TÓPICOS DE ANÁLISE FUNCIONAL (MAT 6682)

IME-USP

2° SEMESTRE DE 2020

Sumário

$\mathbb{N}$ denota o conjunto dos inteiros positivos, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$.
Os inteiros não-negativos serão denotados por $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \cdots\}$

1. Completamentos

Dado um espaço vetorial (complexo) normado X, um *completamento* de X é um par $(\iota, \overline{X})$, sendo $\overline{X}$ um espaço vetorial normado completo (ou seja, um espaço de Banach) e $\iota : X \longrightarrow \overline{X}$ uma aplicação linear isométrica (isto é, ι preserva norma) com imagem densa.

Frequentemente identificaremos X com sua imagem densa em $\overline{X}$ e diremos que X é um subespaço denso de $\overline{X}$. Se existir um completamento, ele será único a menos de uma bijeção isométrica que restrita a X é a aplicação identidade. Esta afirmação está mais precisamente enunciada no exercício seguinte.

`Exercício 1.1` Sejam $(\iota, \overline{X})$ e $(\omega, \widetilde{X})$ completamentos do espaço vetorial normado X. Mostre que existe uma única bijeção linear isométrica $I : \overline{X} \to \widetilde{X}$ tal que $\omega = I \circ \iota$.

A maneira mais elementar, embora muito trabalhosa, de construir um completamento é definindo $\overline{X}$ como sendo um conjunto de classes de equivalência de sequências de Cauchy em X. Tomaremos um caminho mais elegante, mas menos transparente, que tira proveito do Teorema de Hahn-Banach (que vale para espaços normados não necessariamente completos).

Denotemos por X^* o espaço vetorial de todos os funcionais lineares contínuos $\lambda : X \to \mathbb{C}$. Define-se em X^* a norma
$$\|\lambda\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|\lambda(x)|}{\|x\|}, \ \lambda \in X^*.$$
$\|\lambda\|$ é a menor dentre as constantes $C \geq 0$ que satisfazem $|\lambda(x)| \leq C\|x\|$ para todo $x \in X$.

Proposição 1.1. *Seja X um espaço vetorial normado. Munido de $\|\cdot\|$, X^* é um espaço de Banach.*

`Demonstração:` Seja $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em X^*. Então $\sup_n \|\lambda_n\| < \infty$. Para cada $x \in X$, $(\lambda_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{C}$. Defina $\lambda : X \to \mathbb{C}$ por $\lambda(x) = \lim_n \lambda_n(x)$. Segue direto das definições que λ é linear. Além disso, para todo $x \in X$,
$$|\lambda(x)| = \lim_n |\lambda_n(x)| \leq (\sup_n \|\lambda_n\|)\|x\|.$$
Logo, $\lambda \in X^*$. Resta provar que $\lim_n \|\lambda - \lambda_n\| = 0$.

Para cada $x \in X$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos
$$|\lambda(x) - \lambda_n(x)| = \lim_m |\lambda_m(x) - \lambda_n(x)| \leq \limsup_m \|\lambda_m - \lambda_n\|\|x\|.$$
Dado $\epsilon > 0$, seja N tal que $\|\lambda_m - \lambda_n\| < \epsilon$ sempre que $n, m \geq N$. Então para cada $n \geq N$, $\limsup_m \|\lambda_m - \lambda_n\| \leq \epsilon$. Provamos que para todo $n \geq N$, $\|\lambda - \lambda_n\| \leq \epsilon$. $\square$

Dado $x \in X$, seja Y o subespaço de X gerado por x. Seja $l : Y \to \mathbb{C}$ o funcional linear definido por $l(x) = \|x\|$. Temos $\|l\| = 1$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $\lambda \in X^*$ que estende l a X satisfazendo $\|\lambda\| = \|l\| = 1$.

Para cada $x \in X$, defina $\widehat{x} : X^* \to \mathbb{C}$ por $\widehat{x}(\lambda) = \lambda(x)$, $\lambda \in X^*$. É claro que $\widehat{x}$ é linear. Segue direto das definições que $|\widehat{x}(\lambda)| \leq \|x\|\|\lambda\|$ para todo $\lambda \in X^*$ e, portanto, $\widehat{x} \in X^{**}$ e $\|\widehat{x}\| \leq \|x\|$. No parágrafo precedente, mostramos que existe $\lambda \in X^*$ tal que $\widehat{x}(\lambda) = \|x\|$ e $\|\lambda\| = 1$. Logo, vale a igualdade em $\|\widehat{x}\| \leq \|x\|$. Provamos:

Teorema 1.2. *A aplicação linear* $\wedge : X \longrightarrow X^{**}$*,* $X \ni x \longmapsto \widehat{x} \in X^{**}$*, é uma isometria.*

Seja $\overline{X}$ o fecho de $\{\widehat{x};\, x \in X\}$ em X^{**}. Sendo X^{**} o dual do espaço normado X^*, ele é completo. Logo $\overline{X}$ é completo. Como a aplicação $\wedge$ é uma isometria, segue que:

Corolário 1.3. $(\wedge, \overline{X})$ *é um completamento de* X*.*

O completamento de um espaço com produto interno é um espaço de Hilbert no seguinte sentido.

`Exercício 1.2` Seja V um espaço vetorial (complexo) com produto interno, seja $\|\cdot\|$ a norma induzida por esse produto interno, $\|x\| = \langle x, x\rangle_V^{1/2}$, $x \in V$. Seja H o completamento de $(V, \|\cdot\|)$. Mostre que a norma de H também provém de um produto interno, e que o produto interno de H, $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$, coincide com o produto interno original $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ para pares de elementos de V: $\langle x, y\rangle_H = \langle x, y\rangle_V$, para todos $x, y \in V$.

`Exemplo 1.1`: Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e seja $p \geq 1$ real. Considere $C_c(\Omega)$, o espaço das funções contínuas de Ω em $\mathbb{C}$ que se anulam fora de um compacto $K \subset \Omega$, munido da norma

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}.$$

O completamento de $(C_c(\Omega), \|\cdot\|_p)$ é $L^p(\Omega)$.

`Exemplo 1.2` Seja S^1 o conjunto dos complexos de valor absoluto igual a 1, $S^1 = \{e^{i\theta};\, \theta \in \mathbb{R}\}$. Dado $1 \leq p < \infty$ muna o espaço $C(S^1)$ de todas as funções contínuas de S^1 em $\mathbb{C}$ da norma

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p\, d\theta\right).$$

O completamento de $(C(S^1), \|\cdot\|)$ é $L^p(S^1)$.

As afirmações “o completamento é ...” nos dois exemplos precedentes podem ser encaradas como definições por quem não conheça integração de Lebesgue. Dentro da teoria da medida e integração, elas são teoremas. A teoria de Lebesgue é útil para se obter informações muito refinadas sobre os elementos desses espaços L^p. Mas para entender certas propriedades e para demonstrar muitos resultados sobre o espaço de Banach $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, a informação de que ele é o completamento de $(C_c(\Omega), \|\cdot\|_p)$ é suficiente, sendo prescindíveis quaisquer informações adicionais sobre a natureza dos elementos de $L^p(\Omega)$.

Sugiro que mesmo quem domine os pré-requisitos de integração de Lebesgue tente resolver o exercício seguinte usando apenas a “definição” de $L^p((0,1))$ como completamento que acabamos de ver. Ele ilustra o tipo de dificuldade que se encontra quando se trabalha com completamentos “abstratos”.

`Exercício 1.3` Muna $C([0,1])$ da norma $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$, $1 \le p < \infty$.
(a) Mostre que $C_c((0,1))$ é denso em $C([0,1]$.
(b) Dada $f \in C([0,1])$, tome sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $C_c((0,1))$ que converge para f em $C([0,1])$. Mostre que (f_n) converge também em $L^p((0,1))$. Chame de g o limite da sequência em $L^p((0,1))$. Mostre que g depende só de f e não da sequência escolhida.
(c) Mostre que a aplicação $f \mapsto g$ é uma isometria com imagem densa de $C([0,1])$ em $L^p((0,1))$.

2. Espaços Localmente Convexos

Seja X um espaço vetorial complexo. Diz-se que uma aplicação $p : X \to [0,+\infty)$ é uma *seminorma* se, para todos $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$, são satisfeitas as afirmações: (i) $p(x+y) \le p(x) + p(y)$, (ii) $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$. Grosseiramente falando, uma seminorma é "uma norma que pode se anular em vetores não-nulos". Tal como para normas, segue da definição que também vale $|p(z) - p(w)| \le p(z-w)$ para todos $z, w \in X$.

Para cada seminorma p, definimos $\ker p = \{x \in X;\, p(x) = 0\}$. Segue da definição de seminormas que $\ker p$ é um subespaço de X.

Uma dada família de seminormas $\mathcal{F}$ induz em X uma topologia como descrito a seguir.

Dados $x \in X$, $r > 0$ e uma subfamília finita $F \subseteq \mathcal{F}$, denotemos:

$$B(x; r, F) \;=\; \{y \in X;\, p(x-y) < r,\, p \in F\}.$$

No caso em que $\mathcal{F}$ é um conjunto unitário e seu único elemento é uma norma, $\mathcal{F} = \{\|\cdot\|\}$, $B(x; r, \mathcal{F})$ é o que se chama em espaços vetoriais normados de *bola aberta* de centro x e raio r. No caso mais geral, também diremos que um $B(x; r, \mathcal{F})$ é *centrado em x*. Note que, para cada $x \in X$, $B(x; r, F)$ é um *transladado* de $B(0; r, F)$, isto é,

$$B(x; r, F) \;=\; x + B(0; r, F) \;=\; \{x + z;\, z \in B(0; r, F)\}. \tag{1}$$

Denotemos por $\mathcal{B}$ a família $\{B(x; r, F);\, x \in X, r > 0, F \subseteq \mathcal{F} \text{ finita}\}$ de subconjuntos de X. Para cada $x \in X$, definimos $\mathcal{B}_x = \{B(x; r, F); r > 0, F \subseteq \mathcal{F}\,\text{finita}\}$. Definimos ainda

$$\tau = \{A \subseteq X;\ \text{para todo } x \in A \text{ existe } B \in \mathcal{B}_x \text{ tal que } B \subset A\}.$$

`Exercício 2.1`: Mostre que cada $B \in \mathcal{B}$ é convexo.

`Exercício 2.2`: Mostre que:
(a) Dados B e B' em $\mathcal{B}$ e $y \in B \cap B'$, existe $B'' \in \mathcal{B}$ centrado em y tal que $B'' \subset B \cap B'$.

(b) A família τ é uma topologia em X.
(c) Cada $B \in \mathcal{B}$ é aberto.
(d) Para cada $x \in X$, $\mathcal{B}_x$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x.

A afirmação seguinte é uma consequência imediata da Proposição 2.1, mas é muito mais simples de demonstrar, usando (1).

`Exercício 2.3`: Mostre que, para cada $x \in X$, a aplicação afim $\alpha_x : X \to X$, $\alpha_x(y) = x + y$, $y \in X$, é um homeomorfismo.

Dizemos que a família $\mathcal{F}$ é *separante* se, para todo $x \in X$, $x \neq 0$, existe $p \in \mathcal{F}$ tal que $p(x) \neq 0$.

`Exercício 2.4`: Mostre que, se $\mathcal{F}$ for separante, então (X, τ) é um espaço de Hausdorff.

Quando o contexto estiver claro, muitas vezes assumiremos sem afirmar explicitamente que X está munido da topologia τ definida no Exercício 2.2. Chamaremos τ de *a topologia induzida em X pela família de seminormas $\mathcal{F}$*. Para desenvolver a intuição, pode ser útil particularizar um enunciado sobre (X, τ) para o caso em que $\mathcal{F}$ contém apenas um elemento e esse elemento é uma norma.

Proposição 2.1. *A aplicação $+ : X \times X \to X$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$, é contínua.*

`Demonstração:` Dados $(x_1, x_2) \in X \times X$ e V uma vizinhança de $x_1 + x_2$, existe $B \in \mathcal{B}_{x_1+x_2}$ tal que $B \subseteq V$. O aberto B é da forma

$$B \;=\; \{x_1 + x_2 + z;\; z \in X \text{ e } p(z) < r \text{ para todo } p \in F\,\},$$

para algum $r > 0$ e algum $F \subseteq \mathcal{F}$ finito. Defina

$$\widetilde{B} \;=\; \{z \in X;\; p(z) < \frac{r}{2} \text{ para todo } p \in F\,\}$$

Então, $x_i + \widetilde{B}$ é vizinhança aberta de x_i, $i = 1, 2$. Segue da definição da topologia do produto cartesiano $X \times X$ que $W = (x_1 + \widetilde{B}) \times (x_2 + \widetilde{B})$ é uma vizinhança aberta de (x_1, x_2). Como

$$p((y_1 + y_2) - (x_1 + x_2)) \;\leq p(y_1 - x_1) \;+\; p(y_2 - x_2),$$

decorre agora que, se $(y_1, y_2) \in W$, então $(y_1, y_2) \in \mathcal{B}_{x_1+x_2} \subseteq V$. $\square$

Proposição 2.2. *A aplicação $\circ : \mathbb{C} \times X \to X$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, é contínua.*

`Demonstração:` Dados $(\lambda, x), (\eta, y) \in \mathbb{C} \times X$ e $p \in \mathcal{F}$ arbitrários, temos:

$$p(\lambda x - \eta y) = p(\lambda x - \eta x + \eta x - \eta y) \leq |\lambda - \eta| p(x) + |\eta| p(x - y) \leq |\lambda - \eta| p(x) + (|\lambda - \eta| + |\lambda|) p(x - y).$$

Se $p(x-y) < \delta$ e $|\lambda - \eta| < \delta$, então

$$p(\lambda x - \eta y) \le \delta(p(x) + |\lambda|) + \delta^2.$$

Fixemos o ponto $(\lambda, x) \in \mathbb{C} \times X$ e uma vizinhança V de $\lambda x \in X$. Existem $\epsilon > 0$ e $F \subseteq \mathcal{F}$ finita tais que $B(\lambda x; \epsilon, F) \subseteq V$. Tome $\delta > 0$ tal que $\delta(p(x) + |\lambda|) + \delta^2 < \epsilon$ para toda $p \in F$ [Por que existe tal δ?]. Segue das estimativas do parágrafo anterior que

$$(\eta, y) \in \{z \in \mathbb{C};\, |z - \lambda| < \delta\} \times B(x; \delta, F) \implies \eta y \in B(\lambda x; \epsilon, F) \subseteq V.$$

Provamos que a imagem inversa de V por $\circ$ contém a vizinhança $\{z \in \mathbb{C};\, |z - \lambda| < \delta\} \times B(x; \delta, F)$ de (λ, x) em $\mathbb{C} \times X$. $\square$

As Proposições 1 e 2, juntas, poderiam ser resumidas na frase "(X, τ) é um espaço vetorial topológico". Mas na definição de espaço vetorial topológico se costuma exigir também, além da continuidade de $+$ e de $\circ$, que o espaço seja de Hausdorff, o que, no nosso caso, será verificado se a família $\mathcal{F}$ for separante (Exercício 2.4). Um espaço vetorial topológico com a propriedade de que todo ponto possui um sistema fundamental de vizinhanças convexas é chamado de *localmente convexo*. Os Exercícios 2.1 e 2.2d implicam que este nosso (X, τ), com τ induzida por $\mathcal{F}$, é localmente convexo. É verdadeira, mas não vamos usar, a seguinte recíproca: *se X é um espaço vetorial complexo, τ é uma topologia de Hausdorff em X, as aplicações $+$ e $\circ$ são contínuas, e a origem possui um sistema fundamental de vizinhanças convexas, então τ é a topologia induzida por alguma família separante de seminormas $\mathcal{F}$* [10, Theorem 1.36].

`Exercício 2.5`: Mostre que cada $p : X \mapsto [0, \infty)$, $p \in \mathcal{F}$, é uma função contínua.

`Exercício 2.6`: Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em X. Mostre que $x_n \to x$, $x \in X$, se e somente se $p(x - x_n) \to 0$ para toda $p \in \mathcal{F}$.

`Exercício 2.7`: Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ famílias de seminormas em X e τ e σ, respectivamente, as topologias induzidas por $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ em X. Mostre que $\sigma \subseteq \tau$ se e somente se, para todo $q \in \mathcal{G}$, existem $F \subseteq \mathcal{F}$ finito e $C > 0$ tais que $q(x) \le C \sum_{p \in F} p(x)$, para todo $x \in X$.

O Exercício 2.7 é um caso particular da proposição seguinte, no caso em que $X = Y$ e T é a aplicação identidade.

Proposição 2.3. *Sejam X e Y espaços vetoriais, sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ famílias de seminormas em X e em Y, respectivamente, sejam τ e σ, as topologias induzidas por $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ em X e em Y. Seja $T : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ uma aplicação linear. As seguintes afirmações são equivalentes.*

(1) *Dada* $q \in \mathcal{G}$, *existem* $F \subseteq \mathcal{F}$ *finito e* $C > 0$, *tais que* $q(Tx) \leq C \sum_{p \in F} p(x)$, *para todo* $x \in X$.

