento da mediana pelo referido vértice.



9-9. COMO ERATÓSTENES MEDIU A TERRA

A circunferência da Terra, ao nível do equador, é cêrca de 40.000 quilômetros. No século quinze, pensava-se que era muito menor. Assim, quando Colombo partiu para a Índia e aportou em uma das Ilhas Bahamas, achou que já estava na Índia. Logo, sua margem de êrro foi maior que a largura dos Estados Unidos, mais a do Oceano Pacífico.

No terceiro século antes de Cristo, entretanto, os gregos sabiam mais. Naquela época, um matemático grego, Eratóstenes, mediu a circunferência da Terra e seu resultado apresentava um êrro de apenas um ou dois por cento. Êle inventou o seguinte método.



Observou-se que em Aswan (então chamada Syena), no Nilo, ao meio dia do solstício de verão, o sol estava exatamente a pino. Isto é, ao meio-dia dêste dia particular, uma vareta em posição vertical não lançava nenhuma sombra, e a base de um poço profundo ficava completamente iluminada.

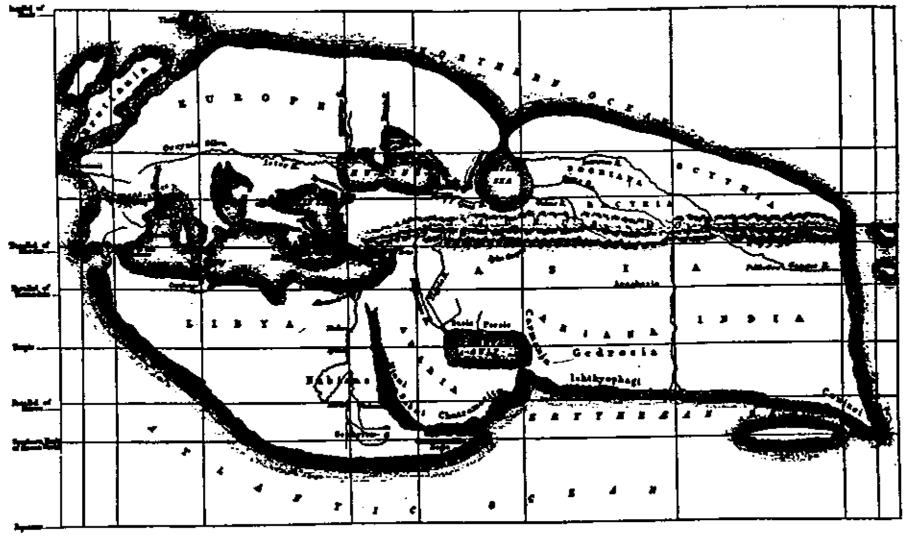
Na figura, C é o centro da Terra. Ao meio-dia no solstício de verão, em Alexandria, Eratóstenes mediu o ângulo denotado com $\angle a$ na figura, isto é, o ângulo entre uma vareta vertical e uma semi-reta a partir do ponto superior da vareta até o pé de sua sombra. Êle viu que era um ângulo com cêrca de 7° 12′, ou cêrca de $\frac{1}{50}$ de uma circunferência completa.

Ora, os raios do sol, observados da Terra, são muito aproximadamente paralelos. Admitindo-se que sejam, de fato, paralelos, segue-se, então, que as retas L_1 e L_2 na figura são cortadas por uma transversal, sendo os ângulos alternos-internos congruentes. Portanto, $\angle a \cong \angle b$. Assim, a distância de Aswan a Alexandria deve ser cêrca de $\frac{1}{50}$ da circunferência da Terra.

A distância de Aswan a Alexandria era conhecida, cêrca de 5.000 "stadia" gregos. (Um *stadium* era uma antiga unidade de distância.) Eratóstenes concluiu que a circunferência da Terra devia ser por volta de 250.000 "stadia". Convertendo a quilômetros, de acôrdo com o que antigas fontes dizem sôbre o comprimento de um "stadium", obtemos 39.600 quilômetros.

Assim, o êrro de Eratóstenes foi cêrca de um por cento. Mais tarde, êle mudou sua estimativa para uma mais próxima, 252.000 "stadia", mas ninguém parece saber por que êle fêz tal mudança. Na base da evidência, alguns historiadores acham que Eratóstenes foi não apenas muito inteligente e cuidadoso, mas também teve muita sorte.

Desde os primeiros tempos, a geometria desenvolveu um papel preponderante na Matemática aplicada. Os egípcios precisaram dela intensamente, porque o Nilo elevava seu nível anualmente, destruía as pequenas demarcações das terras criando, assim, problemas de agrimensura. Daí a palavra *geometria*, provindo de duas palavras gregas, significando *terra* e *medida*. Mais tarde, aconteceu que a "geometria" seria usada não apenas para medir coisas que estavam *sôbre* a terra, mas, literalmente, para medir a própria terra. Isto ilustra um processo geral: quando uma parte útil da Matemática se desenvolve por uma razão, em geral, ela se torna igualmente útil por outras razões inesperadas.



ERATÓSTENES (276–194 A.C.)

Muito pouco se conhece sôbre o trabalho de Eratóstenes. Temos alguns fragmentos de seus livros, na forma de citações de outros autores antigos, mas nenhum dos seus próprios livros sobreviveu até os dias de hoje. As fontes indicam, entretanto, que êle escreveu sôbre quase tudo: geometria, astronomia, teoria dos números, história e comédia. Foi, também, um poeta. Os gregos chamavam-no *Beta* (a segunda letra do alfabeto grego) por ser êle o segundo em tudo, ainda que nunca o melhor em nada.

Sua façanha ao medir a circunferência da Terra, entretanto, foi tão espetacular que foi completamente narrada por outros e corretamente atribuída a êle.

A ilustração mostra um mapa do mundo baseado nas idéias de Eratóstenes.

Revisão do Capítulo

Série A

1. Indique se as afirmações são verdadeiras ou falsas.

(a) Em um plano, se uma reta é paralela a uma de duas paralelas, é paralela à outra.

(b) As diagonais de um losango são bissetrizes dos ângulos do losango.

(c) Se a mediana em relação à hipotenusa de um triângulo retângulo mede 7 m de comprimento, a hipotenusa mede 14 m de comprimento.

(d) Um paralelogramo é um trapézio.

(e) Se duas retas são cortadas por uma transversal, então os ângulos correspondentes são congruentes.

(f) Qualquer diagonal de um paralelogramo forma, com os lados, dois triângulos congruentes.

(g) As diagonais de um losango são congruentes.

(h) Se um cateto de um triângulo 30-60-90 mede 8 m, então a hipotenusa mede 16 m.

(i) Duas retas ou são paralelas ou se interceptam.

(j) Em um plano, se uma reta intercepta uma de duas paralelas, intercepta a outra.

2. Copie em seu caderno e complete cada afirmação.

(a) Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, os ângulos internos do mesmo lado da transversal são ....

(b) Se dois ângulos de um triângulo são congruentes a dois ângulos de um outro triângulo, então ....

(c) Os ângulos agudos de um triângulo retângulo são ....

(d) A hipotenusa de um triângulo 30-60-90 mede 13. O cateto oposto ao ângulo .... é congruente à .... em relação à hipotenusa e o comprimento do cateto é ....

(e) Se três ou mais paralelas determinam segmentos .... numa transversal, então ....

(f) O Postulado das Paralelas estabelece a .... entre uma reta que contém um ponto e que é .... a uma reta que não contém o ponto.

3. Para cada exemplo, faça a escolha que torne a afirmação verdadeira.

(a) Se as diagonais de um quadrilátero se dividem ao meio, então o quadrilátero é um

(i) losango, (ii) quadrado,
(iii) paralelogramo, (iv) retângulo.

(b) A figura formada ligando-se os pontos médios consecutivos dos lados de um quadrilátero é um

(i) retângulo, (ii) paralelogramo,
(iii) losango, (iv) nenhum dêstes.

(c) As bissetrizes dos ângulos opostos de um paralelogramo que não é losango são

(i) paralelas, (ii) colineares,
(iii) perpendiculares, (iv) reversas.

(d) As bissetrizes dos ângulos internos de um mesmo lado de uma transversal a duas paralelas são

(i) paralelas, (ii) perpendiculares,
(iii) se cruzam, mas não são perpendiculares,
(iv) reversas.

4. Seriam as seguintes condições sôbre um quadrilátero suficientes para se demonstrar que êsse quadrilátero é um trapézio? um paralelogramo? um retângulo? um losango? um quadrado? Considere cada ítem separadamente.

(a) Todos os quatro lados são congruentes.

(b) Dois lados são paralelos.

(c) Dois lados são congruentes.

(d) Suas diagonais se dividem ao meio.

(e) Suas diagonais são congruentes e se dividem ao meio.

(f) Todos os ângulos são congruentes.

(g) Suas diagonais são congruentes e perpendiculares.

(h) É equilátero e tem todos os ângulos congruentes.

(i) Dois ângulos opostos quaisquer são congruentes.

(j) Cada diagonal é bissetriz de dois de seus ângulos.

5. Indique, usando as letras T, A e N, se cada afirmação é verdadeira em TODOS os casos, verdadeira em ALGUNS e falsa em outros ou se não é verdadeira em NENHUM caso.

(a) Segmentos de reta, num mesmo plano, que não se interceptam, são paralelos.

(b) Se duas retas são cortadas por uma transversal, as semi-retas bissetrizes de um par de ângulos alternos-internos são paralelas.

(c) As diagonais de um losango se dividem ao meio.

(d) As diagonais de um quadrilátero são paralelas.

(e) Os ângulos opostos de um paralelogramo são suplementares.

(f) Um quadrado é um retângulo.

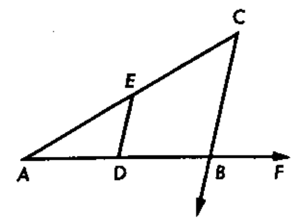
(g) Se uma diagonal de um quadrilátero forma com os lados dois triângulos congruentes, o quadrilátero é um paralelogramo.

(h) Se uma mediana de um triângulo tem por medida a metade do comprimento do lado que divide ao meio, então o triângulo é um triângulo retângulo.

(i) Se dois lados opostos de um quadrilátero são paralelos e os outros dois lados são congruentes, o quadrilátero é um paralelogramo.

(j) Se dois ângulos opostos de um quadrilátero são ângulos retos, o quadrilátero é um retângulo.

Série B



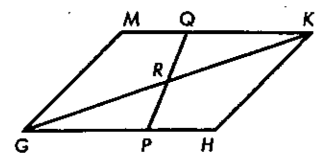
1. É dada a figura com D e E pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

(a) Se $m\angle A = 33$ e $m\angle C = 45$, quanto valem $m\angle CBF$ e $m\angle CED$?

(b) Se $BC = 6$, então $DE = ?$

(c) $\square DBCE$ é um ....

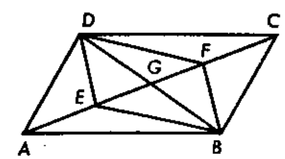
2. Se no triângulo ΔABC, $AB = 12$, $BC = 9$ e $AC = 13$; e P, Q e R são os pontos médios dos lados, qual é o perímetro de ΔPQR?



3. Dados: $\square GHKM$ é um paralelogramo e

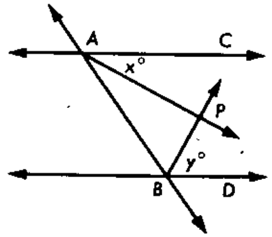
$$MQ = HP.$$

Demonstre: $\overline{GK}$ e $\overline{PQ}$ se dividem ao meio.



4. Na figura, $\square DEBF$ é um paralelogramo e $AE = CF$. Demonstre que $\square ABCD$ é um paralelogramo.

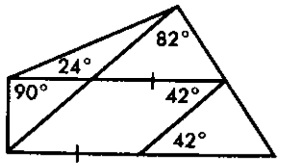
5. Demonstre: Se duas bissetrizes de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo se interceptam, elas são perpendiculares.



6. Tem-se que $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$. As bissetrizes de $\angle CAB$ e $\angle DBA$ se interceptam em P, e $AB = 2PB$. Calcule x e y.

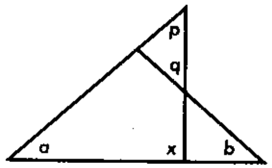
7. Por que não é válido o seguinte raciocínio?

   Pelo Teorema 9-11, sabemos que, num plano, duas retas paralelas a uma mesma reta são paralelas entre si. Portanto, se $\overleftrightarrow{AP} \parallel L$, $\overleftrightarrow{BP} \parallel L$ e $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{BP}$ e L são coplanares, então $\overleftrightarrow{AP} \parallel \overleftrightarrow{BP}$. Isto demonstra que duas retas que se interceptam podem, de fato, ser paralelas.



8. Numa figura como a dada ao lado, determine a medida de cada ângulo.

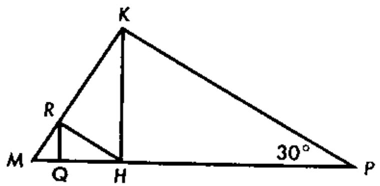
9. Demonstre: Em um plano, se uma reta é perpendicular a uma de duas retas que se interceptam, então ela não é perpendicular à outra.



10. Dados: $\angle a \cong \angle b$,

    $\angle p \cong \angle q$.

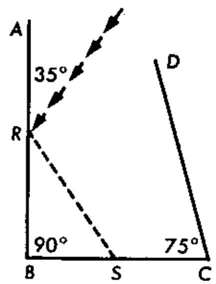
    Demonstre: $\angle x$ é um ângulo reto.



11. No triângulo ΔMPK, $\angle K$ é um ângulo reto e $m\angle P = 30$. Se $\overline{KH} \perp \overline{MP}$, $\overline{HR} \perp \overline{MK}$, $\overline{RQ} \perp \overline{MP}$, e $MP = 80$, determine MQ.

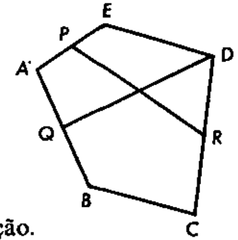
12. Demonstre: Se um trapézio tem os dois lados não paralelos congruentes a um dos lados paralelos, então as diagonais dividem ao meio os ângulos que determinam o outro dos lados paralelos.

13. Quando um raio de luz é refletido em uma superfície lisa, o ângulo formado pelo raio incidente com a superfície é congruente ao ângulo formado pelo raio refletido e a superfície. Na figura, $m\angle ABC = 90$, $m\angle BCD = 75$ e o raio de luz faz um ângulo de 35° com $\overrightarrow{RA}$. Copie a figura e complete o caminho do raio de luz, conforme êle se reflete em $\overline{AB}$, em $\overline{BC}$, em $\overline{CD}$ e em $\overline{AB}$, novamente. Sob que ângulo o raio emerge de $\overline{AB}$, na segunda vez?



14. Demonstre a veracidade ou a falsidade da seguinte afirmação:

    Se um quadrilátero tem um par de lados paralelos e um par de lados congruentes, então o quadrilátero é um paralelogramo.



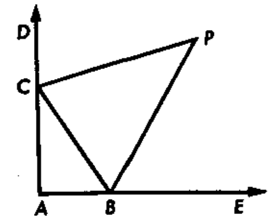
15. Na figura, $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$, $ED = BC$ e P, Q e R são pontos médios. Demonstre que $\overline{QD}$ divide $\overline{PR}$ ao meio. [*Sugestão:* Introduza $\overline{PQ}$ e $\overline{EB}$.]

* 16. Demonstre a veracidade ou a falsidade da seguinte afirmação.

   Se as diagonais de um quadrilátero são congruentes e perpendiculares, o quadrilátero é um quadrado.

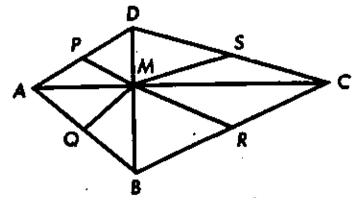
* 17. Demonstre a veracidade ou a falsidade da seguinte afirmação.

   Se as diagonais de um quadrilátero são congruentes e se dividem ao meio, o quadrilátero é um retângulo.

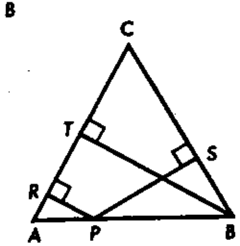


* 18. Na figura, $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AE}$ e as bissetrizes de $\angle DCB$ e $\angle EBC$ se interceptam em P. Calcule $m\angle P$ e diga qual foi seu raciocínio.

* 19. Demonstre: se cada diagonal de um quadrilátero é bissetriz de dois ângulos de um quadrilátero, o quadrilátero é um losango.



* 20. As diagonais de $\square ABCD$ são perpendiculares em M, e P, Q, R e S são os pontos médios dos lados. Demonstre que o perímetro de $\square ABCD$ é igual a duas vêzes a soma $MP + MQ + MR + MS$.

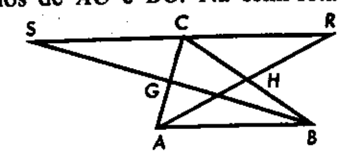


* 21. Demonstre: A soma dos comprimentos dos segmentos perpendiculares por um ponto qualquer da base se um triângulo isósceles, aos lados congruentes, é igual à altura em relação a qualquer um dos lados congruentes. [*Sugestão:* Considere uma paralela a $\overline{AC}$ por P, encontrando $\overline{BT}$ em Q. Mostre que $RP + PS = BT$.]

* 22. Seja ΔMPQ um triângulo isósceles, com $MP = MQ$. Por um ponto qualquer A entre M e Q, trace uma perpendicular a $\overline{PQ}$, encontrando $\overline{PQ}$ em B e encontrando $\overleftrightarrow{PM}$ em C. Demonstre que ΔMCA é isósceles.

* 23. Em um triângulo qualquer ΔABC, uma reta por A é perpendicular à bissetriz do $\angle B$ em K. Uma outra reta por K é paralela a $\overline{BC}$ e intercepta $\overline{AB}$ em M. Demonstre que M é o ponto médio de $\overline{AB}$. Você pode demonstrar, também, que $\overleftrightarrow{MK}$ divide $\overline{AC}$ ao meio?

* 24. ΔABC é um triângulo, com G e H pontos médios de $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$. Na semi-reta oposta a $\overrightarrow{HA}$, tome R tal que $HR = HA$. Da mesma forma, na semi-reta oposta a $\overrightarrow{GB}$, tome S tal que $GS = GB$. Demonstre que R, C e S são colineares e que $CR = CS$.



10 RETAS E PLANOS PARALELOS

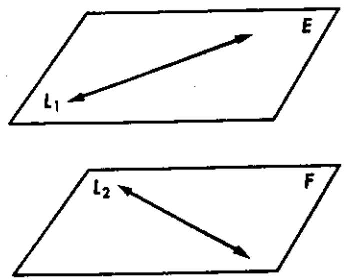
10-1. FATOS BÁSICOS A RESPEITO DE PLANOS PARALELOS

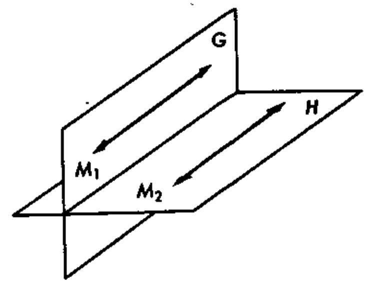
Definição

Dois planos, ou um plano e uma reta, são *paralelos* se não se interceptarem.

Se os planos E_1 e E_2 são paralelos, escrevemos $E_1 \parallel E_2$. Se a reta L e o plano E são paralelos, escrevemos $L \parallel E$ ou $E \parallel L$.

Como veremos, planos ou retas paralelos no espaço se comportam quase que da mesma maneira que retas paralelas num plano. Existem, porém, diferenças importantes. Por exemplo, não existem planos reversos: dois planos no espaço ou se interceptam ou são paralelos. Além do mais, se duas retas estiverem em planos paralelos, não se segue que as retas sejam paralelas. (Veja a figura, à esquerda, abaixo). Também, se duas retas são paralelas, sempre podemos encontrar dois planos que as contêm e que não são paralelos. (Veja figura, abaixo, à direita).

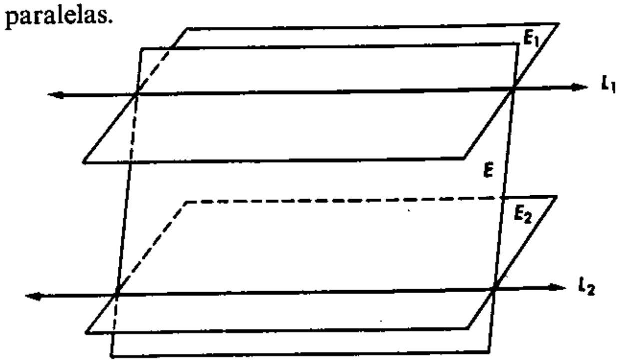




O teorema seguinte descreve uma situação comum, em que planos paralelos e retas paralelas aparecem na mesma figura.

Teorema 10-1

Se um plano intercepta dois planos paralelos, então as interseções são duas retas paralelas.



Demonstração. Dado um plano E, interceptando dois planos paralelos E_1 e E_2, pelo Postulado 8 (p. 52 livro, temos

(1) E intercepta E_1 numa reta L_1, e

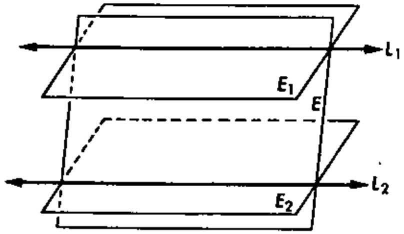
(2) E intercepta E_2 numa reta L_2.

Òbviamente

(3) L_1 e L_2 são coplanares (porque ambas estão em E). E

(4) L_1 e L_2 não têm ponto em comum (pois E_1 e E_2 não têm ponto em comum). As afirmações (3) e (4) nos dizem que

(5) $L_1 \parallel L_2$.



Teorema 10-2

Se uma reta é perpendicular a um de dois planos paralelos, ela é perpendicular ao outro.

Demonstração. Temos $E_2 \parallel E_1$ e $L \perp E_1$. Seja A um ponto qualquer em E_2 que não pertença a L. Então

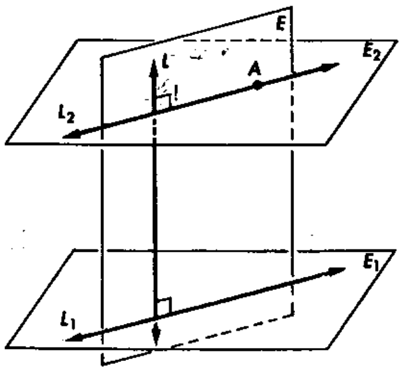
(1) L e A estão num plano E. (por quê?)

(2) E intercepta E_1 e E_2 nas retas L_1 e L_2 (Por quê?)

(3) $L_1 \parallel L_2$ (pelo Teorema 10-1).

(4) $L \perp L_1$ (pois $L \perp E_1$).

(5) $L \perp L_2$ (pelo Teorema 9-12).

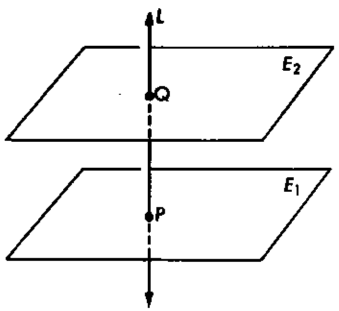


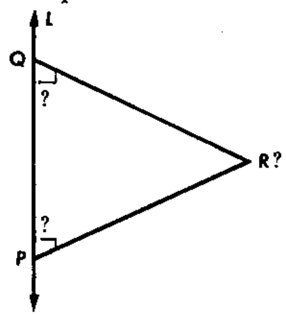
Assim, temos uma reta em E_2 que é perpendicular a L. Começando com um outro ponto B, e repetindo o processo todo, obtemos uma outra reta em E_2 perpendicular a L. Temos agora $L \perp E_2$, pelo Teorema 8-2.

O teorema seguinte é análogo ao Teorema 9-2.

Teorema 10-3

Dois planos perpendiculares a uma mesma reta são paralelos.





Demonstração. Temos $E_1 \perp L$ em P e $E_2 \perp L$ em Q. Queremos mostrar que $E_1 \parallel E_2$. Se isso não fôsse verdade, E_1 interceptaria E_2 em pelo menos um ponto, R.

Mas $\overleftrightarrow{RP} \perp L$ e $\overleftrightarrow{RQ} \perp L$, pois L é perpendicular a tôda reta de E_1 que passa por P e também a tôda reta de E_2 que passa por Q. Isso nos daria duas perpendiculares a L pelo ponto R, o que é impossível. (Veja o Teorema 6-4). Portanto E_1 e E_2 são paralelos.

Corolário 10-3.1

Dois planos paralelos a um terceiro são paralelos entre si.

(Você provàvelmente será capaz de acompanhar a demonstração sem uma figura. Tente!)

Demonstração. São dados $E_1 \parallel E_3$ e $E_2 \parallel E_3$. Seja L a reta perpendicular a E_3. Temos

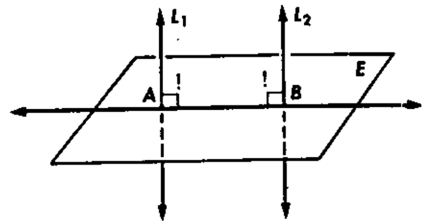
(1) $L \perp E_1$ (pelo Teorema 10-2).

(2) $L \perp E_2$ (pelo Teorema 10-2).

(3) $E_1 \parallel E_2$ (pelo Teorema 10-3).

Teorema 10-4

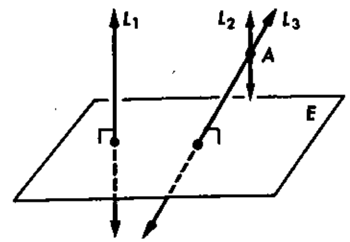
Duas retas perpendiculares a um mesmo plano são paralelas.



Demonstração. São dados $L_1 \perp E$ em A e $L_2 \perp E$ em B. Pelo Teorema 8-7, L_1 e L_2 são coplanares. Sendo $L_1 \perp E$, $L_1 \perp \overleftrightarrow{AB}$. Sendo $L_2 \perp E$, $L_2 \perp \overleftrightarrow{AB}$. Pelo Teorema 9-2, $L_1 \parallel L_2$.

Corolário 10-4.1

Um plano perpendicular a uma de duas retas paralelas é perpendicular à outra.



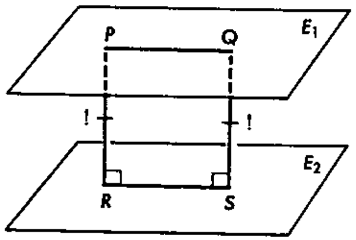
Demonstração. São dados $L_1 \parallel L_2$ e $L_1 \perp E$. Seja L_3 uma reta perpendicular a E, passando por um ponto A, qualquer, de L_2. L_3 existe pelo Teorema 8-9. Pelo Teorema 10-4, $L_1 \parallel L_3$. Pelo Postulado das Paralelas, $L_3 = L_2$. Isto é, L_3 e L_2 têm que ser a mesma reta. Como $L_3 \perp E$, temos $L_2 \perp E$.

Corolário 10-4.2

Duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si.

Demonstração. São dados $L_1 \parallel L_3$ e $L_2 \parallel L_3$. Queremos mostrar que $L_1 \parallel L_2$.
Seja E um plano perpendicular a L_3. Pelo corolário precedente $L_1 \perp E$ e $L_2 \perp E$. Pelo Teorema 10-4, $L_1 \parallel L_2$.

Teorema 10-5



Planos paralelos são sempre equidistantes.
Re-enunciado. Se $E_1 \parallel E_2$ então todos os pontos de E_1 são equidistantes de E_2.
Lembramos que a distância entre um ponto P e um plano E é o comprimento do segmento perpendicular de P a E.

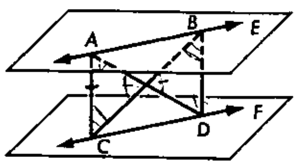
Demonstração. Sejam P e Q dois pontos quaisquer de E_1 e sejam $\overline{PR}$ e $\overline{QS}$ segmentos perpendiculares de P e Q a E_2. Então

(1) $\overleftrightarrow{PR} \parallel \overleftrightarrow{QS}$ (pelo Teorema 10-4).
(2) P, Q, R e S são coplanares porque êsses pontos pertencem a duas retas paralelas.
(3) $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{RS}$ (pelo Teorema 10-1).
(4) $\square PQSR$ é um paralelogramo, por (1), (2) e (3).
(5) $PR = QS$ porque lados opostos de um paralelogramo são congruentes.

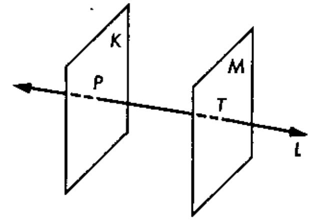
Sabemos, pelo Teorema 10-2, que os segmentos partindo de E_1 e perpendiculares a E_2 são precisamente os segmentos partindo de E_2 e perpendiculares a E_1. Sabemos portanto mais do que o enunciado realmente diz; isto é, sabemos o seguinte: *Se dois planos são paralelos, todos os segmentos perpendiculares a um dêles, partindo do outro, têm o mesmo comprimento.* De agora em diante, será essa a interpretação dada ao Teorema 10-5.
Observe que $\square PQSR$ é, de fato, um retângulo. Mas êsse fato não é necessário para a demonstração.

Problemas 10-1

1. Dados: Planos E e F são paralelos,
E contém $\overrightarrow{AB}$, F contém $\overrightarrow{CD}$,
$\overline{AC} \perp F$ e $\overline{BD} \perp F$.
Demonstre: $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ se cortam ao meio.

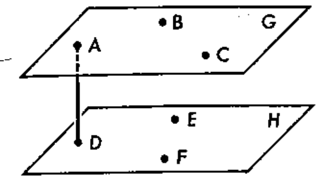


2. Se o plano $K \perp L$ em P e o plano $M \perp L$ em T, o que você pode concluir quanto a K e M? Por quê?



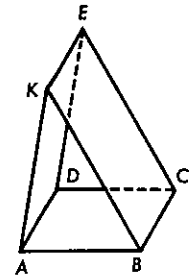
3. Verifique se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa.
Se E e F são planos paralelos e E contém a reta L_1 e F contém a reta L_2, então $L_1 \parallel L_2$.

4. O plano G contém os pontos A, B e C e o plano H contém os pontos D, E e F, tais que $\overline{AD} \perp G$, $\overline{AD} \perp H$, e $AB = DF$. Quais das seguintes afirmações são necessàriamente verdadeiras?



(a) $AF = BD$. (b) $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$. (c) $\Delta ABC \cong \Delta DFE$.
(d) $G \parallel H$. (e) $\overline{AC} \perp \overline{AD}$. (f) $\angle AFD \cong \angle DBA$.
(g) $\overline{AF}$ e $\overline{BD}$ se cortam ao meio. (h) $\overline{AC}$ $\overline{DF}$.

5. Na figura, $\square ABCD$, $\square ADEK$ e $\square BCEK$ são paralelogramos. Demonstre que
(a) $\overline{EK} \parallel \overline{AD} \parallel \overline{BC}$, e
(b) $\angle KAB \cong \angle EDC$.

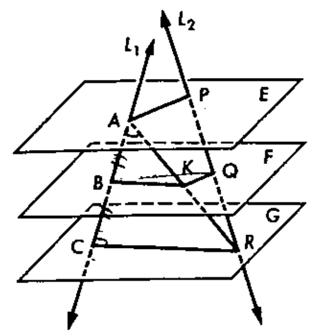


6. O plano M é paralelo ao plano K. A e C são pontos em M, B e D são pontos em K tais que $\overline{AD} \perp K$ e $\overline{BC} \perp M$. Demonstre que $AB = CD$.

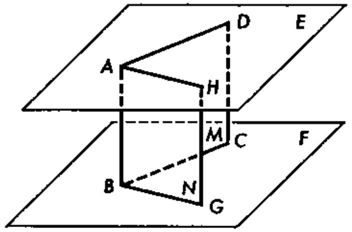
7. Demonstre o seguinte.
Se duas retas paralelas são interceptadas por dois planos paralelos, então os planos determinam sôbre as duas retas segmentos congruentes.

8. Na figura, as retas reversas L_1 e L_2 interceptam os planos paralelos E, F e G e $\overline{AR}$ intercepta F em K. Se $AB = BC$, demonstre que $PQ = QR$.

