MAT 0240 - GEOMETRIA E DESENHO GEOMÉTRICO 2

1º SEMESTRE DE 2021

ÁREAS

Estas notas de aula são baseadas em [1] e no Capítulo 22 de [2].

Partimos do pressuposto de que existe uma *função-área* $\alpha : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada região poligonal $P \in \mathcal{P}$ sua área $\alpha(P) > 0$ satisfazendo: (i) a área do quadrado de lado 1 é igual a 1, (ii) as áreas de dois triângulos congruentes são iguais e (iii) $\alpha(P \cup P') = \alpha(P) + \alpha(P')$ se a interseção de P e P' é vazia ou consiste apenas de vértices e arestas.

Neste texto vamos usar sem demonstrar, e sem avisar que estamos usando, o fato de que $\alpha(P) \leq \alpha(P')$ sempre que P e P' são regiões poligonais tais que $P \subseteq P'$.

Nosso objetivo é estender a função α para um conjunto de regiões que contenha propriamente as regiões poligonais.

PRELIMINARES DE ANÁLISE

Uma *cota superior* de um subconjunto X de $\mathbb{R}$ é um elemento $M \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq M$ para todo $x \in X$. Dizemos que X é limitado superiormente se ele possui alguma cota superior. O *supremo* de X , denotado por $\sup X$, se existir, é a menor cota superior de X . Na verdade, todo $X \subset \mathbb{R}$ não-vazio limitado superiormente possui supremo. Dependendo da abordagem, este pode ser o próprio significado da afirmação de que $\mathbb{R}$ é completo.

Analogamente, todo $X \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente e não-vazio possui uma menor cota inferior, chamada de *ínfimo* de X e denotada por $\inf X$.

Exemplo 1. Sejam $X = \{x \in \mathbb{Q}; 0 < x < 1\}$ e $Y = [0, 1]$. Então $\inf X = \inf Y = 0$ e $\sup X = \sup Y = 1$.

Exemplo 2. Sejam $X = \{x \in \mathbb{Q}; x > 0, x^2 < 2\}$, $Y = \{y \in \mathbb{Q}; y > 0, 3 < y^2\}$ e $Z = \{z \in \mathbb{Q}; z > 0, 2 < z^2\}$. Então $\sup X = \inf Z = \sqrt{2}$ e $\inf Y = \sqrt{3}$.

Proposição 1. Sejam X e Y subconjuntos de $\mathbb{R}$ satisfazendo $x \leq y$ para todo $x \in X$ e para todo $y \in Y$. Então $\sup X \leq \inf Y$.

Demonstração: Fixe um ponto $y \in Y$ arbitrário. Segue da hipótese que $x \leq y$ para todo $x \in X$, ou seja, y é uma cota superior de X . Como $\sup X$ é a menor cota superior de X , segue que $\sup X \leq y$. Como y é um ponto arbitrário de Y , isto quer dizer que $\sup X$ é uma cota inferior de Y . Como $\inf Y$ é a menor cota inferior de Y , segue que $\sup X \leq \inf Y$. $\square$

Note que X e Y do Exemplo 2 satisfazem a hipótese da Proposição precedente, e também os conjuntos X e Z satisfazem. Temos $\sup X = \inf Z$ e $\sup X < \inf Y$. Ou seja, pode valer a igualdade ou a desigualdade estrita na conclusão da Proposição 1, mesmo sob a hipótese mais forte $x < y$ para todos $x \in X$ e $y \in Y$.

Diz-se que uma sequência $(x_n)_{n=1,2,3,\dots}$, $x_n \in \mathbb{R}$, converge a zero se x_n se torna arbitrariamente pequeno para todo n suficientemente grande; mais precisamente se, para todo $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, $|x_n| < \epsilon$. Isso se denota por $x_n \rightarrow 0$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Diz-se que x_n converge a L , $L \in \mathbb{R}$, se $(x_n - L) \rightarrow 0$. Isso se denota por $x_n \rightarrow L$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ e se chama L de *o limite da sequência* $(x_n)_n$.

Usaremos sem demonstrar as seguintes propriedades dos limites de sequências.