(2) T *é contínua na origem.*

(3) T *é ćontínua.*

`Demonstração:` Suponhamos que vale (1) e provemos (2). Seja $V \subseteq Y$ aberto contendo 0. Existem $G = \{q_1, \cdots q_m\} \subseteq \mathcal{G}$ e $r > 0$ tais que $B(0; r, G) \subseteq V$. Segue de (1) que, para cada $j = 1, \cdots, m$, existem $F_j \subseteq \mathcal{F}$ e $C_j > 0$ tais que $q_j(Tx) \leq C_j \sum_{p \in F_j} p(x)$, para todo $x \in X$. Tome

$$F = \bigcup_{j=1}^{m} F_j \qquad\qquad s = \min\left\{\frac{r}{C_1|F_1|}, \cdots, \frac{r}{C_m|F_m|}\right\}$$

com $|F_j|$ denotando a cardinalidade de F_j. Se $p(x) < s$ para toda $p \in F$, então $q(Tx) < r$ para toda $q \in G$. Provamos que $B(0; s, F) \subseteq T^{-1}(B(0; r, G))$, ou seja, que 0 é um ponto interior de $T^{-1}(V)$, o que demonstra (2).

Suponhamos que vale (2) e provemos (3). Vamos usar a notação e a afirmação do Exercício 2.3. Queremos mostrar que T é contínua em um ponto $x \in X$ arbitrário. Defina $y \coloneqq Tx$. Como T é contínua em 0 e as translações são contínuas, $\alpha_y \circ T \circ \alpha_{-x}$ é contínua em x. Como $T = \alpha_y \circ T \circ \alpha_{-x} = T$ (aqui usamos que T é linear), T é contínua em x, como queríamos.

Suponhamos que vale (2) e provemos que vale (1). Dada $q \in \mathcal{G}$, considere a vizinhança aberta $B(0; 1, \{q\})$ da origem em Y. Segue da continuidade de T em 0 que existem $F \subseteq \mathcal{F}$ finito e $r > 0$ tais que $B(0; r, F) \subseteq T^{-1}(B(0; 1, \{q\}))$. Ou seja, F e r são tais que

$$p(x) < r \text{ para toda } p \in F \quad \Longrightarrow q(x) < 1.$$

Dado $x \in X$ tal que $P(x) \coloneqq \sum_{p \in F} p(x) > 0$, temos que $x' \coloneqq \dfrac{r\,x}{2\,P(x)} \in B(0; r, F)$. Logo, $q(Tx') < 1$, o que é equivalente a

$$q(Tx) \; < \; \frac{2}{r} \sum_{p \in F} p(x).$$

Para provar que

$$q(Tx) \; \leq \; \frac{2}{r} \sum_{p \in F} p(x), \quad \text{para todo} \quad x \in X,$$

basta provar que $P(x) = 0$ implica $q(Tx) = 0$. Tome x tal que $P(x) = 0$. Para todo $s \in \mathbb{R}$, temos $p(sx) = |s|p(x) \leq |s|P(x) = 0 < r$, para toda $p \in F$. Logo $q(T(sx)) = |s|q(Tx) < 1$ para todo $s \in \mathbb{R}$, o que só é possível se $q(Tx) = 0$. $\square$

Dada $\mathcal{F}$ uma família de seminormas em X, a família de seminormas

$$\mathcal{F}' = \left\{ \sum_{j=1}^{n} m_j p_j;\ p_1, \cdots, p_n \in \mathcal{F},\ m_1, \cdots, m_n \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

satisfaz a propriedade adicional:

$$p, q \in \mathcal{F}' \implies p + q \in \mathcal{F}'.$$

As topologias induzidas por $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ em X são idênticas, de modo que não é perda de generalidade supor que um espaço localmente convexo tem sua topologia induzidda por uma família de seminormas fechada pela soma.

Assumindo que a família $\mathcal{F}$ no enunciado da Proposição 2.3 é fechada pela soma de seminormas, a condição (1) pode ser substituída pela afirmação seguinte.

Dada $q \in \mathcal{G}$, existem $p \in \mathcal{F}$ e $C > 0$, tais que $q(Tx) \leq C\, p(x)$, para todo $x \in X$.

`Exercício 2.8`: Seja X um espaço vetorial complexo e seja $\mathcal{F} = \{p_1, p_2, \cdots\}$ uma família enumerável separante de seminormas em X.

(a) Mostre que

$$d(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x - y)}{1 + p_k(x - y)}$$

é uma métrica em X, invariante por translações. Note que $d(x, 0) < 1$ para todo $x \in X$.

(b) Mostre que a topologia induzida por $\mathcal{F}$ em X coincide com a topologia induzida pela métrica d.

(c) Mostre que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em (X, d) é de Cauchy se e somente se

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall \epsilon > 0,\ \exists N_0;\ n, m \geq N_0 \implies p_k(x_n - x_m) < \epsilon.$$

(d) Sejam Y um espaço vetorial localmente convexo e seja $T : X \to Y$ linear. Mostre que T é contínua se e somente se $Tx_n \longrightarrow 0$ para toda sequência (x_n) tal que $x_n \longrightarrow 0$.

Definição 2.4. *Um espaço de Fréchet é um espaço vetorial complexo X munido de uma família enumerável separante de seminormas que, ademais, torna-se um espaço métrico completo quando munido da métrica do Exercício 2.8.*

Distribuições de suporte compacto.

Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, denotemos por $C^\infty(\Omega)$ o espaço das funções infinitamente deriváveis de Ω em $\mathbb{C}$. Para cada n-upla de inteiros não-negativos $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, para cada $f \in C^\infty(\Omega)$, denotemos por $\partial^\alpha f$ a derivada parcial de ordem $|\alpha| \coloneqq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$,

$$\partial^\alpha f(x) = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f(x), \quad x \in \Omega.$$

Quando $\alpha = 0$, entende-se que $\partial^\alpha f = f$. Para cada compacto $K \subset \Omega$ e para cada $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^n$, definimos a seminorma

$$p_{\alpha,K}(f) = \sup_{x \in K} |\partial^\alpha f(x)|, \quad f \in C^\infty(\Omega).$$

O espaço $C^\infty(\Omega)$ munido da topologia induzida pela família de todas as seminormas $p_{\alpha,K}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0$, $K \subset \Omega$ compacto, foi denotado por Laurent Schwartz por $\mathcal{E}(\Omega)$. Uma sequência (f_k) converge a 0 em $\mathcal{E}(\Omega)$ se e somente se, para todo $\alpha \in (N_0)^n$ e para todo compacto $K \subset \Omega$, $\partial^\alpha f_k|_K$ converge uniformemente a 0.

É possível escrever Ω como uma união enumerável de compactos,

$$\Omega = \bigcup_{k=0}^{n} K_k, \tag{2}$$

tais que, para cada k, K_k esteja contido no interior de K_{k+1}. Para cada $k \in \mathbb{N}$, defina $p_k(f) = \max\{p_{\alpha,K_k}(f);\ |\alpha| \leq k\}$

`Exercício 2.8`: (a) Mostre que a topologia induzida pela família enumerável de seminormas $\{p_0, p_1, p_2, \cdots\}$ coincide com a topologia de $\mathcal{E}(\Omega)$ anteriormente definida. (b) Mostre que $\mathcal{E}(\Omega)$ é um espaço de Fréchet. (c) Mostre que o espaço vetorial $C^\infty(\Omega)$ não possui uma base (algébrica) enumerável.
`Sugestões`: (b) Dada sequência de Cauchy $(f_k)_k$, para cada compacto K e para cada multiíndice α, $(\partial^\alpha f_k|_K)_k$ é sequência de Cauchy com a norma do supremo em $C(K)$, que é completo. Isso permite definir $g^\alpha \in C(\Omega)$, tal que $\partial^\alpha f_k \longrightarrow g^\alpha$ uniformemente sobre compactos. Defina $f = g^{(0,\cdots,0)}$. Troque a ordem da derivada com o limite de sequências de funções definidas em intervalos da reta para provar que $\partial^\alpha f = g^\alpha$. (c) Use o Teorema de Baire.

Definição 2.5. *Dados $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $k \in \mathbb{N}$ ou $k = \infty$, $C_c^k(\Omega)$ denota o espaço das funções de classe C^k de Ω em $\mathbb{C}$ que se anulam fora de algum compacto contido em Ω.*

`Exercício 2.9` Mostre que $C_c^\infty(\Omega)$ é um subespaço denso de $\mathcal{E}(\Omega)$. `Sugestão`: Para cada K_k da união em (2), existe $\chi_k \in C_c^\infty(\Omega)$, $0 \leq \chi \leq 1$, que vale 1 em uma vizinhança de K_k.

Um funcional linear contínuo $u : \mathcal{E}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ é chamado de *distribuição de suporte compacto* em Ω. O espaço das distribuições de suporte compacto em Ω é denotado por $\mathcal{E}'(\Omega)$. Este também pode ser munido de uma estrutura de espaço localmente convexo, mas não veremos isto aqui.

`Exercício 2.10`: (a) Seja $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Mostre que existe um compacto K contido em Ω tal que, se $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ e f se anula em um aberto contendo K, então $u(f) = 0$.
(b) Seja $u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ linear e suponha que existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que, se f se anula fora de K, então $u(f) = 0$. Mostre que existe $\tilde{u} \in \mathcal{E}'(\Omega)$ cuja restrição a $C_c^\infty(\Omega)$ coincide com u.
`Observação`: A unicidade de $\tilde{u}$ decorre do Exercício 2.9. `Dica`: É preciso usar que, dado K compacto contido em Ω aberto de $\mathbb{R}^n$, existe $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$, $0 \leq \chi(x) \leq 1$, $x \in \Omega$, $\chi(x) = 1$ para todo x em uma vizinhança de K.

`Exercício 2.11`: Seja $u : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função integrável (integrável a Lebesgue ou que possui integral de Riemann imprópria absolutamente convergente) que se anula fora de um compacto K.
(a) Mostre que $T_u(f) = \int_\Omega u(x)f(x)\,dx$, $f \in C^\infty(\Omega)$, define um elemento de $\mathcal{E}'(\Omega)$. (b) Mostre que, se $u, v \in C_c(\Omega)$ e $T_u = T_v$, então $u(x) = v(x)$ para todo $x \in \Omega$.

`Exercício 2.12`: Sejam $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ e $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^n$. Denotemos por $\partial^\alpha u$ a aplicação

$$\mathcal{E}(\Omega) \ni f \quad \longmapsto \quad \partial^\alpha u(f) := (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha f) \in \mathbb{C}.$$

Mostre que $\partial^\alpha u \in \mathcal{E}'(\Omega)$.

`Exercício 2.13`: Seja $u \in C_c^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Dado $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^n$, $|\alpha| \leq k$, mostre que $\partial^\alpha T_u = T_{\partial^\alpha u}$.

As afirmações dos quatro exercícios precedentes podem ser informalmente resumidas na frase: distribuições de suporte compacto são "funções de suporte compacto generalizadas", infinitamente diferenciáveis num sentido também generalizado.

`Exercício 2.14`: Dado $a \in \Omega$, defina $\delta_a : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ por $\delta_a(f) = f(a)$.
(a) Mostre que $\delta_a \in \mathcal{E}'(\Omega)$. (b) Calcule $(\partial_{x_1}\delta_a)(f)$ para $f \in C^\infty(\Omega)$ arbitrária.

`Exercício 2.15`: Sejam $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $I = [a, b]$ um intervalo fechado limitado. Para cada $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, defina $u(f) = \displaystyle\int_I g(x)f(x)\,dx$. Mostre que $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ e calcule sua derivada primeira, u'.
`Sugestão`: Integre por partes.

Distribuições temperadas.

Dados $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^n$, definamos $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Denotando por $|\cdot|$ também a norma euclideana em $\mathbb{R}^n$, note que $|x^\alpha| \leq |x|^{|\alpha|} \leq (1 + |x|^2)^{|\alpha|/2}$.

Denotemos por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções de classe C^∞, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, tais que, para todos $\alpha, \beta \in (\mathbb{N}_0)^n$,

$$p_{\alpha,\beta}(f) \coloneqq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| \tag{3}$$

é finita. Os elementos de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ são chamados de *funções infinitamente diferenciáveis de decrescimento rápido* e o espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é chamado de *espaço de Schwartz.* Toda função C^∞ de suporte compacto pertence a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Um exemplo menos imediato são as funções do tipo $f(x) = p(x)e^{-|x|^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$, em que p é uma função polinomial.

A equação (3) define seminormas em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. O conjunto dos funcionais lineares contínuos de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ munido da topologia induzida pela família $\mathcal{F} = \{p_{\alpha,\beta};\, \alpha, \beta \in (\mathbb{N}_0)^n\}$ é denotado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Os elementos de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ são chamados de *distribuições temperadas.*

`Exercício 2.16`: Para cada $m \in \mathbb{N}_0$ e $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, defina

$$p_m(f) = \sup\{(1 + |x|^2)^m |\partial^\alpha f(x)|;\, x \in \mathbb{R}^n,\, |\alpha| \leq m\}.$$

Mostre que uma aplicação linear $u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma distribuição temperada se e somente se existem $m \in \mathbb{N}_0$ e $C > 0$ tais que $|u(f)| \leq C\, p_m(f)$ para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Diz-se que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ é *localmente integrável*, o que se costuma denota por $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, se, para todo $R > 0$, $\displaystyle\int_{\{x;|x_i|<R,i=1,\cdots,n\}} |f(x)|\, dx < \infty$ (integral de Lebesgue ou imprópria de Riemann).

`Exercício 2.17`: Mostre que, se $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ é localmente integrável e existem $C > 0$ e $m \in \mathbb{N}_0$ tais que $|u(x)| \leq C(1 + |x|^2)^m$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ (ou para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$), então $T_u(f) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)f(x)\, dx$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, define uma distribuição temperada.

`Exercício 2.18`: (a) Mostre que a inclusão de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é contínua.
(b) Mostre que se $(f_k)_k$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então ela é uma sequência de Cauchy também na topologia localmente convexa mais fraca de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
(c) Seja $u : C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ uma distribuição de suporte compacto. Mostre que a restrição de u a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é uma distribuição temperada.
`Sugestão`: Para cada α e para cada K, $p_{\alpha,K}(f) \leq p_{0,\alpha}(f)$ para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Lema 2.6. *Seja $(f_k)_k$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e suponha que f_k converge a f em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Mostre que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e que f_k converge a f também na topologia de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

`Demonstração:` Queremos provar que, para cada par de multi-índices α e β,

$$p_{\alpha,\beta}(f) < \infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{k\to\infty} p_{\alpha,\beta}(f - f_k) = 0. \tag{4}$$

Provemos isto primeiro no caso $\beta = 0$. Uma observação preliminar é que

$$M_\alpha := \sup_k p_{\alpha,0}(f_k) < \infty,$$

afirmação de demonstração análoga (usando o exercício 2.8c) à do fato de que toda sequência de Cauchy em um espaço métrico é limitada: dado $\epsilon = 1$, tome N tal que $k \geq N$ implique $p_{\alpha,0}(f_k - f_N) < 1$ e portanto $p_{\alpha,0}(f_k) \leq p_{\alpha,0}(f_k - f_N) + p_{\alpha,0}(f_N) < 1 + p_{\alpha,0}(f_N)$.

Como $f_k \longrightarrow f$ em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ temos

$$|x^\alpha f(x)| = \lim_{k\to\infty} |x^\alpha f_k(x)| \leq \limsup_{k\to\infty} p_{\alpha,0}(f_k) \leq M_\alpha$$

e portanto $p_{\alpha,0}(f) \leq M_\alpha$. Por fim, dado $\epsilon > 0$, tome $N \in \mathbb{N}$ tal que $p_{\alpha,0}(f_k - f_l) < \epsilon$ sempre que $k, l \geq N$. Daí, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $k \geq N$,

$$|x^\alpha (f - f_k)(x)| = \lim_{l\to\infty} |x^\alpha (f_l - f_k)(x)| \leq \limsup_{l\to\infty} p_{\alpha,0}(f_l - f_k)(x) \leq \epsilon$$

e portanto $p_{\alpha,0}(f - f_k) \leq \epsilon$. Isto conclui a demonstração de (4) para o caso em que $\beta = 0$.

Para o caso em que β é qualquer, basta aplicar o que acabamos de provar para a sequência $(\partial^\beta f_k)_k$, que também satisfaz as hipóteses do Lema. □

Corolário 2.7. *$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é completo.*

`Demonstração:` Seja $(f_k)_k$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Pelo Exercício 2.18, $(f_k)_k$ é de Cauchy também em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pelo Exercício 2.8, $(f_k)_k$ converge em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Chamemos de f o limite de $(f_k)_k$ em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pelo Lema 2.6, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $(f_k)_k$ converge para f também em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. □

`Exercício 2.19`: Mostre que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
`Sugestões`: (1) Dada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, considere a sequência $f_n(x) = \chi(x/n)f(x)$, sendo $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ constante e igual a 1 em $B(0,1)$. (2) Para quaisquer $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e para todo $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^n$, temos

$$\partial^\alpha(fg) \; = \; \sum_{0\leq\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta f)(\partial^{\alpha-\beta} g)$$

`Notação`: (1) $0 \leq \beta \leq \alpha$ significa $0 \leq \beta_j \leq \alpha_j$, $j = 1, \cdots, n$. (2) $\displaystyle\binom{\alpha}{\beta} := \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n}$.

`Exercício 2.20`: Defina $T : C_c^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ por $T(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^x f(x)\, dx$. Para cada intervalo fechado $I = [a, b]$, considere $C_c^\infty([a,b]) := \{f \in C_c^\infty(\mathbb{R});\ f \text{ se anula fora de } [a,b]\}$. (a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, mostre que é contínua a restrição de T a $C_c^\infty([-n,n])$ munido da topologia induzida de $\mathcal{E}(\mathbb{R})$. (b) Mostre que T não é contínua em $C_c^\infty(\mathbb{R})$ com a topologia induzida de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

`Observação`: A afirmação do 2.20-a pode ser resumida na frase "T é uma distribuição, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$". O 2.20-b pode ser reformulado em linguagem informal como: "a função exponencial não é uma distribuição temperada, $e^x \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$".