9. No Problema 8, demonstre também que
$$BQ < \tfrac{1}{2}(AP + CR).$$



10. Na figura, os planos M e N se interceptam em $\overleftrightarrow{AB}$ e M e N interceptam os planos paralelos E e F em $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AH}$ e $\overleftrightarrow{BG}$. Se $AD = BC$ e $AH = BG$, demonstre que $\angle DAH \cong \angle CBG$.

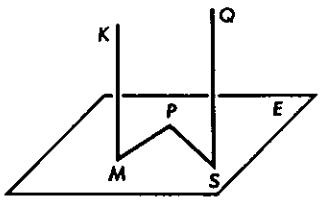


11. Indique se as afirmações são verdadeiras ou falsas. Faça um pequeno desenho para ilustrar as afirmações que são verdadeiras, ou esboçe o desenho de um contra-exemplo, se a afirmação fôr falsa.
    (a) Se uma reta está contida em um plano, uma reta paralela a esta é paralela ao plano.
    (b) Se uma reta e um plano são paralelos, tôda reta no plano é paralela à reta dada.
    (c) Duas retas paralelas a um mesmo plano podem ser perpendiculares entre si.
    (d) Se duas retas são paralelas, todo plano, contendo apenas uma delas, é paralelo à outra.
    (e) Se um plano intercepta dois planos paralelos, as retas de interseção são paralelas.
    (f) Se um plano intercepta dois planos não paralelos, as retas de interseção podem ser paralelas.

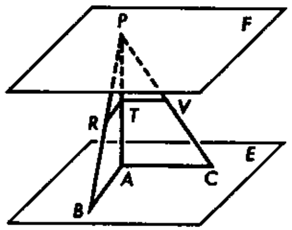
12. Mostre como se determina um plano que contém uma de duas retas reversas dadas e é paralelo à outra. Demonstre sua construção.

* 13. Dados: $\overline{PM}$ e $\overline{PS}$ estão no plano E. P, M e S são não-colineares. $\overline{KM} \perp \overline{PM}$, $\overline{QS} \perp \overline{PS}$ e $\overline{KM} \parallel \overline{QS}$.

Demonstre: $\overline{KM} \perp E$ e $\overline{QS} \perp E$.
[*Sugestão:* Introduza outra paralela].



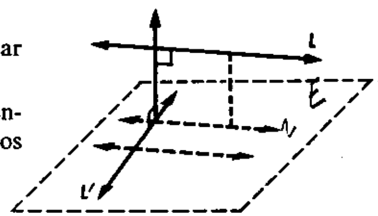
* 14. F e E são planos paralelos. A, B e C estão em E, P está em F e $\overline{PA} \perp F$. R, T, V são pontos médios de $\overline{PB}$, $\overline{PA}$ e $\overline{PC}$, respectivamente. Demonstre que o plano RTV é paralelo a F.



*+ 15. Demonstre o seguinte teorema:

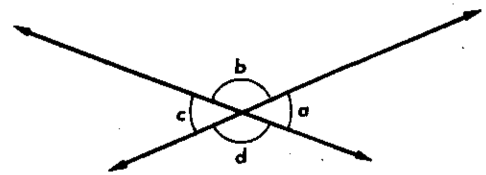
Existe uma e sòmente uma reta perpendicular a duas retas reversas dadas.

[*Sugestão:* A figura indica como obter a perpendicular comum. Retas e segmentos pontilhados indicam conjuntos auxiliares.]

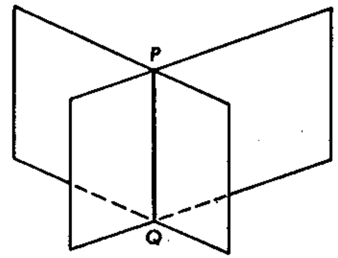


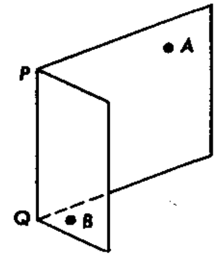
10-2. DIEDROS. PLANOS PERPENDICULARES

Sabemos que quando duas retas em um plano se interceptam, elas formam quatro ângulos:



Considere agora dois planos no espaço, interceptando-se numa reta como na figura abaixo, à esquerda.





Êles formam quatro figuras, cada uma das quais parecida com a figura acima, à direita. Uma tal figura é chamada *diedro* (ou ângulo diedro) e a reta $\overleftrightarrow{PQ}$, vista na figura, é chamada *aresta* do diedro.

Definições

Se dois semiplanos têm mesma origem, mas não estão contidos no mesmo plano, a reunião dos dois semiplanos e a origem comum é um *diedro*. A reta, origem dos dois semiplanos é chamada *aresta* do diedro. A reunião da aresta e qualquer um dos dois semiplanos é chamada uma *face* do diedro.

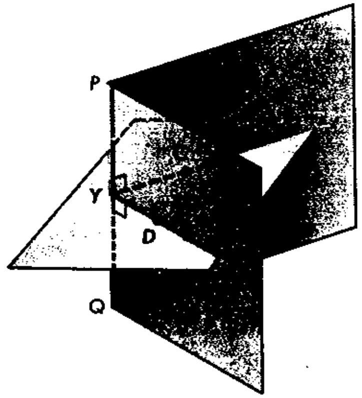
Para descrever um diedro particular, precisamos dizer que reta é sua aresta e quais são suas faces. Em geral, fazemos isso dando dois pontos P e Q na aresta e dois pontos A e B contidos nas duas faces. (Veja a figura acima). Representamos então o diedro por $\angle A\text{-}PQ\text{-}B$.

Podemos falar do *interior* e *exterior* de um diedro; e podemos também falar em diedros *opostos pela aresta*. Essas idéias são muito semelhantes às idéias já familiares a respeito de ângulos em um plano, e você deve ser capaz de dar suas próprias definições.

Seria bom se pudéssemos dizer que diedros retos são congruentes. Mas primeiramente precisamos explicar o que significa *medida* de um diedro. Fazemos isso da seguinte maneira:

Definição

É dado um diedro e um plano perpendicular à sua aresta. A interseção do plano perpendicular com o diedro é chamado *ângulo plano* ou *seção normal* do diedro.

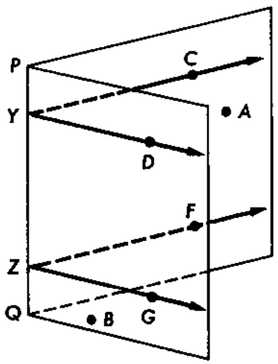


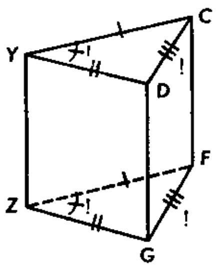
Na figura, as marcas indicam que $\angle PYC$ e $\angle PYD$ são ângulos retos. Isso significa que o plano que contém $\angle CYD$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{PQ}$ em Y. Segundo a definição que acabamos de dar, isso significa que $\angle CYD$ é um ângulo plano do $\angle A\text{-}PQ\text{-}B$.

Parece ser natural definir a medida de $\angle A\text{-}PQ\text{-}B$ como sendo a medida do $\angle CYD$. Mas isso não faria sentido, se ângulos planos distintos de um mesmo diedro tivessem medidas diferentes. Precisamos, portanto, demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 10-6

Todos os ângulos planos de um mesmo diedro são congruentes.





Demonstração. São dados dois ângulos planos do $\angle A\text{-}PQ\text{-}B$ com vértices em Y e Z. Tomamos os pontos C, D, F e G nos lados dos ângulos de modo que $YC = ZF$ e $YD = ZG$, como está indicado na figura à direita. Temos:

(1) $\square YCFZ$ é um paralelogramo. ($\overline{YC}$ e $\overline{FZ}$ são congruentes, e são paralelos porque estão contidos no mesmo plano e são perpendiculares a uma mesma reta. Veja Teorema 9-20).

Exatamente da mesma maneira, obtemos

(2) $\square YDGZ$ é um paralelogramo.

Portanto

(3) $\overline{DG} \parallel \overline{CF}$. (Ambos são paralelos a $\overline{YZ}$).

(4) $DG = CF$ (porque $DG = YZ = CF$).

(5) $\square DGFC$ é um paralelogramo (porque $\overline{DG}$ e $\overline{CF}$ são congruentes e paralelos).

(6) $DC = GF$. (Por quê?)

(7) $\Delta CYD \cong \Delta FZG$ (por LLL).

(8) $\angle CYD = \angle FZG$.

que é o que queríamos.

Podemos agora dar as seguintes definições:

Definições

A *medida* de um diedro é o número real que é a medida de cada um de seus ângulos planos. Um diedro *reto* é aquêle cujos ângulos planos são ângulos retos. Dois planos são *perpendiculares* se contiverem um diedro reto.

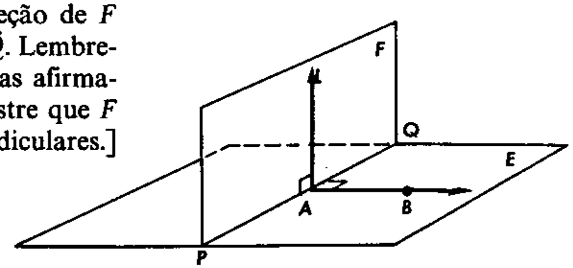
Os seguintes teoremas são fáceis de serem provados com base nas definições.

Teorema 10-7

Se uma reta é perpendicular a um plano, então todo plano contendo a reta é perpendicular ao plano dado.

Re-enunciado. Seja L uma reta, perpendicular ao plano E no ponto A e seja F um plano qualquer contendo L. Então $F \perp E$.

[*Sugestão para a demonstração:* Seja $\overleftrightarrow{PQ}$ a reta de interseção de F e E. Em E, tome $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{PQ}$. Lembre-se agora das definições das afirmações $L \perp E$ e $F \perp E$ e mostre que F e E são realmente perpendiculares.]



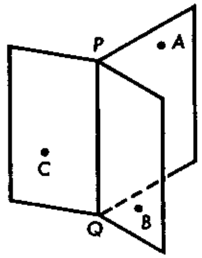
Teorema 10-8

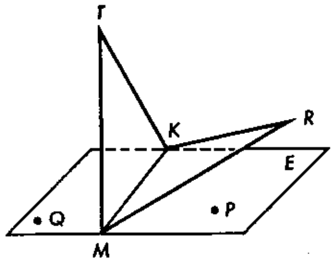
Se dois planos são perpendiculares, então qualquer reta de um dêles, perpendicular à interseção dos planos, é perpendicular ao outro.

Você pode usar a mesma figura do teorema anterior. Seja L a reta dada, perpendicular a $\overleftrightarrow{PQ}$ em A e tome $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{PQ}$ como antes. Dessa vez é dado que $E \perp F$ e queremos provar que $L \perp E$.

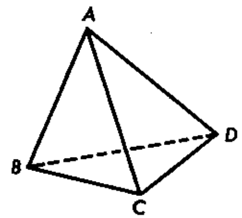
Problemas 10-2

1. Nomeie todos os diedros na figura abaixo, à esquerda.



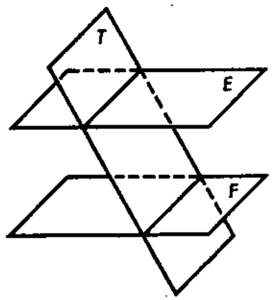


2. Nomeie todos os diedros na figura acima, à direita. (Há mais de três. Observe que E é o nome de um plano e não de um ponto).

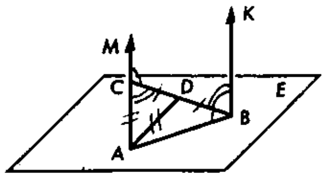


3. Nomeie os seis diedros nesse tetraedro.

4. Demonstre o seguinte teorema:
   Diedros retos são congruentes.



5. Demonstre o seguinte teorema:
   Se dois planos paralelos são interceptados por um terceiro plano, os diedros alternos-internos são congruentes.
   [*Sugestão:* Introduza um outro plano.]



6. Na figura, $\overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{BK}$ e $\overrightarrow{BK} \perp E$. D é o ponto médio de $\overline{BC}$ e

$$AC = AD$$

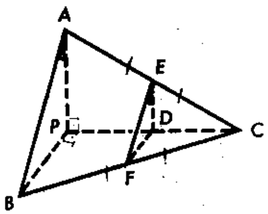
Determine a medida de todos os ângulos da figura.

7. Na figura do Problema 2, se T e R estão num plano perpendicular a $\overline{MK}$, passando pelo ponto médio S de $\overline{MK}$ e se $m\angle RST = 110$, quanto vale $m\angle T\text{-}MK\text{-}R$? Quanto vale $m\angle T\text{-}MK\text{-}Q + m\angle R\text{-}MK\text{-}P$?

8. $\overline{AP}$, $\overline{BP}$ e $\overline{CP}$ são perpendiculares dois a dois. $AC = BC$ e D, E, F são pontos médios. Demonstre que

$$\angle DEF \cong \angle PAB$$

e determine sua medida.



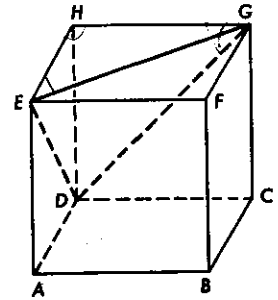
9. Defina o interior de um diedro.

10. Indique se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa. Você deve fazer um pequeno desenho para ilustrar as afirmações que são verdadeiras ou desenhar um contra-exemplo, se elas fôrem falsas.
    (a) As faces do diedro contém a aresta comum.
    (b) Dois diedros são congruentes se um ângulo plano de um dêles é congruente a um ângulo plano do outro.
    (c) Se um plano e uma reta são perpendiculares, todo plano que contém a reta é perpendicular ao plano.
    (d) Dois planos perpendiculares a um mesmo plano são paralelos entre si.

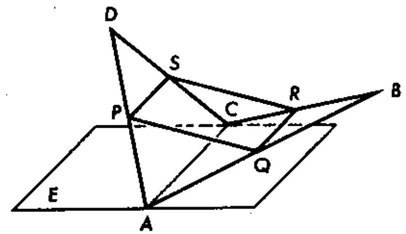
11. É dado o cubo visto na figura. Determine

$$m\angle DHE, \quad m\angle DEH$$
$$m\angle HGD, \quad m\angle EGD$$

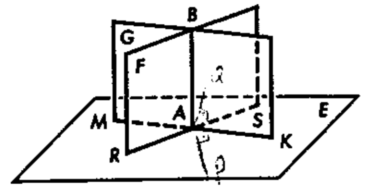
[Você pode usar as seguintes propriedades de um cubo: (1) as doze arestas são congruentes; quaisquer duas arestas que se interceptam são perpendiculares.]



12. Se A, B, C e D são quatro pontos não-coplanares, três dos quais nunca são colineares, a reunião de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ é chamada *quadrilátero reverso.* Demonstre que a figura formada, juntando-se consecutivamente os pontos médios dos lados de um quadrilátero reverso, é um paralelogramo.

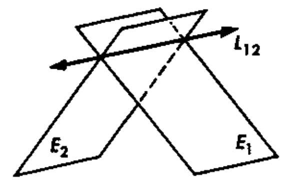


* 13. Demonstre o seguinte:
   Se dois planos que se interceptam são perpendiculares a um terceiro, a sua interseção é perpendicular ao terceiro plano.



[*Sugestão:* No plano E, desenhe $\overleftrightarrow{PA} \perp \overleftrightarrow{MK}$ e $\overleftrightarrow{QA} \perp \overleftrightarrow{RS}$. Use os Teoremas 10-8 e 8-2.]

*+ 14. Demonstre o seguinte:
   Se três planos E_1, E_2 e E_3 se interceptam em três retas L_{12}, L_{23}, L_{13}, ou as retas se interceptam num ponto comum ou cada reta é paralela às outras duas.

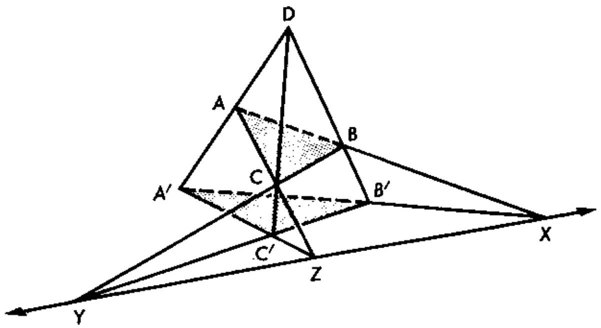


[*Sugestão:* A figura mostra E_1 e E_2 se interceptando em L_{12}. Considere as duas possibilidades para E_3: (1) $E_3 \parallel L_{12}$; (2) E_3 intercepta L_{12}.]

Problema Magno

Teorema de Desargues

Dados dois triângulos contidos em planos não paralelos e tais que as retas que unem seus vértices correspondentes se interceptam em um ponto comum, se as retas contendo os lados correspondentes dos triângulos se interceptarem, então os pontos de interseção são colineares.

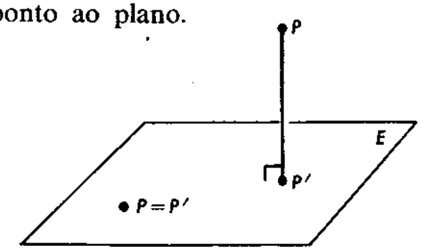


Re-enunciado: São dados ΔABC e $\Delta A'B'C'$ em planos não paralelos tais que $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ se interceptam em D. Se $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{A'B'}$ se interceptarem em X, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{B'C'}$ em Y e $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{A'C'}$ em Z, então, X, Y, Z são colineares.

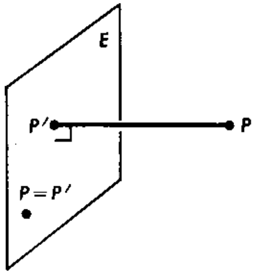
10-3. PROJEÇÕES

Definição

A *projeção* de um ponto sôbre um plano é o pé da perpendicular do ponto ao plano.



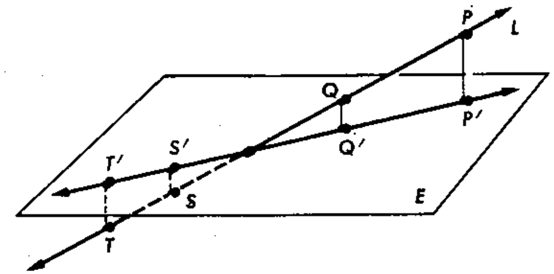
or



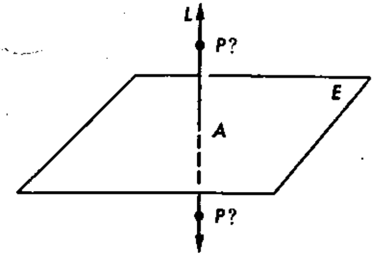
Pelo Teorema 8-9, existe uma e uma só perpendicular nessas condições. Em cada uma das figuras, P' é a projeção de P sôbre E. Permitimos a possibilidade de P estar em E. Nesse caso, a projeção de P é P mesmo.

Definição

A projeção de uma reta sôbre um plano é o conjunto de todos os pontos do plano que são projeções dos pontos da reta.



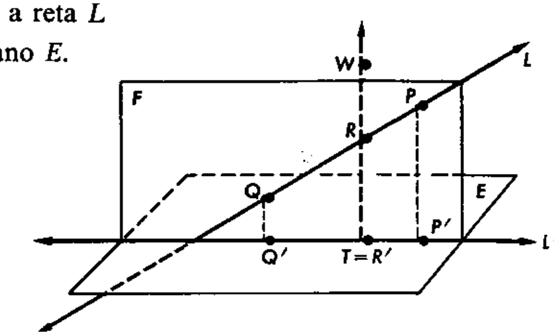
Na figura, P' é a projeção de P, Q' é a projeção de Q, S' é a projeção de S e assim por diante. A figura sugere que a projeção de uma reta é sempre uma reta; e, de fato, é isso que sempre acontece, salvo quando a reta e o plano são perpendiculares como na figura à direita. Aqui A é a projeção de *todos* os pontos P da reta e portanto A é a projeção da reta tôda. Para obtermos um teorema verdadeiro precisamos eliminar essa possibilidade.



Teorema 10-9

Se uma reta e um plano não são perpendiculares, a projeção da reta sôbre o plano é uma reta.

Demonstração. É dado que a reta L não é perpendicular ao plano E.



Sejam P e Q dois pontos quaisquer de L e sejam P' e Q' suas projeções. Então $P' \neq Q'$. (Por quê?) $\overleftrightarrow{PP'}$ e $\overleftrightarrow{QQ'}$ são coplanares porque ambas são perpendiculares ao mesmo plano (Teorema 8-7): Seja F o plano que contém $\overleftrightarrow{PP'}$ e $\overleftrightarrow{QQ'}$; seja L' a reta interseção de F e E. L está contida em F porque F contém dois pontos de L. Vamos demonstrar que L' é a projeção de L sôbre E. Como L' é uma reta, isso completará a demonstração do teorema.

Ora, $F \perp E$. Isso é verdade por duas razões: todo plano contendo $\overleftrightarrow{PP'}$ é perpendicular a E, o mesmo acontecendo a todo plano contendo $\overleftrightarrow{QQ'}$ (Teorema 10-7).

Vamos demonstrar dois fatos:

(1) Se R é um ponto de L então a projeção R' está em L'.

(2) Se T é um ponto de L', então T é a projeção de algum ponto de L.

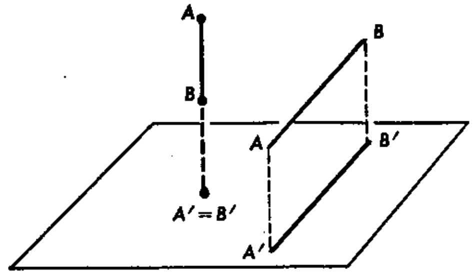
Demonstração de (1). Seja T o pé da perpendicular de R a L' no plano F. Pelo Teorema 10-8, $\overline{RT} \perp E$. Portanto $T = R'$ porque as perpendiculares são únicas. Portanto R' está em L'.
Demonstração de (2). Dado um ponto T de L', seja $\overleftrightarrow{TW}$ a perpendicular a L' em T, no plano F. Pelo Teorema 10-8, $\overleftrightarrow{TW} \perp E$. Portanto $\overleftrightarrow{TW}$ e L não são paralelas. (Por quê?). Seja R o ponto onde $\overleftrightarrow{TW}$ intercepta L. Então $T = R'$.

Mostramos que todo ponto da projeção está em L' e todo ponto de L' está na projeção. Portanto L' e a projeção são exatamente o mesmo conjunto de pontos. Portanto a projeção é uma reta, como queríamos provar.

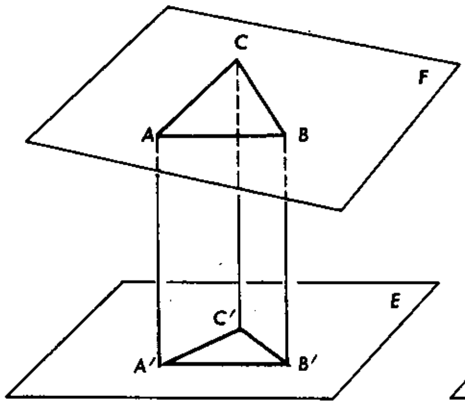
A idéia de uma projeção pode ser definida de maneira mais geral para *qualquer* conjunto de pontos.

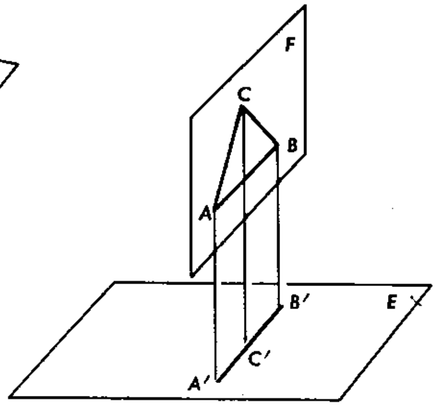
Definição

Se A é um conjunto qualquer de pontos no espaço e E é um plano, então a *projeção de* A *sôbre* E é o conjunto de todos os pontos que são projeções de pontos de A sôbre E.



Por exemplo, a projeção de um segmento é, em geral, um segmento, apesar de, em alguns casos, poder ser um ponto. Anàlogamente a projeção de um triângulo é, em geral, um triângulo, apesar de poder ser um segmento.

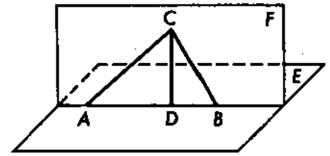




A segunda possibilidade aparece, sempre que o plano do triângulo fôr perpendicular a E, como na figura à direita.

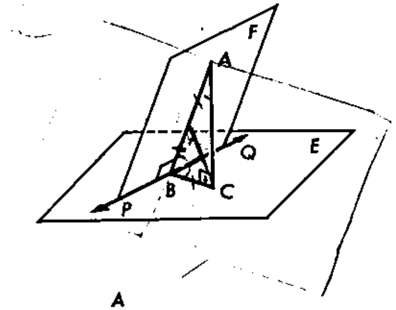
Problemas 10-3

1. Na figura, o plano F é perpendicular ao plano E em $\overline{AB}$, C está em F e $\overline{CD} \perp \overline{AB}$. O que é a projeção de $\overline{AC}$? de $\overline{BC}$? do ΔABC?

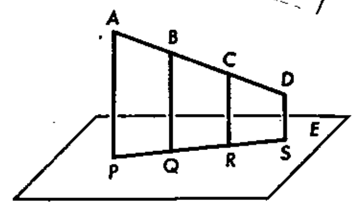


2. Se uma diagonal de um losango é perpendicular a um plano, na sua extremidade, que tipo de figura é a projeção do losango sôbre o plano?

3. Na figura, os planos E e F se interceptam em $\overleftrightarrow{PQ}$. $\overline{AB}$, em F, é duas vêzes mais comprido que sua projeção, $\overline{BC}$. $\overleftrightarrow{PQ} \perp$ plano ABC. Determine $m\angle$ A-PQ-C.



4. P, Q, R e S são projeções de A, B, C e D sôbre o plano E. Se B e C dividem $\overline{AD}$ em 3 segmentos congruentes, por que Q e R fazem o mesmo com $\overline{PS}$?

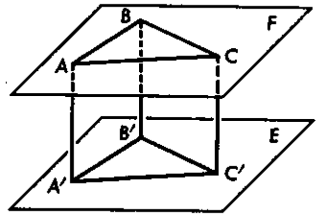


5. Esteja preparado para justificar suas respostas às seguintes questões:
   (a) É a projeção de um ponto sempre um ponto?
   (b) É a projeção de um segmento sempre um segmento?
   (c) Pode a projeção de um ângulo ser uma semi-reta? uma reta? um segmento? um ângulo?
   (d) Pode a projeção de um ângulo agudo ser um ângulo obtuso?
   (e) A projeção de um ângulo reto é sempre um ângulo reto?
   (f) Pode a projeção de um segmento ser mais comprida que o segmento? mais curta que o segmento?

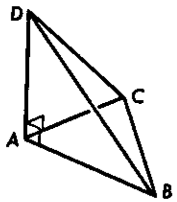
6. Responda como no Problema 5.
   (a) Pode a projeção de duas retas que se interceptam ser duas retas paralelas?
   (b) Pode a projeção de duas retas reversas ser duas retas paralelas?
   (c) Pode a projeção de duas retas reversas ser duas retas que se interceptam?
   (d) É a projeção de duas retas paralelas sempre duas retas paralelas?

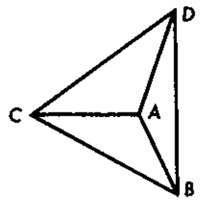
7. Uma face de um diedro agudo contém um quadrado. Que tipo de figura é a projeção do quadrado sôbre a outra face?

8. Dados dois planos paralelos E e F e ΔABC em F, demonstre que a projeção do ΔABC sôbre E é um triângulo congruente ao ΔABC.



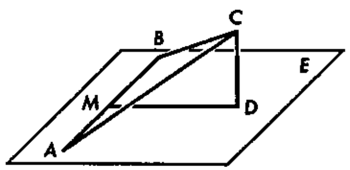
\+ 9. A figura à esquerda é um tetraedro. A figura à direita é a projeção do tetraedro sôbre o plano BCD. Desenhe as projeções sôbre os planos ABC e ACD.



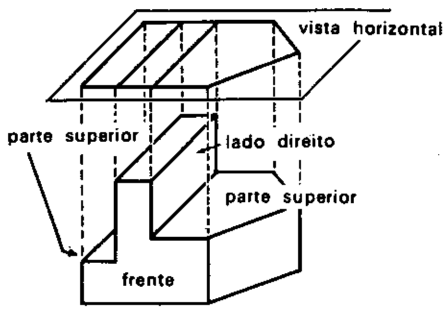


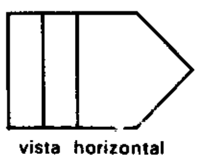
\+ 10. Se uma diagonal de um cubo é perpendicular a um plano, desenhe a projeção sôbre o plano de tôdas as arestas do cubo.

* 11. Num plano E, M é o ponto médio de $\overline{AB}$. C é um ponto não em E, mas sua projeção, D, está na mediatriz de $\overline{AB}$. Demonstre que ΔABC é isósceles.



\+ 12. Em desenho mecânico, a vista de tôpo de um sólido pode ser considerada como a projeção dos vários segmentos do sólido sôbre um plano horizontal, acima do sólido, como ilustrado abaixo, à esquerda. A vista de tôpo, como ela seria realmente desenhada, é apresentada à direita. (Nenhuma tentativa foi feita para obter a escala exata).

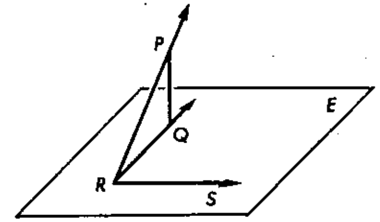




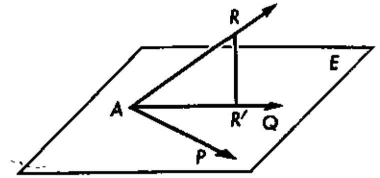
(a) Desenhe a vista frontal do sólido; isto é, desenhe a projeção dos segmentos do sólido sôbre um plano paralelo à face da frente.

(b) Desenhe a vista lateral × direita do sólido.

\+ 13. Dados: $\overrightarrow{RS}$ está no plano E.
$\angle PRS$ é um ângulo reto.
Q é a projeção de P.
Demonstre: $\angle QRS$ é um ângulo reto.
[*Sugestão:* Introduza $\overrightarrow{RT}$, a perpendicular a E em R.]

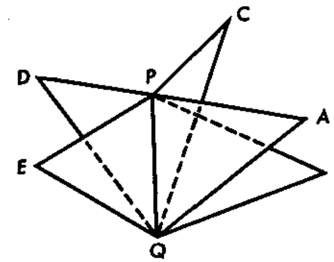


\+ 14. Dados: $\overrightarrow{AQ}$ é a projeção de $\overrightarrow{AR}$ sôbre o plano E. $\overrightarrow{AP}$ é qualquer outra semi-reta em E de origem A.
Demonstre: $m\angle QAR = m\angle PAR$.
[*Sugestão:* Em $\overrightarrow{AP}$, introduza o ponto K tal que $AK = AR'$. Desenhe $\overline{KR'}$ e $\overline{KR}$.]

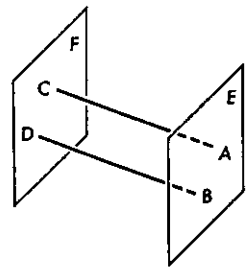


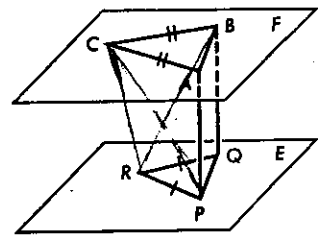
Revisão do Capítulo

1. Nomeie os diedros nessa figura, supondo que nenhum dos pares de triângulos indicados são coplanares.



2. Dados: $E \perp \overline{AC}$, $F \perp \overline{AC}$, $F \perp \overline{BD}$. Demonstre $E \perp \overline{BD}$ e $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$.