- (1) Se $0 \leq x_n \leq y_n$ e $y_n \rightarrow 0$, então $x_n \rightarrow 0$.
- (2) Se $x_n \rightarrow L_1$ e $y_n \rightarrow L_2$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = L_1 \pm L_2$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = L_1 L_2$.
- (3) Se $x_n \rightarrow L$ e $L \neq 0$, então $x_n \neq 0$ para todo n suficientemente grande e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{L}$.
- (4) Se $x_n \leq M$ para todo n e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$, então $L \leq M$.
- (5) Se $x_n \geq M$ para todo n e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$, então $L \geq M$.
- (6) Se $x_n \geq 0$ e $x_n \rightarrow L$, então $L \geq 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{L}$.

Proposição 2. *Sejam X e Y subconjuntos de $\mathbb{R}$ satisfazendo $x \leq y$ para todo $x \in X$ e para todo $y \in Y$. Suponha, ademais, que existem sequências $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$, $x_n \in X$ e $y_n \in Y$, tais que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = L.$$

Então

$$\sup X = \inf Y = L$$

Demonstração: Denotemos $\alpha := \sup X$ e $\beta := \inf Y$. Como $x_n \leq \alpha$, segue que $L \leq \alpha$. Como $y_n \geq \beta$ segue que $\beta \leq L$. Sabemos da Proposição 1 que $\alpha \leq \beta$. Logo $L \leq \alpha \leq \beta \leq L$, logo $L = \alpha = \beta$, como queríamos. $\square$

Dados $X \subset \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$, definimos

$$tX := \{tx; x \in X\}.$$

Assim, por exemplo, se X é como definido no Exemplo 1, $2X$ é a interseção do intervalo aberto $(0, 2)$ com $\mathbb{Q}$. Se $Y = [2, 3]$, $3Y = [6, 9]$.

Proposição 3. *Dados $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente e não-vazio e $t > 0$, temos $\sup(tX) = t \sup X$.*

Demonstração: Como $\sup X$ é uma cota superior para X , temos $x \leq \sup X$ para todo $x \in X$. Multiplicando esta inequação por t , que é positivo, vem que $tx \leq t \sup X$ para todo $x \in X$. Todo elemento y de tX é da forma tx para algum $x \in X$. Logo $y \leq t \sup X$ para todo $y \in tX$, ou seja, $t \sup X$ é uma cota superior de tX . Provaremos em seguida que esta é a menor cota superior de tX . Seja $\alpha < t \sup X$. Então $\frac{\alpha}{t} < \sup X$, então $\frac{\alpha}{t}$ não é cota superior de X , então existe $x_0 \in X$ tal que $\frac{\alpha}{t} < x_0$, então $\alpha < tx_0$. Mas $tx_0 \in tX$, logo α não é cota superior de tX , como queríamos. $\square$

A demonstração da proposição seguinte é quase idêntica à da anterior. Basta inverter o sentido das desigualdades, e trocar maior, superior e sup por menor, inferior e inf, respectivamente.

Proposição 4. *Dados $X \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente e não-vazio e $t > 0$, temos $\inf(tX) = t \inf X$.*

MEDIDA INFERIOR E MEDIDA SUPERIOR DE CONJUNTOS LIMITADOS

Diremos que um subconjunto F do plano é *limitado* se ele está contido em alguma região delimitada por um quadrado Q suficientemente grande. Dado um tal F limitado, definimos $\mathcal{P}_I$ como sendo o conjunto de todas as regiões poligonais contidas em F e $\mathcal{P}_E$ como sendo o conjunto de todas as regiões poligonais nas quais F está contido. Na notação padrão da teoria dos conjuntos, podemos escrever

$$\mathcal{P}_I = \{P; P \text{ é região poligonal, } P \subseteq F\},$$

$$\mathcal{P}_E = \{P; P \text{ é região poligonal, } F \subseteq P\}.$$

Em seguida definimos X_I e X_E como sendo a imagem da função-área restrita a $\mathcal{P}_I$ e a $\mathcal{P}_E$, respectivamente. Isto é,