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, sejam p e q reais, $p > 1$ e $q > 1$, satisfazendo $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Dadas $f, g \in C_c(\Omega)$, vale a desigualdade

$$\left| \int_\Omega f(x)g(x)\,dx \right| \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \tag{5}$$

(esta é a chamada *desigualdade de Hölder*).

Decorre de (5) e da densidade de $(C_c(\Omega), \|\cdot\|_r)$ em $L^r(\Omega)$, $1 \leq r < \infty$ (esta afirmação é um teorema da teoria da medida e integração – ou decorre imediatamente da definição de $L^r(\Omega)$ se insistirmos na abordagem da Seção 1 de considerar $L^r(\Omega)$ como sendo apenas o completamento de $(C_c(\Omega), \|\cdot\|_r)$), que a forma bilinear

$$B_c : (C_c(\Omega), \|\cdot\|_p) \times (C_c(\Omega), \|\cdot\|_q) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad B_c(f,g) := \int_\Omega f(x)g(x)\,dx, \ \ f, g \in C_c(\Omega),$$

possui uma única extensão linear contínua $B : L^p(\Omega) \times L^q(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo $|B(f,g)| \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. A fórmula

$$B(f,g) \ = \ \int_\Omega f(x)g(x)\,dx, \quad f \in L^p(\Omega), \ g \in L^q(\Omega), \tag{6}$$

seria um abuso de notação se insistíssemos na abordagem da Seção 1 de considerar $L^r(\Omega)$ como sendo apenas o completamento de $(C_c(\Omega), \|\cdot\|_r)$, mas ela faz perfeito sentido e é verdadeira usando integral de Lebesgue. Os leitores que desejem se manter fiéis à abordagem da Seção 1 não precisam atribuir um significado ao segundo membro de (6), basta interpretá-lo como apenas uma notação, definida por (6).

`Exercício 2.21`: Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto. Considere $C_b(\Omega)$ o espaço vetorial das funções $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ contínuas e limitadas munido da norma

$$\|f\|_\infty \ := \ \sup_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

(a) Mostre que $(C_b(\Omega), \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach.

(b) Mostre que o fecho de $(C_c(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ em $C_b(\Omega)$ é igual a

$$C_0(\Omega) \ := \ \{f|_\Omega; \ f \in C(\overline{\Omega}), f|_{\partial\Omega} \equiv 0\}.$$

Analogamente à discussão em letras miúdas que precedeu o Exercćio 2.21, a forma bilinear

$$B_c : (C_c(\Omega), \|\cdot\|_1) \times (C_b(\Omega), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad B_c(f,g) := \int_\Omega f(x)g(x)\,dx, \ \ f \in C_c(\Omega), \ \ g \in C_b(\Omega),$$

possui uma única extensão linear contínua $B : L^1(\Omega) \times C_b(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$, satisfazendo $|B(f,g)| \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in C_b(\Omega)$. Temos (ou escreveremos, dependendo da abordagem) $B(f,g) = \displaystyle\int_\Omega f(x)g(x)\,dx$

Aqui nos deparamos com uma vantagem indiscutível da integral de Lebesgue (há outras). Esta forma bilinear B pode ser estendida com a mesma norma para $L^1(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$. O espaço de Banach $L^\infty(\Omega)$ não pode ser definido como o completamento de um espaço normado razoável e contém $C_b(\Omega)$ como um subespaço fechado próprio.

`Exercício 2.22`: Seja $1 \leq p < \infty$. (a) Mostre que a aplicação identidade em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ se estende a uma aplicação linear contínua e injetora $i : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$.
(b) Para cada $u \in L^p(\Omega)$, defina $T_u(f) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} u(x)f(x)\,dx$, $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Mostre que T_u se estende a uma distribuição temperada.
`Dicas`: (1) Multiplique e divida o integrando por $(1+|x|^2)^m$ para m suficientemente grande. (2) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^{-m}\,dx < \infty$ se $2m > n$. (3) Dependendo do caminho, ou da abordagem que for usada, talvez seja preciso usar que $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $C_c^\infty(\Omega)$ com a norma $\|\cdot\|_p$.

Topologias induzidas por transformações lineares.

Consideremos agora uma classe especial de espaços localmente convexos, aqueles cujas seminormas são definidas a partir de aplicações lineares definidas em X. Veremos alguns exemplos dessa classe na Seção 4.

Seja Y um espaço vetorial normado e seja $\mathcal{L}$ uma família de transformações lineares de X em Y. É bom frisar que X pode não ter uma topologia ainda, de modo que nem faz sentido, em geral, pedir que essas transformações lineares sejam contínuas. Para cada $L \in \mathcal{L}$, defina $p_{_L} : X \mapsto [0,+\infty)$ por

$$p_{_L}(x) \;=\; \|Lx\|,\; x \in X.$$

Diremos que a família $\mathcal{L}$ separa pontos se, para todo $x \in X$, $x \neq 0$, existe $L \in \mathcal{L}$ tal que $Lx \neq 0$. É claro então que $\mathcal{L}$ separar pontos é equivalente à família de seminormas $\mathcal{F} = \{p_{_L};\, L \in \mathcal{L}\}$ ser separante. É comum chamar a topologia τ induzida por $\mathcal{F}$ também de *a topologia induzida por* $\mathcal{L}$. Vamos denotar $\tau = \sigma(X,\mathcal{L})$, apesar desta notação ser comum apenas no caso em que $\mathcal{L}$ consiste de funcionais lineares.

Proposição 2.8. *Seja X um espaço vetorial de dimensão infinita munido da topologia induzida por uma família $\mathcal{L}$ que satisfaz a seguinte propriedade: dados $L_1, L_2, \cdots, L_n \in \mathcal{L}$ arbitrários, a interseção $\cap_{j=1}^n \ker L_j$ tem dimensão infinita. Então, para $F = \{p_{_{L_1}}, \cdots, p_{_{L_n}}\}$ e para todo $r > 0$, a vizinhança da origem $B(0; r, F)$ contém um subespaço de dimensão infinita.*

`Demonstração:` Segue das definições que

$$\bigcap_{j=1}^{n} \ker L_j \;=\; \bigcap_{j=1}^{n} \ker p_{_{L_j}} \;\subseteq B(0; r, F),$$

o que demonstra a afirmação. □

Dizemos que um subespaço U de um espaço vetorial W tem codimensão finita se existe subespaço $V \subseteq W$ de dimensão finita tal que $U \oplus V = W$. Isto é equivalente a pedir que o quociente W/U tenha dimensão finita.

Lema 2.9. *Seja V um espaço vetorial e sejam $V_1, V_2, \cdots, V_n$ subespaços de codimensão finita de V. Então $V_1 \cap V_2 \cdots \cap V_n$ tem codimensão finita.*

`Demonstração:` Basta supor $n = 2$. A aplicação $(V_1 + V_2)/V_2 \longrightarrow V_1/(V_1 \cap V_2)$, $v_1 + v_2 + V_2 \longmapsto v_1 + V_1 \cap V_2$, $v_i \in V_i$, $i = 1, 2$, está bem definida e é um isomorfismo. O quociente $(V_1 + V_2)/V_2$ pode ser visto como um subespaço de V/V_2, que tem dimensão finita por hipótese. Logo $V_1 \cap V_2$ é um subespaço de codimensão finita em V_1, que por sua vez tem codimensão finita em V, por hipótese. Logo $V_1 \cap V_2$ tem codimensão finita em V. $\square$

Proposição 2.10. *A hipótese sobre $\mathcal{L}$ na Proposição 2.8 é sempre satisfeita se $Y = \mathbb{C}$ (norma dada pelo valor absoluto). Daí, se X tiver dimensão infinita e $\mathcal{L}$ for uma família de funcionais lineares de X, toda vizinhança da origem de X (na topologia $\sigma(X, \mathcal{L})$) contém um subespaço de dimensão infinita.*

`Demonstração:` Em vista do Lema 2.9, é suficiente provar que, para todo funcional linear $\lambda : X \longrightarrow \mathbb{C}$, $\ker \lambda$ tem codimensão finita. Basta supor que λ não é o funcional nulo. Daí, existe $x_0 \in X$ tal que $\lambda(x_0) = 1$. Para todo $x \in X$,

$$\lambda(x - \lambda(x)x_0) = \lambda(x) - \lambda(x)\lambda(x_0) = 0.$$

Isto mostra que X é gerado por $\ker \lambda \cup \{x_0\}$. $\square$

3. Redes

Embora o Exercício 2.6 seja útil em muitas situações, não se pode usá-lo para demonstrar os Exercícios 2.7 e 2.8, pois a topologia induzida por uma família de seminormas não necessariamente satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade. O conceito de *redes* generaliza o de sequências e o substitui, muito frequentemente, na demonstração para espaços topológicos mais gerais de resultados que seriam canonicamente demonstrados em espaços métricos usando sequências. Este é o assunto desta seção.

Um *conjunto dirigido* é um conjunto parcialmente ordenado $(I, \prec)$ satisfazendo que, dados $\alpha, \beta \in I$, existe $\gamma \in I$ tal que $\alpha \prec \gamma$ e $\beta \prec \gamma$. O conjunto dos naturais $\mathbb{N}$ com a ordem usual é o exemplo mais canônico de um conjunto dirigido. Outro exemplo muito usado é o conjunto das vizinhanças de um ponto x de um espaço topológico, ordenadas por "$U \prec V$ se e somente se $U \supseteq V$". Pode-se tomar também um sistema fundamental de vizinhanças de um ponto dado como um conjunto dirigido. Pensando nas bolas abertas de raio $\frac{1}{n}$ centradas em um ponto x de um espaço métrico, deve soar mais natural que a ordem de um sistema de vizinhanças seja definida por $\supseteq$ em vez de $\subseteq$.

Seja X um espaço topológico. Uma rede em X é uma aplicação definida em um conjunto dirigido I e tomando valores em X, comumente denotada por $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$. Dizemos que a rede $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ converge para $x \in X$, o que se denota por $\lim x_\alpha = x$, se, para todo aberto U contendo x, existe $\alpha_0 \in I$ tal que $x_\alpha \in U$ para todo α que satisfaça $\alpha_0 \prec \alpha$. Se X for um espaço de Hausdorff, o limite de uma rede é único, caso exista.

A grande utilidade das redes repousa principalmente nas duas proposições seguintes.

Proposição 3.1. *Seja X um espaço topológico e seja $F \subset X$. O conjunto F será fechado em X se e somente se contiver os limites de todas as redes convergentes $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ tais que $x_\alpha \in F$ para todo $\alpha \in I$.*

`Demonstração:` Suponha que F seja fechado e tome arbitrariamente uma rede $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ tal que $x_\alpha \in F$ para todo $\alpha \in I$. Se $\lim x_\alpha = x$, então toda vizinhança de x contém algum x_α, $x_\alpha \in F$. Ou seja, x pertence a $\overline{F}$, o fecho de F. Como F é fechado, $\overline{F} = F$, logo $x \in F$.

Reciprocamente, seja $F \subseteq X$ e suponha que o limite de toda rede convergente $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$, $x_\alpha \in F$ para todo $\alpha \in I$, pertence a F. Tome $x \in \overline{F}$ arbitrário e defina $I = \{S \subseteq X; S \text{ é vizinhança de } x\}$. Para cada $\alpha \in I$, tome $x_\alpha \in \alpha \cap F$. Então a rede $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ converge para x. Segue da hipótese que $x \in F$. Provamos que $\overline{F} \subseteq F$. $\square$

Proposição 3.2. *Seja $f : X \to Y$ uma função definida entre os espaços topológicos X e Y. A função f será contínua se e somente se $\lim f(x_\alpha) = f(x)$ para toda rede $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ em X tal que $\lim x_\alpha = x$.*

`Demonstração:` Suponha que $f : X \to Y$ seja contínua e que $\lim x_\alpha = x$. Para toda vizinhança V de $f(x)$, $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de x. Tome α_0 tal que $x_\beta \in f^{-1}(V)$ para todo β satisfazendo $\alpha_0 \prec \beta$. Logo $f(x_\beta) \in V$ para todo β satisfazendo $\alpha_0 \prec \beta$. Provamos que $\lim f(x_\alpha) = f(x)$

Reciprocamente, suponha que $\lim f(x_\alpha) = f(x)$ sempre que $\lim x_\alpha = x$. Dado $x \in X$ arbitrário, seja V uma vizinhança de $f(x)$. Nosso objetivo é mostrar que $U = f^{-1}(V)$ é vizinhança x. Supondo por absurdo que U não seja uma vizinhança de x, vamos construir uma rede $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$, indexada pelo conjunto I de todas as vizinhanças de x, tal que $x_\alpha \to x$, embora $(f(x_\alpha))_{\alpha\in I}$ não convirja para $f(x)$.

Se U não é vizinhança de x, então toda vizinhança de x contém pontos do complementar de U. Para cada vizinhança α de x, tome $x_\alpha \in \alpha$, $x_\alpha \notin U$. Então $\lim x_\alpha = x$ e, portanto, $\lim f(x_\alpha) = f(x)$. Como V é vizinhança de $f(x)$, existe α_0 tal que $f(x_{\alpha_0}) \in V$ e portanto $x_{\alpha_0} \in U$, o que contradiz $x_{\alpha_0} \notin U$. $\square$

`Exercício 3.1`: Seja X um espaço localmente convexo com a topologia induzida pela família $\mathcal{F}$ de seminormas e seja $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ uma rede em X. Mostre que $\lim x_\alpha = x$, $x \in X$, se e somente se $p(x - x_\alpha) \to 0$ para toda $p \in \mathcal{F}$.

`Exercício 3.2`: Demonstre a implicação (1) $\Longrightarrow$ (2) da Proposição 2.3 usando redes.

`Exercício 3.3`: Seja Y um espaço vetorial normado, seja X um espaço vetorial munido da topologia induzida por uma família $\mathcal{L}$ de transformações lineares de X em Y e seja $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ uma rede em X. Mostre que $x_\alpha \longrightarrow x$ se se somente se $T(x_\alpha) \longrightarrow T(x)$ em Y para toda $T \in \mathcal{L}$.

Redes só não substituem sequências perfeitamente porque uma rede convergente em um espaço métrico pode não ser limitada. Por exemplo, seja I o conjunto de todas as vizinhanças do zero em um espaço vetorial normado X. Para cada $\alpha \in I$, seja t_α o supremo de $\{\|v\|;\ v \in \alpha\}$. Para cada $\alpha \in I$, tome $v_\alpha \in \alpha$ tal que $\|v_\alpha\| > t_\alpha/2$. Então $\lim v_\alpha = 0$, $\lim \|v_\alpha\| = 0$, mas $\sup\{\|v_\alpha\|,\ \alpha \in I\} = \infty$

4. Topologias fracas em espaços de Banach

As quatro topologias consideradas nesta seção são da forma $\sigma(X, \mathcal{L})$ (veja a página 15). A topologia fraca de um espaço de Banach X é a topologia induzida pela família de todos os funcionais lineares contínuos de X. A topologia fraca-* do dual X^* de um espaço de Banach X é induzida por uma família de funcionais lineares contínuos de X^*. A topologia forte de operadores e a topologia fraca de operadores são definidas no espaço de Banach $\mathfrak{B}(X, Y)$ de todas as transformações lineares contínuas entre de Y. A forte de operadores usa uma família de transformações lineares de $\mathfrak{B}(X, Y)$ em Y, a fraca de operadores usa uma família de funcionais lineares contínuos em $\mathfrak{B}(X, Y)$.

Para evitar confusão com a topologia forte de operadores, é prudente não chamar a topologia definida pela norma de operadores em $\mathfrak{B}(X, Y)$ de topologia forte, apesar de ela ser a mais forte dentre todas as mais conhecidas. É comum chamá-la de *topologia uniforme*, ou simplesmente de *topologia da norma*.

4.1. **Topologia fraca.**

Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita e denotemos por X^* seu dual. Para cada $\lambda \in X^*$, seja $p_\lambda : X \to \mathbb{C}$ a seminorma $p_\lambda(x) = |\lambda(x)|$, $x \in X$.

Segue do Teorema de Hahn-Banach que, se $x \in X$ é tal que $p_\lambda(x) = 0$ para todo $\lambda \in X^*$, então $x = 0$. Ou seja, a família de semi-normas $\mathcal{F}_1 := \{p_\lambda;\ \lambda \in X^*\}$ é separante.

A *topologia fraca* de X é, por definição, a topologia induzida por $\mathcal{F}_1$ em X. Segue do Exercício 2.9 que uma rede $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ converge para $x \in X$ se e somente se, para todo $\lambda \in X^*$, $\lim |\lambda(x - x_\alpha)| = 0$, ou seja $\lim \lambda(x_\alpha) = \lambda(x)$.

Dados $\lambda \in X^*$, $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ uma rede em X e $x \in X$, temos $|\lambda(x - x_\alpha)| \leq \|\lambda\|\|x - x_\alpha\|$. Daí,

$$\lim \|x - x_\alpha\| = 0 \implies \lim \lambda(x_\alpha) = \lambda(x)\, \forall \lambda \in X^* \implies \lim x_\alpha = x \text{ fracamente.}$$

Daí segue da Proposição 3.2 que a aplicação identidade de $(X, \|\cdot\|)$ em $(X, \tau_{\mathcal{F}})$ é contínua. Ou seja, a topologia da norma é mais fina do que a topologia induzida por $\mathcal{F}_1$.