3. É dada a figura (acima, à direita). ΔABC está no plano F; ΔPQR está no plano E; $\square ABQP$ é um retângulo e $\overline{AP} \perp E$. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

(a) $\overline{BQ} \perp E$. (b) $AQ = BP$. (c) $F \parallel E$.
(d) $\overline{PQ}$ é a projeção de $\overline{AB}$ sôbre E. (e) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$.
(f) $PC = QC$. (g) $\overline{BC} \parallel \overline{RQ}$. (h) $\Delta PAC \cong \Delta RBC$.

4. Indique com V, A ou F se a afirmação é verdadeira sempre, algumas vêzes verdadeira e outras falsa, falsa sempre:

(a) Duas retas paralelas ao mesmo plano são perpendiculares entre si.
(b) Se um plano intercepta dois planos paralelos, as retas de interseção são reversas.
(c) Se dois planos são paralelos à mesma reta, êles são paralelos entre si.
(d) A interseção de um plano com as faces de um diedro é um ângulo plano do diedro.
(e) Se duas retas são perpendiculares ao mesmo plano, elas são paralelas.

(f) Se duas retas são paralelas ao mesmo plano, elas são paralelas.

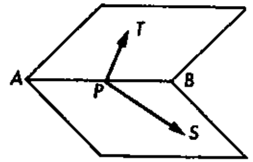
(g) Se uma reta é perpendicular a um plano, todo plano contendo a reta é perpendicular ao plano.

(h) A projeção de um ângulo pode ser um ponto.

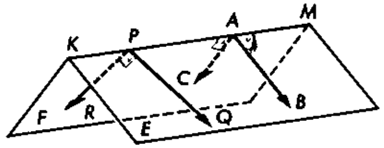
(i) Duas retas são paralelas se forem perpendiculares a uma mesma reta.

(j) Quando cada um de dois planos que se interceptam é perpendicular a um terceiro plano, a reta de interseção é perpendicular ao terceiro plano.

5. $\overleftrightarrow{AB}$ é a aresta de $\angle S\text{-}AB\text{-}T$ e P está em $\overline{AB}$. Se $m\angle SPT = 90$, é $\angle S\text{-}AB\text{-}T$ um diedro reto? Explique.

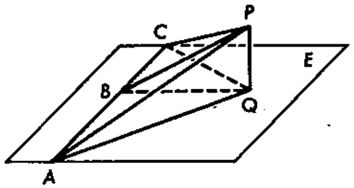


6. Os planos E e F se interceptam em $\overleftrightarrow{KM}$; $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{PQ}$ estão em E; $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{PR}$ estão em F. Se $m\angle MAB = 90$ e $m\angle KAC = 90$, é o $\angle BAC$ um ângulo plano do $\angle B\text{-}KM\text{-}C$? Se $m\angle RPQ = 90$, é $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{AB}$?

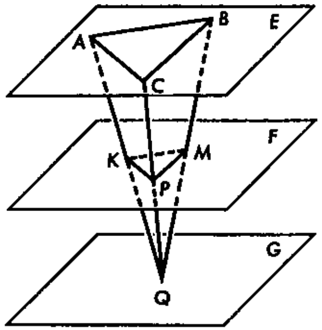


7. Na figura, $PQ = \frac{1}{2}PC = \frac{1}{2}PA$, $AB = BC$ e $\overline{PQ} \perp E$. Quais das seguintes afirmações é verdadeira?

$$m\angle P\text{-}AC\text{-}Q < 30,$$
$$m\angle P\text{-}AC\text{-}Q = 30,$$
$$m\angle P\text{-}AC\text{-}Q > 30.$$



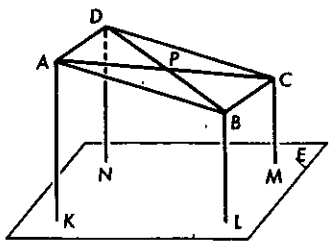
8. Dados os planos paralelos E, F e G, com Q em G, ΔKMP em F, ΔABC em E e $AK = KQ$, demonstre: o perímetro do ΔABC é duas vêzes o perímetro do ΔKMP.



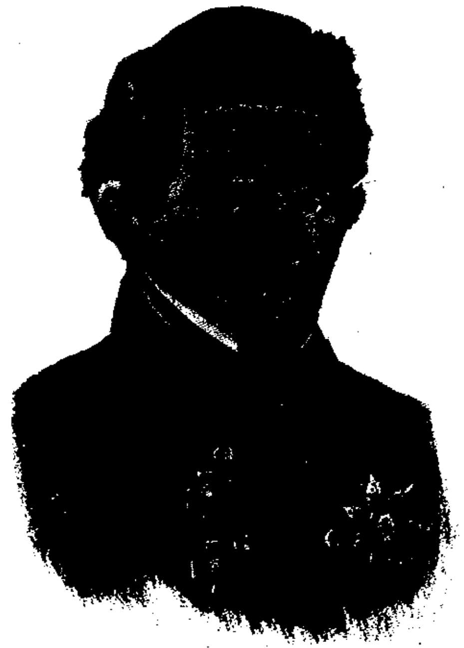
* 9. Na figura, o paralelogramo $\square ABCD$ não é paralelo ao plano E. K, L, M e N são as projeções sôbre E dos vértices A, B, C e D, respectivamente. Demonstre que

$$AK + CM = BL + DN.$$

[*Sugestão:* Seja Q a projeção de P sôbre E. Desenhe $\overline{PQ}$.]



** 10. Desenhe uma figura mostrando a interseção de um plano com as seis faces de um cubo. Imagine então a interseção projetada sôbre um plano paralelo ao primeiro plano mas não interceptando o cubo e desenhe o resultado.



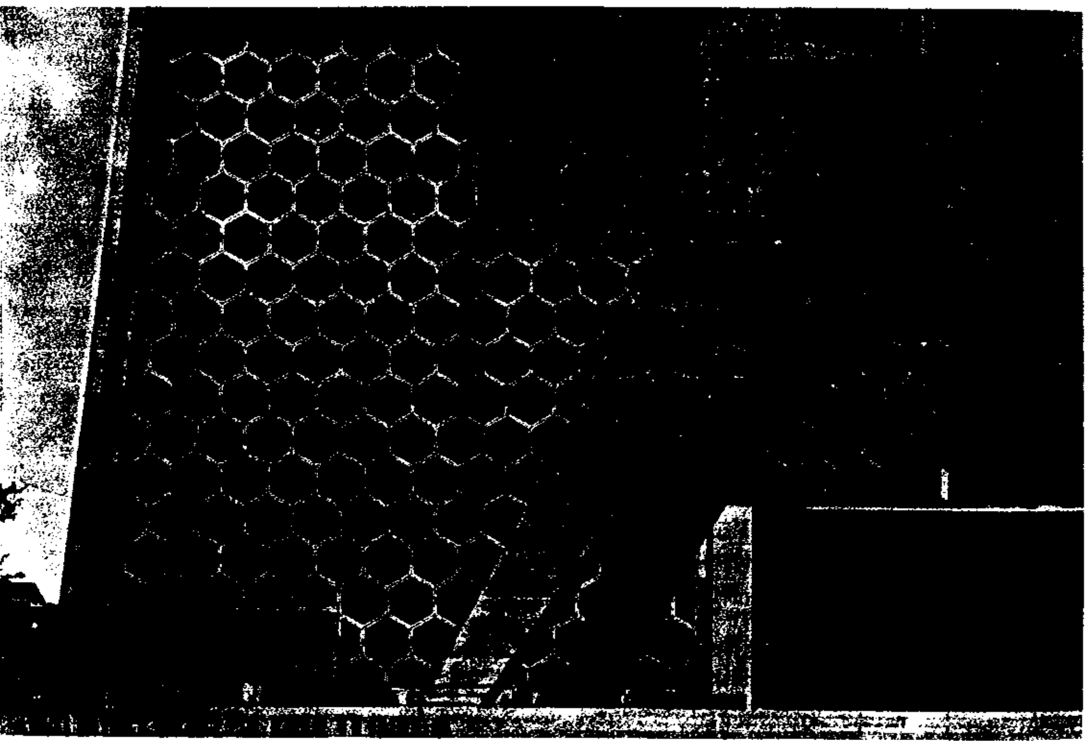
NIKOLAI IVANOVITCH LOBACHEVSKY (1793-1856)

No início do século dezenove, a geometria não Euclidiana foi descoberta por três homens, trabalhando independentemente em três países diferentes. Êsses homens foram C. F. Gauss na Alemanha, János Bolyai na Hungria e Nikolai Ivanovitch Lobachevsky na Rússia.

Até então, todos acreditavam que a unicidade das paralelas era simplesmente um fato, tanto na geometria, como na física. Êsses três homens tentaram supor o contrário: êles supuzeram que por um ponto externo, dado, existe *mais de uma* paralela a uma reta dada. Isso os levou a um nôvo tipo de geometria, que matemàticamente era tão boa quanto a conhecida geometria de Euclides. E essa nova geometria acabou sendo útil na física — após a descoberta da teoria da relatividade por Albert Einstein.

Em geral, a maior parte do mérito pela geometria não Euclidiana é atribuída a Lobachevsky. Êle desenvolveu mais a teoria que Bolyai. E contràriamente a Gauss, teve a coragem de publicar sua obra. Parece que Gauss temeu parecer tolo. Êle era considerado o maior matemático da época e assim a queda teria sido grande.

11 REGIÕES POLIGONAIS E SUAS ÁREAS

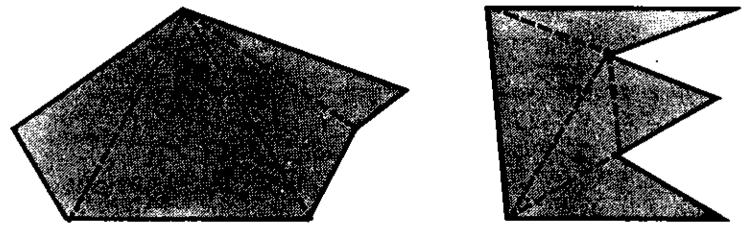


11-1. REGIÕES POLIGONAIS

Definição

Uma *região triangular* é a reunião de um triângulo e seu interior.

Uma *região poligonal* é uma figura plana formada pela justaposição de um número finito de regiões triangulares.

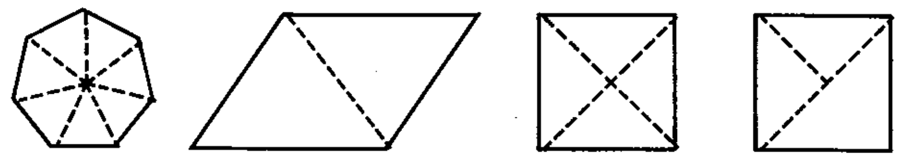


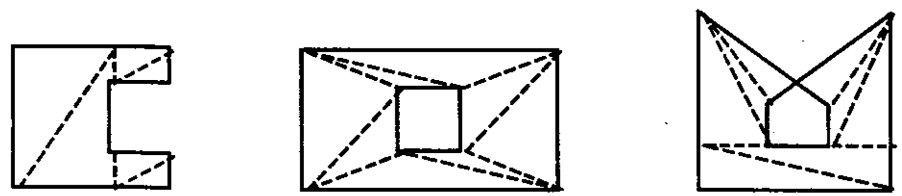
Daqui para frente, não usaremos sombreamento nas figuras de regiões nos casos em que estiver claro que região está sendo descrita.

Definição

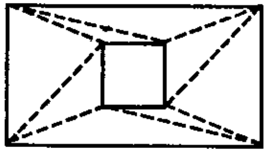
Uma *região poligonal* é a reunião de um número finito de regiões triangulares, em um plano, de tal modo que, se duas se interceptam, a interseção é um ponto ou um segmento.

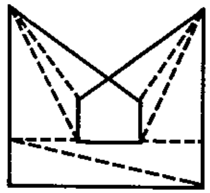
As linhas pontilhadas nas figuras acima mostram como cada uma das duas regiões poligonais pode ser expressa como reunião, na forma descrita acima. Alguns exemplos mais são vistos abaixo.





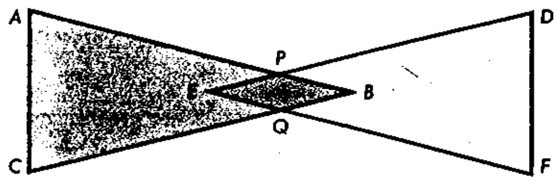
Nos dois últimos exemplos,





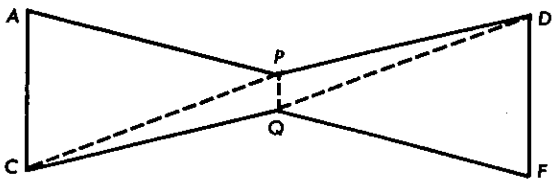
as regiões têm "buraco". Isto é permitido pela definição, de modo que estas duas últimas figuras são, perfeitamente bem, regiões poligonais.

A região sombreada, abaixo, é, de fato, uma região poligonal.

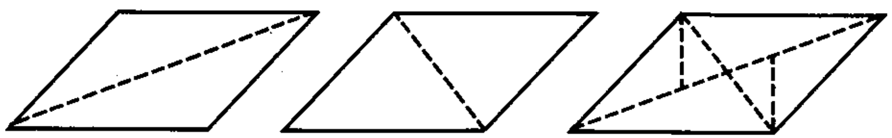


Observe, entretanto, que você não pode demonstrar isto exibindo as regiões triangulares determinadas por ΔABC e ΔDEF. A dúvida é que a interseção destas duas regiões triangulares não é nem um ponto nem um segmento, como a definição diz que deve ser. A interseção é a pequena região em forma de losango, no centro da figura.

Por outro lado, é fácil dividir a região de modo diferente a fim de mostrar que é uma região poligonal.



Se uma figura puder ser dividida em regiões triangulares, de alguma forma, então isto poderá ser feito de muitas outras formas. Por exemplo, um paralelogramo mais seu interior podem ser divididos pelo menos de três modos diferentes, como se vê abaixo.



E é fácil ver que existem infinitas outras maneiras de dividir uma tal figura.

Neste capítulo, estudaremos as áreas das regiões poligonais e aprenderemos como calculá-las. Com êste propósito, usaremos quatro novos postulados.

POSTULADO 19. O Postulado da Área

A tôda região poligonal corresponde um único número real positivo.

Definição

A *área* de uma região poligonal é o número que lhe corresponde, pelo Postulado 19. A área da região R é denotada por aR. Isto deve ser lido *área de R.*

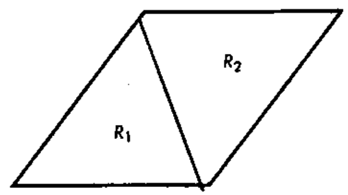
Daqui para frente, neste capítulo, quando falarmos de uma *região*, sempre estaremos querendo dizer uma região poligonal.

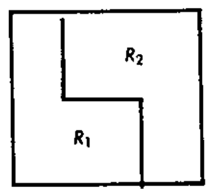
A área de uma região, certamente, deve depender apenas do tamanho e da forma da região; não deve depender do lugar onde a região está localizada no espaço. Enunciamos êste fato como um postulado, para o caso de regiões triangulares.

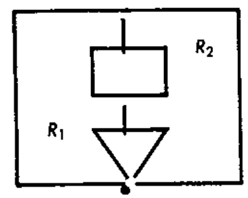
POSTULADO 20. O Postulado da Congruência

Se dois triângulos são congruentes, então as regiões triangulares determinadas por êles têm a mesma área.

Se dividirmos uma região em duas partes, então a área da região deve ser a soma das áreas das duas partes.







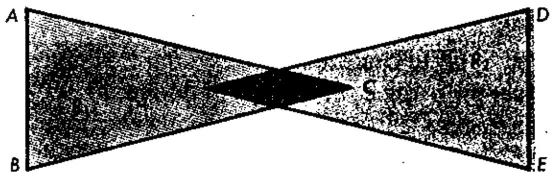
$aR = aR_1 + aR_2$.

Em cada uma destas figuras, a região total R é reunião de duas regiões R_1 e R_2. Em cada caso, R_1 e R_2 se interceptam, no máximo, em um número finito de segmentos e pontos. Nestas condições, podemos calcular aR por adição.

POSTULADO 21. O Postulado da Adição de Áreas

Supondo que a região R é reunião de duas regiões R_1 e R_2 e supondo que R_1 e R_2 se interceptam, no máximo, em um número finito de segmentos e pontos, então $aR = aR_1 + aR_2$.

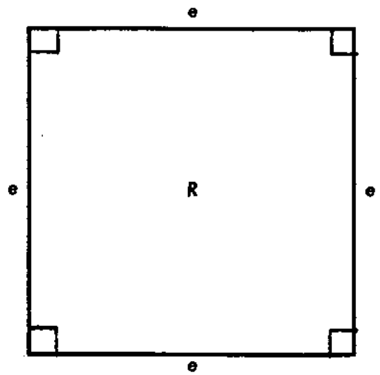
Há casos simples onde uma região é reunião de duas outras, mas onde a fórmula acima não funciona, de modo algum. Se R_1 e R_2 são regiões triangulares como na figura e R é a reunião delas, então aR é menor que $aR_1 + aR_2$. (Quando fazemos a soma, a área da região do centro é contada duas vêzes.) Assim, necessitamos, de fato, do segundo "Supondo..." na hipótese do Postulado da Adição.



Lembramos, do Capítulo 2, que a unidade de distância pode ser escolhida à vontade. O mesmo é verdade para a unidade de área. Mas devemos ser consistentes na escôlha de nossas unidades: se èstamos medindo distância em metros, então devemos medir a área em metros quadrados. Se usarmos quilômetros, então devemos usar quilômetros quadrados; e assim por diante. Esta é a idéia que está por trás do postulado seguinte.

POSTULADO 22. O Postulado da Unidade

A área de uma região quadrada é o quadrado do comprimento do seu lado.



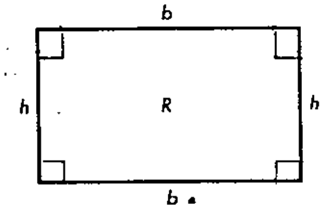
$aR = e^2$.

Daqui para frente, de modo resumido, falaremos da área de um quadrado, da área de um triângulo e assim por diante. Em cada caso, queremos dizer, evidentemente, a área da região correspondente. Falaremos, também, da base e da altura de um retângulo, significando o comprimento da base e o comprimento da altura. Isto é conveniente e, você deve ser capaz de dizer, a partir do contexto, quando estamos falando sôbre o segmento ou sôbre o número que mede seu comprimento.

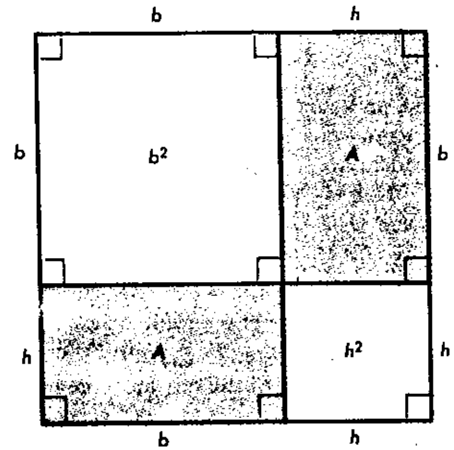
Com um simples artifício, acharemos, agora, a área de um retângulo.

Teorema 11-1

A área de um retângulo é o produto de sua base pela sua altura.



$aR = bh$.



Demonstração. Considere a figura à direita.

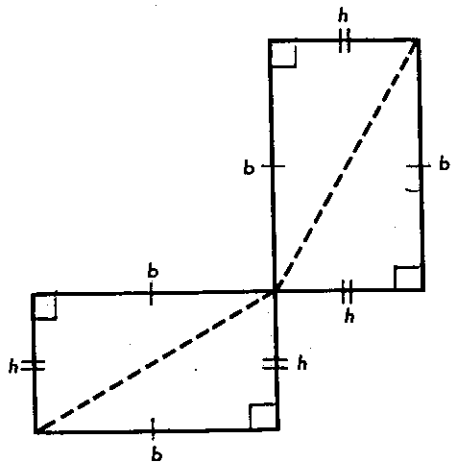
Aqui, A denota a área desconhecida do nosso retângulo. As áreas dos dois quadrados são b^2 e h^2, pelo Postulado 22; e a área da figura total é $(b + h)^2$. Portanto, através de repetidas aplicações do Postulado da Adição de Áreas,

$$b^2 + 2A + h^2 = (b + h)^2$$
$$= b^2 + 2bh + h^2,$$

e

$$A = bh,$$

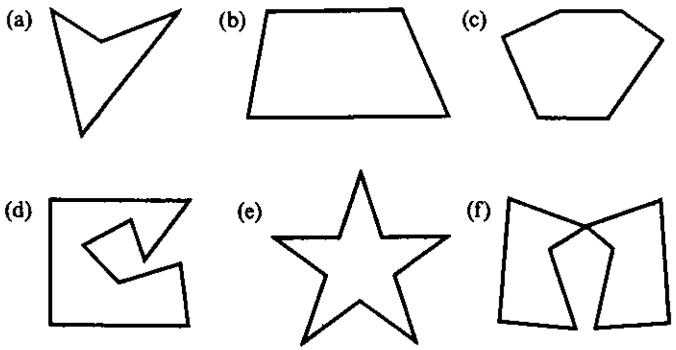
que é o que queríamos.



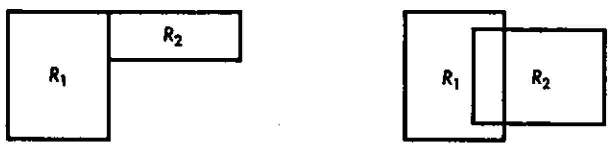
Se você tiver curiosidade em saber como descobrimos, a partir dos postulados, que os dois retângulos da figura têm a mesma área, você deve examinar a figura à direita. Todos os quatro triângulos são congruentes e, portanto, têm a mesma área; e a área de cada retângulo é duas vêzes a área de cada triângulo.

Problemas 11-1

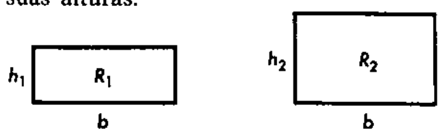
1. Mostre que as regiões abaixo são regiões poligonais, dividindo cada uma em triângulos, de acôrdo com a definição. Tente achar o menor número de triângulos em cada caso.



2. Se, na figura à esquerda, abaixo, $aR_1 = 50$, $aR_2 = 25$ e R é a reunião de R_1 e R_2, quanto vale aR? Mencione um postulado ou teorema que sirva de base para sua conclusão.



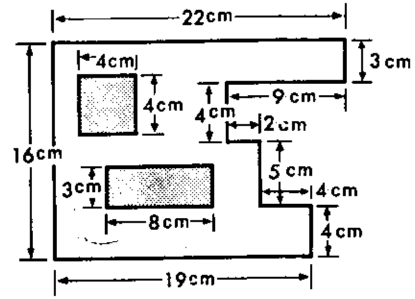
3. Se, na figura à direita, acima $aR_1 = 30$, $aR_2 = 30$ e R é a reunião de R_1 e R_2, $aR = 60$? Mencione um postulado ou teorema que sirva de base para sua conclusão.
4. Ache a área de um retângulo de 16 m de comprimento por 10,3 m de largura.
5. Um quadrado e um retângulo têm áreas iguais. Se o retângulo mede 25 m por 16 m, quanto mede um lado do quadrado?
6. Como muda a área de um quadrado se seu lado é duplicado? Triplicado? Dividido por 2?
7. (a) Se a altura de um retângulo é duplicada enquanto a base permanece a mesma, como muda a área?
   (b) Se a base de um retângulo é duplicada enquanto a altura permanece a mesma, como muda a área?
   (c) Se a base e a altura de um retângulo são duplicadas, como muda a área?
8. Quantas telhas quadradas, com 20 cm de lado, são necessárias para cobrir um cômodo retangular medindo 4 m por 2,6 m?
9. Demonstre: Se dois retângulos têm a mesma base, b, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas alturas.



Prova: $\dfrac{aR_1}{aR_2} = \dfrac{h_1}{h_2}$.

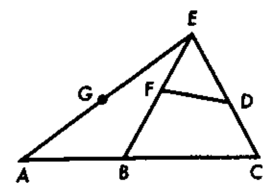
10. Está para se plantar grama em um terreno de forma retangular. As dimensões do terreno são 22 m por 28 m. Se, para cada 800 cm², necessita-se um pacote com 200 gramas de sementes, quantos pacotes serão necessários?

11. A figura representa a face de uma certa peça de uma máquina. Para se computar o custo da pintura de um certo número destas peças, deve-se saber a área da face. As regiões sombreadas não serão pintadas. Ache a área da região a ser pintada. Quais os postulados e teoremas usados no cálculo da área?

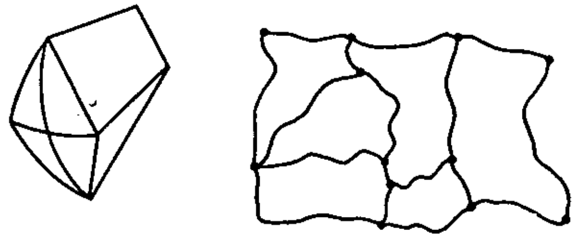


12. Calcule a área de um retângulo tendo base b e altura h, dado que
   (a) $b = 17$ e $h = 12$.
   (b) $b = 1\frac{1}{3}$ e $h = 5\frac{3}{4}$.
   (c) $b = 3$ e $h = \sqrt{5}$.
   (d) $b = \sqrt{10}$ e $h = \sqrt{15}$.
13. Calcule a área de um quadrado de lado s, dado que
   (a) $s = 24$. (b) $s = 3\frac{3}{5}$. (c) $s = \sqrt{7}$. (d) $s = 4\sqrt{6}$.
14. Indique se as afirmações são verdadeiras ou falsas. Dê as justificações de suas respostas.
   (a) Um quadrado é uma região poligonal.
   (b) A cada número positivo corresponde uma única região poligonal.
   (c) Se dois triângulos são congruentes, então as regiões triangulares têm áreas iguais.
   (d) Uma região triangular não inclui o triângulo.
   (e) A área de reunião de duas regiões poligonais é a soma de suas áreas.
   (f) Uma região triangular é uma região poligonal.
   (g) Existe um quadrado com área $\sqrt{17}$.
   (h) Existe um retângulo com área $4\sqrt{5}$, cuja base é um número racional.

\+ 15. Na figura ao lado, A, B, C, D, E, F e G são chamados *vértices*, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EG}$, $\overline{GA}$, $\overline{EF}$, $\overline{FD}$ e $\overline{FB}$ são chamados *arestas* e as regiões poligonais ABE, FED e $BCDF$ são chamadas *faces*. O exterior de uma figura também é considerado uma face. Seja f o número de faces, v o número de vértices e a o número de arestas. Um teorema descoberto por um famoso matemático, Euler, relaciona f, v e a na fórmula $f - a + v$. Esta se refere a um grande número de figuras, das quais a que está acima é um exemplo. Calculemos $f - a + v$ para a figura acima: $f = 4$, $a = 9$ e $v = 7$; assim, $4 - 9 + 7 = 2$.



   (a) Calcule $f - a + v$ para as duas figuras abaixo. Note que as arestas não são, necessàriamente, segmentos. A figura à direita pode ser uma parte de um mapa mostrando cidades.



(b) Que lei de formação você observou nos resultados dos três cálculos?

(c) Na figura à esquerda, tome um ponto no interior do quadrilátero e trace os segmentos a partir de cada um dos vértices do mesmo. De que modo isto afetará o cálculo de $f - a + v$? Você pode explicar por quê?

(d) Tome um ponto no exterior de cada figura e ligue-o aos dois vértices mais próximos. Como isto afetará seu cálculo?

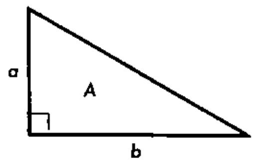
(e) Se você está interessado neste problema e quer vê-lo discutido de modo mais profundo, você o encontrará em "*The Enjoyment of Mathematics*", por Rademacher e Toeplitz e em "*Fundamental Concepts of Geometry*", por Meserve.

11-2. ÁREAS DE TRIÂNGULOS E QUADRILÁTEROS

Vamos, agora, obter mais algumas fórmulas, com base em nossos postulados.

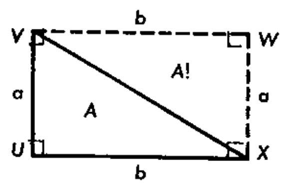
Teorema 11-2

A área de um triângulo retângulo é o semi-produto de seus catetos.



Demonstração. Dado um triângulo retângulo com catetos a e b, seja A sua área. Construímos um retângulo $\square UVWX$ (como se vê à direita) tendo os catetos do triângulo retângulo como lados. Então

(1) $\Delta VUX \cong \Delta XWV$,
(2) $a\Delta XWV = A$,
(3) $A + A = ab$,
(4) $A = \frac{1}{2}ab$.



$aR = ab = 2A$.

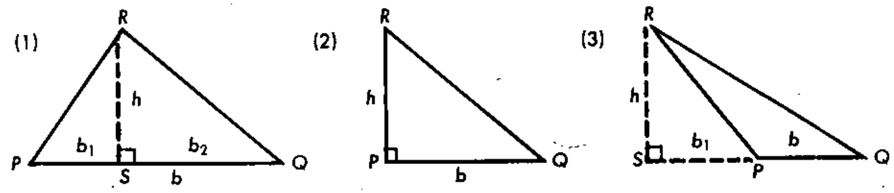
Justificações? (Você pode precisar de mais de uma justificação para algumas das passagens.)

A partir dêste teorema, podemos obter uma fórmula para a área de qualquer triângulo. Assim que fizermos isto, não teremos mais necessidade do Teorema 11-2, porque o teorema geral irá incluí-lo como caso especial.

Teorema 11-3

A área de um triângulo é o semi-produto de qualquer base pela altura correspondente.

Demonstração. Sejam b e h a base e a altura dadas e seja A a área. Há três casos a considerar.



(1) Se o pé da altura está entre as extremidades da base, então a altura divide nosso triângulo em dois outros com bases b_1 e b_2 e $b_1 + b_2 = b$. Pelo teorema precedente, as áreas dêstes novos triângulos são $\frac{1}{2}b_1h$ e $\frac{1}{2}b_2h$. Pelo Postulado de Adição de Áreas,

$$A = \tfrac{1}{2}b_1h + \tfrac{1}{2}b_2h.$$

Portanto

$$A = \tfrac{1}{2}(b_1 + b_2)h = \tfrac{1}{2}bh,$$

Que é o que queríamos.

(2) Se o pé da altura é uma extremidade da base, então o triângulo é retângulo e $A = \frac{1}{2}bh$, pelo teorema precedente.

(3) Se o pé da altura está fora da base, como na terceira figura, temos

$$\tfrac{1}{2}b_1h + A = \tfrac{1}{2}(b_1 + b)h,$$

e

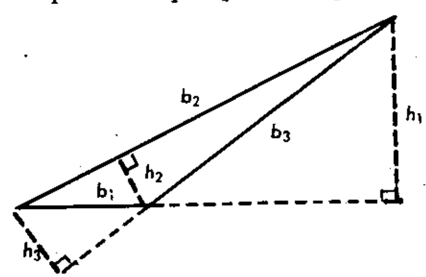
$$A = \tfrac{1}{2}bh,$$

como antes. (Justificações?)

Observe que o Teorema 11-3 pode ser aplicado a qualquer triângulo de três modos: podemos escolher um de seus três lados como base, multiplicar pela altura correspondente e dividir por dois. Note que

$$\tfrac{1}{2}b_1h_1, \quad \tfrac{1}{2}b_2h_2, \quad \text{e} \quad \tfrac{1}{2}b_3h_3$$

devem ser o mesmo número, porque cada um dêles é a resposta correta ao mesmo problema.

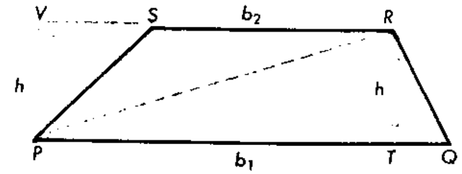


Agora, que sabemos como achar áreas de triângulos, o resto é simples: para achar a área de uma região poligonal, dividimo-la em triângulos e somamos. Êste procedimento é especialmente simples para o caso de trapézios.

Teorema 11-4

A área de um trapézio é o semiproduto da altura pela soma das bases.

