A GEOMETRIA DE DESCARTES

MAT 0230 - GEOMETRIA E DESENHO GEOMÉTRICO 1
2° SEMESTRE DE 2021

Estas notas de aula são baseadas em [1, Section 2.1] e [2, Chapter 2].

1. O Plano de Descartes

Diremos, por definição, que um subconjunto r de $\mathbb{R}^2$ é uma *reta* se existem reais a, b e c, $(a,b) \neq (0,0)$ tais que

$$r \;=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\, ax + by = c\}.$$

Proposição 1. *Dados (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em $\mathbb{R}^2$, $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$, existe uma única reta r que contém (x_1, y_1) e (x_2, y_2).*

`Demonstração`: Vamos dividir nosso argumento em três casos.

Caso 1. Suponha que $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$. Considere o conjunto r de todos os (x, y) tais que

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1).$$

O conjunto r é uma reta pois a equação que o define pode ser reescrita na forma $ax + by = c$, com $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $b = -1$ e $c = -\frac{x_1 y_1}{x_2 - x_1} - y_1$. É muito simples mostrar que os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) pertencem a r, pois satisfazem a esquação que a define,

$$y_1 = y_1 \,+\, \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x_1 - x_1) \quad \text{ e } \quad y_2 = y_1 \,+\, \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x_2 - x_1).$$

Isto prova que existe uma reta contendo (x_1, x_2) e (y_1, y_2). Para provar que r é a única reta que tem essa propriedade, suponha que uma reta r' de equação $ax + by = c$ contenha os dois pontos dados. Daí são satisfeitas as equações

$$ax_1 + by_1 = c \quad \text{e} \quad ax_2 + by_2 = c,$$

logo (subtraindo as duas equações),

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0,$$

logo (usando que $x_2 - x_1 \neq 0$),

$$a = -b\,\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Como $(a, b) \neq (0, 0)$ e $y_2 - y_1 \neq 0$, segue desta última equação que $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Substituindo a relação que obtivemos na equação $ax + by = c$, vem:

(1) $$ax + by = c \iff -b\,\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,x \,+\, by = c \iff y \,=\, \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x \,+\, \frac{c}{b}.$$

Substituindo x_1 e y_1 nesta última equação, obtemos

$$y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\, x_1 + \frac{c}{b}, \text{ logo } \frac{c}{b} = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\, x_1.$$

Substituindo esta última equação na terceira das equações em (1), vem

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1) + y_1$$

Provamos que (x, y) satisfaz a equação que define r' se e somente se (x, y) satisfaz a equação que define r. Ou seja, $r = r'$. Isto prova o enunciado da Proposição no caso em que $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$.

Caso 2. Suponha que $x_1 \neq x_2$ e $y_1 = y_2$. Daí a reta de equação $y = y_1$ é satisfeita pelos dois pontos dados (x_1, y_1) e (x_2, y_1).

Reciprocamente, suponha que a reta r' de equação $ax+by = c$ contém (x_1, y_1) e (x_2, y_1). Então são satisfeitas as equações $ax_1 + by_1 = c$ e $ax_2 + by_1 = c$. Daí $a(x_2 - x_1) = 0$. Como $x_2 \neq x_1$, segue que $a = 0$ e a equação de r' se torna $by = c$, ou $y = \frac{c}{b}$. Como o ponto (x_1, y_1) pertence a r', segue que $\frac{c}{b} = y_1$ e chegamos à equação que define r. Ou seja, $r = r'$, o que demonstra a proposição neste caso.

Caso 3. Suponha que $x_1 = x_2$ e $y_1 \neq y_2$. Então a única reta que contém os dois pontos dados é a reta de equação $x = x_1$. Isto se demonstra de maneira análoga à demonstração do Caso 2.

A hipótese $(x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)$ implica que um dos três casos já considerados é satisfeito. Ou seja, a proposição está demonstrada. □

Proposição 2. *Toda reta possui pelo menos dois pontos.*

`Demonstração`: Seja r a reta de equação $ax + by = c$. Queremos provar que r possui pelo menos dois pontos. Separemos a demonstração em casos.

Caso 1. Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então $(0, \frac{c}{b})$ e $(\frac{c}{a}, 0)$ são dois pontos distintos de r.