Na notação da página 15, a topologia induzida pela família de seminormas $\mathcal{F}_1$ é a topologia $\sigma(X, X^*)$. Segue da Proposição 2.10 que toda vizinhança fraca de $0 \in X$ contém um subespaço de dimensão infinita. Em particular, a bola aberta $\{x \in X;\, \|x\| < 1\}$ não é um aberto da topologia fraca.

`Problema 4.1`: Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita. Defina $B = \{x \in X;\, \|x\| < 1\}$, $D = \{x \in X;\, \|x\| \leq 1\}$ e $S = \{x \in X;\, \|x\| = 1\}$.
(a) Mostre que B está contido no fecho de S na topologia fraca.
(b) Mostre que o fecho fraco de S é igual a D.

4.2. **Topologia fraca*.**

Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita e denotemos por X^* seu dual. Para cada $x \in X$, seja $p_x : X^* \to \mathbb{C}$ a seminorma $p_x(\lambda) = |\lambda(x)|$, $\lambda \in X^*$.

O funcional $\lambda \in X^*$ ser não-nulo é o mesmo que existir $x \in X$ tal que $p_x(\lambda) = |\lambda(x)| \neq 0$. Ou seja, a família de semi-normas $\mathcal{F}_2 \coloneqq \{p_x;\, x \in X\}$ é separante.

A *topologia fraca** de X^* é, por definição, a topologia induzida por $\mathcal{F}_2$ em X^*. Segue do Exercício 3.1 que uma rede $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in I}$ converge para $\lambda \in X^*$ na topologia fraca* se e somente se $\lim |(\lambda - \lambda_\alpha)(x)| = 0$ para todo $x \in X$, ou seja, se e somente se $\lim \lambda_\alpha(x) = \lambda(x)$ para todo $x \in X$. É por isso que a topologia fraca* em X^* também é chamada de *a topologia da convergência pontual.*

Sejam $\lambda \in X^*$ e $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in I}$ uma rede em X^*. Para todos $\alpha \in I$ e $x \in X$, temos $|\lambda_\alpha(x) - \lambda(x)| \leq \|\lambda_\alpha - \lambda\|\, \|x\|$. Daí:

$$\lim \|\lambda_\alpha - \lambda\| = 0 \implies \lim \lambda_\alpha(x) = \lambda(x) \text{ para todo } x \in X.$$

Ou seja, a aplicação identidade de $(X^*, \|\cdot\|)$ em $(X^*, \tau_{\mathcal{F}_2})$ é contínua. Ou seja, a topologia da norma em X^* é mais fina do que a topologia induzida por $\mathcal{F}_2$.

Dado $x \in X^*$, denotamos por $\widehat{x} : X^* \to \mathbb{C}$ o funcional linear $\widehat{x}(\lambda) = \lambda(x)$. Segue do Teorema de Hahn-Banach que a aplicação $x \mapsto \widehat{x}$ é uma imersão isométrica de X em X^{**}. Denotando também por X a imagem dessa aplicação, podemos escrever $X \subseteq X^{**}$. Na notação da página 15, a topologia induzida pela família de seminormas $\mathcal{F}_2$ é então a topologia $\sigma(X^*, X)$. Segue da Proposição 2.10 que toda vizinhança fraca* de $0 \in X^*$ contém um subespaço de dimensão infinita. Em particular, a bola aberta $\{\lambda \in X^*;\ \|\lambda\| < 1\}$ não é um aberto da topologia fraca*.

`Problema 4.2`: Mostre que X é denso em X^{**} na topologia $\sigma(X^{**}, X^*)$ (isto é, na topologia fraca* de $X^{**} = (X^*)^*$). Dicas: (i) Para todo $r > 0$ e para todo $F \subset X^*$ finito, existe $x \in X$ tal que $|\lambda(x)| < r$ para todo $\lambda \in F$. (ii) A topologia $\sigma(X^{**}, X^*)$ é invariante por translações (Exercício 2.3).

Diz-se que X é *reflexivo* quando $X^{**} = \{\widehat{x};\ x \in X\}$. Se for este o caso, então $\sigma(X^*, X) = \sigma(X^*, X^{**})$. Em outras palavras, se X for reflexivo, então as topologias fraca e fraca* em X^* coincidem.

Um resultado muito importante sobre a topologia fraca* é que a bola unitária fechada em X^* é compacta na topologia fraca*. Quando X é reflexivo, X^* também é. Segue que, se X é reflexivo, então $\{x;\ \|x\| \leq 1\}$ é "fracamente compacto".

4.3. **Topologia forte de operadores.**

Sejam X e Y espaços de Banach. Para cada $x \in X$, definimos a seminorma $p_x(T) = \|Tx\|$, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Chama-se de *topologia forte de operadores em* $\mathcal{B}(X, Y)$ a topologia induzida pela família (separante) de seminormas $\mathcal{F}_3 := \{p_x;\ x \in X\}$.

Uma rede $(T_\alpha)_{\alpha \in I}$ em $\mathcal{B}(X, Y)$ converge a T na topologia forte de operadores, ou simplesmente *converge fortemente a* T, se e somente se $T_\alpha(x) \longrightarrow T(x)$ para todo $x \in X$. Segue portanto que a topologia forte de operadores é mais fraca do que a topologia da norma em $\mathcal{B}(X, Y)$.

Proposição 4.1. *Sejam X e Y espaços de Banach de dimensão infinita, $a_1, \cdots, a_n \in X$. Então o subespaço*

$$N \ := \ \{T \in \mathcal{B}(X, Y);\ T(a_1) = \cdots = T(a_n) = 0\}$$

tem dimensão infinita.

`Demonstração:` Seja Z o subespaço de X gerado por $\{x_1, \cdots, x_n\}$ e escolha um $x_0 \notin Z$. Seja $\{x_0, x_1, \cdots, x_m\}$ uma base do subespaço $Z^\sharp$ gerado por $Z \cup \{x\}$, $m \leq n$. Para cada $0 \leq i \leq m$, seja $\widehat{x_i} : Z \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcional linear definido por

$$\widehat{x_i}(x_j) \ = \ \begin{cases} 1, & \text{se} \quad j = i \\ 0, & \text{se} \quad j \neq i \end{cases} .$$

Como $Z^\sharp$ tem dimensão finita, cada $\widehat{x_i}$ é contínuo e, portanto, pode ser estendido a um funcional $\lambda_i \in X^*$. O subespaço $W := \bigcap_{i=1}^{m} \ker \lambda_i$ é fechado e satisfaz $X = Z^\sharp \oplus W$ (para provar que $X = Z^\sharp + W$, use artifício análogo ao da demonstração da Proposição 2.10).

Dado $y \in Y$, é contínua a transformação linear $T^y : X \longrightarrow Y$ definida por $T^y(x_0) = y$, $T^y(x_i) = 0$ e $T^y(w) = 0$ para todo $w \in W$ (esta afirmação decorre da equivalência da norma de X à norma do produto cartesiano $Z^\sharp \times W$, o que por sua vez decorre do Teorema da Aplicação Aberta). Se $\{y_1, \cdots y_k\}$ é um subconjunto linearmente independente de Y, então $\{T^{y_1}, \cdots, T^{y_k}\}$ é um subconjunto linearmente independente de N. Como Y tem dimensão infinita, segue que a dimensão de N também é infinita. $\square$

Pela notação da página 15, a topologia forte de operadores coincide com $\sigma(\mathcal{B}(X,Y), \mathcal{L})$, para a família de transformações lineares $\mathcal{L} = \{\widetilde{x}; x \in X\}$, $\widetilde{x} : \mathcal{B}(X,Y) \to Y$, $\widetilde{x}(T) = Tx$. Segue da Proposição 4.1 que $\mathcal{L}$ satisfaz a hipótese da Proposição 2.8, que por sua vez implica que o conjunto $\{T \in \mathcal{B}(X,Y); \|T\| < 1\}$ não é aberto na topologia forte de operadores. Logo, a topologia forte de operadores é estritamente mais fraca do que a topologia da norma em $\mathcal{B}(X,Y)$.

`Problema 4.3`: Sejam X e Y espaços de Banach e $T_n \in \mathcal{B}(X,Y)$, $n \in \mathbb{N}$, tais que, para todo $x \in X$, a sequência $(T_n(x))_n$ é convergente em Y. (a) Mostre que $\sup_n \|T_n\| < \infty$.
(b) Mostre que $(T_n)_n$ é convergente na topologia forte de operadores em $\mathcal{B}(X,Y)$.

`Problema 4.4`. Sejam X e Y espaços de Banach, $D \subseteq X$ um subespaço denso. Sejam $T_n \in \mathcal{B}(X,Y)$, $n \in \mathbb{N}$, tais que $\sup_n \|T_n\| < \infty$ e, para todo $x \in D$, $(T_n(x))_n$ é convergente em Y. Mostre que $(T_n)_n$ é convergente na topologia forte de operadores em $\mathcal{B}(X,Y)$.

`Problema 4.5`: Para cada $t \in \mathbb{R}$, considere os operadores T_t e M_t em $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$ definidos por

$$[T_t(f)](x) = f(x+t) \;\text{ e }\; [M_t(f)](x) = e^{itx} f(x), \quad f \in C_c(\mathbb{R}),\; x \in \mathbb{R}.$$

(a) Mostre que a aplicação $t \mapsto M_t$ é contínua na topologia forte de operadores mas é descontínua na topologia da norma.
(b) Mostre que a aplicação $t \mapsto T_t$ é contínua na topologia forte de operadores mas é descontínua na topologia da norma.

`Problema 4.6`: Seja p real, $p \geq 1$. Dados $a \in C_b(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$ considere o operador $a_t(M) \in \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}^n))$ definido por $[a_t(M)(f)](x) = a(x+t)f(x)$, $f \in C_c(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$. Considere a aplicação $F : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}))$, $F(t) = a_t(M)$.
(a) Mostre que F é contínua na topologia forte de operadores.
(b) Mostre que F é contínua na topologia da norma se e somente se a for uniformente contínua.

4.4. **Topologia fraca de operadores.**

Sejam X e Y espaços de Banach. Para cada $x \in X$ e para cada $\lambda \in Y^*$, definimos a seminorma $p_{x,\lambda}(T) = |\lambda \circ T(x)|$, $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Decorre do Teorema de Hahn Banach (ou, mais precisamente, decorre da injetividade da aplicação canônica de Y em Y^{**}) que a família $\mathcal{F}_4 \coloneqq \{p_{x,\lambda};\, x \in X,\, \lambda \in Y^*\}$ é separante. Chama-se de *topologia fraca de operadores em* $\mathcal{B}(X,Y)$ a topologia induzida por $\mathcal{F}_4$.

Uma rede $(T_\alpha)_{\alpha \in I}$ em $\mathcal{B}(X,Y)$ converge a T na topologia fraca de operadores, ou simplesmente *converge fortemente a* T, se e somente se $\lambda \circ T_\alpha(x) \longrightarrow \lambda \circ T(x)$ para todo $x \in X$. Segue portanto que a topologia fraca de operadores é mais fraca do que a topologia forte de operadores em $\mathcal{B}(X,Y)$.

Pela notação da página 15, a topologia fraca de operadores coincide com $\sigma(\mathcal{B}(X,Y), \mathcal{Z})$, para a família de funcionais lineares $\mathcal{Z} = \{\widetilde{(x,\lambda)};\, x \in X,\, \lambda \in Y^*\}$, $\widetilde{(x,\lambda)} : \mathcal{B}(X,Y) \to \mathbb{C}$, $\widetilde{(x,\lambda)}(T) = \lambda(Tx)$. Segue da Proposição 2.10, que o conjunto $\{T \in \mathcal{B}(X,Y);\, \|T\| < 1\}$ não é aberto na topologia fraca de operadores. Mas isso segue também do fato de que $\{T \in \mathcal{B}(X,Y);\, \|T\| < 1\}$ não é aberto na topologia forte de operadores, como vimos na subseção precedente.

`Problema 4.7`: Dado $1 \le p < \infty$, considere o "shift" em ℓ^p, $S(x_1, x_2, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots)$. Mostre que $\lim_{k \to \infty} S^k = 0$ na topologia fraca de operadores em $\mathcal{B}(\ell^p)$, mas não na topologia forte de operadores.

`Problema 4.8` ([9, Theorem VI.1]): Seja H um espaço de Hilbert e sejam $T_n \in \mathcal{B}(H)$, $n \in \mathbb{N}$. Suponha que para todos $x, y \in H$ a sequência $(\langle y, T_n x\rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ seja convergente em $\mathbb{C}$. Mostre que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente na topologia fraca de $\mathcal{B}(H)$.

5. Teorema de Banach-Aloglu

Teorema 5.1. *Seja X um espaço de Banach, denotemos por B_1^* a bola unitária do dual de X, $B_1^* = \{\phi \in X^*;\, \|\phi\| \le 1\}$. Munida da topologia fraca*, B_1^* é compacta.*

`Preliminares e demonstração`.

Sejam X_λ, $\lambda \in \Lambda$, espaços topológicos, e seja

$$P \;=\; \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \;=\; \{\, (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda};\; x_\lambda \in X_\lambda \,\}$$

o produto cartesiano dessa família de espaços topológicos. A família de subconjuntos de P

$$\left\{ \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda;\; U_\lambda \subseteq X_\lambda \text{ aberto}, \{\lambda \in \Lambda; U_\lambda \neq X_\lambda\} \text{ finito} \right\}$$

forma uma base de abertos para uma topologia em P, chamada de *topologia do produto*. Uma rede $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$, $x_\alpha = (x_\lambda^\alpha)_{\lambda\in\Lambda} \in P$, converge a $x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ em P se e somente se, para todo $\lambda \in \Lambda$, a rede $(x_\lambda^\alpha)_{\alpha\in I}$ converge a x_λ em X_λ.

No caso em que $X_\lambda = \mathbb{C}$ para todo $\lambda \in \Lambda$, o produto cartesiano $\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{C}$ coincide com o conjunto $\mathcal{F}(\Lambda, \mathbb{C})$ de todas as funções $f : \Lambda \longrightarrow \mathbb{C}$. Uma rede $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ converge a f em $\mathcal{F}(\Lambda, \mathbb{C})$ na topologia do produto se e somente se, para todo $\lambda \in \Lambda$, a rede $(f_\alpha(\lambda))_{\alpha\in I}$ converge $f(\lambda)$ em $\mathbb{C}$. Por esta razão, a topologia do produto em $\mathcal{F}(\Lambda, \mathbb{C})$ é também chamada de topologia da convergência pontual.

No caso em que $\Lambda = X$, X um espaço de Banach, podemos induzir em $X^* \subset \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ a topologia do produto de $\prod_{x\in X} \mathbb{C}$. Uma rede $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in I}$ em X^* converge a $\lambda \in X^*$ na topologia do produto se e somente se, para todo $x \in X$, a rede $(\lambda_\alpha(x))_{\alpha\in I}$ converge a $\lambda(x)$ em $\mathbb{C}$; ou seja, se e somente se a rede $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in I}$ converge a λ na topologia fraca* de X^*. Ou seja, a topologia fraca* coincide com a topologia induzida pela topologia do produto em $X^* \subset \prod_{x\in X} \mathbb{C}$.

Vista como subconjunto de $\prod_{x\in X} \mathbb{C}$, a bola unitária do dual B_1^* pode ser descrita como

$$B_1^* \;=\; \left(\prod_{x\in X} D_x\right) \cap L, \quad D_x = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq \|x\|\}$$

$$L = \left\{(\phi(x))_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathbb{C};\ \forall\, x, y \in X, \forall\, \tau \in \mathbb{C},\ \phi(x + \tau y) = \phi(x) + \tau\phi(y)\right\}$$

O *Teorema de Tychonoff* garante que o produto cartesiano de uma família de compactos é compacto. Daí decorre que $\prod_{x\in X} D_x$ é compacto. Para demonstrar o Teorema 5, basta portanto provar que L é fechado em $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ com a topologia da convergência pontual. Isto se demonstra facilmente usando redes. Seja $(\phi_\alpha)_\alpha$ uma rede em L convergindo para ϕ em $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$. Queremos provar que $\phi \in L$. Dados $x, y \in X$ e $\tau \in \mathbb{C}$, temos

$$\phi(x + \tau y) = \lim_\alpha \phi_\alpha(x + \tau y) = \lim_\alpha [\phi_\alpha(x) + \tau\phi_\alpha(y)] = \lim_\alpha \phi_\alpha(x) + \tau \lim_\alpha \phi_\alpha(y) = \phi(x) + \tau\phi(y).$$

Logo $\phi \in L$, como queríamos demonstrar. $\square$

Proposição 5.2. *Seja K um espaço topológico compacto satisfazendo o primeiro axioma de enumerabilidade: todo ponto possui um sistema fundamental de vizinhanças enumerável. Então toda sequência em K possui uma subsequência convergente.*

`Demonstração:` Seja $(x_n)_n$ um sequência em K.