Demonstração. Seja A a área do trapézio. Cada diagonal divide o trapézio em dois triângulos, com bases b_1 e b_2 e mesma altura h. (Por que $PV = TR$?) Pelo Postulado de Adição de Áreas,



$$A = \tfrac{1}{2}b_1h + \tfrac{1}{2}b_2h$$
$$= \tfrac{1}{2}h(b_1 + b_2),$$

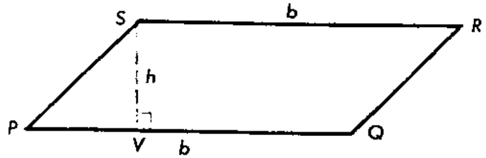
que é o que queríamos.

Isto nos dá, imediatamente, uma fórmula para a área dos paralelogramos.

Teorema 11-5

A área de um paralelogramo é o produto de qualquer base pela altura correspondente.

Demonstração. Seja A a área do paralelogramo. Todo paralelogramo é um trapézio, com $b_1 = b_2 = b$. Portanto



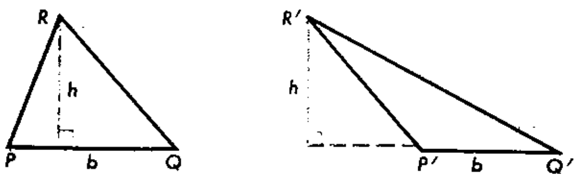
$A = bh.$

$$A = \tfrac{1}{2}h(b + b)$$
$$= bh.$$

A fórmula para a área de um triângulo tem duas conseqüências simples mas úteis.

Teorema 11-6

Se dois triângulos têm a mesma base b e a mesma altura h, então têm a mesma área.

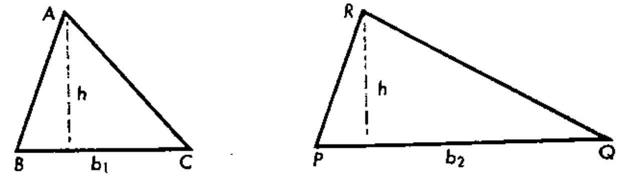


$a\triangle PQR = a\triangle P'Q'R'$.

Isto é óbvio, porque a área de cada um dêles é $\tfrac{1}{2}bh$.

Teorema 11-7

Se dois triângulos têm a mesma altura h, então a razão entre suas áreas é igual a razão entre suas bases.

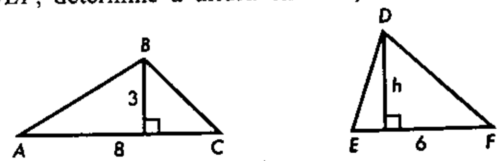


Demonstração. Sejam b_1 e b_2 as bases. Então

$$\frac{a\Delta ABC}{a\Delta PQR} = \frac{\frac{1}{2}b_1h}{\frac{1}{2}b_2h} = \frac{b_1}{b_2}.$$

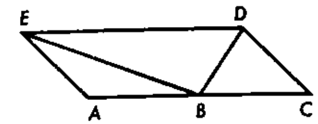
Problemas 11-2

1. Em ΔABC, $AC = 8$ e a altura em relação a $\overline{AC}$ é 3. Em ΔDEF, $EF = 6$. Se $a\Delta ABC = a\Delta DEF$, determine a altura em relação a $\overline{EF}$.

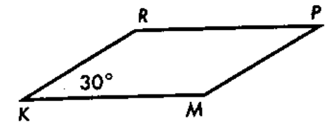


2. Em ΔPQR, $\angle P$ é um ângulo reto, $PR = 16$, $PQ = 12$ e $RQ = 20$.
   (a) Calcule a área de ΔPQR. (b) Calcule a altura em relação à hipotenusa.

3. Na figura, B é o ponto médio de $\overline{AC}$ e $\overline{ED} \parallel \overline{AC}$. Demonstre que $a\Delta ABE = a\Delta BCD$.

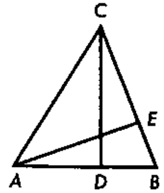


4. $\square KMPR$ é um paralelogramo. Dados: $m\angle K = 30$, $KM = 11$ e $KR = 8$, calcule $a\square KMPR$.



5. Um losango tem um lado de 12 cm e a medida de um ângulo é 150. Determine a área do losango.
6. Um triângulo retângulo tem catetos de 18 m e 14 m. Um outro triângulo retângulo tem catetos de 14 m e 24 m. Qual a razão entre as áreas dos dois triângulos?
7. Dois lados de um triângulo têm 15 m e 20 m de comprimento e a altura em relação ao lado de 15 m é 8 m. Quanto mede a altura em relação ao lado de 20 m?
8. Em ΔABC, $\overline{CD}$ é a altura perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overline{AE}$ é a altura perpendicular a $\overline{BC}$.

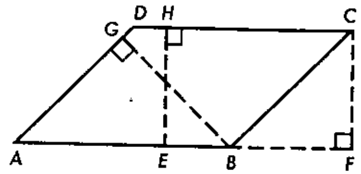
(a) Se $AB = 8$, $CD = 9$, $AE = 6$, determine BC.
(b) Se $AB = 11$, $AE = 5$, $BC = 15$, determine CD.
(c) Se $CD = h$, $AB = c$, $BC = a$, determine AE.
(d) Se $AB = 15$, $CD = 14$, $BC = 21$, determine AE.



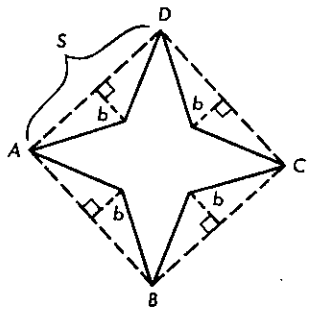
9. A hipotenusa de um triângulo retângulo tem 50 m de comprimento, um cateto tem 14 m de comprimento e a área do triângulo é 336 m^2. Qual é o comprimento da altura perpendicular à hipotenusa? Qual é o comprimento da altura perpendicular ao cateto dado?

10. Um triângulo e um paralelogramo têm áreas e bases iguais. Qual a relação entre as alturas?

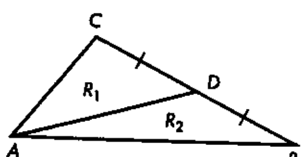
11. $\square ABCD$ é um paralelogramo, $\overleftrightarrow{EH} \perp \overleftrightarrow{DC}$, $\overleftrightarrow{CF} \perp \overleftrightarrow{AB}$, e $\overleftrightarrow{BG} \perp \overleftrightarrow{DA}$.
(a) Se $AB = 18$, $EH = 10$, e $BG = 15$, quanto vale AD?
(b) Se $AD = 22$, $BG = 7$ e $EH = 14$, quanto vale DC?
(c) Se $CF = 12$, $BG = 16$, $BC = 17$, então $AB = ?$
(d) Se $BG = 24$, $AD = 28$, $AB = 32$, então $EH = ?$
(e) Se $AB = \sqrt{50}$, $CF = 6$, $GB = \sqrt{18}$, então $BC = ?$



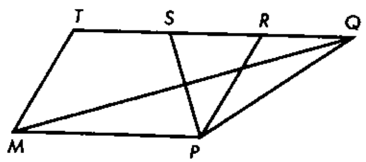
12. Na figura, $\square ABCD$ é um quadrado e os segmentos que formam o contôrno da estrêla são congruentes. Determine a área da estrêla em têrmos de s e b.



13. Demonstre: Uma mediana de um triângulo separa a região triangular em duas regiões de igual área.

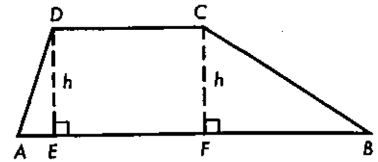


Prove: $aR_1 = aR_2$.



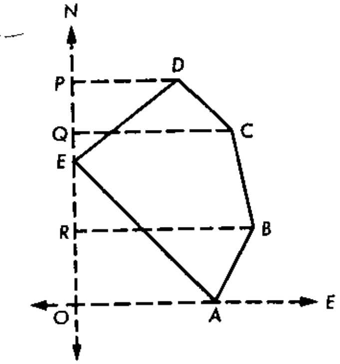
14. Na figura, $\square MPRT$ é um paralelogramo e $TS = SR = RQ$. Qual é a razão entre
(a) $a\Delta PRS$ e $a\Delta PRQ$?
(b) $a\Delta PMQ$ e $a\square MPRT$?
(c) $a\Delta PMQ$ e $a\Delta PQS$?
(d) $a\Delta PQR$ e $a\square MPST$?

15. $\square ABCD$ é um trapézio com lados paralelos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.
(a) Se $AB = 18$, $DC = 12$, $h = 9$, então $a\square ABCD = ?$
(b) Se $a\square ABCD = 84$, $AB = 17$, $CD = 11$, então $h = ?$
(c) Se $a\square ABCD = 375$, $h = 15$, $AB = 38$, então $CD = ?$
(d) Se $AB = 15$, $DC = 8$, $BC = 10$, e $m\angle B = 30$, então $a\square ABCD = ?$
(e) Se $AB = 13$, $h = 5$, $a\square ABCD = 65$, então $CD = ?$

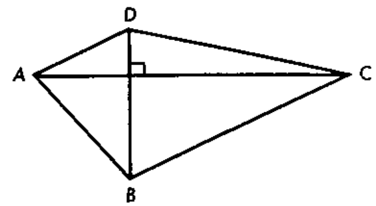


16. Quanto vale a área de um trapézio se sua altura é 6 e sua mediana é 12? [*Sugestão:* Veja o Problema 4 de Problemas 9-8.]

17. Um agrimensor determinou a área de um lote de terra, $ABCDE$, cujo diagrama está ao lado. Êle traçou a reta paralela à direção norte-sul por E e as retas paralelas à direção leste-oeste por A, B, C e D. Descobriu que $AO = 37$ m, $BR = 47$ m, $CQ = 42$ m, $DP = 28$ m $PQ = 13$, $QE = 7$ m, $ER = 19$ e $RO = 18$ m. Computou, então, a área requerida. Calcule-a, agora, você.

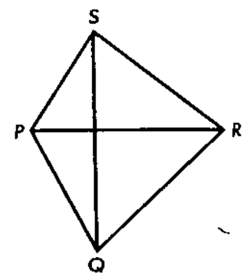


18. Demonstre o seguinte teorema:
Se as diagonais de um quadrilátero convexo são perpendiculares entre si, então a área do quadrilátero é metade do produto dos comprimentos das diagonais.
Êste teorema seria verdadeiro se o quadrilátero não fôsse convexo?



Prova: $a\square ABCD = \frac{1}{2}(AC)(BD)$.

19. $\square PQRS$ é convexo e $\overline{PR} \perp \overline{QS}$.
(a) Se $PR = 12$ e $QS = 16$, quanto vale $a\square PQRS$?
(b) Se $a\square PQRS = 153$ e $PR = 17$, quanto vale QS?

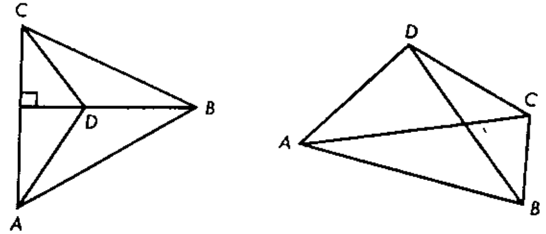


20. As diagonais de um losango medem 15 e 20. Qual é sua área? Se uma altura do losango é 12, quanto mede um lado? [*Sugestão:* O Problema 18 se aplica, aqui?]

21. Demonstre: Se as diagonais de um losango são d e d', então a área é $dd'/2$.

22. A área de um losango é 348 e uma diagonal mede 24. Ache a outra diagonal.

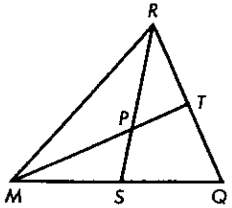
23. Em $\square ABCD$, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$. Se $AC = 13$ e $BD = 8$, você pode calcular $a\square ABCD$?



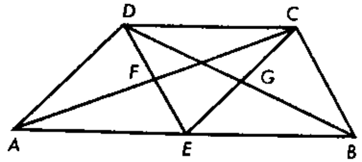
* 24. Em $\square ABCD$, $\overline{AC}$ divide $\overline{BD}$ ao meio. Demonstre que $a\Delta ABC = a\Delta ADC$.

* 25. $\square ABCD$ é um paralelogramo e P, Q, R e S são os pontos médio dos lados. Demonstre que $a\square PQRS = \frac{1}{2}a\square ABCD$.

* 26. É dado um triângulo qualquer, ΔMQR, com duas medianas, $\overline{RS}$ e $\overline{MT}$, interceptando-se em P. Demonstre que $a\Delta PMS = a\Delta PRT$.



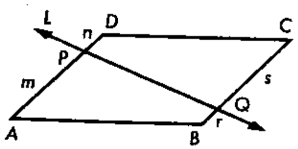
* 27. $\square ABCD$ é um trapézio com $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$, E é o ponto médio de $\overline{AB}$, F é o ponto médio de $\overline{DE}$ e G é o ponto médio de $\overline{CE}$. Demonstre que $a\Delta AFD = a\Delta BGC$.



* 28. É dado o segmento $\overline{AB}$ em um plano E. Para todo número positivo K, existe pelo menos um ponto P tal que $a\Delta ABP = k$. Existe mais de um ponto assim? Quantos? Descreva o conjunto de todos os pontos P do plano E tais que $a\Delta ABP = k$. Descreva o conjunto de todos os pontos P do espaço tais que $a\Delta ABP = k$.

* 29. $\square PQRS$ é um paralelogramo. J é um ponto de $\overline{RS}$ tal que $RJ < \frac{1}{2}RS$. K é um ponto de $\overline{RQ}$ tal que $RK < \frac{1}{2}RQ$. Uma reta por S e paralela a $\overline{PK}$ intercepta uma reta pelo ponto k, paralela a $\overline{PJ}$ em M. $\overleftrightarrow{PJ}$ intercepta $\overleftrightarrow{SM}$ em L. Demonstre que $a\square PQRS = a\square PKML$. [*Sugestão:* $\overleftrightarrow{RQ}$ intercepta $\overleftrightarrow{SM}$?]

*+ 30. Demonstre: Se uma reta L separa um paralelogramo em duas regiões de áreas iguais, então L contém o ponto de interseção das diagonais do paralelogramo.

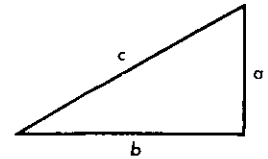


11-3. O TEOREMA DE PITÁGORAS

Agora que já sabemos alguma coisa sôbre áreas, o Teorema de Pitágoras é demonstrado de modo muito simples.

Teorema 11-8. O Teorema de Pitágoras

Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.



$a^2 + b^2 = c^2$.

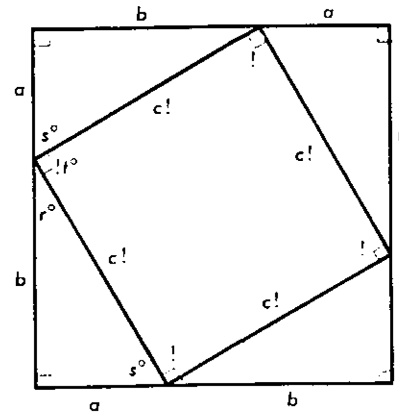
Demonstração. Primeiramente, tomamos um quadrado com lados de comprimentos $a + b$. No quadrado, traçamos quatro triângulos retângulos com catetos a e b.

(1) Por LAL, cada um dêstes quatro triângulos é congruente ao triângulo dado. Portanto, todos têm hipotenusas iguais a c, como se vê na figura.

(2) O quadrilátero formado pelas quatro hipotenusas é um quadrado. Na notação da figura, temos

$$r + s = 90,$$

porque os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares. Como



$$r + s + t = 180,$$

segue-se que $t = 90$. Da mesma forma, para os outros ângulos de nosso quadrilátero.

(3) Pelo Postulado de Adição de Áreas, a área do quadrado maior é igual à área do quadrado menor mais a soma das áreas dos quatro triângulos congruentes. Isto nos dá

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \tfrac{1}{2}ab.$$

Portanto

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab, \quad \text{e} \quad a^2 + b^2 = c^2,$$

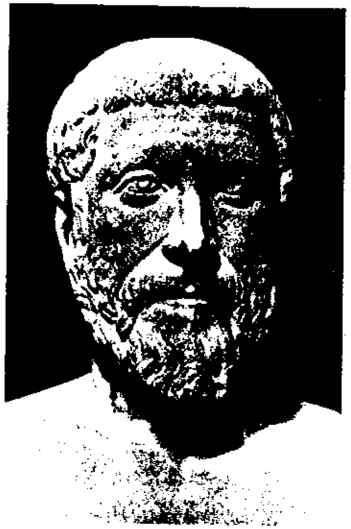
como queríamos demonstrar.

O recíproco do Teorema de Pitágoras também é verdadeiro.

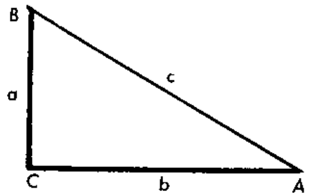
Teorema 11-9

Se o quadrado de um lado de um triângulo é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, então o triângulo é retângulo, com o ângulo reto oposto ao maior lado.

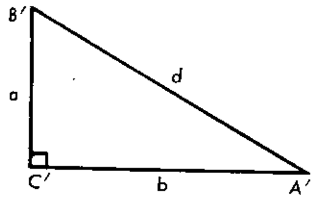
PITÁGORAS



Pitágoras é visto geralmente como o primeiro dos grandes matemáticos gregos, mas muito pouco se sabe a seu respeito como pessoa. Nasceu por volta de 582 A. C. e viveu primeiramente, na ilha de Samos, no Mar Egeu e, mais tarde, no sul da Itália. Pitágoras e seus alunos se dedicaram à matemática, astronomia e filosofia. Atribui-se a êles o desenvolvimento da geometria como ciência; demonstraram o Teorema de Pitágoras e descobriram a existência de números irracionais. Eram igualmente bons em astronomia: sabiam, no sexto século A. C., que a Terra é redonda e que se move ao redor do sol. Não deixaram trabalhos escritos e, assim, ninguém sabe como chegaram a estas conclusões ou quais de suas descobertas são devidas a Pitágoras, pessoalmente.



$a^2+b^2=c^2$.



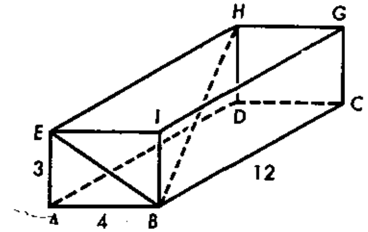
$a^2+b^2=d^2$.

Demonstração. É dado ΔABC, com $a^2 + b^2 = c^2$, como na figura. Seja $\Delta A'B'C'$ o triângulo retângulo com catetos a e b e hipotenusa d. Então $c = d$, porque $d^2 = a^2 + b^2 = c^2$. Por LLL, $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. Portanto, $\angle C \cong \angle C'$. Como $\angle C'$ é um ângulo reto, $\angle C$, também o é.

Problemas 11-3

1. No triângulo retângulo ΔABC, c é o comprimento da hipotenusa, a e b são os comprimentos dos catetos.
   (a) Se $a = 12$ e $b = 16$, então $c = ?$
   (b) Se $a = 24$ e $c = 25$, então $b = ?$
   (c) Se $a = 1$ e $b = 2$, então $c = ?$
   (d) Se $b = 18$ e $c = 20$, então $a = ?$
   (e) Se $a = 7$ e $b = 7$, então $c = ?$
   (f) Se $a = 6$ e $c = 12$, então $b = ?$

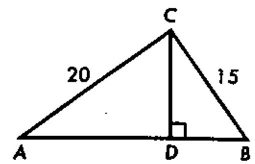
2. Um homem percorre 7 km em direção norte, depois 3 km em direção leste e, finalmente, 3 km em direção sul. A que distância está do ponto de partida?
3. Um homem percorre 1 km em direção norte, 2 km em direção leste, 3 km em direção norte e 4 km em direção leste. A que distância está do ponto de partida?
4. No sólido retangular, na figura ao lado, duas arestas quaisquer que se interceptam são perpendiculares. Se $AE = 3$, $AB = 4$ e $BC = 12$, calcule o comprimento da diagonal $\overline{BE}$ e da diagonal $\overline{BH}$.



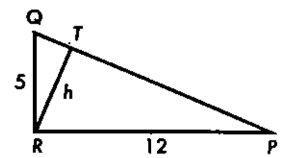
5. A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 17 e um cateto, 15. Calcule a área do triângulo.
6. Os lados de um triângulo têm 6 m, 9 m e 11 m de comprimento. É triângulo retângulo? Caso seja, que lado é a hipotenusa?
7. (a) Demonstre: Se m e n são inteiros positivos com $m > n$, então $m^2 + n^2$ será o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem $m^2 - n^2$ e $2mn$. Que teorema você usou?
   (b) Faça uma tabela com colunas de números do seguinte tipo:

m	n	m^2-n^2	$2mn$	m^2+n^2

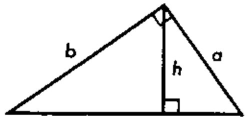
   Use o método da parte (a) para dar a lista dos comprimentos, em números inteiros, dos lados de triângulos retângulos tendo hipotenusa menor ou igual a 25. Existem seis "triplas pitagóricas" dêste tipo.
8. Se p e q são os comprimentos dos catetos de um triângulo retângulo e r é o comprimento da hipotenusa, mostre que, para todo número positivo k, os números kp, kq e kr são, também, os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo.
9. Quais dos seguintes conjuntos de números podem ser os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo?
   (a) 30, 40, 60. (b) 16, 30, 34. (c) 10, 24, 26.
   (d) $\frac{3}{4}$, 1, $1\frac{1}{4}$. (e) 1,4, 4,8, 5,0, (f) $1\frac{2}{3}$, $2\frac{2}{3}$, $3\frac{1}{3}$.
10. No ΔABC, $\angle C$ é um ângulo reto, $AC = 20$ e $BC = 15$. Calcule:
    (a) $a\Delta ABC$, (b) AB,
    (c) a altura relativa à hipotenusa.



11. A hipotenusa de um triângulo é 51 e um outro lado é 24. Ache a área do triângulo.
12. Na figura, $QR = 5$, $RP = 12$, $RT = h$, $\overline{QR} \perp \overline{RP}$, $\overline{RT} \perp \overline{PQ}$. Calcule h.



13. Se os comprimentos dos catetos de um triângulo são a e b, calcule a altura h, relativa à hipotenusa, em têrmos de a a b.

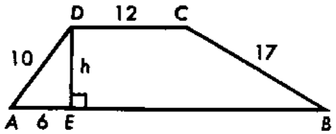


14. Os catetos de um triângulo retângulo medem 24 e 32. Calcule a altura em relação à hipotenusa.

15. Em um losango, cada lado mede 10 cm e uma diagonal mede 12 cm. Calcule a área do losango. Calcule sua altura, em relação a qualquer dos lados.

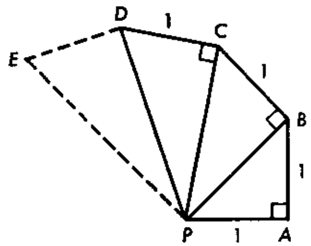
16. Um ângulo de um losango mede 60 e um lado mede 5. Calcule o comprimento de cada diagonal.

17. $\square ABCD$ é um trapézio com $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. Se os segmentos têm comprimentos da forma indicada na figura, determine a área do trapézio.

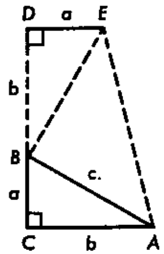


\+ 18. (a) Calcule PB, PC e PD, usando as indicações da figura.

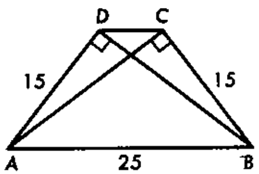
(b) Se você continuar com o processo da figura, fazendo $m\angle PDE = 90$ e $DE = 1$, quanto valerá PE? Qual deve ser o comprimento do próximo segmento traçado a partir de P? Você deve descobrir uma lei interessante.



\+ 19. Uma demonstração do Teorema de Pitágoras, fazendo uso da figura à direita, foi descoberta pelo General James A. Garfield, vários anos antes que se tornasse presidente dos Estados Unidos. Ela apareceu por volta de 1875 no *New England Journal of Education*. Demonstre que $a^2 + b^2 = c^2$, impondo, algèbricamente, que a área do trapézio é igual à soma das áreas dos três triângulos. Você deve demonstrar, também, que $\angle EBA$ é um ângulo reto.



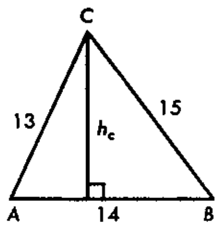
* 20. Dado o trapézio $\square ABCD$, com $AB \parallel DC$, $\overline{AC} \perp \overline{BC}$, $\overline{BD} \perp \overline{AD}$, se $AB = 25$, $AD = 15$ e $BC = 15$, qual a área do trapézio?



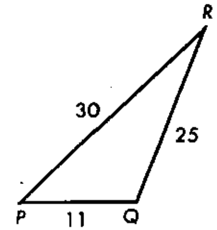
* 21. No ΔABC, à direita, $AC = 13$, $AB = 14$ e $BC = 15$.

(a) Calcule a altura h_c.

(b) Calcule a altura h_b, perpendicular ao lado $\overline{AC}$.



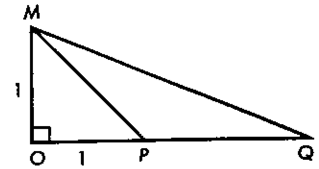
* 22. No ΔPQR, à direita $\angle Q$ é obtuso. $PQ = 11$. $QR = 25$ e $PR = 30$. Calcule a altura releliva a $\overleftrightarrow{PQ}$; calcule $a\Delta PQR$.



* 23. No ΔMOQ, $\overline{MO} \perp \overline{OQ}$,

$MO = OP = 1$, e $MP = PQ$.

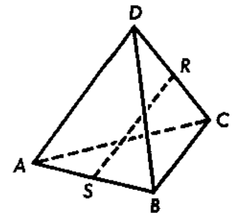
Determine MQ. Determine $m\angle Q$ e $m\angle QMO$.



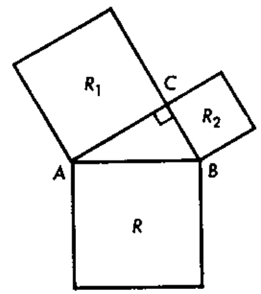
\+* 24. A figura $ABCD$ é um tetraedro com tôdas as suas arestas congruentes entre si e cada uma de comprimento 2. R e S são os pontos médios de $\overline{DC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente.

(a) Demonstre que $\overline{RS}$ é uma perpendicular a $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$.

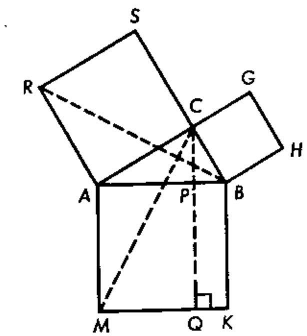
(b) Calcule RS.



*\+ 25. O Teorema de Pitágoras era conhecido dos antigos gregos na seguinte forma:
A área do quadrado sôbre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados sôbre os catetos.



$aR = aR_1 + aR_2$.



$a\square ACSR = a\square AMQP$.

A figura à esquerda ilustra o teorema; a figura à direita é usada na demonstração. As seguintes questões, juntamente com as respostas, sugerem um método de demonstração.

(a) Por que $\angle RAB \cong \angle CAM$?

(b) Por que $\Delta RAB \cong \Delta CAM$?

(c) Por que $a\Delta RAB = a\Delta CAM$?

(d) Alguma altura de ΔRAB é igual a AC?

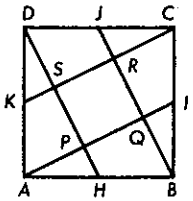
(e) Por que $a\square ACSR = 2a\Delta RAB$?

(f) Que $a\square AMQP = 2a\Delta CAM$?
(g) Por que $a\square ACSR = a\square AMQP$?
(h) Que $a\square BHGC = a\square PQKB$?
(i) Que $a\square AMKB = a\square AMQP + a\square PQRB$? Por que?

Problema Magno

$\square ABCD$ é um quadrado, H, I, J e K são os pontos médios dos lados, como se vê na figura e $\square PQRS$ é um quadrado. Determine a razão

$$\frac{a\square PQRS}{a\square ABCD}.$$

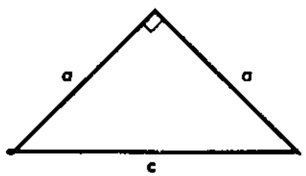


11-4. TRIÂNGULOS ESPECIAIS

O teorema de Pitágoras nos dá certas informações sôbre alguns triângulos especiais.

Teorema 11-10. O Teorema do Triângulo Retângulo Isósceles

Em um triângulo retângulo, isósceles, a hipotenusa é igual $\sqrt{2}$ vêzes o comprimento de cada um dos catetos.

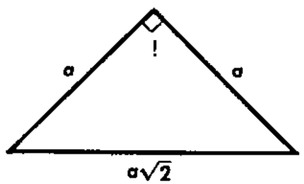


$c = a\sqrt{2}.$

Você deve fazer a demonstração.
O teorema recíproco também é verdadeiro.

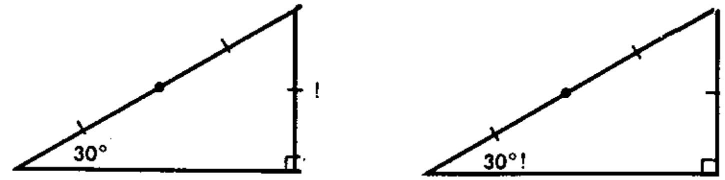
Teorema 11-11

Se a base de um triângulo isósceles é $\sqrt{2}$ vêzes o comprimento de qualquer um dos dois lados congruentes, então o ângulo oposto à base é reto.



A demonstração começa com a observação que $a^2 + a^2 = (a\sqrt{2})^2$.

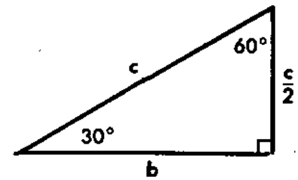
Aprendemos, na Seção 9-7, que em um triângulo cujos ângulo medem 30, 60 e 90 graus, o lado oposto ao ângulo de 30° tem metade do comprimento da hipotenusa e sabemos que a afirmação recíproca também vale:



O Teorema de Pitágoras nos conta qual a relação entre a hipotenusa e o cateto *maior*, nos triângulos 30-60-90.

Teorema 11-12

Em um triângulo cujos ângulos medem 30, 60 e 90, o cateto maior mede $\sqrt{3}/2$ vêzes o comprimento da hipotenusa.



$$b = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

Demonstração. Sejam c o comprimento da hipotenusa e b o comprimento do cateto maior. Então o comprimento do cateto menor será $c/2$. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 + b^2 = c^2.$$

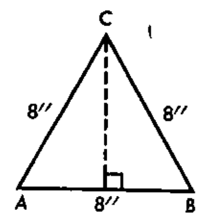
calculando b:

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

[*Pergunta:* É verdade que num triângulo cujos ângulos medem 30, 60 e 90 graus, o comprimento do cateto maior é $\sqrt{3}$ vêzes o comprimento do cateto menor?]

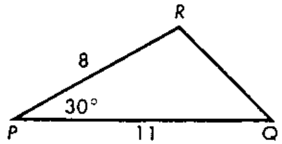
Problemas 11-4

1. Quanto mede a diagonal de um quadrado se um de seus lados mede 6? 9? 78? $\sqrt{2}$? $\sqrt{6}$?
2. Ache o cateto maior de um triângulo cujos ângulos são 30, 60 e 90 graus, no caso em que sua hipotenusa é 4; no caso em que sua hipotenusa é 18; 98; $2\sqrt{3}$; 13.
3. ΔABC é equilátero. Se um lado mede 8 cm, qual é a altura relativa a AB? Qual é a área do ΔABC?



4. Os ângulos agudos de um triângulo retângulo são congruentes e um de seus lados congruentes tem 15 m de comprimento. Quanto mede o terceiro lado?

5. ΔPQR, $m\angle P = 30$, $PR = 8$, $PQ = 11$. Calcule a altura relativa a PQ e a área de ΔPQR.