$$X_I = \{\alpha(P); P \in \mathcal{P}_I\},$$

$$X_E = \{\alpha(P); P \in \mathcal{P}_E\}.$$

Note que X_E não é vazio, pois $\alpha(Q) \in X_E$. Além disso, X_E é limitado inferiormente pois 0 é uma cota inferior de X_E . Definimos então

$$m_E(F) = \inf X_E.$$

No caso em que $\mathcal{P}_I$ é vazio e, portanto, também X_I é vazio, definimos $m_I(F) = 0$. Se $\mathcal{P}_I$ for não vazio, então X_I é limitado superiormente por $\alpha(Q)$, pois $P \subseteq F \subseteq Q$, e portanto $\alpha(P) \leq \alpha(Q)$ para todo $P \in \mathcal{P}_I$. Neste caso, definimos

$$m_I(F) = \sup X_I.$$

Dados $P \in \mathcal{P}_I$ e $P' \in \mathcal{P}_E$, temos $P \subseteq F \subseteq P'$, logo $\alpha(P) \leq \alpha(P')$. Ou seja, X_I e X_E satisfazem a hipótese da Proposição 1 e, portanto,

$$m_I(F) \leq m_E(F).$$

A região limitada do plano, F , que tomamos no começo desta discussão é arbitrária (poderíamos ter deixado mais explícito que os conjuntos $\mathcal{P}_I$, $\mathcal{P}_E$, X_I e X_E dependem de F). Construímos, portanto as funções m_I e m_E definidas ambas no conjunto de todas as regiões limitadas no plano e tomando valores nos reais não-negativos.

UMA DEFINIÇÃO DE ÁREA PARA CONJUNTOS MENSURÁVEIS

Diremos que uma região limitada do plano F é *mensurável*¹ se $m_I(F) = m_E(F)$. Se F é mensurável, a *medida* de F é definida por

$$m(F) := m_I(F) = m_E(F)$$

Para que esta definição de medida possa ser considerada uma generalização do conceito de área, é preciso provar que, as regiões poligonais são mensuráveis e que a função-área e a medida de uma região poligonal coincidem.

Observemos primeiro que toda região poligonal é limitada, pois toda região poligonal é a união finita de regiões triangulares, toda região triangular está contida em uma região quadrada e a união de duas ou mais regiões quadradas está contida em alguma região quadrada. Estas afirmações são “visualmente óbvias” e podem ser demonstradas a partir dos princípios mais básicos da geometria euclidiana.

Na demonstração da Proposição seguinte vamos usar que, se x_0 é uma cota superior de $X \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$, então $x_0 = \sup X$. Analogamente, se $x_1 \in X$ é cota inferior, então $x_1 = \inf X$. Fica para o leitor a tarefa de se convencer de que isto é verdade.

Proposição 5. *Seja P uma região poligonal. Então P é mensurável e $m(P) = \alpha(P)$.*

Demonstração: A região dada P pertence a $\mathcal{P}_I^P := \{P'; P' \text{ é região poligonal, } P' \subseteq P\}$. Daí $\alpha(P)$ é uma cota superior de $X_E^P := \{\alpha(P'); P' \in \mathcal{P}_E^P\}$ e $\alpha(P) \in X_E^P$. Logo $\alpha(P) = \sup X_E^P = m_I(P)$.

¹Esta noção é devida ao matemático francês Camille Jordan (1838-1922), que foi um precursor da Teoria da Medida. Há diversas outras noções de mensurabilidade.

Do mesmo modo, $\alpha(P)$ é uma cota inferior de $\{\alpha(P'); P' \text{ é região poligonal, } P \subseteq P'\}$, conjunto que contém $\alpha(P)$. Logo $\alpha(P)$ é o ínfimo deste conjunto. Decorre então da definição de medida exterior que $m_E(P) = \alpha(P)$.