Provemos primeiramente que existe $x_0 \in K$ tal que, para todo U aberto contendo x_0, $\{n;\, x_n \in U\}$ é infinito. Suponhamos por absurdo que, para todo $x \in K$, existe aberto $U_x \ni x$ e natural n_x tal que $x_n \notin U_x$ para todo $n \geq n_x$. Segue da compacidade de K que existem $x_1, \cdots, x_k \in K$ tais que $K = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}$ e que, se $n \geq \max\{n_{x_1}, \cdots, n_{x_k}\}$ então $x_n \notin \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i} = K$, mas $x_n \in K$, o que é um absurdo.

Usemos agora a hipótese de enumerabilidade e tomemos um sistema fundamental de vizinhanças $\{V_1, V_2, \cdots\}$ de x_0. Tomando interseções se necessário, podemos supor que $V_{j+1} \subset V_j$ para todo j. Para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $n_j \geq j$ tal que $x_{n_j} \in V_j$. Então $(x_{n_j})_j$ é uma subsequência de $(x_n)_n$ que converge a x_0. $\square$

Proposição 5.3. *Seja X um espaço de Banach* separável (*isto é, X possui um subconjunto denso enumerável*). *Então B_1^* satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade.*

`Demonstração:` Dados $\lambda_0 \in B_1^*$, $r > 0$, $F \subset X$ finito, definimos aqui

$$B(\lambda_0; r, F) \coloneqq \{\lambda \in B_1^*;\ |\lambda(x) - \lambda_0(x)| < r, \text{para todo } x \in F\}.$$

Segue imediatamente das definições que

$$\mathcal{B} \coloneqq \{B(\lambda_0; r, F);\ r \in \mathbb{R},\ r > 0,\ F \subset X \text{ finito}\}$$

é um sistema fundamental de vizinhanças de λ_0 em B_1^* na topologia fraca* relativa de $B_1^* \subset X^*$.

Seja $D = \{y_1, y_2, \cdots\}$ denso em X.

Vamos provar que, para todo $\lambda_0 \in B_1^*$, a família enumerável de subconjuntos

$$\mathcal{B}_0 \ \coloneqq\ \{B(\lambda_0; s, G);\ s \in \mathbb{Q},\ s > 0,\ G \subset D \text{ finito}\}$$

também é um sistema fundamental de vizinhanças de λ_0 em B_1^*. Para tanto, basta provar que qualquer elemento de $\mathcal{B}$ contém um elemento de $\mathcal{B}_0$.

Dados $r > 0$ e $F = \{x_1, \cdots, x_n\} \subset X$, tome $s \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < s < \frac{r}{2}$ e $y_i \in D$ tais que $\|y_i - x_i\| < \frac{r}{4}$, $i = 1, \cdots, n$. Se $\lambda \in B_1^*$ satisfaz $|\lambda(y_i) - \lambda_0(y_i)| < s$, $i = 1, \cdots, n$, então, para todo i,

$$|\lambda(x_i) - \lambda_0(x_i)| \ \leq\ |\lambda(y_i) - \lambda_0(y_i)| + |(\lambda - \lambda_0)(x_i - y_i)| \ <\ s + (\|\lambda\| + \|\lambda_0\|)\frac{r}{4} < r,$$

ou seja, $B(\lambda_0; s, G) \subset B(\lambda_0; r, F)$, $G = \{y_1, \cdots, y_n\}$. $\square$

Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $1 \leq p \leq \infty$, $q = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}$ (convencionando $1/0 = \infty$ e $1/\infty = 0$). Para cada $f \in L^q(\Omega)$, $T_f(g) = \int_\Omega f(x) g(x)\, dx$, $g \in L^p(\Omega)$, define um funcional linear contínuo em $L^p(\Omega)$. A aplicação $L^q(\Omega) \ni f \mapsto T_f \in L^p(\Omega)^*$ é uma isometria, que é sobretora se $1 \leq p < \infty$ [11]. Diz-se então que, para $1 \leq p < \infty$, $L^q(\Omega)$ "é" o dual de $L^p(\Omega)$. Isso permite munir $L^q(\Omega)$, $1 < q \leq \infty$, da topologia fraca* de $L^p(\Omega)^*$, $1 \leq p < \infty$, que coincide com a própria topologia fraca de $L^q(\Omega)$ se $1 < q < \infty$. O seguinte teorema é consequência imediata desta afirmação e dos resultados demonstrados nesta seção.

Teorema 5.4. *Seja $(f_n)_n$ uma sequência em $L^q(\Omega)$, $1 < q \leq \infty$, tal que $\sup_n \|f_n\|_q < \infty$. Então existe $f \in L^q(\Omega)$ e subsequência $(f_{n_j})_j$ tal que*

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega f_{n_j}(x)g(x)\,dx \;=\; \int_\Omega f(x)g(x)\,dx, \quad \text{para toda } g \in L^p(\Omega).$$

6. Álgebras de Banach - Definições iniciais

Uma *álgebra* (complexa) é um espaço vetorial (complexo) munido de uma forma bilinear associativa, chamada *produto*.

Uma *álgebra de Banach* A é uma álgebra cujo espaço vetorial subjacente é um espaço de Banach em que a norma é *submultiplicativa*, isto é, vale

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|, \quad a, b \in A. \tag{7}$$

O axioma (7) implica que o produto

$$\begin{array}{rcl} A \times A & \longrightarrow & A \\ (a,b) & \longmapsto & ab \end{array}$$

é contínuo. Reciprocamente, se A é uma álgebra cujo espaço vetorial subjacente é um espaço de Banach e o produto é contínuo, existe $C > 0$ tal que $\|ab\| \leq C\|a\|\|b\|$, $a, b \in A$. Munida da norma $|\!|\!| \cdot |\!|\!| = C\|\cdot\|$, A se torna uma álgebra de Banach.

Se a álgebra de Banach A possui unidade $\mathbf{1}$, então $\|\mathbf{1}\| = \|\mathbf{1}\cdot\mathbf{1}\| \leq \|\mathbf{1}\|^2$. Se A não for a álgebra nula, então $\|\mathbf{1}\| \geq 1$. Para cada $a \in A$, considere $L_a \in \mathcal{B}(A)$ definido por $L_a(b) = ab$, $b \in A$. É claro que $\|L_a\| \leq \|a\|$ para todo $a \in A$. Além disso, $\|a\| = \|L_a(\mathbf{1})\| \leq \|L_a\|\|\mathbf{1}\|$. Assim, $|\!|\!| a |\!|\!| := \|L_a\|$ define em A uma norma equivalente à norma original $\|\cdot\|$. Como $\|L_{ab}\| = \|L_aL_b\| \leq \|L_a\|\|L_b\|$ e $\|L_{\mathbf{1}}\| = 1$, segue que $(A, |\!|\!| \cdot |\!|\!|)$ é uma álgebra de Banach com unidade satisfazendo $\|\mathbf{1}\| = 1$.

Proposição 6.1. *Seja A uma álgebra de Banach com unidade e seja $a \in A$ tal que $\|a\| < 1$. Então a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ converge absolutamente e $b := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ satisfaz $(\mathbf{1} - a)b = b(\mathbf{1} - a) = \mathbf{1}$.*

`Demonstração:`

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\| \;\leq\; \sum_{n=0}^{\infty} \|a\|^n \;=\; \frac{1}{1 - \|a\|},$$

$$(\mathbf{1}-a)b = (\mathbf{1}-a)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(\mathbf{1}-a)a^k = \lim_{n\to\infty}(\mathbf{1}-a^{n+1}) = \mathbf{1}.$$

A demonstração de que $b(\mathbf{1}-a) = \mathbf{1}$ é praticamente igual. □

Proposição 6.2. *Seja A uma álgebra de Banach com unidade, sejam $a \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $\|a\| < |\lambda|$. Então $\lambda\mathbf{1} - a$ é inversível.*

`Demonstração:` $\lambda\mathbf{1} - a = \lambda(\mathbf{1} - \frac{a}{\lambda})$, $\|\frac{a}{\lambda}\| < 1$. Logo

$$(\lambda\mathbf{1} - a)^{-1} \;=\; \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{\lambda}\right)^n, \tag{8}$$

como queríamos. □

Um *homomorfismo* entre duas álgebras (complexas) A e B é uma transformação linear $\phi : A \to B$ que preserva o produto, $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$, $x, y \in A$. Se A é unital, então $\mathbf{e} \coloneqq \phi(\mathbf{1}_A)$ é um *idempotente*, $\mathbf{e}^2 = \mathbf{e}$, que age como uma unidade na subálgebra $\operatorname{Im}\phi \subseteq B$: $ey = ye = y$, para todo $y \in \operatorname{Im}\phi$. Se A é unital e ϕ é sobrejetora, então B é unital e $\phi(\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_B$. No caso em que $B = \mathbb{C}$, todo homomorfismo não nulo $\phi : A \to \mathbb{C}$ é sobrejetor e, portanto, $\phi(\mathbf{1}_A) = 1$.

Proposição 6.3. *Sejam A uma álgebra de Banach com unidade e $\phi : A \to \mathbb{C}$ um homomorfismo. Então ϕ é contínuo e $\|\phi\| \leq 1$.*

`Demonstração:` Sem perda de generalidade, podemos supor que ϕ é não nulo e $\phi(\mathbf{1}_A) = 1$. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| > \|a\|$. Pela Proposição 6.2, existe $b \in A$ tal que $(\lambda\mathbf{1}_A - a)b = \mathbf{1}_A$ e, portanto, $[\lambda - \phi(a)]\phi(b) = 1$, logo $\phi(a) \neq \lambda$. Como isto vale para todo λ tal que $|\lambda| > \|a\|$, temos $|\phi(a)| \leq \|a\|$.□

Para estender a proposição precedente ao caso em que A não tem unidade, é preciso falar de unitização.

Unitização de álgebras de Banach.

Dada A uma álgebra, com ou sem unidade, definimos um produto em $\tilde{A} \coloneqq A \times \mathbb{C}$ por

$$(a, \lambda) \cdot (b, \eta) \;=\; (ab + \lambda b + \eta a,\ \lambda\eta).$$

É bem direto mostrar que esta operação induz em $\tilde{A}$ uma estrutura de álgebra com unidade, $\mathbf{1}_{\tilde{A}} = (0, 1)$. A aplicação

$$A \ni a \;\longmapsto\; (a, 0) \in \tilde{A}$$

é um homomorfismo injetor cuja imagem é um ideal de $\tilde{A}$. Na maioria das vezes, identificaremos A com sua imagem por esta aplicação e diremos que A é um ideal de $\tilde{A}$. No caso em que A é uma álgebra de Banach, $\tilde{A}$ munida da norma

$$\|(a, \lambda)\| \ := \ \|a\| + |\lambda|$$

torna-se uma álgebra de Banach, chamada de *unitização* de A. A inclusão de A em $\tilde{A}$ é uma isometria e portanto A é um ideal fechado de $\tilde{A}$.

Como espaço de Banach, $\tilde{A}$ é a soma direta de A e $\mathbb{C}$. Mas a igualdade $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$ é enganadora, pois ela não pode ser entendida no sentido de soma direta de álgebras. A soma direta de duas álgebras $A \oplus B$ é unital se se somente se A e B são unitais. Logo, no caso em que A não é unital, $\tilde{A}$ não é sequer isomorfa à soma direta de álgebras $A \oplus \mathbb{C}$. No caso em que A é unital, a aplicação

$$\tilde{A} \ni (a, \lambda) \ \longmapsto \ (a + \lambda \mathbf{1}_A, \lambda) \in A \oplus \mathbb{C}$$

é um isomorfismo

Proposição 6.4. *Sejam A uma álgebra de Banach e $\phi : A \to \mathbb{C}$ um homomorfismo. Então ϕ é contínuo e $\|\phi\| \leq 1$.*

`Demonstração:` Defina $\tilde{\phi} : \tilde{A} \to \mathbb{C}$ por $\tilde{\phi}(a, \lambda) = \phi(a) + \lambda$. Então $\tilde{\phi}$ é um homomorfismo definido na álgebra de Banach unital $\tilde{A}$. Segue da Proposição 6.3 que $\tilde{\phi}$ é contínuo e $\|\tilde{\phi}\| \leq 1$. Logo ϕ, que é a restrição de $\tilde{\phi}$ a $A \subset \tilde{A}$, é contínuo e

$$|\phi(a)| \ = \ |\tilde{\phi}(a, 0)| \ \leq \ \|(a, 0)\| \ = \|a\|,$$

para todo $a \in A$. $\square$

Quocientes, completamentos.

Sejam A uma álgebra de Banach e I um ideal bilateral fechado de A. Sendo I, em particular, um subespaço fechado do espaço de Banach A, o quociente A/I é um espaço de Banach com a norma $\|[x]\| = \inf_{y \in I} \|x - y\|$. Sendo I um ideal, podemos definir em A/I o produto $[x] \cdot [y] = [xy]$, que faz de A/I uma álgebra de Banach.

Seja A_0 uma álgebra complexa cujo espaço vetorial subjacente é normado, e tal que $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ para todo $x, y \in A_0$. O produto em A_0 pode ser estendido de maneira única ao completamento A de A_0, fazendo de A uma álgebra de Banach.

As afirmações desta subseção podem ser demonstradas da maneira previsível, o que fica como exercício para o leitor.

Topologia do espectro de uma álgebra de Banach.

Seja A uma álgebra de Banach e denotemos por S o conjunto dos homomofismos de A em $\mathbb{C}$. Vimos na Proposição 6.4 que $S \subset B_1^*$.

Proposição 6.5. *O conjunto S é fechado em B_1^* com a topologia fraca*.*

`Demonstração:` Seja $(\phi_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma rede em S que converge para $\phi \in B_1^*$ na topologia fraca*. Dados $a, b \in A$, temos

$$\phi(ab) \;=\; \lim_\alpha \phi_\alpha(ab) \;=\; \lim_\alpha [\phi_\alpha(a) \cdot \phi_\alpha(b)] \;=\; \lim_\alpha \phi_\alpha(a) \cdot \lim_\alpha \phi_\alpha(b) \;=\; \phi(a)\phi(b).$$

Logo $\phi \in S$. □

Decorre agora do Teorema de Banach-Alaoglu:

Corolário 6.6. *S é compacto com a topologia fraca*.*

Proposição 6.7. *Se A tem unidade, o homomorfismo nulo é um ponto isolado de S.*

`Demonstração:` Basta mostrar que $S \setminus \{0\}$ é fechado. Seja $(\phi_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma rede em $S \setminus \{0\}$ que converge a ϕ. Daí $\phi(\mathbf{1}_A) = \lim_\alpha \phi_\alpha(\mathbf{1}_A) = 1$. □

Definição 6.8. *O espectro de uma álgebra de Banach A, denotado por $\widehat{A}$, é o conjunto dos homomorfismos não-nulos de A em $\mathbb{C}$; ou seja, $\widehat{A} = S \setminus \{0\}$.*

Teorema 6.9. *Munido da topologia fraca*, $\widehat{A}$ é um espaço topológico de Hausdorff localmente compacto. Se A tiver unidade, $\widehat{A}$ é compacto.*

`Demonstração:` A topologia fraca* é Hausdorff em X^* pois é induzida por uma família separante de seminormas. Logo a topologia relativa em qualquer subconjunto de X^* é de Hausdorff.

$\widehat{A}$ é obtido de S subtraindo um ponto, e S é compacto (Proposição 6.6). Logo, $\widehat{A}$ é localmente compacto. Se A tem unidade, vimos na demonstração do Corolário 6.6 que $\widehat{A}$ é fechado em S, que é compacto. Sendo um subconjunto fechado de um compacto, $\widehat{A}$ é compacto neste caso. □

7. Exemplos de Álgebras de Banach

1) Dado E um espaço de Banach, a composição de operadores define em $\mathcal{B}(E)$ uma estrutura de álgebra. Já sabemos que $\mathcal{B}(E)$ é completo com a norma de operadores. É bem direto verificar que essa norma é submultiplicativa e que, portanto, $\mathcal{B}(E)$ é uma álgebra de Banach com unidade I, o operador identidade.

Diz-se que um operador $T \in \mathcal{B}(E)$ é *compacto* se a imagem por T de todo conjunto limitado tem fecho compacto. O conjunto $\mathcal{K}(E)$ dos operadores compactos em E é uma subálgebra fechada de $\mathcal{B}(E)$. Se E tem dimensão finita, $\mathcal{K}(E) = \mathcal{B}(E)$. Se E tem dimensão infinita, $\mathcal{K}(E)$ não contém a identidade I de $\mathcal{B}(E)$ (esta afirmação é uma conhecida aplicação do Teorema de Hahn-Banach). Além disso, não existe um operador compacto que faça o papel de elemento neutro multiplicativo em $\mathcal{K}(E)$ (isto também decorre de Hahn-Banach, ou de Riesz no caso em que E é um espaço de Hilbert, e do fato de que todo operador de posto finito é compacto). Ou seja, $\mathcal{K}(E)$ é uma álgebra de Banach não-unital. A unitização de $\mathcal{K}(E)$, a princípio definida abstratamente, pode ser canonicamente identificada com o subespaço fechado $\mathcal{K}(E) \oplus \mathbb{C}I$ de $\mathcal{B}(E)$, munido do produto herdado de $\mathcal{B}(E)$.