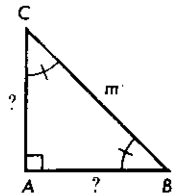
6. A medida de cada ângulo da base de um triângulo isósceles é 30 e cada um de seus lados congruentes mede 14. Qual o comprimento da base? Qual a área do triângulo?

7. Um paralelogramo tem dois lados medindo 18 e 8 e a medida de um ângulo é 30. Ache a área do paralelogramo.

8. Qual a área de um triângulo isósceles cujos lados congruentes medem 20 e cujos ângulos da base medem 30? 45? 60?

9. No ΔABC, $\angle A$ é reto e $m\angle B = m\angle C = 45$. Dado $BC = 6$, calcule AB.

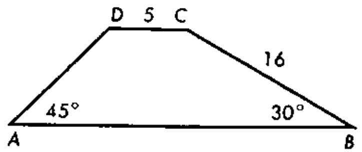
10. Demonstre: Se a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles mede m, então cada um dos dois lados congruentes mede $\frac{1}{2}m\sqrt{2}$.



11. Qual a área de um triângulo isósceles cujos lados congruentes medem 12 m cada, no caso em que os ângulos da base medem
(a) 45? (b) 30? (c) 60?

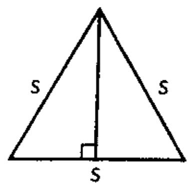
12. Qual é a área de um triângulo isósceles cuja base é 12, no caso em que os ângulos da base medem
(a) 45? (b) 30? (c) 60?

13. No trapézio $\square ABCD$, as medidas dos ângulos da base são 45 e 30, $BC = 16$ e $DC = 5$. Calcule $a\square ABCD$.

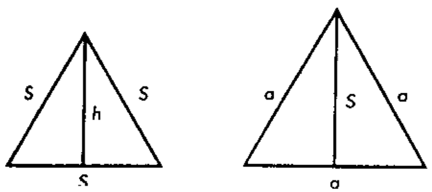


14. A altura de um triângulo equilátero é 12. Calcule o comprimento de um lado e a área do triângulo.

15. Demonstre: A área de um triângulo equilátero cujo lado tem medida S é dada por $\frac{S^2}{4}\sqrt{3}$.



16. O lado de um triângulo equilátero é igual à altura de um segundo. Qual a razão entre suas áreas?



17. A área de um triângulo equilátero é $25\sqrt{3}$. Determine seus lados e suas alturas.

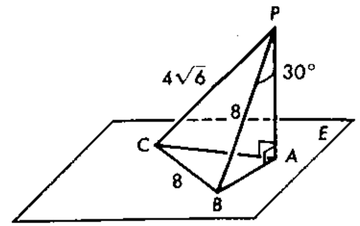
18. Um quadrado, cuja área é 81, tem o perímetro igual ao perímetro de um triângulo equilátero. Qual é a área do triângulo?

19. Na figura, ΔABC está contido no plano E e $\overline{PA} \perp E$.

$PB = BC = 8$,

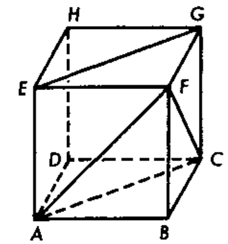
$PC = 4\sqrt{6}$,

$m\angle BPA = 30$.

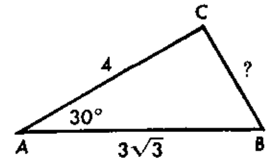


Determine as medidas, tantas quantas possível, dos outros segmentos e ângulos. Calcule, também, $a\Delta PCB$.

20. Em um cubo, as arestas são congruentes e são perpendiculares, quando se interceptam. Na figura, se um lado mede 6, calcule $a\square ACGE$ e $a\Delta ACF$.



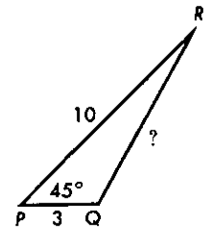
* 21. No ΔABC, $m\angle A = 30$, $AC = 4$, $AB = 3\sqrt{3}$. Calcule BC. $\angle C$ é um ângulo reto? Por quê?



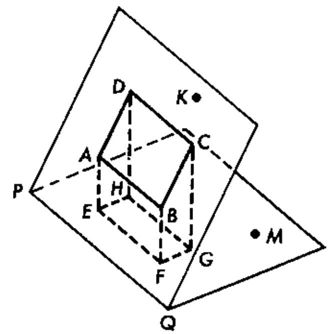
* 22. No ΔPQR, $\angle Q$ é obtuso.

$m\angle P = 45$, $PR = 10$, $PQ = 3$.

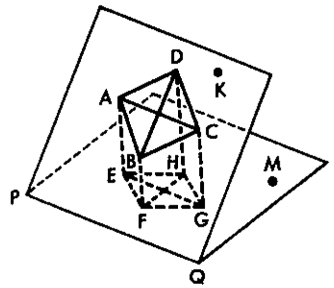
Calcule RQ e $a\Delta PQR$.



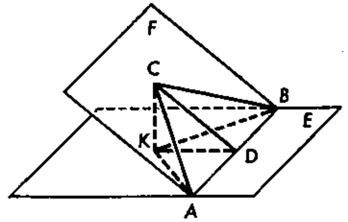
+ 23. Na figura abaixo, $m\angle K\text{-}PQ\text{-}M = 60$. O quadrado $\square ABCD$ está em uma face, com $\overline{AB} \parallel \overline{PQ}$ e é projetado sôbre a outra face, dando $\square EFGH$. Se $AB = \sqrt{26}$, calcule a $\square EFGH$.



*+ 24. Na figura à direita, $m\angle K\text{-}PQ\text{-}M = 45$. O quadrado $\square ABCD$ está em uma face, com $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{PQ}$ e é projetado sôbre a outra face, resultando o quadrilátero $\square EFGH$. Se $AB = 8$, calcule $a\square EFGH$.



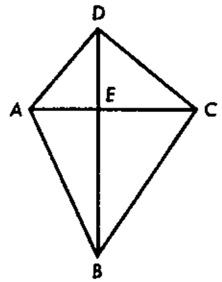
*+ 25. Os planos E e F se interceptam em $\overleftrightarrow{AB}$, formando um diedro. Em F, $\overleftrightarrow{CD}$ é a mediatriz de $\overline{AB}$, $\overline{CK} \perp E$. Dados $\overline{AC} \perp \overline{BC}$, $m\angle CBK = 30$ e $BC = 6$, calcule $m\angle C\text{-}AB\text{-}K$ e $a\Delta ABK$.



Revisão do Capítulo

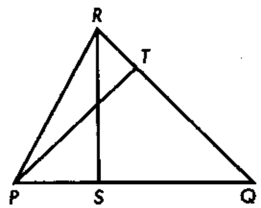
1. Copie em seu caderno e complete: Uma região poligonal é .... de um número .... de ...., em um plano, de tal modo que, se duas destas ...., a .... é um .... ou um ....

2. Na figura, $\overline{AC} \perp \overline{DB}$. Se $DE = 8$ e $BE = 12$, qual a razão entre $a\Delta ACD$ e $a\Delta ABC$?



3. Se um lado de um quadrado é três vêzes maior que um lado de um segundo quadrado, qual a relação entre a área do primeiro quadrado e a área do segundo? (Tente responder sem usar nenhuma fórmula de área.)

4. No ΔPQR, $\overline{PT}$ e $\overline{RS}$ são alturas. Sendo $PR = 13$, $PS = 5$ e $m\angle Q = 45$, calcule PT.

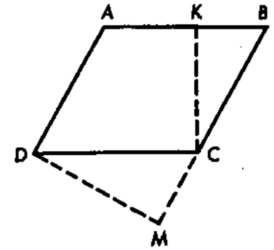


5. Se a diagonal de um quadrado mede 18 m, qual o comprimento de cada lado? Qual é a área do quadrado?

6. Os lados de um triângulo medem 25, 25 e 48. Calcule sua área.

7. Um triângulo equilátero tem uma mediana com 15 m de comprimento. Qual é sua área?

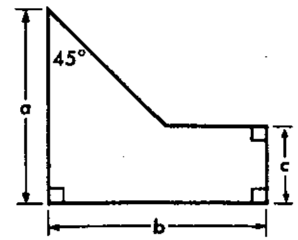
8. $\square ABCD$ é um paralelogramo. $\overline{CK} \perp \overline{AB}$ e $\angle M$ é reto.
   (a) Se $BC = 12$, $DM = 15$ e $KC = 9$, calcule DC e CM.
   (b) Se $KC = \sqrt{24}$, $AK = \sqrt{18}$ e $KB = \sqrt{8}$, calcule AD e DM.



9. O lado de um losango é 13 e uma de suas diagonais é 24. Calcule a área do losango.

10. No ΔABC, $AB = 14$, o comprimento da mediana $\overline{CD}$ é 8 e $m\angle ADC = 60$. Quanto vale $a\Delta ABC$?

11. Deduza uma fórmula para a área desta figura em têrmos de a, b e c.

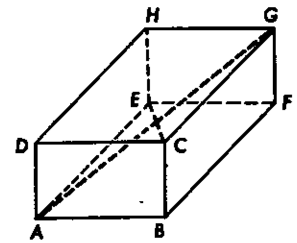


12. Um trapézio tem os lados paralelos com 13 m e 21 m de comprimento. O maior dos lados não paralelos mede 17 e o menor é perpendicular a um dos lados paralelos. Qual a área do trapézio?

13. No paralelogramo $\square ABCD$, M é o ponto médio de $\overline{AD}$ e K é o ponto médio de $\overline{AB}$. Demonstre que

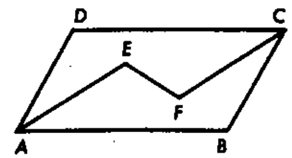
$$a\square AKCM = \tfrac{1}{2}a\square ABCD.$$

14. Neste sólido retangular, $\overline{AG}$ e $\overline{EC}$ são diagonais. Se $AB = 9$, $BF = 12$ e $AD = 8$, calcule AG e EC.



15. Qual é o comprimento da diagonal de um cubo cuja aresta é 6?

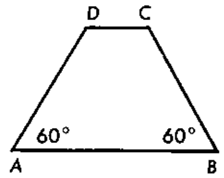
16. No paralelogramo $\square ABCD$, as bissetrizes de $\angle A$ e $\angle C$ encontram a diagonal $\overline{DB}$ em E e F, respectivamente. Demonstre que as regiões $ABCFE$ e $AEFCD$ têm a mesma área.



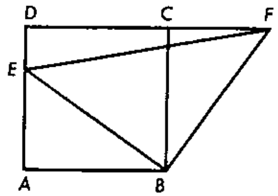
17. Um dado segmento é lado de um quadrado e hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles. Demonstre que a área do quadrado é quatro vêzes a área do triângulo. (Tente não usar nenhuma fórmula de área.)

18. A área de um triângulo equilátero é $100\sqrt{3}$. Quais são os comprimentos de seus lados e de suas alturas?

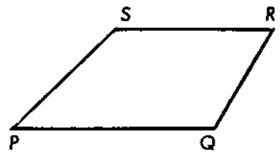
19. $\square ABCD$ é um trapézio com $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. $m\angle A = m\angle B$, $AB = 12$ e $BC = 8$. Calcule $a\square ABCD$.



* 20. $\square ABCD$ é um quadrado. E está em $\overline{AD}$ e F está em $\overleftrightarrow{DC}$ de modo que $\overline{EB} \perp \overline{FB}$. Se $a\square ABCD = 256$ e $a\Delta EBF = 200$, calcule CF.



* 21. $\square PQRS$ é um trapézio, com $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$. $m\angle P = 45$ e $m\angle Q = 120$. Se $PS = 12\sqrt{2}$ e $PQ = 27$, qual o valor de $a\square PQRS$?

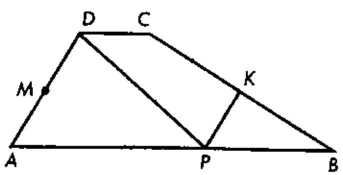


*+ 22. Em um triângulo, dois lados têm comprimentos a e b. A altura relativa ao terceiro lado separa êste lado em dois segmentos de comprimentos c e d, respectivamente. Demonstre que

$$(a + b)(a - b) = (c + d)(c - d).$$

*+ 23. Dados: $\square ABCD$ é um trapézio com $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. M e K são os pontos médios de $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. $\overline{PK} \parallel \overline{AD}$.

Demonstre: $a\Delta APD = a\square PBCD = \frac{1}{2}a\square ABCD$.



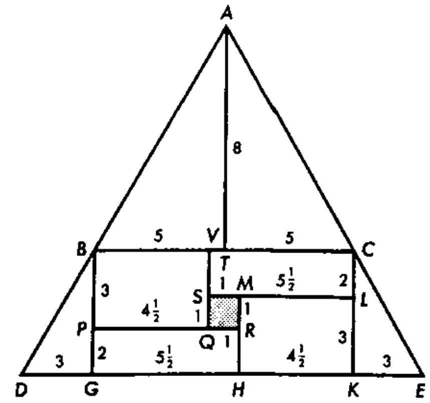
*+ 24. São dados dois paralelogramos em um mesmo plano. Trace uma reta única de modo a separar cada região determinada pelo paralelogramo em duas regiões de áreas iguais.

A figura à direita consta de quatro triângulos retângulos, quatro retângulos e um "buraco" quadrado com uma unidade de lado.

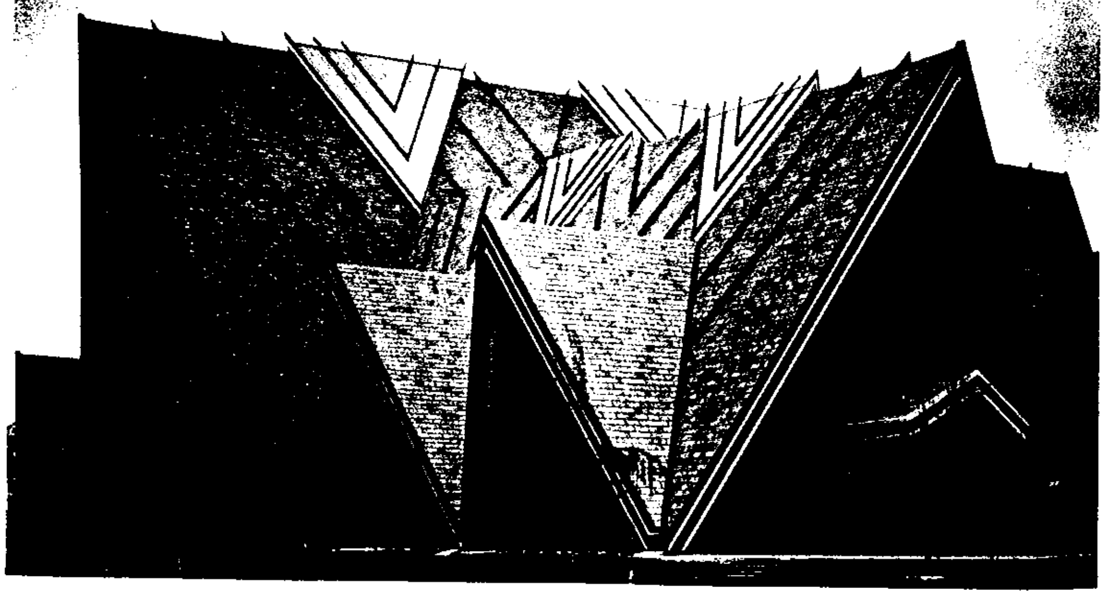
(a) Determine a soma das áreas das oito regiões. (Não inclua o buraco!)

(b) Determine a base DE e a altura relativa a $\overline{DE}$, a partir de A. Determine a metade do produto dêstes dois números.

(c) Você consegue explicar por que os resultados das partes (a) e (b) são iguais, apesar do buraco?

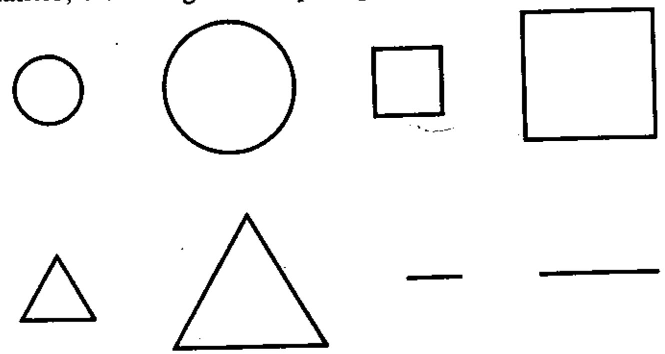


12 SEMELHANÇA



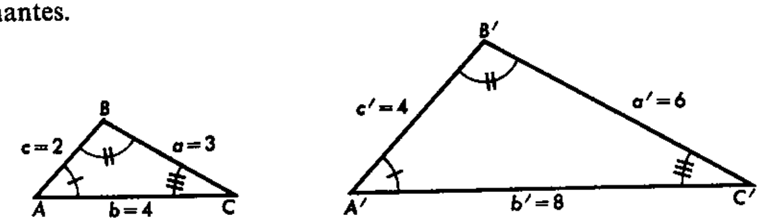
12-1. A IDÉIA DE SEMELHANÇA. PROPORCIONALIDADE

A grosso modo, duas figuras geométricas são semelhantes se tiverem exatamente a mesma forma, mas não necessàriamente o mesmo tamanho. Por exemplo, duas circunferências quaisquer são semelhantes; dois quadrados quaisquer são semelhantes; dois triângulos equiláteros quaisquer são semelhantes; e dois segmentos quaisquer são semelhantes.



Uma outra maneira de expressar essa idéia é dizer que duas figuras são semelhantes se uma delas é, em escala, um modêlo exato da outra.

As marcas nas figuras abaixo indicam que os dois triângulos devem ser semelhantes.



Deve ser possível "esticar" o primeiro triângulo, duplicando seu tamanho, sem mudar sua forma, de modo a se obter o segundo triângulo. O "esticamento" pode ser descrito pela correspondência

$$ABC \leftrightarrow A'B'C'$$

É claro que essa correspondência não é uma congruência pois cada lado do segundo triângulo é o dôbro, em comprimento, do lado correspondente do primeiro triângulo. Correspondências dêsse tipo são chamadas *semelhanças*. Uma definição exata de semelhança será dada mais adiante, neste capítulo.

Semelhanças podem contrair coisas ao invés de esticá-las. Por exemplo, a correspondência

$$A'B'C' \leftrightarrow ABC$$

contrai o segundo triângulo no primeiro.

Observe que os comprimentos dos lados dos nossos dois triângulos formam duas seqüências de números positivos, a, b, c e a', b', c'. Essas seqüências estão em uma relação especial: cada número da segunda seqüência é exatamente o dôbro do número correspondente da primeira seqüência. Assim

$$a' = 2a, \qquad b' = 2b, \qquad c' = 2c.$$

Ou, de um outro modo, podemos dizer que todo número na primeira seqüência é exatamente a metade do número correspondente na segunda

$$a = \tfrac{1}{2}a', \qquad b = \tfrac{1}{2}b', \qquad c = \tfrac{1}{2}c'.$$

Assim

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c},$$

pois cada uma dessas frações é igual a 2; e

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'},$$

pois cada uma dessas frações é igual a $\frac{1}{2}$. Seqüências assim relacionadas se dizem *proporcionais*.

Definição

Dadas duas seqüências $a, b, c, \ldots$ e $p, q, r, \ldots$ de números positivos, se

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = \ldots,$$

então as seqüências $a, b, c, \ldots$ e $p, q, r, \ldots$ se dizem *proporcionais*.

Òbviamente essa definição não depende da ordem em que as duas seqüências são apresentadas; se

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = \ldots,$$

então

$$\frac{p}{a} = \frac{q}{b} = \frac{r}{c} = \ldots,$$

e reciprocamente.

Trabalhamos com seqüências proporcionais usando os métodos da álgebra. As mais fáceis são as que envolvem sòmente quatro números. Muitas vêzes, nós nos referimos a uma tal proporcionalidade como *proporção*. Abaixo estão alguns exemplos do que você pode concluir, dado que a, b e p, q são proporcionais. Dado:

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q}. \tag{1}$$

pela definição de proporção. Multiplicando ambos os membros por pq, obtemos

$$aq = bp. \tag{2}$$

Dividindo ambos os membros por bq, obtemos

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}. \tag{3}$$

Não há perigo de se dividir por 0 aqui, porque todos os números numa proporção têm de ser positivos. Em seguida, adicionando 1 a ambos os membros e simplificando, obtemos

$$\frac{a+b}{b} = \frac{p+q}{q} \tag{4}$$

Subtraindo 1 de ambos os membros da equação (3), obtemos

$$\frac{a-b}{b} = \frac{p-q}{q} \tag{5}$$

Essas são simplesmente as equações mais úteis que se pode derivar de (1); existem muitas outras. Essas equações não precisam ser memorizadas. Se você tentar decorar coisas assim, na metade das vêzes você se enganará quando mais precisar delas. O que você precisa lembrar é o tipo de método algébrico que usamos para derivar uma equação da outra.

Definição

Se a, b e c são números positivos e

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c},$$

então b é chamada a *média geométrica* entre a e c.

É fácil ver que $b = \sqrt{ac}$.

Problemas 12-1

1. Dê os números que tornarão cada sentença verdadeira.

(a) $\dfrac{2}{3} = \dfrac{?}{6} = \dfrac{?}{15} = \dfrac{2x}{?} = \dfrac{?}{1{,}5}$.

(b) $\dfrac{792}{3960} = \dfrac{198}{?} = \dfrac{?}{495} = \dfrac{9}{?} = \dfrac{1}{?}$.

(c) $\dfrac{?}{3} = \dfrac{6x}{?} = \dfrac{24}{18} = \dfrac{?}{6\sqrt{3}}$.

(d) $\dfrac{5}{4} = \dfrac{10}{?} = \dfrac{?}{28} = \dfrac{5\sqrt{2}}{?} = \dfrac{?}{0{,}04}$.

2. Copie e complete cada afirmação:

(a) Se $\frac{5}{9} = \frac{15}{27}$, então $9 \cdot 15 = 5 \cdot \ldots\ldots$

(b) Se $\frac{a}{b} = \frac{3}{7}$, então $7a = \ldots\ldots$

(c) Se $\frac{x}{12} = \frac{5}{8}$, então $8x = \ldots\ldots$

3. Em cada proporção, determine x.

(a) $\frac{x}{2} = \frac{3}{4}$. (b) $\frac{5}{x} = \frac{4}{7}$. (c) $\frac{5}{4} = \frac{2x}{13}$. (d) $\frac{2}{3} = \frac{11}{x+3}$.

4. Copie e complete cada afirmação:

(a) Se $\frac{x}{3} = \frac{5}{7}$, então $x = \ldots\ldots \cdot \frac{5}{7}$.

(b) Se $\frac{5}{9} = \frac{10}{18}$, então $\frac{5}{10} = \frac{?}{18}$.

(c) Se $\frac{3}{4} = \frac{12}{16}$, então $\frac{16}{4} = \frac{12}{?}$.

(d) Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $\frac{a}{c} = \ldots\ldots$

5. Determine a média geométrica entre 4 e 9; entre 7 e 14; entre 15 e 60.

6. Copie e complete cada afirmação

(a) Se $3a = 2b$, então $\frac{a}{b} = \ldots\ldots$ e $\frac{a}{2} = \ldots\ldots$

(b) Se $4m = 15$, então $\frac{m}{5} = \ldots\ldots$ e $\frac{m}{3} = \ldots\ldots$

(c) Se $6x = 5 \cdot 9$, então $\frac{x}{5} = \ldots\ldots$ e $\frac{5}{x} = \ldots\ldots$

(d) Se $\frac{2a}{3b} = \frac{7c}{5d}$, então $\frac{a}{b} = \ldots\ldots$ e $\frac{b}{a} = \ldots\ldots$

7. Para dois números positivos quaisquer a e c, a média geométrica é $b = \sqrt{ac}$ e a média aritmética é $d = \frac{1}{2}(a + c)$. Faça uma tábua das médias aritmética e geométrica para os seguintes pares

(a) 2 e 8. (b) 3 e 12. (c) 5 e 45.
(d) 4 e 9. (e) 9 e 16. (f) 12 e 15.

8. Complete cada afirmação:

(a) Se $\frac{5}{12} = \frac{15}{36}$, então $\frac{5+12}{12} = \frac{15+?}{36}$.

(b) Se $\frac{7}{9} = \frac{28}{36}$, então $\frac{7}{2} = \frac{28}{36-?}$.

(c) Se $\frac{a}{b} = \frac{6}{5}$, então $\frac{a+b}{b} = \ldots\ldots$ e $\frac{a-b}{b} = \ldots\ldots$

(d) Se $\frac{a+c}{c} = \frac{11}{7}$, então $\frac{a}{c} = \ldots\ldots$ e $\frac{c}{a} = \ldots\ldots$

9. Considere essas três seqüências. Quantos pares de seqüência são proporcionais?

(a) 3, 8, 12, 17. (b) 9, 24, 36, 51. (c) $\frac{7}{2}$, $\frac{28}{3}$, 15, $\frac{119}{6}$.

É fácil ver que as seqüências (a) e (b) são proporcionais, pois cada número em (b) é três vêzes o número correspondente em (a). Mas comparar (a) e (c) ou (b) e (c) não é muito simples. Uma maneira eficiente é transformar cada seqüência numa seqüência proporcional começando com 1, como nas seguintes:

(a) 1, $\frac{8}{3}$, 4, $\frac{17}{3}$.
(b) 1, $\frac{24}{9}$, 4, $\frac{51}{9}$; ou 1, $\frac{8}{3}$, ..., ...
(c) 1, $\frac{8}{3}$, ..., ...

Agora responda a questão.

10. Entre as seqüências seguintes, que pares são proporcionais? O método do Problema 9 talvez o auxilie nas decisões.

(a) 5, 7, 9. (b) 1, 2, 3. (c) $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$. (d) 8, 15, 17.
(e) 15, 30, 45. (f) 16, 30, 34. (g) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1. (h) 1,25, 1,75, 2,25.

11. Se $x/40 = y/50 = 30/20$, determine x e y.

12. Se $3/p = 5/q = r/26 = q/20$, determine p, q e r.

+ 13. Quais das sentenças abaixo são verdadeiras para todos os valôres da variável usada, salvo, é claro, aquêles valôres que tornariam algum têrmo da seqüência igual a zero?

(a) $\frac{5x}{6x} = \frac{5}{6}$. (b) $\frac{a}{8b} = \frac{b}{8a}$.

(c) $\frac{r}{r^2} = \frac{s}{rs} = \frac{t}{tr}$. (d) $\frac{a+b}{a^2-b^2} = \frac{1}{a-b}$.

(e) $\frac{a+b}{1} = \frac{a^2+b^2}{a+b}$. (f) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$.

+ 14. (a) Considere as igualdades $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{18}{27}$. Verifique que

$$\frac{2+4+6+8+18}{3+6+9+12+27} = \frac{2}{3}.$$

Será que o mesmo processo funciona sempre? Experimente.

(b) Demonstre: Se

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h},$$

então

$$\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h} = \frac{a}{b}.$$

[*Sugestão:* Seja $a/b = k$. Então $a = kb$. Também, $c = kd$, $e = kf$, $g = kh$.

$$\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h} = k?].$$

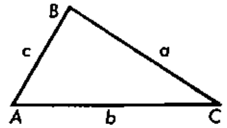
Problema Magno

Demonstre o seguinte teorema:

A média geométrica de dois números positivos é sempre menor que sua média aritmética.

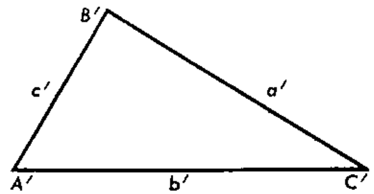
[*Sugestão:* Tome $a > b > 0$. Mostre que $\sqrt{ab} < \frac{1}{2}(a + b)$. Tente supor que a desigualdade proposta é verdadeira e derive dela uma desigualdade que você *sabe* ser verdadeira. Isso lhe mostrará como começar a demonstração.]

Vamos dar agora a definição de semelhança de dois triângulos. Suponha que nos seja dada uma correspondência $ABC \leftrightarrow A'B'C'$ entre ΔABC e $\Delta A'B'C'$. Como sempre, a é o comprimento do lado oposto a A, b é o comprimento do lado oposto a B e assim por diante. Se os ângulos correspondentes forem congruentes e



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'},$$

dizemos que a correspondência $ABC \leftrightarrow A'B'C'$ é uma *semelhança* e escrevemos



$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'.$$

Definição

É dada uma correspondência entre dois triângulos. Se os ângulos correspondentes forem congruentes e os lados correspondentes forem proporcionais, então a correspondência é chamada uma *semelhança* e os triângulos se dizem *semelhantes*.

A situação aqui é como na congruência: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ não sòmente significa que os triângulos são semelhantes mas, também, que a particular correspondência $ABC \leftrightarrow A'B'C'$ é uma semelhança. Assim, dado $\Delta ABC \sim$ $\sim \Delta A'B'C'$, podemos imediatamente escrever a igualdade

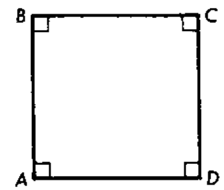
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'},$$

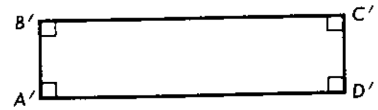
sem nos referirmos a uma figura. Se os comprimentos dos lados não estiverem indicados, essas equações tomam a forma

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

A definição de semelhança requer dois fatos: (1) ângulos correspondentes tem de ser congruentes e (2) lados correspondentes tem de ser proporcionais. Para triângulos, vai acontecer que, sendo verdadeira uma dessas condições, a outra também o será. Isto é, se ângulos correspondentes são congruentes, os lados correspondentes são proporcionais e reciprocamente. Êsses fatos são dados no Teorema AAA sôbre Semelhança e no Teorema LLL sôbre Semelhança, que serão demonstrados mais adiante nesse capítulo.

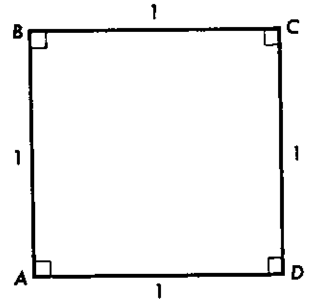
Exigir (1) e (2) é uma questão de segurança: e foi uma boa idéia, porque triângulos são as únicas figuras para as quais semelhança é uma idéia simples. Considere, por exemplo, um quadrado e um retângulo:

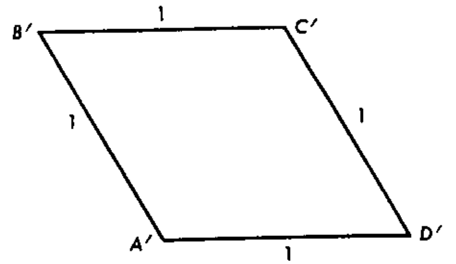




Sob a correspondência $ABCD \leftrightarrow A'B'C'D'$, ângulos correspondentes são congruentes porque todos os ângulos são retos. Mas lados correspondentes não são proporcionais e certamente nenhuma das duas figuras é um modêlo da outra, numa escala diferente.

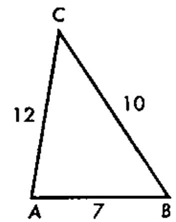
Para outros quadriláteros, pode ocorrer, exatamente, a dificuldade oposta. Considere um quadrado e um losango:

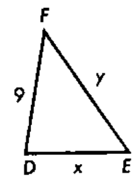


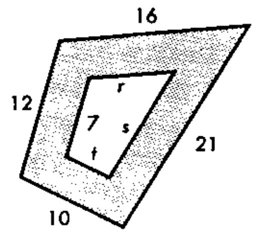


Sob a correspondência $ABCD \leftrightarrow A'B'C'D'$, lados correspondentes são proporcionais mas as figuras têm uma configuração bastante diferente.

1. Dados $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ e comprimento de lados segundo as indicações, determine x e y.







2. Um pedaço de papelão é recortado como na figura acima, à direita, sendo seus contornos, interior e exterior, quadriláteros semelhantes. Se os comprimentos dos lados são os indicados na figura, quanto valem r, s e t?