Provamos que $m_I(P) = m_E(P) = m(P)$, ou seja, P é mensurável e $m(P) = \alpha(P)$. □

Proposição 6. *Seja J um segmento de reta. Então J é mensurável e $m(J) = 0$.*

Demonstração: Nenhuma região triangular está contida em um segmento J , pois toda região poligonal contém pelo menos um triângulo e os vértices de um triângulo não são colineares. Logo $m_I(J) = 0$. Resta mostrar que $m_E(J)$ também é zero.

Para cada $t > 0$, seja P_t uma região retangular contendo J , com base igual ao comprimento de J , $|J|$, e altura igual a t . A existência de uma tal P_t decorre dos axiomas básicos da geometria euclideana. Temos portanto

$$\alpha(P_t) = t|J| \in X_E^J := \{\alpha(P'); P' \text{ é região poligonal, } J \subseteq P'\}.$$

Dado um $\delta > 0$ arbitrário, tome $t = \frac{\delta}{2|J|}$. Então $\alpha(P_t) = \frac{\delta}{2} < \delta$. Logo δ não é uma cota inferior de X_E^J . Como nenhum real positivo é cota inferior de X_E^J e 0 é, segue que $\inf X_E^J = 0 = m_E(J)$. □

MEDIDAS DE REGIÕES SEMELHANTES

Nesta seção, veremos que a medida, ou área generalizada, de uma região limitada mensurável do plano, é multiplicada por r^2 quando transformada por uma semelhança de razão r . Aqui usamos a noção de semelhança de [1]: uma semelhança de razão $r > 0$ entre duas regiões do plano F e F' é uma bijeção $\sigma : F \rightarrow F'$ tal que, para todos X e Y em F , temos $X'Y' = rXY$, com $X' = \sigma(X)$ e $Y' = \sigma(Y)$. Demonstramos em aulas passadas que existe uma semelhança entre duas regiões triangulares se e somente se os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ que as delimitam são semelhantes no sentido de Euclides; ou seja, se existe uma bijeção entre $\{A, B, C\}$ e $\{D, E, F\}$, que naturalmente induz uma correspondência entre os lados e os ângulos dos dois triângulos, de modo que os lados correspondentes sejam proporcionais e os ângulos correspondentes sejam iguais. A razão da semelhança coincide com a razão entre os comprimentos dos lados correspondentes.

Trataremos primeiro do caso em que a região é triangular, depois poligonal, e finalmente do caso geral.

Proposição 7. *Considere os triângulos $T = \triangle ABC$ e $T' = \triangle A'B'C'$. Suponha que existe uma semelhança de razão r entre T e T' , $\sigma : T \rightarrow T'$, $\sigma(A) = A'$, $\sigma(B) = B'$, $\sigma(C) = C'$. Denotando por T e T' também as regiões triangulares delimitadas por T e T' , vale $\alpha(T') = r^2\alpha(T)$.*

Demonstração: Seja P o pé da perpendicular por A sobre a reta $\overleftrightarrow{BC}$. Não é perda de generalidade supor que P está entre B e C , pois pelo menos um vértice de qualquer triângulo tem essa propriedade. Seja $P' = \sigma(P)$.

Como $\angle ABP$ é reto, segue do Teorema de Pitágoras que

$$BP^2 + AP^2 = AB^2, \quad \text{logo} \quad r^2BP^2 + r^2AP^2 = r^2AB^2,$$

$$\text{logo} \quad (rBP)^2 + (rAP)^2 = (rAB)^2, \quad \text{logo} \quad B'P'^2 + A'P'^2 = A'B'^2,$$

logo, pela recíproca do Teorema de Pitágoras, o ângulo $\angle A'B'P'$ é reto. Ou seja, P' é o pé da perpendicular por A' sobre $\overleftrightarrow{B'C'}$.

