Prova - Geometria e Desenho Geométrico I

Ana Beatriz Laudares Orsi Jenne 11813032

① Sejam $r$ uma reta e $\pi$ um plano que a contém. Chame de $H$ um dos dois semi-planos contidos em $\pi$ determinados por $r$. Cosidere $P \in r$ e $Q \in H$. Mostre que, se $P$-$R$-$Q$, então $R \in \pi$

Sendo $\pi$ um plano dividido pela reta $r$ em 2 semi-planos $H$ e $H'$
Já que $P$-$R$-$Q$, então podemos concluir que $R \in \overleftrightarrow{PQ}$

Já que $P \in r$ e $r \subset \pi$, então $P \in \pi$
Já que $Q \in H$ e $H$ é um dos semi-planos do plano $\pi$, ou seja, $H \subset \pi$, então $Q \in \pi$

Pelo postulado 3 ($I_3$) da Geometria de Incidência (Sendo $A$ e $B$ pontos e $\alpha$ um plano, $A, B \in \alpha$, $A \neq B$) $\Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \alpha$)

Já que $P, Q \in \pi$, então $\overleftrightarrow{PQ} \subset \pi$
Já que $R \in \overleftrightarrow{PQ}$, então $R \in \pi$ ■

---

② Proposição: Sejam $r, s$ e $t$ três retas coplanares. Se $r$ e $s$ são paralelas e $r$ e $t$ são concorrentes, então $s$ e $t$ são concorrentes

a) Use o Quinto Postulado de Euclides para demonstrar a Proposição acima

Quinto Postulado de Euclides: Dados $P$ um ponto e $s$ uma reta, $P \notin r$, $\exists!$ reta $s$ tal que $P \in s$ e $r /\!/ s$
Sendo $r$ e $t$ e $s$ três retas coplanares, $r /\!/ s$ e $r$ e $t$ são concorrentes
Sendo $P$ um ponto tal que $P \in r$ e $P \in t$
Suponha que $s \cap t = \emptyset$, então $t /\!/ s$ e $P \in t$
Mas $r /\!/ s$ e $P \in r$
Pelo Quinto Postulado de Euclides, podemos concluir que $r = t$, isto é um absurdo
Logo $s \cap t \neq \emptyset$, então $t$ e $s$ são concorrentes

b) A Proposição também é verdadeira no Plano de Poincaré?

Sendo $C_{0,1} = \{(x,y) : (x^2+y^2=1, y>0)\}$ uma reta e $P = (0,2)$ um ponto
$P \notin C_{0,1}$, pois não satisfaz a equação $x^2+y^2=1, y>0$

Sendo $C_{a,\sqrt{a^2+4}} = \{(x,y) : ((x-a)^2+y^2 = a^2+4, y>0)\}$, $a \in \mathbb{R}$ uma reta
Calculando a interseção de $C_{0,1}$ e $C_{a,\sqrt{a^2+4}}$

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ (x-a)^2+y^2 = a^2+4 \Rightarrow x^2-2xa+a^2 = a^2+4 \Rightarrow x^2-2xa-4+y^2=0 \end{cases}$$

$$x^2-2ax-4+y^2=0 \Rightarrow -2ax-3=0 \Rightarrow 2ax=-3 \Rightarrow x = -3/(2a)$$

$x^2+y^2=1 \Rightarrow \frac{9}{4a^2}+y^2=1 \Rightarrow |y|=\sqrt{1-\frac{9}{4a^2}} \xRightarrow{y>0} y=\sqrt{1-\frac{9}{4a^2}}$

$1-\frac{9}{4a^2} \geq 0 \Rightarrow 1 \geq \frac{9}{4a^2} \Rightarrow a^2 \geq \frac{9}{4} \Rightarrow |a| \geq 3/2$

Então, para $a$ tal que $|a| \geq 3/2$, as retas $C_{0,1}$ e $C_{a,\sqrt{a^2+4}}$ se interseptam e
, para $a$ tal que $|a| < 3/2$, as retas $C_{0,1}$ e $C_{a,\sqrt{a^2+4}}$ não se interseptam

O ponto $P \in C_{a,\sqrt{a^2+4}}$, pois satisfaz a equação $(x-a)^2+y^2=a^2+4, y>0$
$(x-a)^2+y^2=(a)^2+2^2=a^2+4$

Logo existem infinitas paralelas a $C_{0,1}$ passando por P e, portanto, o Quinto Postulado de Euclides não se verifica no plano de Poincaré

③ Sejam A, B, C e D 4 pontos coplanares. Suponha que:
(i) A, B e C não são colineares
(iii) $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ são congruentes
(iv) $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são congruentes
(ii) A, C e D não são colineares

a) Mostre que os angulos $\angle ACD$ e $\angle CAB$ são congruentes

Por (iii), sabemos que $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ Por (iv), sabemos que $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ Sabemos que $\overline{AC} \cong \overline{AC}$
Pelo critério de congruência LLL, concluimos que $\triangle ABC \cong \triangle CDA$

Já que os triangulos são congruentes, seus angulos são congruentes
Logo $\angle ACD \cong \angle CAB$, $\angle ADC \cong \angle CBA$, $\angle ACB \cong \angle CAD$

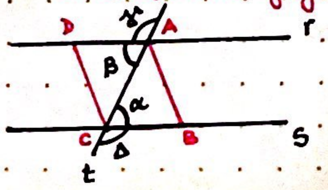
(v) D e B estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AC}$
b) Mostre que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ são paralelos

Sendo $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{DC}$ retas coplanares, então $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{DC}$ são coplanares
Já que $\overline{AB} \cap \overline{AC} = A$, isto é, $\overline{AB}$ concorrente a $\overline{AC}$, $\overleftrightarrow{AB}$ concorrente a $\overleftrightarrow{AC}$ é o que é possivel concluir
Já que $\overline{DC} \cap \overline{AC} = C$, isto é, $\overline{DC}$ concorrente a $\overline{AC}$, $\overleftrightarrow{DC}$ concorrente a $\overleftrightarrow{AC}$

Já que $B \in \overleftrightarrow{AB}$ e $D \in \overleftrightarrow{CD}$ e B, D estão de lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AC}$
A partir dessas conclusoẽs podemos concluir que $\angle ACD$ e $\angle CAB$ são alternos internos

Já que $\angle ACD \cong \angle CAB$ (demonstrado no item a)
Pela Proposição 3 dos Angulos Alternos Internos (Sejam r, s e t três retas coplanares. Suponha que r e t são concorrentes e que s e t são concorrentes. Se um par de ângulos alternos internos forem congruentes, então r e s são paralelas), podemos concluir que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$
Já que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$, então $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

c) Faça uma figura e enuncie em linguagem da escola básica um corolário dos itens (a) e (b)




Sendo r e s retas paralelas e t uma reta transversal a r e a s
Se os angulos aternos enternos $\beta$ e $\alpha$ forem congruentes, então os angulos alternos externos $\gamma$ e $\Delta$ são congruentes

Na escola básica, poderiamos explicar que isto é verdadeiro desta forma:
Já que $\beta \cong \alpha$, a medida de $\beta$ = medida de $\alpha$, e medida de $\gamma$ + medida de $\beta$ = 180° e medida de $\Delta$ + medida de $\alpha$ = 180°, então medida de $\Delta$ + medida de $\alpha$ = medida de $\gamma$ + medida de $\beta$, então medida de $\Delta$ = medida de $\gamma$ $\Rightarrow \Delta \cong \gamma$