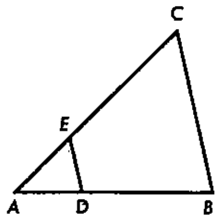
3. Na figura, $\Delta ABC \sim \Delta ADE$. Se

$AD = 5, \quad AE = 6, \quad BC = 12,$

e

$AB = 15,$

determine AC e DE.

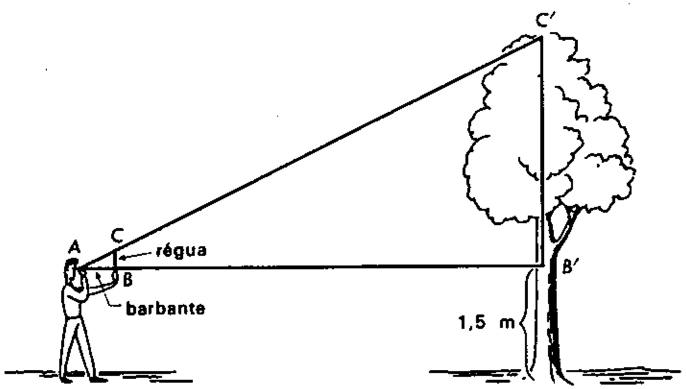


4. Se $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$, segue-se que $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$? Por quê?

5. São tiradas duas cópias fotográficas de um negativo, uma diretamente e a outra ampliada. Na cópia direta, um objeto tem largura de 2 dm e altura de 2,3 dm. Na ampliação, o objeto tem largura de 7,5 dm. Qual é sua altura na ampliação?

6. João obtém uma boa aproximação da altura de uma árvore pelo seguinte processo. Em primeiro lugar, êle fica bem perto da árvore e observa um ponto da árvore a uma altura de 1,5 m do chão. Em seguida, êle anda 40 passos (ou 30 metros), afastando-se da árvore. Virando-se em direção à árvore, êle segura uma régua pequena de 15 cm, verticalmente, em frente de seus olhos, até a régua esconder a árvore acima do ponto a 1,5 m do chão. Usando um barbante prêso no furo na extremidade da régua, êle mede em cm a distância de seus olhos até a régua. Êle pode, então, calcular fàcilmente a altura da árvore usando a fórmula

$$h = 30 \cdot \frac{15}{AB} + 1{,}5.$$



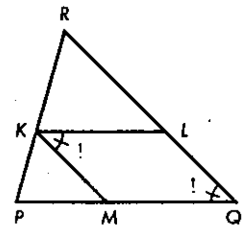
(a) Explique porque essa fórmula dá a altura da árvore. Qual é a unidade de medida?

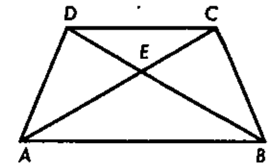
(b) Se o fio mede 20 cm, qual a altura da árvore?

7. Demonstre: Se D e E são pontos médios de $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, no ΔABC, então $\Delta CDE \sim \Delta CAB$.

8. Demonstre: O triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados de um triângulo dado, é semelhante a êste.

9. Dada a figura com $\Delta PMK \sim \Delta KLR$, demonstre que $\angle Q \cong \angle MKL$.

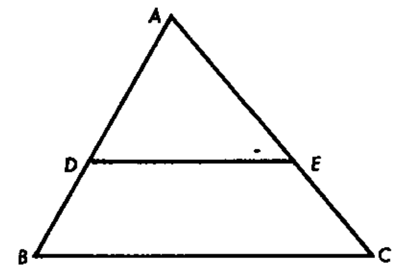




10. Dados: O trapézio $\square ABCD$ com $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\Delta AED \sim \Delta BEC$ e $\Delta AEB \sim \Delta CED$. Demonstre: $AD = BC$.

12-3. O TEOREMA FUNDAMENTAL SÔBRE PROPORCIONALIDADE E SEU RECÍPROCO

Considere um triângulo ΔABC e um segmento $\overline{DE}$, paralelo a base $\overline{BC}$ cortando o triângulo. Parece que a correspondência $ABC \leftrightarrow ADE$ deve ser uma semelhança. De fato, é bastante fácil provar que os ângulos correspondentes são congruentes. (Demonstração?) Mostrar que os lados correspondentes são proporcionais é um pouco mais difícil. Vamos começar com um teorema que afirma serem os lados *inclinados*, na figura à direita, proporcionais.

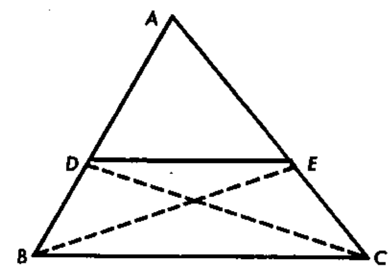


Teorema 12-1. O Teorema Fundamental sôbre Proporcionalidade

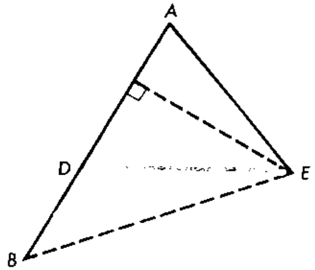
Se uma reta paralela a um lado de um triângulo intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então ela determina segmentos que são proporcionais a êsses lados.

Re-enunciado. No ΔABC sejam D e E pontos de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ tais que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. Então

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

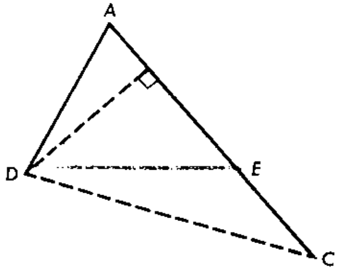


Demonstração. Nos ΔADE e ΔBDE consideremos $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$ como as bases. Então êsses triângulos têm a mesma altura. (Por quê?) Portanto, pelo Teorema 11-7, a razão de suas áreas é igual a razão de suas bases e temos



(1) $$\frac{a\Delta BDE}{a\Delta ADE} = \frac{BD}{AD}.$$

Anàlogamente, nos ΔADE e ΔCDE consideremos $\overline{AE}$ e $\overline{CE}$ como bases. Como êsses triângulos têm mesma altura, concluímos, como antes, que



(2) $$\frac{a\Delta CDE}{a\Delta ADE} = \frac{CE}{AE}.$$

Mas ΔBDE e ΔCDE têm a mesma base $\overline{DE}$. (Veja a figura à direita do re-enunciado). E êles têm a mesma altura, porque $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas. Portanto, pelo Teorema 11-6,

(3) $$a\Delta BDE = a\Delta CDE$$

Combinando as três equações (1), (2) e (3), obtemos

(4) $$\frac{BD}{AD} = \frac{CE}{AE}.$$

Adicionando 1 a ambos os membros da equação (4), obtemos

(5) $$\frac{BD + AD}{AD} = \frac{CE + AE}{AE}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE},$$

como queríamos demonstrar.

O recíproco do Teorema Fundamental sôbre Proporcionalidade é muito mais fácil de demonstrar.

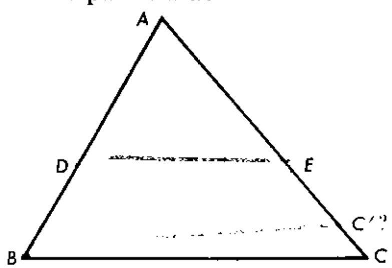
Teorema 12-2

Se uma reta intercepta dois lados de um triângulo e determina segmentos proporcionais a êstes dois lados, então ela é paralela ao terceiro lado.

Re-enunciado. É dado o ΔABC. Seja D um ponto entre A e B e seja E um ponto entre A e C. Se

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE},$$

então $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.



Demonstração. Seja $\overleftrightarrow{BC'}$ uma reta por B, paralela a $\overleftrightarrow{DE}$, interceptando $\overleftrightarrow{AC}$ em C'. Pelo teorema anterior

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC'}{AE}.$$

Como, por hipótese,

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE},$$

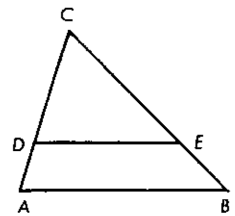
temos

$$\frac{AC'}{AE} = \frac{AC}{AE},$$

e $AC' = AC$. Portanto $C = C'$ e $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

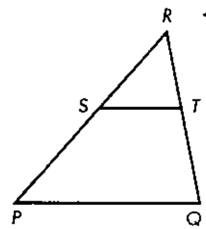
Problemas 12-3

1. No ΔABC, $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$.



   (a) Dado que $AC = 12$, $CD = 4$ e $BC = 24$, determine CE.
   (b) Dado que $AC = 15$, $AD = 3$ e $BC = 25$, determine BE.
   (c) Dado que $AD = 6$, $CD = 4$ e $CE = 7$, determine BC.
   (d) Dado que $CD = 8$, $AC = 18$ e $BE = 6$, determine CE.
   (e) Dado que $AD = CE$, $CD = 4$, $EB = 9$, determine AC.

2. Dados $\overline{ST} \parallel \overline{PQ}$ no ΔPQR, copie e complete as seguintes sentenças

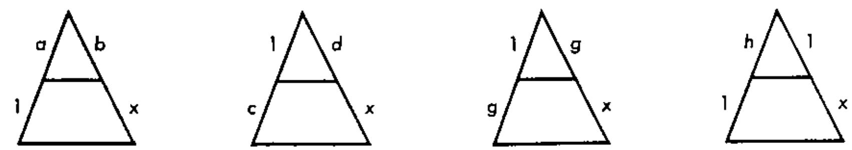


   (a) $\dfrac{RP}{RS} = \dfrac{?}{?}$. (b) $\dfrac{RS}{SP} = \dfrac{?}{?}$.

   (c) $\dfrac{?}{?} = \dfrac{SP}{RP}$. (d) $\dfrac{RT}{RQ} = \dfrac{?}{?}$.

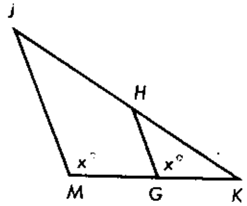
   (e) $\dfrac{RS}{RT} = \dfrac{?}{?}$. (f) $\dfrac{RQ}{RP} = \dfrac{?}{?}$.

3. Em cada um dos triângulos abaixo é desenhado um segmento paralelo a uma base e são indicados os comprimentos de certos lados. Em cada caso, escreva x em função das outras letras.



(a) (b) (c) (d)

4. No ΔJMK, $m\angle M = m\angle HGK = x$.



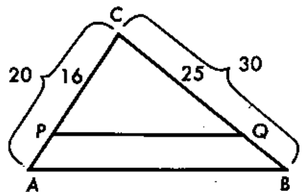
(a) Dados $JH = 7$, $JK = 21$ e $GK = 10$, determine MG.

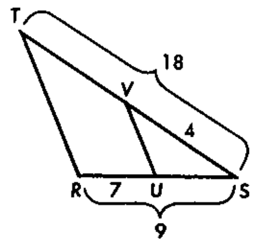
(b) Dados $HK = MG$, $MK = 6$ e $JH = 8$, determine GK.

(c) Dados $GK = 7$, $HK = 2\,MG$ e $JH = 14$, determine JK.

(d) Dados $KJ = 24$, $HK = MK$ e $KG = 4$, determine MK.

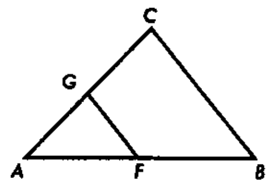
5. Se os segmentos na figura à esquerda, abaixo, têm os comprimentos indicados, $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$? Justifique sua resposta.





6. Se os segmentos na figura à direita, acima, tiverem os comprimentos indicados, $\overline{UV} \parallel \overline{RT}$? Justifique sua resposta.

7. Qual dos seguintes conjuntos de comprimentos fará $\overline{FG} \parallel \overline{BC}$?



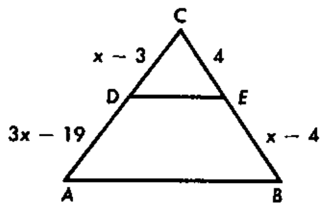
(a) $AB = 14$, $AF = 6$, $AC = 7$, $AG = 3$.

(b) $AB = 12$, $FB = 3$, $AC = 8$, $AG = 6$.

(c) $AF = 6$, $FB = 5$, $AG = 9$, $GC = 8$.

(d) $AC = 21$, $GC = 9$, $AB = 14$, $AF = 5$.

8. Dada a figura com as indicações, determine todos os valôres de x que farão $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$.



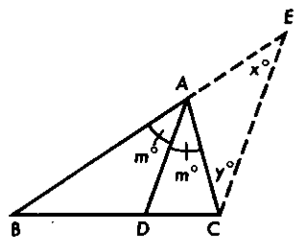
9. Demonstre o seguinte teorema:

A bissetriz de um ângulo de um triângulo separa o lado oposto em segmentos, cujos comprimentos são proporcionais aos comprimentos dos lados adjacentes.

Re-enunciado. No ΔABC, se $\overrightarrow{AD}$ é bissetriz do $\angle A$ e D está em $\overline{BC}$, então

$$\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA}.$$

[*Sugestão:* Introduza $\overleftrightarrow{CE}$ paralela a $\overline{AD}$. Mostre que $AC = AE$.]

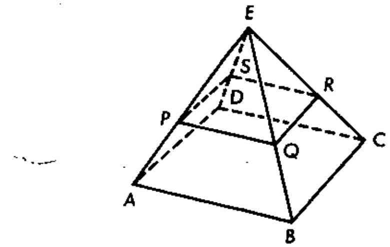


10. Use o teorema do Problema 9 para responder o seguinte.

(a) Os lados de um triângulo são 15, 20 e 28. Quais os comprimentos dos segmentos que a bissetriz do maior ângulo determina sôbre o lado oposto? do menor ângulo?

(b) Os lados de um triângulo são 12, 18 e 24. Determine os comprimentos dos segmentos que as bissetrizes de cada ângulo determinam sôbre os lados opostos.

11. Na figura, $\overline{PS} \parallel \overline{AD}$, $\overline{SR} \parallel \overline{DC}$ e $\overline{RQ} \parallel \overline{BC}$. Demonstre que $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$.



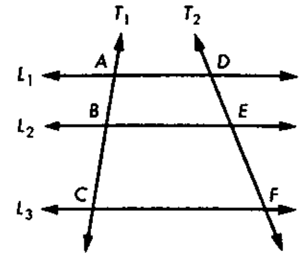
12. Demonstre o seguinte teorema.

Se três ou mais paralelas são cortadas por duas transversais, os segmentos determinados nas duas transversais são proporcionais.

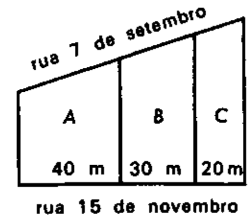
Re-enunciado. Se as transversais T_1 e T_2 cortam as paralelas L_1, L_2 e L_3 em A, B, C e D, E, F respectivamente, então

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}.$$

[*Sugestão:* Introduza $\overline{DC}$ ou $\overline{AF}$.]



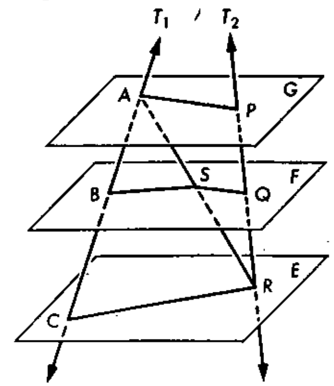
13. Três terrenos se estendem da Rua 15 de Novembro à rua 7 de Setembro, como na figura. As separações laterais são perpendiculares à Rua 15 de Novembro. Se a frente total na rua 7 de Setembro é de 120 m, qual a frente de cada terreno nesta rua?



+ 14. Dados: os planos paralelos E, F e G são interceptados pelas transversais T_1 e T_2, como na figura.

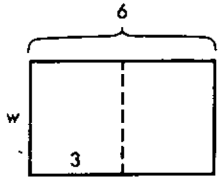
Demonstre: $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{PQ}{QR}$.

[*Sugestão:* Introduza $\overline{AR}$.]



15. Demonstre: As diagonais de um trapézio se interceptam num ponto tal que os comprimentos dos segmentos determinados em uma diagonal são proporcionais aos comprimentos dos segmentos determinados na outra diagonal.

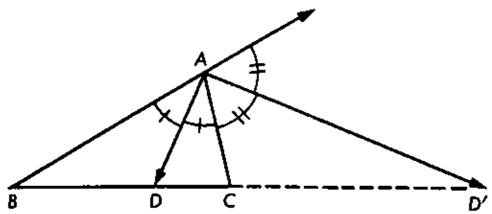
16. Um tipógrafo deseja fazer um cartão de comprimento 6 cm e de largura tal que quando dobrado ao meio, como na figura, êle terá a mesma forma que antes. Qual deve ser sua largura?



*+ 17. Demonstre o seguinte teorema.

É dado um triângulo qualquer, ΔABC. Se as bissetrizes dos ângulos interno e externo em A interceptam $\overleftrightarrow{BC}$ nos pontos D e D', respectivamente, então

$$\frac{BD}{BD'} = \frac{CD}{CD'}.$$



[*Sugestão:* Introduza $\overleftrightarrow{CE}$ paralela a $\overline{AD'}$, use o Teorema 12-1 e o Problema 9 desta série.]

*+ 18. (a) No Problema 17, se $AC = 9$, $AB = 15$ e $BC = 16$, determine BD, DC e CD'.
(b) No Problema 17, se $m\angle BAC = 90$, $AC = 6$ e $AB = 8$, determine BD, DC e CD'.

*+ 19. O teorema do Problema 17 continua válido se $AB < AC$? Ilustre e explique. Como mudaria o teorema se $AB = AC$?

*+ 20. Um triângulo tem lados 6, 12 e 16. As bissetrizes do maior ângulo interno e do menor ângulo externo interceptam a reta contendo o lado oposto nos pontos X e Y, respectivamente. Determine as distâncias de X e Y ao vértice do menor ângulo do triângulo.

Problema Magno

É dado ΔABC com $AB > AC$. As bissetrizes dos ângulos interno e externo em A interceptam $\overleftrightarrow{BC}$ nos pontos D e E, respectivamente. Demonstre que

$$\frac{\sqrt{AD^2 + AE^2}}{CD} - \frac{\sqrt{AD^2 + AE^2}}{BD} = 2.$$

12-4. OS TEOREMAS FUNDAMENTAIS SÔBRE SEMELHANÇA

Teorema 12-3. Teorema AAA sôbre Semelhança

É dada uma correspondência entre dois triângulos. Se os ângulos correspondentes são congruentes, a correspondência é uma semelhança.

Re-enunciado. É dada uma correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$ entre dois triângulos. Se $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ e $\angle C \cong \angle F$, então $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

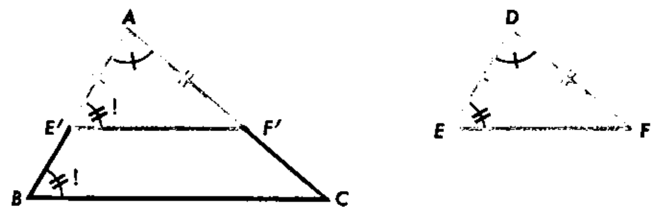
Demonstração. Como sabemos, por hipótese, que os ângulos correspondentes são congruentes, precisamos provar que os lados correspondentes são proporcionais. Isto é, precisamos mostrar que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}.$$

Vamos mostrar que a *primeira* dessas equações é válida. Com uma demonstração idêntica, mudando apenas a notação, seguir-se-á que a segunda equação também é válida.

Vamos demonstrar que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}.$$



Sejam E' e F' pontos de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ tais que $AE' = DE$ e $AF' = DF$. Por LAL temos

$$\Delta AE'F' \cong \Delta DEF.$$

Portanto $\angle AE'F' \cong \angle E$. Como $\angle E \cong \angle B$, segue-se que

$$\angle AE'F' \cong \angle B.$$

Vamos considerar dois casos:

(1) Se $E' = B$ então $\Delta AE'F'$ e ΔABC são o mesmo triângulo. Nesse caso $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ e

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF},$$

pois cada uma dessas frações é igual a 1. (Por quê?)

(2) Se E' é diferente de B, então $\overleftrightarrow{E'F'}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas. (Por quê?). Pelo Teorema Fundamental sôbre Proporcionalidade, temos

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}.$$

Como $AE' = DE$ e $AF' = DF$, segue-se que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF},$$

como queríamos demonstrar.

Lembramos, do Corolário 9-13.1, que se *dois* pares de ângulos são congruentes, então o terceiro par também tem de ser congruente. (A razão disso, é claro, está no fato de que a soma das medidas dos ângulos de um triângulo é 180). Isso nos dá o seguinte corolário:

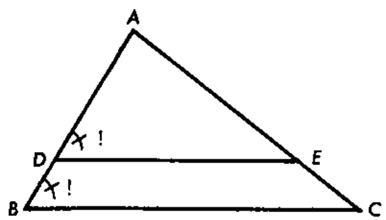
Corolário 12-3.1. O Corolário AA

É dada uma correspondência entre dois triângulos. Se dois pares de ângulos correspondentes são congruentes, então a correspondência é uma semelhança.

Podemos demonstrar agora uma versão mais forte do Teorema Fundamental sôbre Proporcionalidade, justificando as observações feitas no comêço da seção anterior na pág. 307.

Corolário 12-3.2

Se uma reta, paralela a um lado de um triângulo, interceptar os outros dois lados em pontos distintos, então ela determina um triângulo semelhante ao triângulo dado.

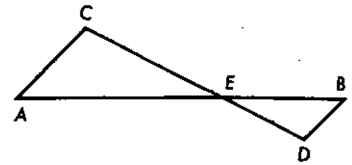


Demonstração. Quando as retas paralelas $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são cortadas pela transversal $\overleftrightarrow{AB}$, os ângulos correspondentes são congruentes. Portanto $\angle ADE \cong \angle B$. Como $\angle A \cong \angle A$, segue-se, pelo Corolário AA, que

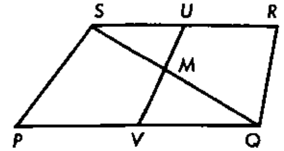
$$\Delta ADE \sim \Delta ABC.$$

Problemas 12-4A

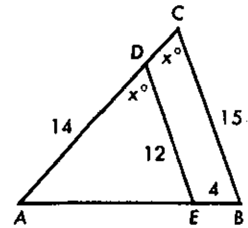
1. Dados: A figura com $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$.
   Demonstre: (1) $\Delta ACE \sim \Delta BDE$.
   (2) $AE \cdot ED = CE \cdot EB$.



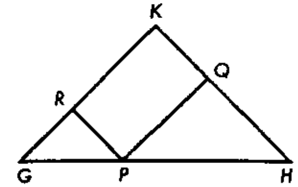
2. Dados: $\square PQRS$ com $\overline{SR} \parallel \overline{PQ}$, diagonal $\overline{SQ}$, U e V são pontos médios.
   Demonstre: $US \cdot MQ = VQ \cdot MS$.



3. Dada a figura, com $AD = 14$, $EG = 12$, $BC = 15$ e $EB = 4$, determine AC, AE e AB.



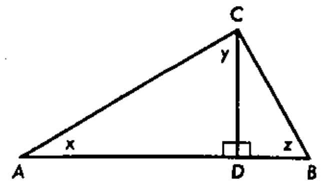
4. No ΔGHK, $GK = HK$, $\overline{PR} \perp \overline{GK}$ e $\overline{PQ} \perp \overline{HK}$.
   Demonstre que
   $$GR \cdot PQ = PR \cdot HQ$$



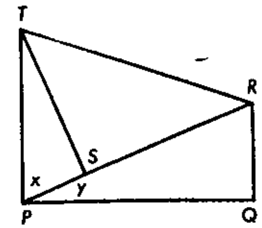
5. Demonstre o seguinte teorema.

   Duas alturas correspondentes quaisquer de triângulos semelhantes estão na mesma razão que os lados correspondentes.

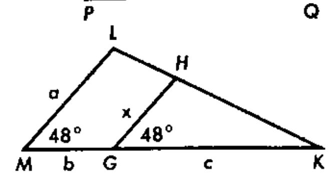
6. No ΔABC, $\angle C$ é um ângulo reto e $\overline{CD}$ é a altura em relação a hipotenusa.
   (a) Dê o nome de pelo menos um ângulo congruente ao $\angle ACB$.
   (b) Dê o nome de um ângulo congruente ao $\angle z$.
   (c) Dê o nome de um triângulo semelhante ao ΔABC. Escreva a semelhança entre os dois.



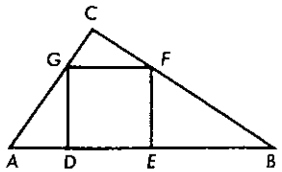
7. Na figura, $\overline{RQ} \perp \overline{PQ}$, $\overline{PQ} \perp \overline{PT}$ e $\overline{ST} \perp \overline{PR}$. Demonstre que
   $$ST \cdot RQ = PS \cdot PQ.$$



8. Dada a figura, expresse x em têrmos de a, b e c.



9. Na figura, $\square DEFG$ é um quadrado e $\angle C$ é um ângulo reto.
Demonstre: (1) $\Delta ADG \sim \Delta GCF$.
(2) $\Delta ADG \sim \Delta FEB$.
(3) $AD \cdot EB = DG \cdot FE$.
(4) $DE = \sqrt{AD \cdot EB}$.

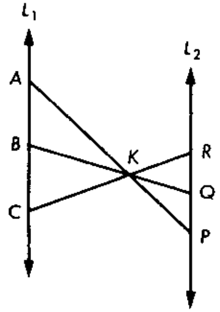


10. Demonstre o seguinte teorema.

Duas bissetrizes de ângulos correspondentes de triângulos semelhantes estão na mesma razão que os lados correspondentes.

* 11. Dada a figura com $L_1 \parallel L_2$ e $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$, $\overline{CR}$ interceptando-se em K,
(a) Dê três pares de triângulos semelhantes e escreva as três semelhanças.
(b) Demonstre que

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{RQ}.$$

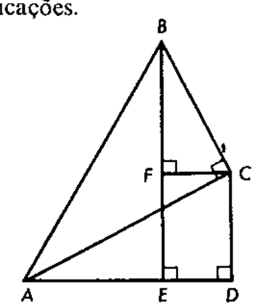


* 12. É dada a figura com as perpendiculares segundo as indicações.
(a) Demonstre que $\Delta BFC \sim \Delta ADC$.
(b) Demonstre que

$$BF = \frac{AD \cdot BC}{AC}.$$

(c) Demonstre que

$$\frac{BE}{AB} = \frac{CD}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} + \frac{AD}{AC} \cdot \frac{BC}{AB}.$$



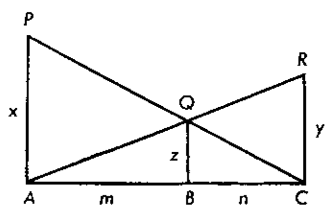
* 13. É dado um paralelogramo $\square ABCD$ com suas diagonais. Uma reta por B intercepta $\overline{AC}$ em E, $\overline{DC}$ em G e $\overline{AD}$ em F. Demonstre que (1) $\Delta AEF \sim CEB$ e (2) EB é a média geométrica de EG e EF.

*+ 14. Na figura, $\overline{PA}$, $\overline{QB}$ e $\overline{RC}$ são, cada um, perpendiculares a $\overline{AC}$.
(a) Copie e complete:
$\Delta PAC \sim \Delta$...... e
$\Delta ABQ \sim \Delta$...... .
(b) O que é correto:

$$\frac{z}{x} = \frac{n}{m} \quad \text{ou} \quad \frac{z}{x} = \frac{n}{m+n}?$$

(c) O que é correto:

$$\frac{z}{y} = \frac{m}{n} \quad \text{ou} \quad \frac{z}{y} = \frac{m}{m+n}?$$



(d) Mostre que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}.$$

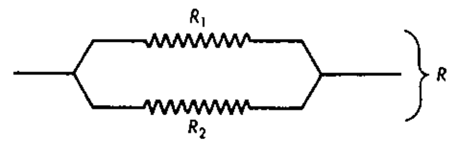
*+ 15. "Um homem completa um serviço em 6 horas e um outro homem completa o mesmo serviço em 3 horas. Se êles trabalhassem juntos, em quanto tempo completariam o serviço?". Êsse problema pode ser resolvido, encontrando-se a solução da equação

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{n}.$$

Resolva essa equação *geomètricamente*. [*Sugestão:* Veja Problema 14.]

Problema Magno

Um problema comum, envolvendo circuitos elétricos, é como o seguinte. Um circuito consta de dois fios em paralelo com resistências R_1 e R_2. Qual é a resistência do circuito?

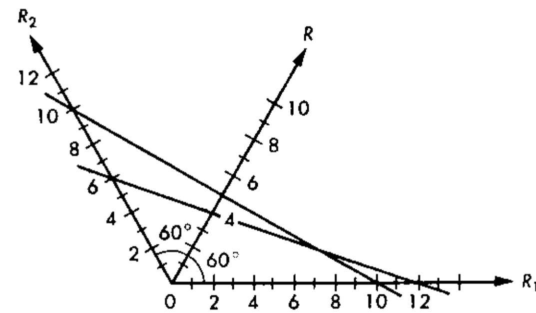


A resistência do circuito, R, é dada pela equação

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Resolva essa equação para R, em têrmos de R_1 e R_2.

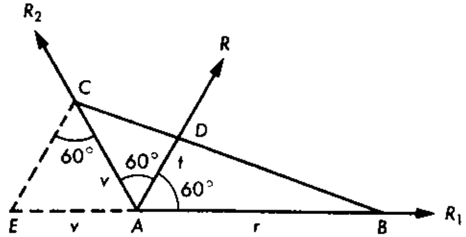
O seguinte esquema foi usado para achar R quando R_1 e R_2 são conhecidas. Escalas numéricas são marcadas nas três semi-retas, como é visto abaixo. Uma régua é colocada de modo a passar por R_1 e R_2 nas duas escalas externas,



e R é lido na escala que sobrou. Por exemplo, se $R_1 = 12$ e $R_2 = 6$, então $R = 4$; se $R_1 = 10$ e $R_2 = 10$, então $R = 5$.

(a) Calcule R, dado que $R_1 = 4$ e $R_2 = 12$; $R_1 = 6$ e $R_2 = 3$; $R_1 = 7$ e $R_2 = 7$.

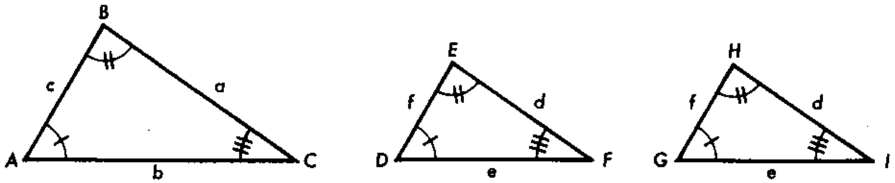
(b) Usando a figura abaixo, explique porque o esquema descrito acima dá as soluções da equação.



O próximo teorema será útil e é fácil de se demonstrar.

Teorema 12-4

Se $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ e $\Delta DEF \cong \Delta GHI$, então $\Delta ABC \sim \Delta GHI$



Isto resulta imediatamente das definições de congruência e semelhança.

Teorema 12-5. Teorema LAL sôbre Semelhança

É dada uma correspondência entre dois triângulos. Se dois pares de lados correspondentes são proporcionais e os ângulos que êles determinam, congruentes, então a correspondência é uma semelhança.

Re-enunciado. São dados ΔABC e ΔDEF e a correspondência

$$ABC \leftrightarrow DEF.$$

Se

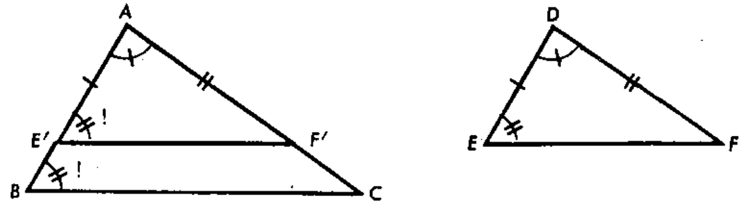
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

e

$$< A \cong < D,$$

então

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF.$$



Demonstração. (1) Sejam E' e F' pontos de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ tais que $AE' = DE$ e $AF' = DF$. Por LAL, temos

$$\Delta AE'F' \cong \Delta DEF.$$

Portanto

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}.$$

(2) Pelo Teorema 12-2 (recíproco do Teorema Fundamental sôbre Proporcionalidade) temos $\overleftrightarrow{E'F'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

(3) Portanto $\angle B \cong \angle AE'F'$. (Por quê?)