Pela fórmula da área do triângulo, e usando mais uma vez que σ é uma semelhança de razão r , vem

$$\alpha(T') = \frac{(B'C')(A'P')}{2} = \frac{(rBC)(rAP)}{2} = r^2 \frac{(BC)(AP)}{2} = r^2\alpha(T),$$

como queríamos. $\square$

Proposição 8. *Seja P uma região poligonal e seja $\sigma : P \rightarrow P'$ uma semelhança de razão r . Então P' é uma região poligonal e $\alpha(P') = r^2\alpha(P)$.*

Demonstração: Seja $\{T_1, T_2, \dots, T_k\}$ uma *triangularização* de P ; isto é, $T_1, T_2, \dots, T_k$ são regiões triangulares que se intersectam, possivelmente, apenas em vértices ou lados, e $P = \cup_{i=1}^k T_i$. Então $T'_i := \sigma(T_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, são regiões triangulares e $P' = \cup_{i=1}^k T'_i$. Sendo igual a uma união de regiões triangulares, P' é uma região poligonal. A interseção de duas das regiões triangulares T'_i , $i = 1, \dots, k$, consiste apenas de vértices ou lados, pois σ é uma semelhança. Logo, pela aditividade da função área,

$$\alpha(P') = \sum_{i=1}^k \alpha(T'_i) = \sum_{i=1}^k (r^2\alpha(T_i)) = r^2 \sum_{i=1}^k \alpha(T_i) = r^2\alpha(P)$$

(na segunda destas igualdades, usamos a Proposição 7). $\square$

Proposição 9. *Seja $\sigma : F \rightarrow F'$ uma semelhança de razão r entre as duas regiões limitadas do plano F e F' . Então $m_1(F') = r^2 m_1(F)$.*

Demonstração: Seja P uma região poligonal, $P \subseteq F$. Segue da Proposição 8 que $P' := \sigma(P)$ é uma região poligonal contida em F' e $\alpha(P') = r^2\alpha(P)$. Reciprocamente, usando que $\sigma^{-1} : F' \rightarrow F$ é uma

semelhança de razão $1/r$, temos que, se $P' \subseteq F'$ é uma região poligonal, ela é da forma $P' = \sigma(P)$ para alguma região poligonal P contida em F . Isto prova que

$$X_I^{F'} = \{\alpha(P'), P' \text{ região poligonal}, P' \subseteq F'\} = \{r^2\alpha(P), P \text{ região poligonal}, P \subseteq F\} = r^2 X_I^F.$$

Segue então da Proposição 3 que $m_I(F') = \sup X_I^{F'} = r^2 \sup X_I^F = r^2 m_I(F)$. $\square$

Proposição 10. *Sejam Π um plano e seja $\sigma : \Pi \rightarrow \Pi$ uma semelhança de razão r . Se F é uma região limitada de Π , então $F' := \sigma(F)$ é limitada e $m_E(F') = r^2 m_E(F)$.*

Demonstração: Como F é limitada, existe Q uma região quadrada que contém F . Logo $Q' := \sigma(Q)$ é uma região quadrada que contém F' . Ou seja, F' é uma região limitada. Com argumentos análogos aos que usamos na demonstração da Proposição 9 que

$$X_E^{F'} = \{\alpha(P'), P' \text{ região poligonal}, F' \subseteq P'\} = \{r^2\alpha(P), P \text{ região poligonal}, F \subseteq P\} = r^2 X_E^F.$$

Segue então da Proposição 4 que $m_E(F') = \inf X_E^{F'} = r^2 \inf X_E^F = r^2 m_E(F)$. $\square$

A proposição seguinte segue imediatamente das Proposições 9 e 10, e das definições de mensurabilidade e de medida.

Proposição 11. *Sejam Π um plano e seja $\sigma : \Pi \rightarrow \Pi$ uma semelhança de razão r . Se F é uma região limitada e mensurável de Π , então $F' := \sigma(F)$ é limitada e mensurável e $m(F') = r^2 m(F)$.*

O enunciado desta última proposição pode ser renunciado de maneira coloquial na seguinte afirmação: sob a ação de uma semelhança, a área de uma região é multiplicada pelo quadrado da razão da semelhança. Está implícito nesta reformulação que se pode definir a área da região sobre a qual age a semelhança, ou seja que ela é limitada e mensurável.

REFERÊNCIAS

- [1] ELON LIMA. Medida de Forma em Geometria. SBM, 2011.
- [2] EDWIN MOISE. Elementary Geometry from an Advanced Standpoint. Addison Wesley, 1963.