2) A álgebra $M_n(\mathbb{C})$ das matrizes complexas n-por-n pode ser canonicamente identificada com $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$. Escolhendo uma norma em $\mathbb{C}^n$, a norma de operadores em $M_n(\mathbb{C})$ pode ser expressa explicitamente usando produtos de matrizes, identificando os vetores de $\mathbb{C}^n$ com as matrizes complexas n-por-1:

$$\|A\| \;=\; \sup_{x\in\mathbb{C}^n,\, x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Tomando em $\mathbb{C}^n$ a norma euclidiana, a norma de operadores correspondente é a única norma em $M_n(\mathbb{C})$ que satisfaz $\|A^*A\| = \|A\|^2$ para toda $A \in M_n(\mathbb{C})$, $A^* = (\!(\overline{a_{ji}})\!)_{1\le i,j\le n}$ se $A = (\!(a_{ij})\!)_{1\le i,j\le n}$. Para conseguir demonstrar essa unicidade, ainda precisaremos desenvolver mais a teoria.

Os isomorfismos lineares não-canônicos de $M_n(\mathbb{C})$ em $\mathbb{C}^{n^2}$ permitem puxar qualquer norma de $\mathbb{C}^{n^2}$ para $M_n(\mathbb{C})$. Em particular,

$$\|A\|_1 \;\coloneqq \sum_{1\le i,j\le n} |a_{ij}|, \qquad A = (\!(a_{ij})\!)_{1\le i,j\le n} \in M_n(\mathbb{C}),$$

também é uma norma submuliplicativa em $M_n(\mathbb{C})$. Já a norma

$$\|A\|_\infty \;\coloneqq \sup_{1\le i,j\le n} |a_{ij}|, \qquad A = (\!(a_{ij})\!)_{1\le i,j\le n} \in M_n(\mathbb{C})$$

satisfaz $\|AB\| \le n^2\|A\|\|B\|$ e não é submultiplicativa.

`Problema`: O espectro de $M_n(\mathbb{C})$ é vazio se $n > 1$, consiste apenas da identidade se $n = 1$.

3) Seja X um espaço de Hausdorff compacto. O espaço de Banach $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ munido do produto usual de funções é uma álgebra de Banach com unidade, a função constante igual a 1.

Seja Ω um espaço de Hausdorff localmente compacto. Diz-se que uma função contínua $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *se anula no infinito* se, para todo $\epsilon > 0$ existe $K \subseteq \Omega$ tal que $|f(x)| < \epsilon$ para todo $x \notin K$. Denotamos por $C_0(\Omega)$ o conjunto de todas as funções contínuas de Ω em $\mathbb{C}$ que se anulam no infinito. Munido da norma do supremo e do produto ponto-a-ponto, $C_0(\Omega)$ é uma álgebra de Banach. Se Ω não for compacto, $C_0(\Omega)$ não possui unidade.

Denotemos por $\Omega^+ = \Omega \cup \{\infty\}$ a chamada *compactificação de Alexandroff* de Ω: Ω^+ é um espaço topológico, os abertos de Ω que contêm $x \in \Omega$ formam um sistema fundamental de vizinhanças de x em Ω^+; os conjuntos da forma $\Omega^+ \setminus K$, $K \subseteq \Omega$ compacto, formam um sistema fundamental de vizinhanças de ∞. Resulta que Ω^+ é compacto. No caso (desinteressante) em que Ω já é compacto, ∞ é um ponto isolado de Ω^+. No caso em que Ω não é compacto, Ω é denso em Ω^+. A unitização de $C_0(\Omega)$ pode ser naturalmente identificada com $C(\Omega^+)$ (fica para o leitor verificar os detalhes).

Suponha que Ω não é compacto. Seja I o conjunto de todos os compactos de Ω ordenados por inclusão. Para cada $K \in I$, escolha $x_K \in \Omega \setminus K$ e defina um homomorfismo de $C_0(\Omega)$ em $\mathbb{C}$ por $\phi_K(f) = f(x_K)$, $f \in C_0(\Omega)$. Segue do Lema de Urysohn que cada ϕ_K é não-nulo, ou seja, $\phi_K \in \widehat{C_0(\Omega)}$ para todo $K \in I$. Segue direto das definições que a rede $(\phi_K)_{K\in I}$ converge a 0 na topologia fraca*. Logo, o homomorfismo nulo é um ponto de acumulação de $\widehat{C_0(\Omega)}$, que portanto não é compacto.

A aplicação $\Omega \ni x \longmapsto \phi_x \in \widehat{C_0(\Omega)}$, $\phi_x(f) = f(x)$ para toda $f \in C_0(\Omega)$, é injetora e contínua. Provaremos mais tarde que ela é também sobrejetora.

4) Denotemos por $\ell^1(\mathbb{Z})$ o espaço das sequências absolutamente convergentes indexadas por $\mathbb{Z}$,

$$\ell^1(\mathbb{Z}) \;:=\; \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}};\; a_n \in \mathbb{C},\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| < \infty\}$$

Munido da norma $\|(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}\| := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|$, $\ell^1(\mathbb{Z})$ é um espaço de Banach. Munido do *produto de convolução*,

$$(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \times (b_n)_{n\in\mathbb{Z}} := (\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{n-k} b_k)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1,$$

$\ell^1(\mathbb{Z})$ se torna uma álgebra de Banach comutativa com unidade $\mathbf{1}_{\ell^1(\mathbb{Z})} = (\delta_{n,0})_{n\in\mathbb{Z}}$, $\delta_{0,0} = 1$, $\delta_{n,0} = 0$ se $n \neq 0$.

Define-se em $\ell^1(\mathbb{Z})$ uma aplicação $\star : \ell^1(\mathbb{Z}) \longrightarrow \ell^1(\mathbb{Z})$ por $(a_n)^\star_{n\in\mathbb{N}} = (\overline{a_{-n}})_{n\in\mathbb{N}}$. Esta aplicação é o que se chama de uma *involução*, pois ela satisfaz, para todos $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$: (i) $(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b})^\star = \mathbf{a}^\star + \overline{\lambda}\mathbf{b}^\star$, (ii) $(\mathbf{ab})^* = \mathbf{b}^\star\mathbf{a}^\star$ e (iii) $(\mathbf{a}^\star)^\star = \mathbf{a}$. Além disso, esta involução se relaciona com a norma através da identidade $\|\mathbf{a}^*\| = \|\mathbf{a}\|$, $\mathbf{a} \in \ell^1(\mathbb{Z})$.

`Problema`: Mostre que existe $\mathbf{a} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ tal que $\|\mathbf{a}^\star\mathbf{a}\| \neq \|\mathbf{a}\|^2$.

Para cada $z \in S^1$, defina $\phi_z : \ell^1(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{C}$ por $\phi_z((a_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$. Que ϕ_z é um homomorfismo decorre das regras usuais que permitem manipular séries absolutamente convergentes. Que ϕ_z é não-nulo decorre de

$$\phi_z(\delta_1) = z, \quad \delta_1 = (\delta_{n,1})_{n\in\mathbb{Z}},\ \delta_{1,1} = 1,\ \delta_{n,1} = 0,\ \text{se } n \neq 1. \tag{9}$$

Nosso objetivo é provar que a aplicação

$$S^1 \ni z \longmapsto \phi_z \in \widehat{\ell^1(\mathbb{Z})} \tag{10}$$

é um homeomorfismo.

Para cada $\mathbf{a} = (a_n)_n \in \ell^1(\mathbb{Z})$, a função

$$S^1 \ni z \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n \in \mathbb{C} \tag{11}$$

é contínua (pelo critério M de Weierstrass). Para provar a continuidade de (10), tomemos arbitrariamente uma sequência convergente em S^1, $z_n \to z$, e e $\mathbf{a} = (a_n)_n \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Segue da continuidade de (10) que $\phi_{z_n}(\mathbf{a}) \to \phi_z(\mathbf{a})$, e portanto $\phi_{z_n} \to \phi_z$ na topologia de $\widehat{\ell^1(\mathbb{Z})}$. Daí decorre que (10) é contínua.

A injetividade de (10) decorre imediatamente de (9).

Para provar a sobrejetividade de (10), dada $\phi \in \widehat{\ell^1(\mathbb{Z})}$, tomemos $z = \phi(\delta_1)$. Vamos mostrar que $z \in S^1$ e que $\phi = \phi_z$. É bem direto verificar que, para todo $k \in \mathbb{Z}$,

$$(\delta_1)^k = \delta_k, \quad \delta_k = (\delta_{n,k})_{n\in\mathbb{Z}},\ \delta_{k,k} = 1,\ \delta_{n,k} = 0,\ \text{se } n \neq k. \tag{12}$$

Da multiplicatividade de ϕ decorre que $z^k = \phi((\delta_1)^k) = \phi(\delta_k)$. Em particular, pela Proposição 6.4, $|z|^k \leq \|\delta_k\| = 1$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Daí $|z| = 1$. Segue de (12) e da densidade em $\ell^1(\mathbb{Z})$ do subespaço gerado por $\{\delta_k;\ k \in \mathbb{Z}\}$ que $\phi = \phi_z$ se $z \in S^1$, o que prova a sobrejetividade.

Sendo uma bijeção contínua entre dois espaços de Hausdorff compactos, a aplicação (11) é automaticamente um homeomorfismo.

5) Denotemos por $\ell^1(\mathbb{N})$ o subespaço de $\ell^1(\mathbb{Z})$ determinado pela condição $a_n = 0$ se $n < 0$. Este subespaço é fechado na norma, é uma subálgebra de $\ell^1(\mathbb{Z})$ e contém a unidade $\mathbf{1}_{\ell^1(\mathbb{Z})}$. Herda portanto a estrutura de álgebra de Banach unital de $\ell^1(\mathbb{Z})$. Mas a involução não vem junto com essa herança. A menos que $\mathbf{a} \in \ell^1(\mathbb{N})$ seja um múltiplo de $\mathbf{1}_{\ell^1(\mathbb{Z})}$, $\mathbf{a}^\star \notin \ell^1(\mathbb{N})$.

Seja D o disco fechado $\{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq 1\}$.

`Problema`: (a) Para cada $z \in D$, mostre que $\phi_z((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ define um homomorfismo não nulo $\phi_z : \ell^1(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{C}$. (b) Mostre que a aplicação $D \ni z \longmapsto \phi_z \in \widehat{\ell^1(\mathbb{N})}$ é um homeoformismo.

6) O espaço de Banach $L^1(\mathbb{R})$ munido do *produto de convolução*,

$$f \star g(x) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,dt, \qquad f,g \in L^1(\mathbb{R}),$$

é uma álgebra de Banach comutativa sem unidade. Para cada $\xi \in \mathbb{R}$, a aplicação

$$\phi_\xi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(x)\,dx \in \mathbb{C}, \qquad f \in L^1(\mathbb{R}),$$

é um homomorfismo não-nulo. Segue do Lema de Riemann-Lebesgue que $\lim_{\xi\to\infty} \phi_\xi = 0$ na topologia fraca*. Segue de resultados clássicos sobre a transformada de Fourier que aplicação $\mathbb{R} \ni \xi \longmapsto \phi_\xi \in \widehat{L^1(\mathbb{R})}$ é injetora e contínua. Seguirá do Teorema de Gelfand que essa aplicação é também sobrejetora.

7) Seja A a subálgebra de $C(S^1)$ que consiste das restrições a S^1 das funções contínuas em $D = \{z \in \mathbb{C};\, |z| \le 1\}$ que são holomorfas em $B = \{z \in \mathbb{C};\, |z| < 1\}$,

$$A \;:=\; \{\, f|_{S^1};\; f \in C(D),\; f|_B \text{ é holomorfa} \,\}.$$

Segue do Princípio do Máximo que

$$\sup_{z\in D} |f(z)| \;\le\; \sup_{z\in S^1} |f(z)|, \quad f \in C(D);\; f|_B \text{ é holomorfa.} \tag{13}$$

Segue da Fórmula Integral de Cauchy que o limite uniforme de uma sequência de funções holomorfas é uma função holomorfa. Deste dois fatos decorre que A é um subespaço fechado de $C(S^1)$ e portanto é, ela própria, uma álgebra de Banach com a estrutura herdada de $C(S^1)$.

A aplicação $f \longmapsto \overline{f}$ define uma involução em $C(S^1)$ que não é herdada por A (a função $z \mapsto z$ pertence a A, mas $z \mapsto \overline{z}$, não).

Segue de (13) que, se $g \in A$, existe uma única $f \in C(D)$ tal que $f|_{S^1} = g$. Isto permite definir, para cada $z \in D$, o homomorfismo não-nulo $\phi_z : A \to \mathbb{C}$, $\phi_z(g) = f(z)$. A aplicação $D \ni z \longmapsto \phi_z \in \widehat{A}$ é injetora e contínua.

8. Preliminares sobre funções holomorfas

Seja X um espaço de Banach.

Definição 8.1. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aberto. Uma função $f : \Omega \to X$ é* holomorfa *se, para todo $z \in \Omega$, existe o limite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} =: f'(z).$$

Proposição 8.2. *Seja $f : \mathbb{C} \to X$ holomorfa tal que $\lim_{|\lambda| \to \infty} \|f(\lambda)\| = 0$. Então f é identicamente nula.*

`Demonstração:` Para cada $\phi \in X^*$, $\phi \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é holomorfa e tende a zero no infinito. Em particular, é limitada e portanto constante, pelo Teorema de Liouville. Essa constante tem de ser nula, pois o limite no infinito é nulo. Logo, para todo $\phi \in X^*$ e para todo $z \in \mathbb{C}$, $\phi(f(z)) = 0$. Segue de um corolário do Teorema de Hahn-Banach que $f(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. □

Proposição 8.3. *Seja $f : \{z \in \mathbb{C};\, |z| < a\} \to X$ holomorfa. Sejam $b \in \mathbb{R}$ e $x_n \in X$ tais que $0 < b < a$ e, para todo z com $|z| < b$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} z^n x_n$ converge absolutamente e é igual a $f(z)$. Então, para todo z com $|z| < a$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} z^n x_n$ converge absolutamente e é igual a $f(z)$.*

`Demonstração:` Para todo $\lambda \in X^*$, considere $\lambda \circ f : \{z \in \mathbb{C};\, |z| < a\} \to \mathbb{C}$. Segue da continuidade de λ que $\lambda \circ f$ é holomorfa e $(\lambda \circ f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(x_n) z^n$, se $|z| < b$. Logo, $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda(x_n) z^n$ é a série de Taylor de $\lambda \circ f$ em $z = 0$ e, portanto, converge absolutamente para $\lambda \circ f$ se $|z| < a$.

Em particular, isto implica que

$$\sup_n |\lambda(z^n x_n)| < \infty, \quad |z| < a,\ \lambda \in X^*.$$

Segue agora de um conhecido corolário do Teorema de Hahn-Banach e do Princípio da Limitação Uniforme que

$$M_z := \sup_n \|z^n x_n\| < \infty, \quad |z| < a.$$

Dado z com $|z| < a$, tome z_0 tal que $0 < |z| < |z_0| < a$. Temos então

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|z^n x_n\| \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \left(\frac{z}{z_0}\right)^n (z_0^n\, x_n) \right\| \;\leq\; M_{z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n < \infty;$$

logo $\sum_{n=0}^{\infty} z^n x_n$ converge absolutamente.

Para todo $\lambda \in X^*$ e para todo z com $|z| < a$,

$$\lambda(f(z)) = \lambda\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n x_n\right).$$

De novo como consequência do Teorema de Hahn-Banach, para $|z| < a$, temos $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$. □

9. O espectro de um elemento de uma álgebra de Banach

De agora em diante suporemos sempre que as álgebras unitais não são a álgebra nula.

Seja A uma álgebra de Banach unital. Sempre que for conveniente, denotaremos simplesmente por λ o elemento $\lambda \mathbf{1}_A$ de A, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Definição 9.1. *Dado $a \in A$, chamamos de espectro de A o conjunto*

$$\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C};\ (\lambda - a) \text{ não é inversível}\}$$

Definição 9.2. $GL(A) = \{a \in A;\ a \text{ é inversível}\}$.

Proposição 9.3. *O conjunto dos inversíveis $GL(A)$ é aberto em A.*

`Demonstração:` Dado $a \in GL(A)$, tome $\|h\| < \|a^{-1}\|^{-1}$. Então $\|a^{-1}h\| \leq \|a^{-1}\|\|h\| < 1$ e portanto, pela Proposição 6.1, $1 + a^{-1}h$ é inversível. Daí $(a + h)$ é o produto de dois inversíveis, $a + h = a(1 + a^{-1}h)$, e portanto $a + h \in GL(A)$. □

Proposição 9.4. *Para todo $a \in A$, $\sigma(a)$ é fechado.*

`Demonstração:` O espectro de a é o complementar da pré-imagem do aberto $GL(A)$ pela aplicação contínua $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto (\lambda - a) \in A$. □

Corolário 9.5. *Para todo $a \in A$, $\sigma(a)$ é compacto.*

`Demonstração:` Segue da Proposição 6.2 que $\sigma(a) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \leq \|a\|\}$. □

Proposição 9.6. *A aplicação $GL(A) \ni a \longmapsto a^{-1} \in A$ é contínua.*

`Demonstração:` Dado $a \in GL(A)$, tome $h \in A$, $\|h\| < \|a^{-1}\|^{-1}$. Segue de (8) e da demonstração da Proposição 9.3 que

$$(a+h)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}h)^n\, a^{-1}$$

e, portanto,

$$(a+h)^{-1} - a^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (a^{-1}h)^n\, a^{-1},$$

donde

$$\|(a+h)^{-1} - a^{-1}\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (a^{-1}h)^n a^{-1} \right\| \leq \|a^{-1}\| \sum_{n=1}^{\infty} \|a^{-1}h\|^n = \|a^{-1}\| \frac{\|a^{-1}h\|}{1 - \|a^{-1}h\|}.$$

Dado $\epsilon > 0$, tome $\delta \in \mathbb{R}$, $0 < \delta < 1$, tal que $\frac{t}{1-t} < \frac{\epsilon}{\|a^{-1}\|}$ se $0 < t < \delta$. Daí, se $\|h\| < \frac{\delta}{\|a^{-1}\|^{-1}}$, então $\|a^{-1}h\| < \delta$ e portanto $\|(a+h)^{-1} - a^{-1}\| < \epsilon$. □

Proposição 9.7. *Dado $a \in A$, a aplicação*

$$\begin{array}{rcl} R : \mathbb{C} \setminus \sigma(a) & \longrightarrow & A \\ \lambda & \longmapsto & (\lambda - a)^{-1} \end{array}$$

é holomorfa.

