USP - MAT6682 - 2020 - 3^a LISTA

Definição 1. Seja X um espaço de Banach. Um subespaço fechado M de X é dito **complementado** se alguma das seguintes condições equivalentes é satisfeita:

(1) Existe um subespaço N tal que $X = M \oplus N$,

(2) Existe uma projeção contínua $P : X \to M$.

Note que na condição (1), a soma é *contínua*, no sentido de que a operação

$$M \oplus N \ni (m, n) \mapsto m + n \in X$$

é um isomorfismo. Isso significa que por mais que o complemento algébrico de um subespaço fechado sempre exista (usando uma base de Hamel), não necessariamente existe um complemento contínuo.

Exercício 1 (3 pontos)**.** Mostre que se X é um espaço de Banach e $Y \subseteq X$ é um subespaço fechado, então todo operador limitado

$$T : Y \subseteq X \to \ell_\infty$$

pode ser estendido para X com preservação de norma. Conclua que se X possui um subespaço fechado Y isomorfo à ℓ_∞, então Y é complementado em X.

(Dica: Use Hahn-Banach).

Exercício 2 (3 pontos)**.** Dizemos que um espaço de Banach X é um espaço de **Schur** se convergência sequencial em norma coincide com a convergência sequencial fraca, i.e., uma sequência $(x_n) \subseteq X$ converge pra 0 fracamente se, e só se, converge pra 0 em norma.

(a) Mostre que em um espaço de Schur, compacidade em norma coincide com compacidade fraca,

(Dica: Use Eberlein-Smulian).

(b) Mostre que se X é um espaço de Schur reflexivo, então X é finito dimensional,

Exercício 3 (4 pontos)**.** Mostre que ℓ_1 é um espaço de Schur.

(Dica: Use o gliding hump).