(4) Como $\angle A \cong \angle A$, segue-se pelo Corolário AA que

$$\Delta ABC \sim \Delta AE'F'$$

(5) Mas $\Delta AE'F' \cong \Delta DEF$. Portanto, pelo Teorema 12-4, temos

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF$$

como queríamos demonstrar.

Finalmente, temos uma espécie de recíproco do Teorema AAA sôbre Semelhança.

Teorema 12-6. O Teorema LLL sôbre Semelhança

É dada uma correspondência entre dois triângulos. Se os lados correspondentes são proporcionais, então a correspondência é uma semelhança.

Re-enunciado. São dados os ΔABC e ΔDEF e a correspondência

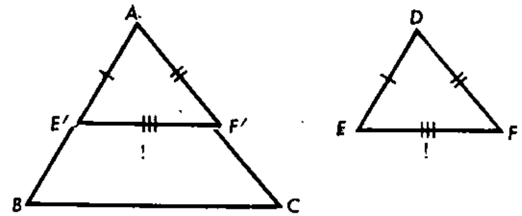
$$ABC \leftrightarrow DEF$$

Se

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF},$$

então

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF.$$

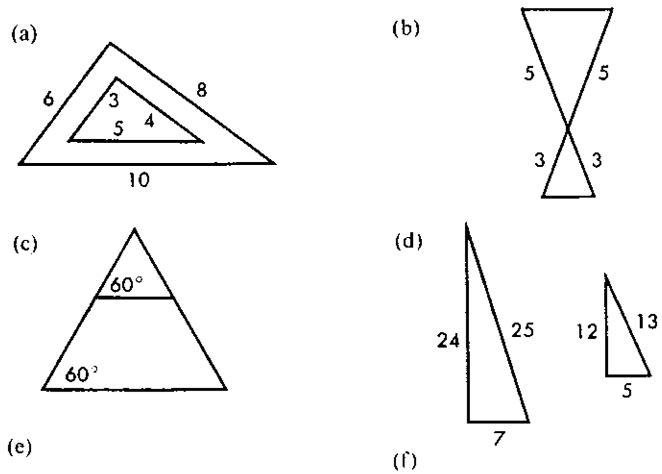


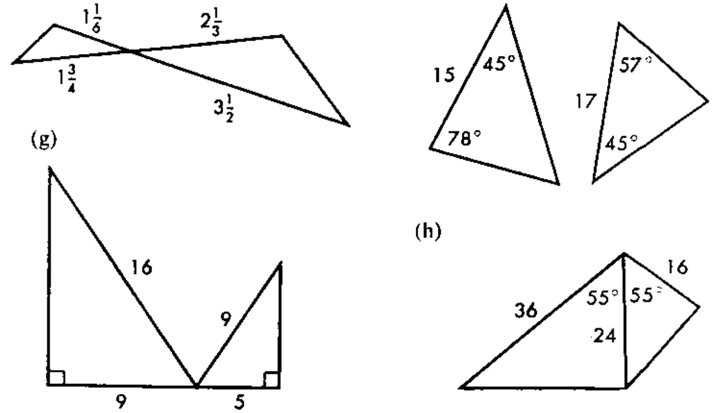
Demonstração. Como sempre nesse capítulo, sejam E' e F' pontos de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ tais que $AE' = DE$ e $AF' = DF$.

Afirmações	*Justificações*
1. $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$.	1. Dado.
2. $AE' = DE$; $AF' = DF$.	2. Dado.
3. $\dfrac{AB}{AE'} = \dfrac{AC}{AF'}$.	3. Substituição.
4. $\angle A \cong \angle A$.	4. Identidade.
5. $\Delta ABC \sim \Delta AE'F'$.	5. Teorema LAL sôbre Semelhança.
6. $\dfrac{E'F'}{BC} = \dfrac{AE'}{AB}$.	6. Definição de uma semelhança.
7. $E'F' = BC\dfrac{AE'}{AB} = BC\dfrac{DE}{AB}$.	7. Afirmações 2 e 6.
8. $EF = BC\dfrac{DE}{AB}$.	8. Afirmação 1.
9. $E'F' = EF$.	9. Afirmações 7 e 8.
10. $\Delta AE'F' \cong \Delta DEF$.	10. Afirmações 2, 9 e LLL.
11. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.	11. Afirmações 5 e 10 e Teorema 12-4.

Problemas 12-2

1. Para cada par de triângulos, indique se os triângulos são semelhantes e, em caso afirmativo, de acôrdo com que teorema ou definição.





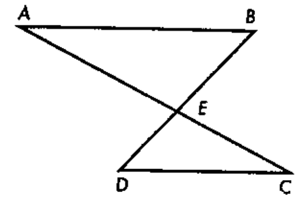
2. Quais dos seguintes teoremas sôbre semelhança não têm um teorema do mesmo tipo sôbre congruência: LAL, LLL, AAA, AA?

3. Demonstre o seguinte teorema:

   Duas medianas correspondentes quaisquer de dois triângulos semelhantes estão na mesma razão que os lados correspondentes.

4. Dada a figura com

$$\frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED},$$

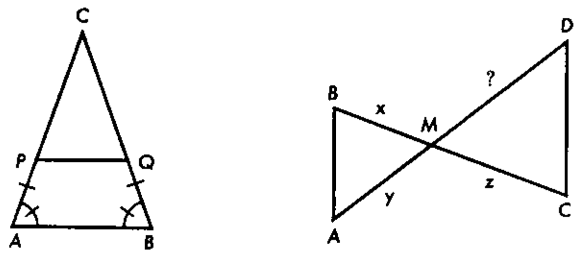


demonstre: (1) $\Delta AEB \sim \Delta CED$,
(2) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

5. Demonstre: Se em dois triângulos isósceles, os ângulos do vértice forem congruentes, os triângulos são semelhantes.

6. É possível dois triângulos serem semelhantes se
   (a) dois ângulos de um dêles medem 60 e 70, enquanto que dois ângulos do outro medem 50 e 80?
   (b) dois ângulos de um dêles medem 45 e 75, enquanto que dois ângulos do outro medem 45 e 60?
   (c) um dêles tem um ângulo de medida 40 e dois lados de comprimento 5, enquanto que o outro tem um ângulo de medida 70 e dois lados de medida 8 cada um?
   (d) um dêles tem lados de comprimento 5, 6 e 9, enquanto que o outro tem um perímetro de 8.420.000?

7. Dada a figura à esquerda, demonstre que $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$.

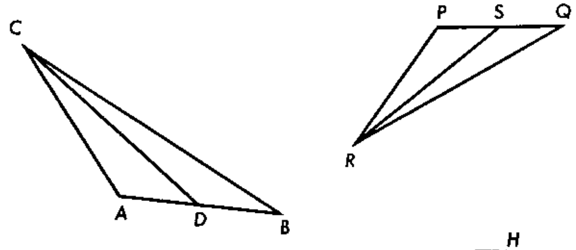


8. Na figura x, y e z são os comprimentos de $\overline{MB}$, $\overline{MA}$ e $\overline{MC}$.

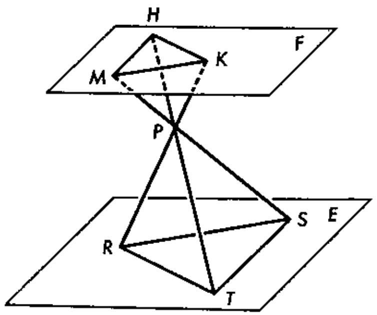
(a) Qual deve ser o comprimento de $\overline{MD}$ para que os triângulos sejam semelhantes?

(b) Se $z = 2x$, $m\angle D = 2m\angle A$ necessàriamente?

9. Na figura, $\Delta ADC \sim \Delta PSR$ e $\overline{CD}$ e $\overline{RS}$ são medianas. Demonstre que $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.



10. Três retas que se interceptam no ponto P interceptam os planos paralelos E e F em R e K, S e M e T e H, respectivamente. Se $KP = 4$, $MP = 6$, $HP = 7$, $RP = 10$, $SP = 15$ e $TP = 17{,}5$ demonstre que $\Delta HMK \sim \Delta TSR$.



11. Se a seguinte afirmação fôr verdadeira, demonstre-a, se fôr falsa, dê um contra-exemplo.

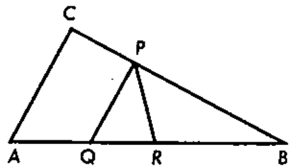
Dada uma correspondência entre dois triângulos, tal que os comprimentos de dois lados de um dos triângulos são proporcionais aos comprimentos dos lados correspondentes do outro triângulo e o ângulo oposto a um dos lados de um dos triângulos é congruente ao ângulo correspondente do outro triângulo, então os triângulos são semelhantes.

12. Na figura, $PQ = PR$ e $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$.
Quais dessas afirmações são verdadeiras?

(a) $\dfrac{BP}{BC} = \dfrac{PQ}{AC}$. (b) $\dfrac{BP}{BC} = \dfrac{PR}{AC}$.

(c) $\dfrac{BP}{BC} = \dfrac{PQ}{AC}$, $\angle PBQ \cong \angle CBA$, e $\Delta PBQ \sim \Delta CBA$.

(d) $\dfrac{BP}{BC} = \dfrac{PR}{AC}$, $\angle PBQ \cong \angle CBA$, e $\Delta PBR \sim \Delta CBA$.



Problema Magno

No ΔABC, D é o ponto médio de $\overline{AB}$ e E é um ponto de $\overline{AC}$ tal que $AE > EC$. $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ se interceptam em F. Demonstre que $FB \cdot CE = FC \cdot EA$. [*Sugestão:* Faça a reta por C, paralela a $\overline{AB}$, interceptar $\overline{EF}$ em P.]

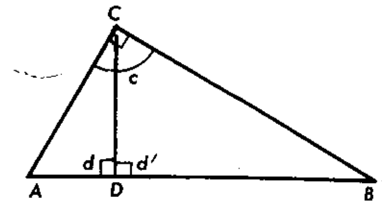
12-5. SEMELHANÇAS EM TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

Teorema 12-7

Em qualquer triângulo retângulo, a altura em relação à hipotenusa separa o triângulo em dois triângulos semelhantes entre si e semelhantes ao triângulo original.

Re-enunciado. Seja ΔABC um triângulo retângulo com ângulo reto em C e seja $\overline{CD}$ a altura em relação a $\overline{AB}$. Então

$$\Delta ACD \sim \Delta ABC \sim \Delta CBD.$$



(Observe que, nesse caso, o re-enunciado nos diz mais que o teorema, pois êle mostra quais correspondências são semelhanças. Observe também que é fácil descobrir (e lembrar) como são essas correspondências. Na correspondência entre ΔACD e ΔABC, devemos ter $A \leftrightarrow A$, porque $\angle A$ é comum aos dois triângulos. Também devemos ter $D \leftrightarrow C$, porque êsses são os dois vértices onde estão os ângulos retos. Finalmente, devemos ter $C \leftrightarrow B$ porque nessa altura dos acontecimentos não há outro ponto onde C possa ser levado. Isso nos dá $ACD \leftrightarrow ABC$. Anàlogamente, para a segunda correspondência, $ABC \leftrightarrow CBD$.)

Demonstração. Òbviamente $\angle d \cong \angle c$ porque ambos são ângulos retos; e $\angle A \cong \angle A$. Portanto, sob a correspondência $ACD \leftrightarrow ABC$, dois pares de ângulos correspondentes são congruentes. Pelo Corolário AA, temos $\Delta ACD \sim \Delta ABC$.

A demonstração da outra metade do teorema é exatamente a mesma: como $\angle d' \cong \angle c$ e $\angle B \cong \angle B$, o Corolário AA nos dá

$$\Delta ABC \sim \Delta CBD.$$

Teorema 12-8

É dado um triângulo retângulo e a altura em relação à hipotenusa.

(1) A altura é a média geométrica dos segmentos que ela determina sôbre a hipotenusa.

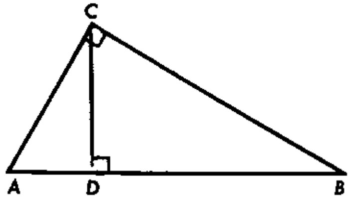
(2) Cada um dos catetos é a média geométrica da hipotenusa e do segmento da hipotenusa adjacente ao cateto.

Re-enunciado. Seja ΔABC um triângulo retângulo com ângulo reto em C e seja $\overline{CD}$ a altura em relação à hipotenusa $\overline{AB}$. Então

(1) $\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{CD}{BD}$.

(2a) $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AC}{AB}$.

(2b) $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{BC}{BA}$.



Demonstração. Pelo Teorema 12-7, temos as semelhanças.

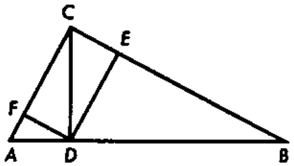
(1) $\Delta ACD \sim \Delta CBD$,
(2a) $\Delta ACD \sim \Delta ABC$,
(2b) $\Delta CBD \sim \Delta ABC$.

As equações dadas no re-enunciado descrevem proporções para pares de lados correspondentes.

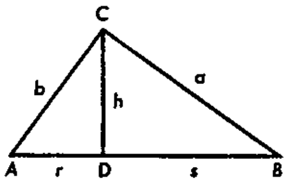
Problemas 12-5

[*Observação:* Expresse os números irracionais na forma simplificada de radical.]

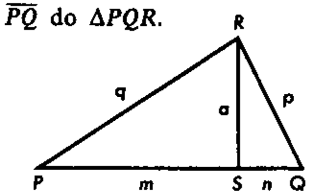
1. Na figura, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ e $\square CFDE$ é um retângulo. Escreva tôdas as semelhanças para os triângulos semelhantes ao ΔABC. Lembre-se que é preciso estabelecer as correspondências corretamente.



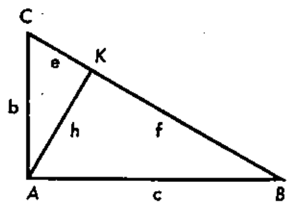
2. Na figura, $\overline{CD}$ é a altura em relação à hipotenusa do ΔABC.
   (a) Dados $r = 4$ e $s = 9$, determine h.
   (b) Dados $r = 7$ e $s = 28$, determine h.
   (c) Dados $r = 9$ e $s = 3$, determine a.
   (d) Dados $r = 7$, e $s = 21$, determine b.
   (e) Dados $r = \sqrt{3}$ e $s = \sqrt{12}$, determine h, a e b.



3. Na figura, $\overline{RS}$ é a altura em relação à hipotenusa $\overline{PQ}$ do ΔPQR.
   (a) Dados $m = 27$ e $n = 3$, determine a, p e q.
   (b) Dados $m = 24$ e $n = 6$, determine a, p e q.
   (c) Dados $m = \sqrt{18}$ e $n = \sqrt{8}$, determine a, p e q.
   (d) Dados $p = 15$ e $n = 9$, determine m e q.
   (e) Dados $a = 8$ e $m = 16$, determine n, p e q.

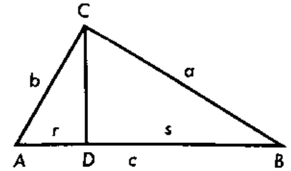


* 4. Na figura, $\overline{AK}$ é a altura em relação à hipotenusa do ΔABC.
   (a) Dados $e = 5$ e $h = 15$, determine f, b e c.
   (b) Dados $b = 4\sqrt{3}$ e $e = 4$, determine f, h e c.
   (c) Dados $c = 6\sqrt{2}$ e $e = 4$, determine f, b e h.
   (d) Dados $b = 3\sqrt{10}$ e $f = 13$, determine e, h e c.
   (e) Dados $b = f = 8$, determine e, h e c.



5. A altura em relação à hipotenusa, de um triângulo retângulo, separa a hipotenusa em dois segmentos cujos comprimentos são r e s. Demonstre que a área do triângulo é igual ao produto da média geométrica de r e s pela média aritmética de r e s.
6. Determine a área de um triângulo retângulo, dado que a altura em relação à hipotenusa separa esta em segmentos de comprimentos 9 e 16; de comprimentos 7 e 21.
7. *O Teorema de Pitágoras.* Na Seção 11-3 demonstramos o Teorema de Pitágoras, usando uma demonstração baseada em fórmulas para área. O Teorema 12-7 sugere uma outra demonstração para essa importante relação.

   Na figura, $\angle ACB$ é um ângulo reto e $\overline{CD}$ é a altura em relação à hipotenusa. Pelo Teorema 12-7 temos $a = \sqrt{cs}$ e $b = \sqrt{cr}$. Com êsse começo, demonstre que $a^2 + b^2 = c^2$.

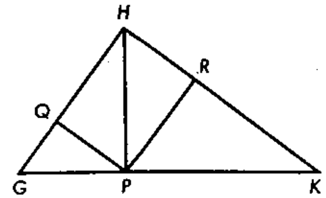


8. Dado ΔABC com $\overline{CD}$ como altura relativamente à hipotenusa $\overline{AB}$, demonstre que

   $AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$.

* 9. Dada a figura, na qual $\square PRHQ$ é um retângulo e $\overleftrightarrow{HP} \perp \overleftrightarrow{GK}$, demonstre que

   $$a\square PRHQ = \sqrt{GQ \cdot QH \cdot HR \cdot RK}$$



10. ΔABC é um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice C. A bissetriz do $\angle B$ intercepta $\overline{AC}$ em D e a bissetriz do ângulo externo em B intercepta $\overleftrightarrow{AC}$ em E. Se $BD = 15$ e $BE = 20$, quais são os comprimentos dos lados do ΔABC?

12-6. ÁREAS DE TRIÂNGULOS SEMELHANTES

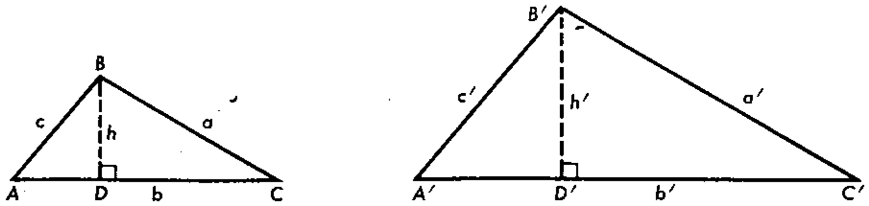
Dado um quadrado de lado a e um quadrado de lado $2a$, é fácil ver que a área do segundo quadrado é quatro vêzes a área do primeiro: $(2a)^2 = 4a^2$. (Isso também é fácil de se ver geomètricamente sem usar nenhuma fórmula). Em geral, se o segundo quadrado tem lado ka, a razão das áreas é k^2, porque

$$\frac{(ka)^2}{a^2} = \frac{k^2a^2}{a^2} = k^2.$$

Um resultado análogo é válido para triângulos semelhantes.

Teorema 12-9

Se dois triângulos são semelhantes, a razão de suas áreas é o quadrado da razão de dois lados correspondentes quaisquer.



Demonstração. É dado $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. Sejam suas áreas A_1 e A_2. Na notação usual, temos

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}.$$

Seja k o valor comum dessas três frações. Queremos mostrar que

$$\frac{A_2}{A_1} = k^2.$$

Sejam $\overline{BD}$ e $\overline{B'D'}$ as alturas a partir de B e B' nos dois triângulos; e sejam h e h' seus comprimentos. $\angle A \cong \angle A'$ porque $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. E $\angle ADB \cong \angle A'D'B'$ porque ambos são ângulos retos. Pelo Corolário AA, segue-se que

$$\Delta ABD \sim \Delta A'B'D'.$$

Portanto

$$\frac{b'}{b} = \frac{h'}{h} = k,$$

porque os lados correspondentes são proporcionais. Isso nos dá

$$b' = kb, \qquad h' = kh.$$

Mas

$$A_1 = \tfrac{1}{2}bh, \qquad A_2 = \tfrac{1}{2}b'h'.$$

Portanto

$$A_2 = \tfrac{1}{2}b'h' = \tfrac{1}{2}(kb)(kh) = \tfrac{1}{2}k^2bh,$$

e

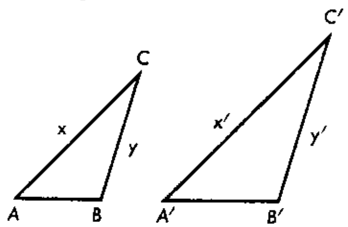
$$\frac{A_2}{A_1} = k^2,$$

como queríamos demonstrar.

Problemas 12-6

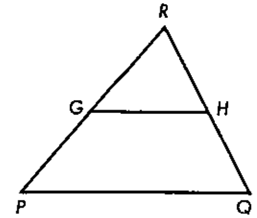
1. Qual é a razão das áreas de dois triângulos semelhantes cujos lados maiores medem respectivamente 3 cm e 4 cm?

2. Na figura, $\angle A \cong \angle A'$ e $\angle B \cong \angle B'$. Qual é a razão das áreas dos triângulos se $x = 5$ e $x' = 7$? se $y = 4$ e $y' = 3\sqrt{3}$? se $x = 6$, $y = 2\sqrt{5}$ e $y' = x$?



3. Um lado, de um de dois triângulos semelhantes, é cinco vêzes maior que o lado correspondente do outro. Se a área do triângulo menor é 6 cm^2, qual é a área do maior?

4. No ΔPQR, G é o ponto médio de $\overline{PR}$ e H é o ponto médio de $\overline{QR}$. Qual é a razão entre $a\Delta GHR$ e $a\Delta PQR$? $a\Delta GHR$ e $a\square PQHG$?



5. As áreas de dois triângulos semelhantes são 16 e 25. Qual é a razão entre um par de lados correspondentes?

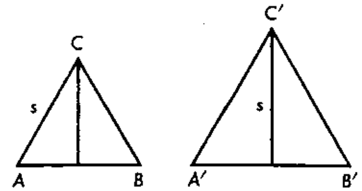
6. A área do maior de dois triângulos semelhantes é 9 vêzes a área do menor. Se um lado do triângulo menor tem 5 cm de comprimento, qual é o comprimento do lado correspondente do triângulo maior?

7. As áreas de dois triângulos semelhantes são 144 e 81. Se a base do triângulo maior é 30, qual é a base correspondente do triângulo menor?

8. No ΔABC, D é um ponto de $\overline{AC}$ tal que $AD = 2CD$. E está em $\overline{BC}$ e é tal que $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$. Compare as áreas dos ΔCDE e ΔABC. Se $a\square ABED = 40$, determine $a\Delta ABC$.

9. ΔABC e $\Delta A'B'C'$ são triângulos equiláteros. Uma altura do $\Delta A'B'C'$ tem o mesmo comprimento que um lado do ΔABC. Demonstre que

$$a\Delta A'B'C' = \tfrac{4}{3}a\Delta ABC.$$



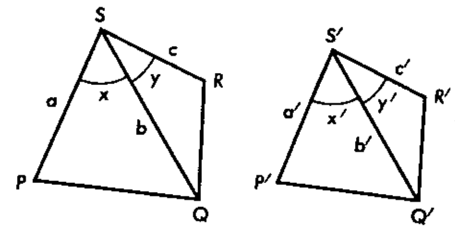
10. Qual deve ser o comprimento do lado de um triângulo equilátero para que sua área seja duas vêzes a área de um triângulo equilátero de lado 10?

11. São dados os quadriláteros segundo a figura.

$\angle x \cong \angle x'$, $\angle y \cong \angle y'$ e

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k.$$

Demonstre: $\dfrac{a\square P'Q'R'S'}{a\square PQRS} = k^2.$

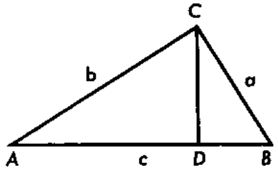


* 12. Dois pedaços de arame de mesmo comprimento são dobrados em forma de um quadrado e outro em forma de um triângulo equilátero. Qual é a razão das áreas das regiões limitadas por êsses arames?

* 13. No ΔABC, $\overline{CD}$ é a altura relativamente à base $\overline{AB}$. Deseja-se determinar uma reta L, paralela a $\overline{AB}$, que separe um triângulo semelhante ao ΔABC e de área igual à metade da área do ΔABC. Se L interceptar $\overline{CD}$ em um ponto M e se $CD = 1$, qual o comprimento de $\overline{CM}$?

+ **14.** *O Teorema de Pitágoras.* O Teorema 12-9 dá um outro modo de demonstrar o teorema de Pitágoras. Você deve dar as razões para as afirmações da demonstração.

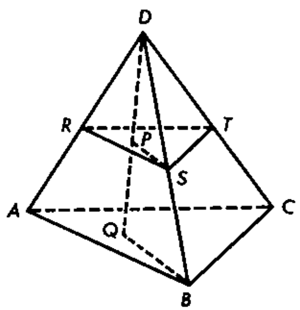
Na figura, $\angle ACB$ é um ângulo reto e $\overline{CD}$ é a altura em relação à hipotenusa.



1. $a\Delta ABC = a\Delta ACD + a\Delta CBD.$
2. $1 = \dfrac{a\Delta ACD}{a\Delta ABC} + \dfrac{a\Delta CBD}{a\Delta ABC}.$
3. $\Delta ACD \sim \Delta ABC \sim \Delta CBD.$
4. $1 = \left(\dfrac{AC}{AB}\right)^2 + \left(\dfrac{BC}{AB}\right)^2.$
5. $AB^2 = AC^2 + BC^2$ ou $c^2 = b^2 + a^2.$

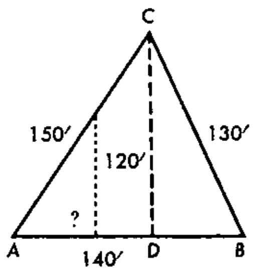
* **15.** É dado o tetraedro $ABCD$ tendo como base o ΔABC. Um plano paralelo à base intercepta as faces do tetraedro no ΔRST. $\overline{DQ}$ é a perpendicular de D ao plano do ΔABC e $\overline{DQ}$ intercepta o plano paralelo em P.

Demonstre: $\dfrac{a\Delta RST}{a\Delta ABC} = \left(\dfrac{DP}{DQ}\right)^2.$



Problema Magno

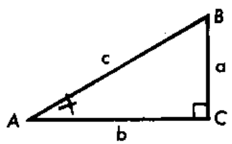
Um terreno triangular tem lados de comprimentos 130 m, 140 m e 150 m, como está indicado na figura. O comprimento da perpendicular de um canto, ao lado de 140 m, é 120 m. Deve-se fazer uma cêrca perpendicularmente ao lado de 140 m, de modo que o terreno fique dividido em duas partes de mesma área. A que distância de A, ao longo de $\overline{AB}$ deve ser traçada essa perpendicular?



12-7. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

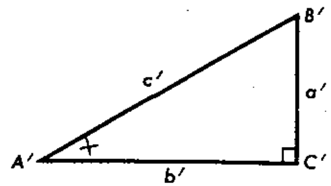
Considere dois triângulos retângulos com um par de ângulos agudos congruentes. Pelo Corolário AA, sabemos que $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. Portanto

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$



Dessas equações é fácil ver que

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \quad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}, \quad \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}.$$



Portanto as razões a/c, b/c e a/b não dependem do *tamanho* do triângulo; uma vez conhecida a $m\angle A$, essas razões estão determinadas. Elas são chamadas *razões trigonométricas.* (A palavra *trigonometria* vem do grego. *Trigon* é triângulo e trigonometria é medida de trigons).

A razão a/c é chamada o *seno* do $\angle A$ e escrevemos

$$\text{sen } \angle A = \frac{a}{c}.$$

Se $m\angle A = r$, podemos escrever

$$\text{sen } r^\circ = \frac{a}{c}.$$

Isso faz sentido porque a/c fica determinado se conhecermos $\angle A$ ou r.

Ànalogamente, b/c é chamado o *cosseno* do $\angle A$ e escrevemos

$$\cos \angle A = \frac{b}{c} \quad \text{ou} \quad \cos r^\circ = \frac{b}{c}.$$

A razão a/b é chamada a *tangente* do $\angle A$ e escrevemos

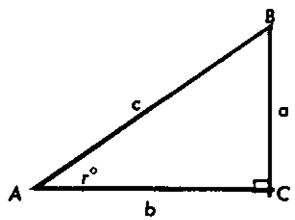
$$\text{tg } \angle A = \frac{a}{b} \quad \text{ou} \quad \text{tg } r^\circ = \frac{a}{b}.$$

Resumindo:

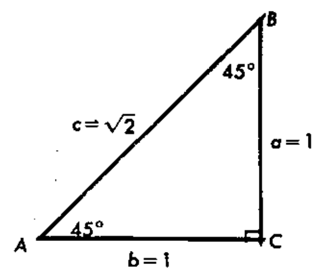
$$\text{sen } \angle A = \text{sen } r^\circ = \frac{a}{c},$$

$$\cos \angle A = \cos r^\circ = \frac{b}{c},$$

$$\text{tg } \angle A = \text{tg } r^\circ = \frac{a}{b}.$$



Para alguns ângulos e alguns números r, as razões trigonométricas são fáceis de serem calculadas. Tome, por exemplo, o caso $r = 45$. Como as razões não dependem do tamanho do triângulo, podemos usar *qualquer* triângulo retângulo ΔABC com um ângulo de 45° em A. O triângulo é então isósceles com $a = b$. Tomamos $a = b = 1$. Pelo Teorema de Pitágoras, $c = \sqrt{2}$, como se vê na figura.



Temos agora

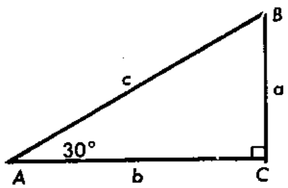
$$\text{sen } \angle A = \text{sen } 45^\circ = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos \angle A = \cos 45^\circ = \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{tg } \angle A = \text{tg } 45^\circ = \frac{a}{b} = \frac{1}{1} = 1.$$

(*Pergunta:* Se tivéssemos feito $a = b = 3$, as razões trigonométricas teriam mudado? Por que sim ou por que não?)

O caso $r = 30$ é quase que igualmente fácil.

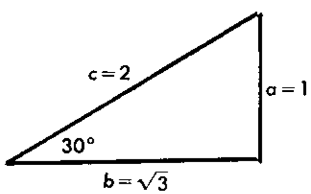


Sabemos pelo Teorema 9-27 que $a = \frac{c}{2}\cdot$ Como não importa o tamanho do lado do triângulo, podemos escolher o tamanho que quisermos. Assim, por exemplo, podemos tomar $c = 2$, $a = 1$, como visto na figura. O Teorema de Pitágoras nos dá $b^2 = c^2 - a^2 = 4 - 1 = 3$. Podemos agora calcular os valôres:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{a}{c} = \frac{1}{2},$$

$$\cos 30^\circ = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

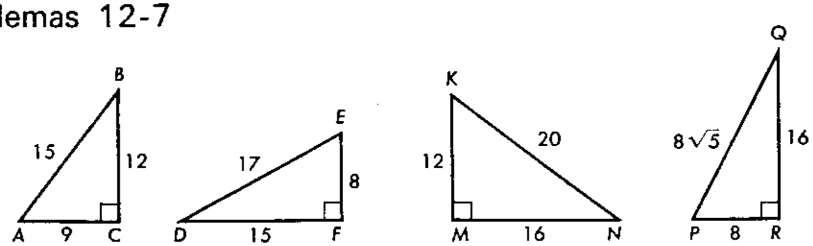
$$\text{tg } 30^\circ = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



Cuidado: Observe que usamos o sinal de grau nas expressões sen $r°$, cos $r°$, tg $r°$. O motivo é que mais tarde você usará uma outra unidade para medida de ângulos, chamada *radiano*. Para saber qual o seno de um número você precisará saber que unidade está sendo usada.

Problemas 12-7

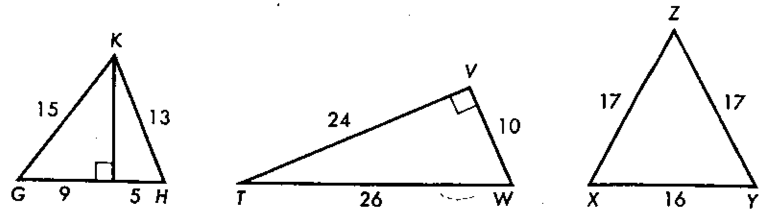
1.