`Demonstração:` Dados $\lambda, \mu \notin \sigma(a)$, temos

$$(\mu - a)^{-1} - (\lambda - a)^{-1} \;=\; (\mu - a)^{-1}[(\lambda - a) - (\mu - a)](\lambda - a)^{-1} \;=\; (\lambda - \mu)(\mu - a)^{-1}(\lambda - a)^{-1},$$

logo

$$\frac{(\mu - a)^{-1} - (\lambda - a)^{-1}}{\mu - \lambda} \;=\; -(\mu - a)^{-1}(\lambda - a)^{-1}.$$

Segue da Proposição 9.6 que

$$\lim_{\mu \to \lambda} \frac{(\mu - a)^{-1} - (\lambda - a)^{-1}}{\mu - \lambda} \;=\; -(\lambda - a)^{-2}.$$

Provamos que para todo $\lambda \notin \sigma(a)$, $R'(\lambda) = -R(\lambda)^2$. □

Proposição 9.8. $\lim\limits_{|\lambda| \to \infty} \|(\lambda - a)^{-1}\| = 0.$

`Demonstração:` Pela equação (8),

$$(\lambda - a)^{-1} \;=\; \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^n, \quad \text{se} \quad |\lambda| > \|a\|.$$

Logo

$$\|(\lambda - a)^{-1}\| \;\leq\; \frac{1}{|\lambda|} \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^n \right\| \;\leq\; \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \left\|\frac{a}{\lambda}\right\|^n \;=\; \frac{1}{|\lambda| - \|a\|}.$$

O lado direito desta desigualdade tende a zero quando $|\lambda|$ tende a infinito. □

Teorema 9.9. *Sejam A uma álgebra de Banach (complexa) com unidade. Para todo $a \in A$, $\sigma(a) \subset \mathbb{C}$ é um compacto não-vazio.*

`Demonstração:` Já vimos no Corolário 9.5 que $\sigma(a)$ é compacto. Suponhamos, por absurdo, que $\sigma(a) = \emptyset$. Pela Proposição 9.7, $R : \mathbb{C} \to A$ é holomorfa. Segue da Proposição 9.8 e da Proposição 8.2 que $R(\lambda) = 0$ para todo λ. Isto é um absurdo porque $R(\lambda)$ é inversível para todo λ. □

Corolário 9.10. *Seja A uma álgebra de Banach (complexa) com unidade em que todo elemento não nulo é inversível. Então A é isomorfa a $\mathbb{C}$.*

`Demonstração:` Dado $a \neq 0$ em A, tome $\lambda \in \sigma(a)$. Então $(\lambda \mathbf{1}_A - a)$ não é inversível, logo $a = \lambda \mathbf{1}_A$. Provamos que $A = \mathbb{C}\mathbf{1}_A$. A aplicação $A \ni z\mathbf{1}_A \mapsto z \in \mathbb{C}$ é um isomorfismo de álgebras, que é também um múltiplo de uma isometria: $\|z\mathbf{1}_a\| = \|\mathbf{1}_A\|\,|z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$. □

O resultado precedente é conhecido como o Teorema de Gelfand-Mazur. Foi demonstrado por Gelfand, depois de Mazur anunciar ter demonstrado que, a menos de isomorfismos, só existem três álgebras de Banach reais nas quais todo elemento não-nulo é inversível: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ e o conjunto dos quatérnions Q. Os quatérnions não são uma álgebra complexa.

10. A Transformada de Gelfand

Seja A uma álgebra de Banach unital comutativa. Para cada $a \in A$, definimos $\widehat{a} : \widehat{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ por $\widehat{a}(\phi) = \phi(a)$. Se $(\phi_\alpha)_\alpha$ é uma rede em $\widehat{A}$ convergindo para ϕ, temos

$$\widehat{a}(\phi_\alpha) = \phi_\alpha(a) \longrightarrow \phi(a) = \widehat{a}(\phi)$$

e portanto $\widehat{a}$ é uma função contínua em $\widehat{A}$. A aplicação

$$\begin{array}{rcl} \kappa : A & \longrightarrow & C(\widehat{A}) \\ a & \longmapsto & \widehat{a} \end{array}$$

é chamada de *Transformada de Gelfand*.

Proposição 10.1. *A Transformada de Gelfand κ é uma transformação linear contínua e $\|\kappa\| \leq 1$. Além disso, κ é um homomorfismo unital de álgebras.*

`Demonstração:` É imediato que κ é linear. Segue da Proposição 6.4 que, para todo $a \in A$ e $\phi \in \widehat{A}$, $|\widehat{a}(\phi)| = |\phi(a)| \leq \|a\|$. Logo,

$$\|\widehat{a}\| = \sup_{\phi \in \widehat{A}} |\widehat{a}(\phi)| \leq \|a\|$$

Dados $a, b \in A$, para todo $\phi \in \widehat{A}$,

$$\widehat{(ab)}(\phi) = \phi(ab) = \phi(a)\phi(b) = \widehat{a}(\phi)\widehat{b}(\phi).$$

Logo κ é um homomorfismo de álgebras. Finalmente, para todo $\phi \in \widehat{A}$, $\widehat{\mathbf{1}_A}(\phi) = \phi(\mathbf{1}_A) = 1$. □

Exemplo (Exemplo 4 da Seção 7 revisitado): Vimos que, para $A = \ell^1(\mathbb{Z})$, a aplicação

$$S^1 \ni z \longmapsto \phi_z \in \widehat{A}$$

é um homeomorfismo. Segue então que a aplicação

$$C(\widehat{A}) \ni f \longmapsto \widetilde{f} \in C(S^1), \qquad \widetilde{f}(z) = f(\phi_z),$$

é um isomorfismo isométrico de álgebras de Banach. Consideremos a composição deste isomorfismo com a transformada de Gelfand:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\kappa} & C(\widehat{A}) & \xrightarrow{\cong} & C(S^1) \\ a & \longmapsto & \widehat{a} & \longmapsto & \widetilde{\widehat{a}} \end{array}$$

Dada $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in A$, $\widetilde{\widehat{\mathbf{a}}}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$, $z \in S^1$. Em outras palavras, a menos de um isomorfismo isométrico de álgebras de Banach, o que a transformada de Gelfand faz em $A = \ell^1(\mathbb{Z})$ é mandar uma sequência em $\ell^1(\mathbb{Z})$ na função contínua que tem como coeficientes de Fourier essa sequência. Concluímos portanto que, a menos desse isomorfismo, a imagem da Transformada de Gelfand consiste das funções contínuas em S^1 cuja série de Fourier converge absolutamente e uniformemente. Nem todas as funções contínuas em S^1 possuem essa propriedade (veja, por exemplo, [11, Theorem 5.12]), o que prova que a transformada de Gelfand de $\ell^1(\mathbb{Z})$ não é sobrejetora.

Este é o *Teorema de Gelfand* para álgebras de Banach comutativas:

Teorema 10.2. *Seja A uma álgebra de Banach (complexa) unital comutativa. Dado $a \in A$ temos que a é inversível em A se e somente se $\widehat{a}$ é inversível em $C(\widehat{A})$, isto é, se e somente se $\phi(a) \neq 0$ para todo $\phi \in \widehat{A}$.*

`Demonstração:` Suponha que $a \in A$ é inversível e seja $\phi \in \widehat{A}$. Como ϕ é unital, $1 = \phi(\mathbf{1}_A) = \phi(a\,a^{-1}) = \phi(a)\,\phi(a^{-1})$ e portanto $\phi(a) \neq 0$.

Dado $a \in A$ não-inversível, vamos construir um $\phi \in \widehat{A}$ tal que $\phi(a) = 0$.

Um *ideal maximal* de uma álgebra A é um ideal próprio J tal que, se $\widetilde{J}$ é um ideal que contém propriamente J, então $\widetilde{J} = A$.

Provemos que todo ideal maximal J de uma álgebra de Banach unital A, como a da hipótese do teorema, é fechado. É bem direta a demonstração de que o fecho de qualquer ideal de uma álgebra de Banach é também um ideal. Como $J \subseteq \overline{J}$, J é maximal e $\overline{J}$ é um ideal, basta provar que $\overline{J}$ é próprio. Para isso basta provar que, se $\overline{J} = A$, então J não é próprio. Se $\overline{J} = A$, então J é denso em A. Considere a bola aberta $B(\mathbf{1}_A, 1)$ de raio 1 centrada na unidade. Segue da densidade de J em A que existe $x \in J \cap B(\mathbf{1}_A, 1)$. Vimos na Proposição 6.1 que todos os elementos de $B(\mathbf{1}_A, 1)$ são inversíveis. Logo J contém um elemento inversível, logo J contém $\mathbf{1}_A$, logo $A \subseteq J$, logo J não é próprio.

Voltemos agora ao $a \in A$ não-inversível que nos foi dado. Seja J_0 o ideal de A gerado por a, isto é, $J_0 = \{ax;\, x \in A\}$. Aplicando o Lema de Zorn ao conjunto $\{J \text{ ideal próprio de } A;\; J_0 \subseteq J\}$ ordenado pela inclusão, concluímos que existe um ideal maximal J, fechado, contendo $J_0 \ni a$. Dado $x \in A \setminus J$, o ideal $\widetilde{J} = \{bx + j;\, b \in A,\, j \in J\}$ contém propriamente o ideal maximal J. Logo $\widetilde{J} = A$, logo existe

$y \in A$ tal que $xy + j = \mathbf{1}_A$, ou seja, $\mathbf{1}_A - xy \in J$. Isto prova que todo elemento não-nulo da álgebra de Banach A/J é inversível. Pelo Corolário 9.10, portanto, temos que $A/J = \mathbb{C}\mathbf{1}_{A/J}$. Seja ϕ a aplicação definida por

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\pi} & A/J = \mathbb{C}\mathbf{1}_{A/J} & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{C} \\ a & \longmapsto & a + J = \lambda\mathbf{1}_{A/J} & \longmapsto & \phi(a) := \lambda, \end{array} \tag{14}$$

em que π denota a projeção canônica. Sendo ϕ a composição de dois homomorfismos, ele é um homomorfismo. Sendo $\phi(\mathbf{1}_A) = 1$, $\phi \in \widehat{A}$. E como $a \in J$, $\phi(a) = 0$. □

Corolário 10.3. *Sejam A uma álgebra de Banach unital e $a \in A$. Temos*

$$\sigma(a) = \{\phi(a);\, \phi \in \widehat{A}\} = \operatorname{Im} \widehat{a}.$$

`Demonstração:` Pelo Teorema 10.2, $\lambda \notin \sigma(a) \iff \phi(\lambda\mathbf{1}_A - a) \neq 0$ para todo $\phi \in \widehat{A}$. Logo $\lambda \notin \sigma(a) \iff \phi(a) \neq \lambda$ para todo $\phi \in \widehat{A}$. Logo $\lambda \in \sigma(a) \iff$ existe $\phi \in \widehat{A}$ tal que $\lambda = \phi(a) = \widehat{a}(\phi)$. Logo $\lambda \in \sigma(a) \iff \lambda \in \operatorname{Im} \widehat{a}$. □.

Proposição 10.4. *Seja $\mathfrak{M}$ o conjunto dos ideais maximais da algebra de Banach unital A. A aplicação*

$$\widehat{A} \ni \phi \;\longmapsto\; \ker \phi \in \mathfrak{M}$$

está bem definida e é bijetora.

`Demonstração:` Se $\phi \in A$, o quociente $A/\ker\phi$ é uma álgebra isomorfa a $\mathbb{C}$. Logo, todo elemento não-nulo da álgebra $A/\ker\phi$ é inversível. Por um argumento parecido ao que usamos para provar, na demonstração do Teorema 10.2, que todo elemento não-nulo de A/J é inversível, isto implica que $\ker\phi$ é maximal.

Dado $J \in \mathfrak{M}$, o diagrama (14) define um homomorfismo não nulo ϕ, $\ker\phi = J$. E quando se aplica a construção de (14) a $J = \ker\phi$, $\phi \in \widehat{A}$, o homomorfismo que se obtém é o próprio ϕ. □

Nos primórdios da teoria das álgebras de Banach, falava-se mais do "maximal ideal space" $\mathfrak{M}$ do que do espectro $\widehat{A}$. Esta nomenclatura é usada por exemplo em [3, 11].

Teorema de Wiener sobre séries de Fourier absolutamemente convergentes.

Nesta subseção, com base em [11, Theorem 18.21], vamos expor a demonstração de Gelfand para um teorema sobre convergência de séries de Fourier, primeiramente demonstrado por Wiener usando técnicas de análise clássica.

Para cada $n \in \mathbb{Z}$, seja $e_n(z) = z^n$, $z \in S^1$, $n \in \mathbb{Z}$.

Já sabemos que se $f \in L^2(S^1)$, então sua série de Fourier converge para f na norma $\|\cdot\|_2$. Em particular, para toda $f \in C(S^1)$,

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_n e_n, \quad \widehat{f}_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta. \tag{15}$$

Esta soma infinita deve ser interpretada como uma soma absolutamente convergente no espaço de Hilbert $L^2(S^1)$.

Se $f \in C(S^1)$ é tal que a soma infinita em (15) converge absolutamente no espaço de Banach $(C(S^1), \|\cdot\|_\infty)$, a soma da série será necessariamente igual a f. De fato, seja g a soma da série. Escolhendo arbitrariamente uma enumeração para $\mathbb{Z}$, as somas parciais dessa soma infinita convergirão uniformemente para g. Logo,

$$\widehat{f}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta = \widehat{g}_n,$$

o que implica que $f = g$, pois $\{e_n;\, n \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto ortogonal completo em $L^2(S^1)$.

A soma infinita no lado direito de (15) convergir absolutamente no espaço de Banach $(C(S^1), \|\cdot\|_\infty)$ é equivalente a $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}_n| < \infty$. Definamos

$$B = \{f \in C(S^1);\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}_n| < \infty\}.$$

O Teorema de Wiener afirma que se $f \in B$ e $f(z) \neq 0$ para todo $z \in S^1$, entao $\dfrac{1}{f} \in B$.

Pelo que vimos na página 37 (Exemplo 4 da Seção 7 revisitado), B é igual à imagem da transformada de Gelfand para a álgebra de Banach $\ell^1(\mathbb{Z})$. Seja $f \in B = \operatorname{Im}\kappa$, $f = \kappa(\mathbf{a})$, tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in S^1$. Segue do Teorema de Gelfand que $\mathbf{a}$ é inversível. Seja $\mathbf{b} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ a inversa de $\mathbf{a}$, seja $g = \kappa(\mathbf{b})$. Como κ é um homomorfismo de álgebras, $g = \frac{1}{f}$. Ou seja, $\frac{1}{f} \in B$, como queríamos.

Dada $f \in C(S^1)$, denotemos por $\widetilde{f}$ a função contínua 2π-periódica definida por $\widetilde{f}(\theta) = f(e^{i\theta})$, $\theta \in \mathbb{R}$. Diz-se que $f \in C^1(S^1)$ se $\widetilde{f} \in C^1(\mathbb{R})$ e define-se f' por $f'(e^{i\theta}) = (\tilde{f})'(\theta)$. Se $f \in C^1(S^1)$, integrando por partes, temos

$$\widehat{(f')}_n \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\tilde{f})'(\theta)e^{-in\theta}\,d\theta \;=\; \frac{1}{in}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(\theta)e^{-in\theta}\,d\theta \;=\; \frac{\widehat{f}_n}{in}.$$

Daí, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz em $\ell^2(\mathbb{Z})$, vem

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{(f')}_n| \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}_n|\,\frac{1}{n} \;\leq\; \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

O lado direito desta desigualdade é finito pela identidade de Parseval, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}_n|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^2\, d\theta$. Logo $C^1(S^1) \subset B$, e portanto B é densa em $C(S^1)$.