Caso 2. Se $a \neq 0$ e $b = 0$, então $(\frac{c}{a}, 0)$ e $(\frac{c}{a}, 1)$ são dois pontos distintos de r.

Caso 3. Se $a = 0$ e $b \neq 0$, então $(0, \frac{b}{a})$ e $(1, \frac{b}{a})$ são dois pontos distintos de r. □

2. Axiomas de Incidência

Considere uma tripla $[S, \mathcal{L}, \mathcal{P}]$, em que S é um conjunto, e $\mathcal{L}$ e $\mathcal{P}$ são conjuntos cujos elementos são subconjuntos de S. O conjunto S é chamado de espaço e seus elementos são chamados de pontos. Os elementos de $\mathcal{L}$ são chamados de retas; assim $\mathcal{L}$ é o conjunto das retas de S. Os elementos de $\mathcal{P}$ são chamados de planos; assim $\mathcal{P}$ é o conjunto dos planos de S. Diremos que $[S, \mathcal{L}, \mathcal{P}]$ é uma *geometria de incidência* se os seguintes axiomas forem satisfeitos.

(I.1): Dados dois pontos P e Q, existe uma única reta r tal que $P, Q \in r$.

(I.2): Dados três pontos não-colineares P, Q e R, existe um único plano Π tal que $P, Q, R \in \Pi$.

(I.3): Se dois pontos pertencem a um plano Π, a reta r que os contém está contida em Π.

(I.4): Se dois planos se interceptam, sua interseção é uma reta.

(I.5): Toda reta contém pelo menos dois pontos. Todo plano possui pelo menos três pontos não colineares. O espaço S possui pelo menos quatro pontos não coplanares.

Diremos, por definição, que um subconjunto Π de $\mathbb{R}^3$ é um *plano* se existem reais a, b, c e d, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, tais que

$$\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2;\ ax + by + cz = d\}.$$

Diremos, por definição, que um subconjunto r de $\mathbb{R}^3$ é uma *reta* se r é a interseção não vazia de dois planos. Fazendo $S = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{L} = \{r;\ r \text{ é uma reta}\}$ e $\mathcal{P} = \{\Pi;\ \Pi \text{ é um plano}\}$, é possível demonstrar que a tripla $[S, \mathcal{L}, \mathcal{P}]$ satisfaz os axiomas (I.1) $\cdots$ (I.5) acima e é portanto uma geometria de incidência.

Se tomarmos para S o conjunto $\mathbb{R}^2$, para $\mathcal{L}$ o conjunto das retas de $\mathbb{R}^2$, tais como definimos na seção anterior, e se dissermos que o único plano de $\mathbb{R}^2$ é o $\mathbb{R}^2$ inteiro, $\mathcal{P} = \{\mathbb{R}^2\}$, será que a tripla $[S, \mathcal{L}, \mathcal{P}]$ também é uma geometria de incidência? Bom, esta tripla satisfaz o axioma (I.1) pela Proposição 1, os axiomas (I.2) e (I.3) decorrem do fato de que o único plano em $\mathcal{P}$ é o próprio S. A afirmação em (I.4) é vaziamente verdadeira pois não existem dois planos distintos em $\mathcal{P}$. Quanto a (I.5), a Proposição 2 garante que toda reta possui pelo menos dois pontos. É verdade também que no único plano desta "geometria" existem três pontos não colineares, por exemplo os pontos $P = (0, 1)$, $Q = (0, 0)$ e $R = (1, 0)$ (pois R não satisfaz $x = 0$, que é a equação da reta que contém P e Q). Ou seja, as duas primeiras afirmações de (I.5) são satisfeitas. Entretanto, a última afirmação de (I.5) não é satisfeita, pois quaisquer quatro pontos de $\mathbb{R}^2$, que é o único plano da nossa geometria, são coplanares. Não podemos, portanto, chamar o plano cartesiano de uma geometria de incidência, se adotarmos como definição de geometria de incidêcia a definição do Moise. O plano cartesiano serve como um *modelo* de algo que poderíamos chamar de "geometria de incidência plana".

Referências

[1] R. Millman & G. Parker. Geometry – a metric approach with models. Springer, 1991.

[2] Edwin Moise. Elementary Geometry from an Advanced Standpoint. Addison Wesley, 1963.