Dados êsses triângulos retângulos, com os comprimentos dos lados indicados, determine as seguintes razões trigonométricas

(a) sen $\angle A$ (b) cos $\angle A$ (c) tg $\angle A$ (d) sen $\angle D$
(e) sen $\angle N$ (f) cos $\angle D$ (g) tg $\angle N$ (h) tg $\angle P$
(i) cos $\angle P$ (j) cos $\angle N$ (k) tg $\angle D$ (l) sen $\angle E$

2.

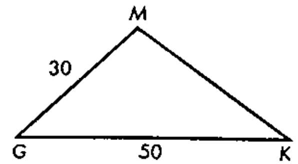


Dados os triângulos, da forma indicada, determine as seguintes razões trigonométricas.

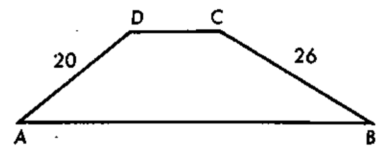
(a) cos $\angle G$ (b) sen $\angle H$ (c) tg $\angle T$ (d) sen $\angle W$
(e) cos $\angle T$ (f) tg $\angle G$ (g) sen $\angle X$ (h) cos $\angle Y$

3. No triângulo retângulo ΔABC, a hipotenusa $\overline{AB}$ tem comprimento igual a 25 cm.
   (a) Se sen $\angle A = \frac{4}{5}$ qual o comprimento de $\overline{BC}$?
   (b) Se cos $\angle A = 0{,}60$ o que é tg $\angle A$ em notação decimal?
   (c) Se tg $\angle A = 3\frac{3}{7}$ quais são os comprimentos de $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$?

4. No ΔGKM, $GM = 30$, $GK = 50$ e cos $\angle G = 0{,}80$. Calcule a altura em relação a $\overline{GK}$ e a área do ΔGKM.

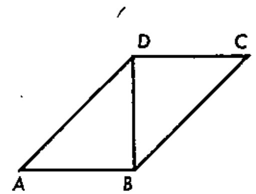


5. No trapézio $\square ABCD$, $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$, $AD = 20$ e $BC = 26$. Se sen $\angle A = 0{,}5$, qual é a altura do trapézio e qual o valor de sen $\angle B$?



6. Determine sen 60°, cos 60° e tg 60°.
7. Mostre que sen 30° = cos 60°.
8. Que relação existe entre tg 60° e tg 30°?
9. No ΔPQR, se $\angle P = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ e cos $\angle Q = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Determine $m\angle R$.
10. No ΔABC, tg $\angle A = \sqrt{3}$ e tg $\angle C = \sqrt{3}/3$. Determine $m\angle B$.
11. No ΔGHK, tg $\angle H = 2$ cos $\angle G = 1$. Determine $m\angle K$.

12. No paralelogramo $\square ABCD$, a diagonal $\overline{BD}$ é perpendicular a $\overline{AB}$. Se $AB = 5$ e tg $\angle A = 1$, qual o valor de $a\square ABCD$?



13. Demonstre o seguinte teorema.

    O seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno do seu complemento.

14. Demonstre o seguinte teorema.

    O produto da tangente de um ângulo agudo pela tangente do seu complemento é 1.

+ 15. Mostre que tg $\angle A = \dfrac{\text{sen } A}{\cos A}$ para todo ângulo agudo $\angle A$.

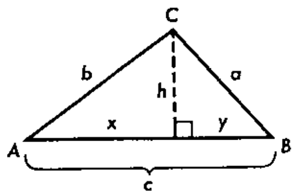
+ 16. Mostre que $(\text{sen } \angle A)^2 + (\cos \angle A)^2 = 1$, para todo ângulo agudo $\angle A$.

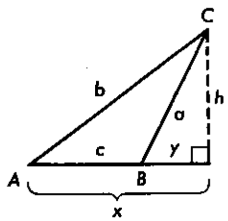
+ 17. Mostre que a área de um triângulo equilátero de lado 1 é dada por (sen 60°) (cos 60°).

Problema Magno

Demonstre o seguinte teorema.

Dado o ΔABC com $\angle A$ agudo, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A$.





12-8. TRIGONOMETRIA NUMÉRICA. O USO DE TABELAS

Na seção anterior, calculamos o seno, cosseno e tangente de 30°, 45° e 60° que foram expressos em têrmos de $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$. As aproximações decimais, corretas até a terceira casa são:

$$\sqrt{2} = 1{,}414, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707,$$

$$\sqrt{3} = 1{,}732, \qquad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}577.$$

Portanto temos

$$\text{sen } 30° = \tfrac{1}{2} = 0{,}500,$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1{,}732}{2} = 0{,}866,$$

$$\text{tg } 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}577.$$

Anàlogamente podemos calcular as razões trigonométricas para 45° e 60° Obtemos assim a seguinte tabela:

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
30°	0,500	0,866	0,577
45°	0,707	0,707	1,000
60°	0,866	0,500	1,732

Essas são as razões trigonométricas que aprendemos calcular. Por métodos avançados é possível calcular o seno, cosseno e tangente de *qualquer* ângulo com a precisão que fôr desejada. (Os antigos gregos já calculavam essas tabelas pois delas precisavam para seu estudo de astronomia). Na pág. 337 você encontrará uma tabela dos valôres das razões trigonométricas para ângulos cujas medidas em graus são números inteiros. A tabela é correta até três casas depois da vírgula, o que é suficientemente bom para nossos propósitos do momento.

Essas tabelas têm muitas aplicações importantes. Suponha, por exemplo, que um agrimensor quer determinar a distância entre dois pontos, em lados opostos de um lago. Êle não pode medir BC diretamente. Mas êle pode medir AB e r. Suponha que êle encontre $AB = 305$ m e $r = 32$. Sendo

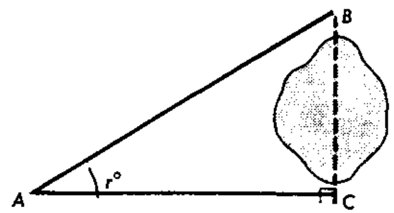
$$\text{sen } r° = \frac{BC}{AB},$$

Portanto

$$BC = AB \text{ sen } r°$$

O agrimensor consulta suas tabelas e vê que sen 32° = 0,530. Portanto

$$BC = 305 \times 0{,}530 = 151{,}65 \text{ m}$$



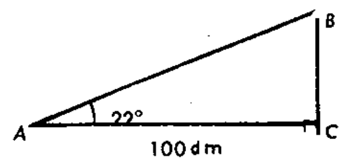
Os agrimensores, cujo trabalho é resolver problemas dêsse tipo, resolvem-nos pelo método descrito.

As tabelas também podem ser usadas para outros tipos de medidas indiretas. Uma maneira de medir a altura de um mastro de bandeira, sem nêle subir, é medir uma certa distância, digamos 100 dm da base do mastro, e em seguida medir o ângulo, $\angle A$ indicado na figura. Na figura, $\overline{BC}$ representa o mastro da bandeira e $m\angle A = 22$. Como

$$\text{tg } 22° = \frac{BC}{AC}.$$

temos

$$BC = AC \text{ tg } 22°$$
$$= 100 \times 0{,}404$$
$$= 40{,}4 \text{ dm}$$



Observe que, em problemas dêsse tipo, sempre podemos nos assegurar de que a aritmética envolvida vai ser fácil. Podemos medir a distância que quisermos, a partir da base do mastro, e por isso escolhemos um ponto A para o qual AC dê um número inteiro de decímetros.

Problemas 12-8

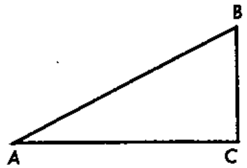
1. Usando a tabela das razões trigonométricas, dê a forma decimal de:

(a) sen 12°. (b) cos 35°. (c) tg 20°. (d) cos 66°.
(e) sen 50°. (f) cos 40°. (g) tg 82°. (h) sen 3°.
(i) tg 3°. (j) cos 60°.

2. Determine $m\angle A$, dado que:

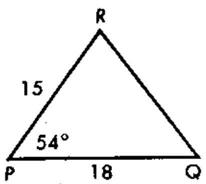
(a) sen $\angle A = 0{,}309$. (b) cos $\angle A = 0{,}208$.
(c) tg $\angle A = 0{,}306$. (d) cos $\angle A = 0{,}961$.
(e) tg $\angle A = 2{,}904$. (f) sen $\angle A = 0{,}961$.
(g) sen $\angle A = 0{,}454$. (h) cos $\angle A = 0{,}731$.
(i) tg $\angle A = 8{,}144$. (j) tg $\angle A = 0{,}554$.

3. Dado que a hipotenusa $\overline{AB}$ do ΔABC é 20 dm e $m\angle A = 38$, determine BC e AC.



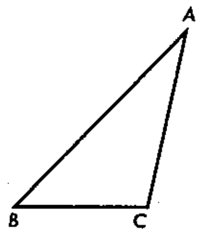
4. No ΔABC, $\angle C$ é um ângulo reto, $m\angle A = 42$ e $AC = 7$. Qual o comprimento de $\overline{BC}$?

5. No ΔPQR, $m\angle P = 54$, $PR = 15$ e $PQ = 18$. Calcule o comprimento da altura relativamente a $\overline{PQ}$; a $\overline{PR}$.



6. No ΔGHK, $m\angle G = 70$, $GK = 12$ e $GH = 20$. Determine a altura relativamente a $\overline{GH}$ e a área do ΔGHK.

7. Calcule a área do ΔABC, dado que $AB = 30$, $BC = 16$ e $m\angle B = 47$.

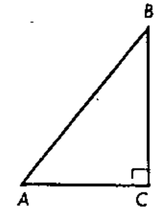


8. Determine as medidas, com aproximação de um grau, dos ângulos agudos de um triângulo 3-4-5.

9. Determine as medidas, com aproximação de um grau, dos ângulos agudos de um triângulo 8-15-17.

10. A base de um triângulo isósceles mede 8 cm e o ângulo oposto à base mede 30. Calcule os comprimentos das três alturas do triângulo.

11. No ΔABC, $\angle C$ é um ângulo reto e $AB = 9$. Dado também que tg $\angle A = 1{,}111$, determine BC e AC.



\+ 12. Examine a tabela das razões trigonométricas para sen 53°, sen 54°, sen 55°, sen 56°. Explique por que uma boa estimativa de sen 54° 30′ é 0,814. Qual seria uma boa estimativa de sen 55° 30′? Uma boa estimativa de sen 54° 12′ é 0,811. Por quê? Faça uma estimativa de sen 54° 6′. Explique por que as estimativas abaixo são boas

sen 30° 30′ = 0,508, sen 76°30′ = 0,972,
sen 30° 20′ = 0,505, sen 76° 45′ = 0,973.

Êsse método de estimar valôres que não aparecem explìcitamente numa tabela é chamado *interpolação*.

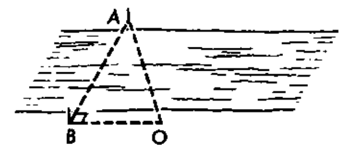
\+ 13. Por meio de interpolação, obtenha valôres aproximados para as seguintes razões trigonométricas (veja Problema 12).

(a) sen 37° 30′ (b) sen 65° 30′ (c) sen 63.5° (d) sen 56.3°
(e) sen 47° 20′ (f) sen 45° 40′ (g) sen 73.4° (h) sen 20.5°
(i) sen 17° 30′ (j) sen 41°15′

\+ 14. Por meio de interpolação, obtenha valôres aproximados para as seguintes razões trigonométricas (veja Problema 12).

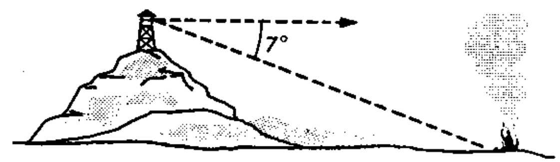
(a) cos 33° 30′ (b) cos 36.6° (c) cos 18° 24′ (d) tg 31° 30′
(e) tg 42° 20′ (f) cos 61° 40′ (g) tg 58.5° (h) cos 67° 15′
(i) tg 66° 30′ (j) tg 63° 45′

15. Ao fazer o levantamento para uma nova estrada, um engenheiro fincou duas grandes estacas A e B em margens opostas de um rio para marcar o lugar para os alicerces de uma ponte. Em seguida, de um ponto O a 100 m de B e tal que $\overleftrightarrow{OB} \perp \overleftrightarrow{AB}$, êle mediu o ângulo $\angle AOB$. Se $m\angle AOB = 73$, qual é a distância através do rio de A para B?



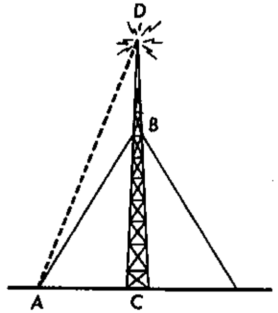
16. Uma escada de bombeiro pode ser estendida até um comprimento máximo de 20 m quando elevada até seu ângulo máximo de 70°. A base da escada está em cima de um caminhão, a 2 m do chão. Que altura acima do chão a escada pode atingir?

17. Um guarda florestal previne incêndios de uma tôrre construída numa colina. O local da tôrre está 726 m acima das terras em volta e a tôrre em si tem 24 m de altura. Se o guarda vê um incêndio, sob um ângulo de 7° em relação à horizontal, a que distância, com aproximação de meio quilômetro, está o incêndio da tôrre?



18. Um avião se aproxima de um aeroporto a uma altura de 7.000 m. (Suponha que o aeroporto está perto do nível do mar). O pilôto tem ordens de descer sob um ângulo constante de 6° durante a aterrisagem. A que distância, da pista, com aproximação de meio quilômetro, deve o pilôto começar a descida?

* 19. Uma tôrre de rádio, bem alta, é prêsa por longos cabos, como $\overline{AB}$ na figura. Se A está a 75 m da base da tôrre e se $m\angle BAC = 59$, qual é o comprimento do cabo? A que distância do solo está êle prêso à tôrre? Qual a altura da tôrre, $\overline{DC}$, se $m\angle DAC = 71$?



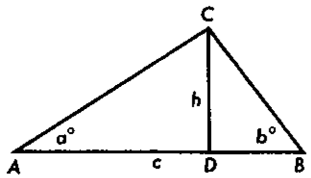
Problema Magno

No ΔABC, $\overline{CD}$ é a altura em relação a $\overline{AB}$ e $AB = c$.

(a) Mostre que a altura h é dada pela fórmula

$$h = c\frac{\operatorname{tg} a^\circ \ \operatorname{tg} b^\circ}{\operatorname{tg} a^\circ + \operatorname{tg} b^\circ}.$$

(b) Calcule h dado que $c = 68$, $a = 35$ e $b = 45$.



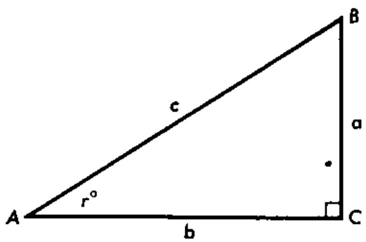
12-9. RELAÇÕES ENTRE AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Num triângulo retângulo, como na figura, temos

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Dividindo por c^2, obtemos

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$



Como

$$\operatorname{sen} \angle A = \frac{a}{c} \qquad \text{e} \qquad \cos \angle A = \frac{b}{c},$$

temos o seguinte teorema.

Teorema 12-10

Para todo $\angle A$, $(\operatorname{sen} \angle A)^2 + (\cos \angle A)^2 = 1$.

Tabela para Razões Trigonométricas

r	sen r	cos r	tg r	r	sen r	cos r	tg r
1°	.017	1.000	.017	46°	.719	.695	1.035
2°	.035	.999	.035	47°	.731	.682	1.072
3°	.052	.999	.052	48°	.743	.669	1.111
4°	.070	.998	.070	49°	.755	.656	1.150
5°	.087	.996	.087	50°	.766	.643	1.192
6°	.105	.995	.105	51°	.777	.629	1.235
7°	.122	.993	.123	52°	.788	.616	1.280
8°	.139	.990	.141	53°	.799	.602	1.327
9°	.156	.988	.158	54°	.809	.588	1.376
10°	.174	.985	.176	55°	.819	.574	1.428
11°	.191	.982	.194	56°	.829	.559	1.483
12°	.208	.978	.213	57°	.839	.545	1.540
13°	.225	.974	.231	58°	.848	.530	1.600
14°	.242	.970	.249	59°	.857	.515	1.664
15°	.259	.966	.268	60°	.866	.5	1.732
16°	.276	.961	.287	61°	.875	.485	1.804
17°	.292	.956	.306	62°	.883	.469	1.881
18°	.309	.951	.325	63°	.891	.454	1.963
19°	.326	.946	.344	64°	.899	.438	2.050
20°	.342	.940	.364	65°	.906	.423	2.145
21°	.358	.934	.384	66°	.914	.407	2.246
22°	.375	.927	.404	67°	.921	.391	2.356
23°	.391	.921	.424	68°	.927	.375	2.475
24°	.407	.914	.445	69°	.934	.358	2.605
25°	.423	.906	.466	70°	.940	.342	2.747
26°	.438	.899	.488	71°	.946	.326	2.904
27°	.454	.891	.510	72°	.951	.309	3.078
28°	.469	.883	.532	73°	.956	.292	3.271
29°	.485	.875	.554	74°	.961	.276	3.487
30°	.5	.866	.577	75°	.966	.259	3.732
31°	.515	.857	.601	76°	.970	.242	4.011
32°	.530	.848	.625	77°	.974	.225	4.331
33°	.545	.839	.649	78°	.978	.208	4.705
34°	.559	.829	.675	79°	.982	.191	5.145
35°	.574	.819	.700	80°	.985	.174	5.671
36°	.588	.809	.727	81°	.988	.156	6.314
37°	.602	.799	.754	82°	.990	.139	7.115
38°	.616	.788	.781	83°	.993	.122	8.144
39°	.629	.777	.810	84°	.995	.105	9.514
40°	.643	.766	.839	85°	.996	.087	11.430
41°	.656	.755	.869	86°	.998	.070	14.301
42°	.669	.743	.900	87°	.999	.052	19.081
43°	.682	.731	.933	88°	.999	.035	28.636
44°	.695	.719	.966	89°	1.000	.017	57.290
45°	.707	.707	1				

Em geral, representamos o quadrado do seno por $\text{sen}^2 \angle A$, que é mais fácil de escrever que $(\text{sen } A)^2$ e procedemos de modo análogo para o cosseno. Nessa notação, a equação acima toma a forma

$$\text{sen}^2 \angle A + \cos^2 \angle A = 1, \quad \text{ou} \quad \text{sen}^2 r^\circ + \cos^2 r^\circ = 1,$$

se $m\angle A = r$. Essas três equações dizem a mesma coisa.

Do triângulo acima, tiramos

$$\text{tg } \angle A = \frac{a}{b}.$$

Como

$$\frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c},$$

chegamos ao seguinte teorema.

Teorema 12-11

Para todo $\angle A$,

$$\text{tg } \angle A = \frac{\text{sen } \angle A}{\cos \angle A}.$$

Na notação em graus, a sentença acima diz que para cada r,

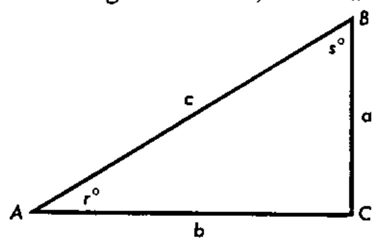
$$\text{tg } r^\circ = \frac{\text{sen } r^\circ}{\cos r^\circ}.$$

Finalmente, olhando para nosso triângulo retângulo de lado, observamos que

$$\text{sen } \angle B = \frac{b}{c} = \cos \angle A$$

e

$$\cos \angle B = \frac{a}{c} = \text{sen } \angle A.$$



Como ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares, temos

$$s = m\angle B = 90 - r.$$

Teorema 12-12

Se $\angle A$ e $\angle B$ são complementares, então

$$\text{sen } \angle B = \cos \angle A$$

e

$$\cos \angle B = \text{sen } \angle A$$

Para medidas em graus essas equações tomam a forma

$$\text{sen } (90-r)^\circ = \cos r^\circ,$$
$$\cos (90-r)^\circ = \text{sen } r^\circ.$$

A palavra *cosseno* se refere a estas equações; ela é uma abreviação do Latim *complementi sinus* que significa *seno do complemento*. De fato, o cosseno de um ângulo é o seno do seu complemento.

Problemas 12-9

Use as relações básicas dadas nos Teoremas 12-10, 12-11 e 12-12 para demonstrar as seguintes identidades.

1. $\dfrac{\text{tg } r^\circ}{\text{tg } s^\circ} = \dfrac{\text{sen } r^\circ \cos s^\circ}{\text{sen } s^\circ \cos r^\circ}.$

2. $\text{tg } r^\circ + \text{tg } s^\circ = \dfrac{\text{sen } r^\circ \cos s^\circ + \cos r^\circ \text{ sen } s^\circ}{\cos r^\circ \cos s^\circ}.$

3. $\text{tg } r^\circ = \dfrac{\text{sen } r^\circ}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 r^\circ}}.$

4. $1 - (\cos r^\circ - \text{sen } r^\circ)^2 = 2 \text{ sen } r^\circ \cos r^\circ.$

5. A cotangente de um ângulo é o inverso multiplicativo da tangente do ângulo; isto é,

$$\text{cotg } \angle A = \frac{1}{\text{tg } \angle A}.$$

(a) Demonstre que $\text{tg}(90-r)^\circ = \text{cotg } r^\circ$.

(b) Demonstre que $\text{cotg}(90-r)^\circ = \text{tg } r^\circ$.

6. $\dfrac{1 - \text{sen } r^\circ}{\cos r^\circ} = \dfrac{\cos r^\circ}{1 + \text{sen } r^\circ}.$

7. $\dfrac{2 \text{ sen } r^\circ \cos r^\circ}{\cos^2 r^\circ - \text{sen}^2 r^\circ} = \dfrac{2 \text{ tg } r^\circ}{1 - \text{tg}^2 r^\circ}.$

8. $\dfrac{\text{sen } r^\circ}{1 - \cos r^\circ} = \dfrac{1 + \cos r^\circ}{\text{sen } r^\circ}.$

9. A *secante* de um ângulo é o inverso multiplicativo do cosseno do ângulo; isto é

$$\sec \angle A = \frac{1}{\cos \angle A}.$$

Demonstre que $\text{tg } r^\circ = \text{sen } r^\circ \sec r^\circ$.

10. $1 + \text{tg}^2 r^\circ = \sec^2 r^\circ$. (Veja Problema 9.)

11. $\sec r^\circ - \cos r^\circ = \text{tg } r^\circ \text{ sen } r^\circ$. (Veja Problema 9.)

* 12. $\dfrac{1 - \text{tg}^2 r^\circ}{1 + \text{tg}^2 r^\circ} = 1 - 2 \text{ sen}^2 r^\circ.$

* 13. $\dfrac{1-\operatorname{tg} r^\circ \operatorname{tg} s^\circ}{\operatorname{tg} r^\circ + \operatorname{tg} s^\circ} = \dfrac{\cos r^\circ \cos s^\circ - \operatorname{sen} r^\circ \operatorname{sen} s^\circ}{\operatorname{sen} r^\circ \cos s^\circ + \cos r^\circ \operatorname{sen} s^\circ}$.

* 14. $\dfrac{\sec r^\circ}{\operatorname{sen} r^\circ} - \dfrac{2\cos r^\circ}{\operatorname{sen} r^\circ} = \operatorname{tg} r^\circ - \operatorname{cotg} r^\circ$.

Problema Magno

(a) Mostre que

$$\frac{(\cos^2 r^\circ - \operatorname{sen}^2 r^\circ)^2}{\cos^4 r^\circ - \operatorname{sen}^4 r^\circ} = \frac{1-\operatorname{tg}^2 r^\circ}{1+\operatorname{tg}^2 r^\circ}.$$

(b) Mostre que

$$\frac{\operatorname{tg} r^\circ}{1-\operatorname{cotg} r^\circ} + \frac{\operatorname{cotg} r^\circ}{1-\operatorname{tg} r^\circ} = 1 + \operatorname{tg} r^\circ + \operatorname{cotg} r^\circ.$$

Revisão do Capítulo

1. Copie e complete cada afirmação.

(a) Se $5x = 8y$, então $\dfrac{y}{x} = \ldots\ldots$ (b) Se $\dfrac{3}{4} = \dfrac{21}{28}$, então $\dfrac{7}{4} = \dfrac{?}{28}$.

(c) Se $\dfrac{a+b}{a} = \dfrac{15}{12}$, então $\dfrac{b}{a} = \ldots\ldots$ (d) Se $48 = 16k$, então $\dfrac{k}{3} = \ldots\ldots$

2. As seqüências 2, a, 6, 5, b e 5, 10, c, d, 9 são proporcionais. Determine a, b, c e d.
3. Dê a média geométrica e a média aritmética dos pares de números dados abaixo:

(a) 6 e 24 (b) 12 e 20

(c) $7\sqrt{3}$ e $21\sqrt{3}$ (d) $4\frac{1}{4}$ e $6\frac{3}{8}$

4. Desenhe duas figuras não semelhantes cujos lados correspondentes sejam proporcionais.
5. Desenhe duas figuras, não semelhantes, cujos ângulos correspondentes sejam congruentes.

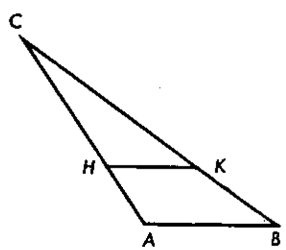
6. No ΔABC, $\overline{HK} \parallel \overline{AB}$.

(a) Se $AH = 3$, $BK = 5$, $CK = 12$, então $CH = ?$

(b) Se $AC = 14$, $AH = 6$, $CK = 12$, então $BC = ?$

(c) Se $CH = 9$, $AH = 4$, $HK = 3$, então $AB = ?$

(d) Se $AH = 4$, $CH = BK$, $BC = 48$, então $CH = ?$



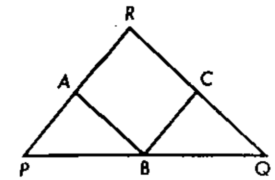
7. Os lados de um triângulo têm comprimentos 5, 8 e 11. Um triângulo semelhante tem perímetro 60. Quais são os comprimentos de seus lados?
8. AC e BD se interceptam em E e são tais que $AB \parallel CD$ e $AB = 3CD$. Se $AC = 21$, determine AE e EC.
9. Os lados de um triângulo têm comprimentos 7, 9 e 14. Qual é o perímetro de um triângulo semelhante cujo lado maior é 21?
10. No ΔPQR, $\overline{AB} \parallel \overline{QR}$ e $\overline{BC} \parallel \overline{PR}$.

(a) Se $PA = 4$, $AR = 6$, e $PQ = 25$, então $BQ = ?$

(b) Se $RC = 3$, $CQ = 5$, e $PQ = 24$, então $PB = ?$

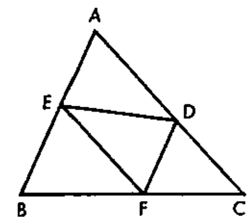
(c) Se $PA = 2$, $AR = 8$, e $RC = 3$, então $CQ = ?$

(d) Se $PB = 4$, $BQ = 5$, $PR = 15$, e $RQ = 18$, então $PA = ?$ e $CQ = ?$

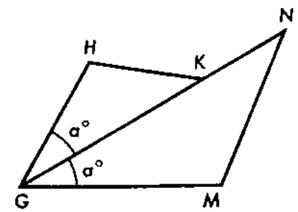


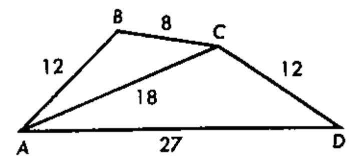
11. Na figura, $\square AEFD$ é um paralelogramo. Dê tôdas as semelhanças entre triângulos e mostre que

$$\frac{AE \cdot AD}{BE \cdot CD} = 1.$$



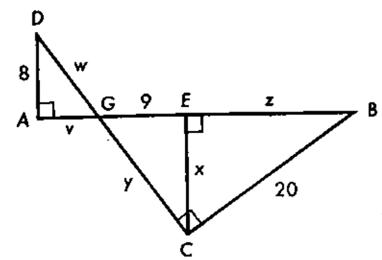
12. É dada a figura à esquerda, abaixo, com $\angle MGN \cong \angle HGK$, $GH = 8$, $GK = 12$, $GM = 10$ e $KN = 3$. Demonstre que $\angle HKG \cong \angle N$.





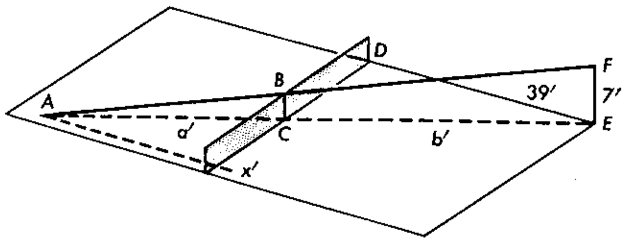
13. É dada a figura, à direita, acima, sendo indicados os comprimentos dos segmentos. Demonstre que $\overrightarrow{AC}$ divide o $\angle DAB$ ao meio.
14. A altura em relação à hipotenusa de um triângulo retângulo separa a hipotenusa em segmentos de comprimentos 15 e 5. Determine o comprimento da altura e os comprimentos dos catetos do triângulo.

15. Dada a figura com as marcas determine v, w, x, y e z.

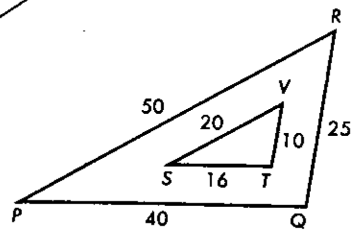


16. Se $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ e $\Delta DEF \sim \Delta ACB$, que tipo de triângulo é o ΔDEF?

17. Uma bola de tenis é sacada de uma altura de 21 dm e passa rente à rêde a uma altura de 9 dm. Se a bola é sacada de uma linha a 117 dm da rêde e segue em linha reta, a que distância da rêde ela atingirá a quadra?



18. Dados os triângulos ΔPQR e ΔSTV como na figura, qual é a razão entre suas áreas?



19. ΔABC é um triângulo retângulo isósceles sendo $\angle A$ o ângulo reto. E e D são pontos em semiplanos opostos em relação a $\overleftrightarrow{AC}$, E e B são pontos num dos semiplanos determinado por $\overleftrightarrow{AC}$, e tais que ΔACD e ΔBCE são ambos equiláteros. Determine a razão entre as áreas do ΔACD e ΔBCE.

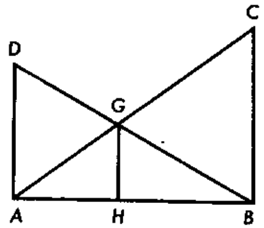
20. Um lado de um triângulo equilátero é congruente à altura de um outro triângulo equilátero. Qual é a razão das áreas dos triângulos?

21. Dada a figura com $\overline{AD}$, $\overline{HG}$ e $\overline{BC}$ perpendiculares a $\overline{AB}$, demonstre:

(a) $AH \cdot GB = HB \cdot DG$.

(b) $AH \cdot GC = HB \cdot AG$.

(c) $AH \cdot BC = HB \cdot AD$.



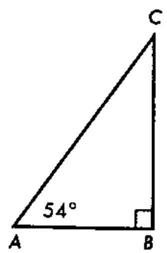
* 22. É dado que nenhuma das ternas de pontos formadas por P, Q, R e X é colinear, e que X está no exterior do ΔPQR. Desenhe os segmentos $\overline{XP}$, $\overline{XQ}$ e $\overline{XR}$. Seja A um ponto qualquer de $\overline{XR}$ e seja B o ponto de interseção de $\overline{XP}$ e a reta por A paralela a $\overline{PR}$. A reta por B, paralela a $\overline{PQ}$ intercepta $\overline{XQ}$ em C. Desenhe $\overline{AC}$. Demonstre que

$$\Delta ABC \sim \Delta RPQ.$$

23. No ΔABC, com ângulo reto em $\angle B$,

$$m\angle A = 54 \text{ e } AC = 11.$$

Determine AB e BC.



24. Determine, com aproximação de um grau, as medidas dos ângulos agudos de um triângulo 7-24-25.

25. Um avião a jato levanta vôo de um aeroporto e sobe constantemente sob um ângulo de 8° até atingir uma altura de 8460 m. Qual é sua distância, por terra, do aeroporto (com aproximação de um quilômetro)?

Problema Magno

Explique como podem dois triângulos ter 5 elementos (lados e ângulos) de um congruentes a 5 elementos do outro e assim mesmo não serem congruentes.