11. Raio espectral

Definição 11.1. *Sejam A uma álgebra de Banach com unidade e $a \in A$. O raio espectral, denotado por $r(a)$, é dado por*

$$r(a) \;=\; \sup_{\lambda\in\sigma(a)} |\lambda|.$$

Segue da Proposição 6.2 que $r(a) \leq \|a\|$, $a \in A$. Segue da Proposição 9.7 que $R(\lambda) = (\lambda - a)^{-1}$ é holomorfa em $\{\lambda \in \mathbb{C};\, |\lambda| > r(a)\}$. Definamos

$$f(z) \;=\; \begin{cases} R(1/z) & 0 < |z| < \frac{1}{r(a)} \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

É claro que f é analítica em $\{z \in \mathbb{C};\, 0 < |z| < \frac{1}{r(a)}\}$. Segue da equação (8) e de $f(0) = 0$ que

$$f(z) \;=\; z\sum_{n=0}^{\infty} z^n a^n, \quad |z| < \frac{1}{\|a\|},$$

e, portanto, f é holomorfa também em $z = 0$, $f'(0) = \mathbf{1}_A$. Notando que $\frac{1}{\|a\|} \leq \frac{1}{r(a)}$, segue da Proposição 8.3 que

$$f(z) \;=\; z\sum_{n=0}^{\infty} z^n a^n, \quad |z| < \frac{1}{r(a)},$$

donde decorre

$$|z| < \frac{1}{r(a)} \quad\Longrightarrow\quad \sup_n \|z^n a^n\| < \infty$$

e, portanto,

$$|\lambda| > r(a) \quad\Longrightarrow\quad M_\lambda := \sup_n \left\|\frac{a^n}{\lambda^n}\right\| < \infty.$$

Provamos que, se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\|\lambda\| > r(a)$, existe $M_\lambda > 0$ tal que $\|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq |\lambda|\, M_\lambda^{1/n}$ e, portanto,

$$\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \;\leq\; |\lambda| \lim_{n\to\infty} M_\lambda^{1/n} \;=\; |\lambda|.$$

Como λ é um complexo arbitrário satisfazendo $|\lambda| > r(a)$, obtemos finalmente o seguinte resultado.

Proposição 11.2. *Sejam A uma álgebra de Banach unital e $a \in A$. Então $\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(a)$.*

Proposição 11.3. *Seja A uma álgebra complexa com unidade. Sejam $a, b, c \in A$ tais que $a = bc = cb$ e a é inversível. Então b e c são inversíveis*

`Demonstração:` Temos $c(ba^{-1}) = (a^{-1}b)c = 1$. Daí $a^{-1}b = (a^{-1}b)\,c\,(ba^{-1}) = ba^{-1}$. Logo, $a^{-1}b = ba^{-1}$, c é inversível e $c^{-1} = a^{-1}b$. Daí $b = ac^{-1}$ também é inversível. □

Segue da proposição precedente e da identidade

$$a^n - \lambda^n \;=\; (a-\lambda)\sum_{j=1}^{n} a^{n-j}\,\lambda^{j-1} \;=\; \sum_{j=1}^{n} a^{n-j}\,\lambda^{j-1}\,(a-\lambda),$$

válida para quaisquer $a \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$, que

$$a^n - \lambda^n \text{ inversível} \qquad \Longrightarrow \qquad a - \lambda \text{ inversível}$$

ou, equivalentemente,

$$\lambda \in \sigma(a) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda^n \in \sigma(a^n).$$

Segue agora da Proposição 6.2 que

$$\lambda \in \sigma(a) \qquad \Longrightarrow \qquad |\lambda^n| \le \|a\|^n \qquad \Longrightarrow \qquad |\lambda| \le \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Isto implica:

Proposição 11.4. *Sejam A uma álgebra de Banach unital e $a \in A$. Então $r(a) = \inf_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.*

As proposições 11.2 e 11.4 implicam imediatamente:

Teorema 11.5. *Sejam A uma álgebra de Banach unital e $a \in A$. Então a sequência $(\|a^n\|^{\frac{1}{n}})_n$ é convergente e*

$$\lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \;=\; r(a).$$

Exemplo. Sejam $X = C([0,1])$, $A = \mathcal{B}(X)$ e $V \in \mathcal{B}(X)$ definido por

$$(Vf)(x) \;=\; \int_0^x f(t)\,dt, \qquad f \in C([0,1]).$$

V é chamado *o operador de Volterra* e satisfaz

$$\|V^n\| = \frac{1}{n!} \quad \text{e, portanto,} \quad \lim_{n\to\infty} \|V^n\|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Segue portanto do Teorema 11.5 que $\sigma(V) = \{0\}$, afirmação que pode também ser verificada independentemente, sem invocar este teorema.

Seja $a \in A$, A como antes uma álgebra de Banach com unidade. Dizemos que a é *quase nilpotente* se $\lim \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$, o que é equivalente a $\sigma(a) = \{0\}$.

Problema. Seja A uma álgebra de Banach comutativa com unidade. Mostre que o núcleo da transformada de Gelfand, $\ker \kappa$, coincide com o conjunto dos elementos quase nilpotentes de A.

12. Teorema de Gelfand para C*Álgebras

Definição 12.1. *Uma involução em uma álgebra complexa A é uma aplicação $*: A \to A$ satisfazendo, para todos $x, y \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$,* (i) $(\lambda x + y)^* = \overline{\lambda} x^* + y^*$, (ii) $(xy)^* = y^* x^*$, (iii) $(x^*)^* = x$.

Definição 12.2. *Uma álgebra de Banach com involução é uma álgebra de Banach munida de uma involução isométrica.*

Definição 12.3. *Uma C*álgebra é uma álgebra de Banach com involução A satisfazendo $\|x^*x\| = \|x\|^2$ para todo $x \in A$.*

Em qualquer *álgebra unital A, $\mathbf{1}_A^* = \mathbf{1}_A$, pois $\mathbf{1}_A^* x = (x^* \mathbf{1}_A)^* = x^{**} = x$ para todo $x \in A$ e, da mesma maneira, $x\, \mathbf{1}_A^* = x$. Em uma C*álgebra vale ademais que $\|\mathbf{1}_A\| = \|\mathbf{1}_A^* \mathbf{1}_A\| = \|\mathbf{1}_A\|^2$ e portanto $\|\mathbf{1}_A\| = 1$.

Exemplos

(1) Seja H um espaço de Hilbert de dimensão infinita. $\mathcal{B}(H)$ munida da involução dada pelo ajunto de operadores é uma C*álgebra com unidade. O ideal fechado $\mathcal{K}(H)$ é invariante pela involução e portanto é uma C*álgebra sem unidade com a estrutura herdada de $\mathcal{B}(H)$. (Veja o Exemplo 1 da Seção 7.)

(2) Seja Ω um espaço topológico de Hausdorff localmente compacto. Então $C_0(\Omega)$ torna-se uma C*álgebra comutativa se munida da involução dado pelo complexo conjugado. Esta álgebra é unital se e somente se Ω é compacto.

(3) Vimos no Exemplo 4 da Seção 7 que $\ell^1(\mathbb{Z})$ é uma álgebra da Banach com involução, mas não é uma C*álgebra.

Proposição 12.4. *Se a é um elemento autoadjunto de uma C*álgebra unital A, $a = a^* \in A$, então $r(a) = \|a\|$.*

`Demonstração:` Temos $\|a^2\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$. Podemos aplicar esta identidade com a^2 no lugar de a, pois a^2 também é autoadjunto, $(a^2)^* = (a^*)^2 = a^2$. Daí $\|a^4\| = \|a\|^4$, e então $\|a^8\| = \|a\|^8$, e assim sucessivamente. Demonstra-se por indução que

$$\|a^{2^k}\|^{2^{-k}} = \|a\|, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Assim, a sequência $(\|(a^n)\|^{\frac{1}{n}})_n$, que converge a $r(a)$ pelo Teorema 11.5, possui uma subsequência constante e igual a $\|a\|$. Logo $r(a) = \|a\|$. $\square$

Corolário 12.5. *Uma álgebra unital com involução (complexa) pode ser munida de no máximo uma norma que faça dela uma C*álgebra. Equivalentemente, se A e B são C*álgebras unitais e $\phi : A \to B$ é um isomorfismo de álgebras com involução, então ϕ é uma isometria.*

`Demonstração:` Todos os elementos a de uma C*álgebra A satisfazem $\|a\| = \sqrt{\|a^*a\|} = \sqrt{r(a^*a)}$, pois a^*a é autoadjunto. O último membro desta igualdade só depende da estrutura de álgebra com involução de A, que portanto determina a norma. □

Proposição 12.6. *Se a é um elemento autoadjunto de uma C*álgebra unital A, $a = a^* \in A$, então o espectro de a é real, $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.*

`Demonstração:` Dado $\lambda = x + iy \in \sigma(a)$, $x, y \in \mathbb{R}$, queremos mostrar que $y = 0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $b_n = a - x + iny = (a - \lambda) + i(n+1)y \in A$. Como $a - \lambda$ não é inversível, então $i(n+1)y \in \sigma(b_n)$, então $(n+1)|y| \leq \|b_n\|$. Ou seja, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$(n+1)^2y^2 \leq \|b_n\|^2 = \|b_n^*b_n\| = \|(a - x - iny)(a - x + iny)\| = \|(a-x)^2 + n^2y^2\| \leq \|a - x\|^2 + n^2y^2.$$

Daí

$$(2n+1)y^2 = [(n+1)^2 - n^2]y^2 \leq \|a - x\|^2, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

o que implica que $y = 0$. □

Proposição 12.7. *Sejam A uma C*álgebra unital comutativa e $\phi \in \widehat{A}$. Então, para todo $a \in A$, $\phi(a^*) = \overline{\phi(a)}$.*

`Demonstração:` Pelo Corolário 10.3 e pela Proposição 12.6, se $x = x^* \in A$,

$$\sigma(x) \;=\; \{\phi(x);\, \phi \in \widehat{A}\} \;\subset\; \mathbb{R}.$$

Ou seja, $\phi(x) = \overline{\phi(x)}$ para todo $\phi \in \widehat{A}$, se $x = x^* \in A$. Dado $a \in A$ qualquer,

$$a = x + iy, \quad x = \frac{a + a^*}{2},\; y = \frac{a - a^*}{2i}.$$

Como x e y são autoadjuntos,

$$\phi(a^*) = \phi(x - iy) = \phi(x) - i\phi(y) = \overline{\phi(x) + i\phi(y)} = \overline{\phi(a)},$$

como queríamos. □

Corolário 12.8. *Se A é uma C*álgebra comutativa com unidade, então a transformada de Gelfand $\kappa : A \longrightarrow C(\widehat{A})$ é um homomorfismo de álgebras com involução, isto é, $\kappa(a^*) = \overline{\kappa(a)}$ para todo $a \in A$.*

`Demonstração:` Para todo $\phi \in \widehat{A}$, $\kappa(a^*)(\phi) = \phi(a^*) = \overline{\phi(a)} = \overline{\kappa(a)(\phi)}$. □

Proposição 12.9. *Seja A uma C*álgebra unital comutativa, seja $\kappa : A \longrightarrow C(\widehat{A})$ sua transformada de Gelfand. Para todo $a \in A$, $\|\kappa(a)\|_\infty = r(a)$.*

`Demonstração:` Segue do Corolário 10.3 que, para todo $a \in A$,

$$\|\kappa(a)\|_\infty \;=\; \sup_{\phi\in\widehat{A}} |\phi(a)| \;=\; \sup_{\lambda\in\sigma(a)} |\lambda| \;=\; r(a),$$

como queríamos. □

Proposição 12.10. *Se A é uma C*álgebra unital comutativa, sua transformada de Gelfand $\kappa : A \longrightarrow C(\widehat{A})$ é uma isometria.*

`Demonstração:` Segue da Proposição 12.4, do Corolário 12.8 e da Proposição 12.9 que, para todo $a \in A$,

$$\|\kappa(a)\|_\infty^2 = \|\overline{\kappa(a)}\kappa(a)\|_\infty = \|\kappa(a^*a)\|_\infty = r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$$

(na terceira igualdade usamos que a^*a é autoadjunto). □

Para uma demonstração do teorema seguinte, veja, por exemplo, [4, Theorem 2.40].

Teorema 12.11. (`Stone-Weierstraß`) *Seja X um espaço de Hausdorff compacto, seja A uma subálgebra de $C(X)$ invariante pelo complexo conjugado e contendo as funções constantes. Se A separa pontos (isto é, dados $x \neq y$ em X, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$), então A é densa em $C(X)$.*

Proposição 12.12. *Se A uma C*álgebra comutativa com unidade, a imagem da transformada de Gelfand, $\operatorname{Im}\kappa = \{\kappa(a);\, a \in A\}$, é densa em $C(\widehat{A})$.*

`Demonstração:` Sendo $\kappa : A \longrightarrow C(\widehat{A})$ um homomorfismo de álgebras com involução e sendo $\kappa(\mathbf{1}_A)$ igual à função constante e igual a 1, $\operatorname{Im}\kappa$ é uma subálgebra de $C(\widehat{A})$ invariante pelo complexo conjugado e contendo as funções constantes. Dados $\phi \neq \psi$ em $\widehat{A}$, existe $a \in A$ tal que $\phi(a) \neq \psi(a)$, logo $\kappa(a)(\phi) \neq \kappa(a)(\psi)$. A proposição é então consequência do Teorema de Stone-Weiertraß. □

Observação: Na demonstração da Proposição precedente, bastaria supor que A é uma álgebra de Banach unital com involução e que a transformada de Gelfand é um homomorfismo de álgebras com involução. Este é o caso, por exemplo, de $\ell^1(\mathbb{Z})$. Na página 40, vimos que a imagem da transformada de Gelfand de $\ell^1(\mathbb{Z})$ é densa usando outros argumentos.

Esta longa série de pequenos resultados culmina no *Teorema de Gelfand para C*álgebras*:

Teorema 12.13. *Seja A uma C*álgebra comutativa com unidade. A transformada de Gelfand $\kappa : A \longrightarrow C(\widehat{A})$ é um *-isomorfismo isométrico entre as C*álgebras A e $C(\widehat{A})$.*

`Demonstração:` Já sabemos desde a Proposição 10.1 que κ é um homomorfismo de álgebras e que $\|\kappa(a)\| \leq \|a\|$ para todo $a \in A$. O Corolário 12.8 garante que κ preserva involução. A Proposição 12.10 afirma que κ é uma isometria; logo, pela completude de A, $\operatorname{Im}\kappa$ é fechada. Mas $\operatorname{Im}\kappa$ é densa em $C(\widehat{A})$, pela Proposição 12.12. Logo κ é sobrejetora. Toda isometria é injetora. $\square$

13. Invariância Espectral

Definição 13.1. *Um "polinômio em z e $\bar{z}$" é uma expressão da forma*

$$p(z, \bar{z}) \;=\; \sum_{(n,m)\in F} \alpha_{n,m}\, z^n\, \bar{z}^m, \tag{16}$$

$F \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ finito, $\alpha_{n,m} \in \mathbb{C}$.

Sejam A uma C*álgebra com unidade e $a \in A$ normal, isto é, $a^*a = aa^*$. Para cada p como em (16), definimos

$$p(a, a^*) = \sum_{(n,m)\in F} \alpha_{n,m}\, a^n\, (a^*)^m$$

e

$$D \;=\; \{p(a, a^*);\; p \text{ polinômio em } z \text{ e } \bar{z}\,\}. \tag{17}$$

Como a é normal, D é uma *álgebra comutativa, a menor *subálgebra de A contendo $\mathbf{1}_A$ e a. Denotamos o fecho de D por $C^*(1, a)$. Esta é a menor C*subálgebra de A contendo $\mathbf{1}_A$ e a. É também comutativa, pois possui uma subálgebra densa comutativa.

Lema 13.2. *Sejam X um espaço compacto de Hausdorff e $f \in C(X)$. Se $f(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in X$, então para todo $\epsilon > 0$ existe $g \in C(X)$ tal que $\|g\|_\infty = 1$ e $\|gf\|_\infty < \epsilon$.*

`Demonstração:` $V := \{x \in X;\, |f(x)| < \epsilon\}$ é um aberto contendo x_0. Pelo lema de Urysohn, existe $g \in C(X)$ tal que $0 \leq g \leq 1$, $g(x_0) = 1$ e $g(x) = 0$ se $x \in V$. Logo, $\|g\|_\infty = 1$ e $\|gf\|_\infty < \epsilon$. $\square$

Proposição 13.3. *Sejam A uma C*álgebra com unidade e $a \in A$ normal. Se $b \in C^*(1, a)$ possui inversa $b^{-1} \in A$, então $b^{-1} \in C^*(1, a)$.*

`Demonstração:` Denotemos $B = C^*(1, a)$. Suponha que b é inversível em A e tome $\epsilon = \|b^{-1}\|^{-1}$. Suponha que b não seja inversível em B. Como B é uma C*álgebra comutativa com unidade, pelo Teorema 10.2, $f = \kappa(b)$ se anula em algum ponto de $\widehat{B}$. Usando o Lema 13.2, tome $g \in C(\widehat{B})$ tal que $\|g\|_\infty = 1$ e $\|fg\|_\infty < \epsilon$. Pelo Teorema 12.13, existe $c \in B$, $\kappa(c) = g$, $\|c\| = \|g\|_\infty = 1$ e $\|bc\| = \|\kappa(cb)\|_\infty = \|fg\|_\infty < \epsilon$. Daí:

$$1 = \|c\| = \|b^{-1}(bc)\| \leq \|b^{-1}\|\|bc\| < 1,$$

o que é um absurdo. $\square$

Proposição 13.4. *Sejam A uma C*álgebra com unidade e $B \subset A$ uma C*subálgebra contendo a unidade de A. Se $b \in B$ possui inversa $b^{-1} \in A$, então $b^{-1} \in B$.*

`Demonstração:` Se b é inversível em A, b^*b também é inversível em A e $b^{-1} = (b^*b)^{-1}b^*$. Sendo b^*b autoadjunto, portanto normal, segue da Proposição 13.3 que $(b^*b)^{-1} \in C^*(1, b^*b) \subseteq B$. Logo $b^{-1} = (b^*b)^{-1}b^* \in B$. $\square$

Corolário 13.5. *Sejam A uma C*álgebra com unidade e $B \subset A$ uma C*subálgebra contendo a unidade de A. Se $b \in B$, o espectro de b relativo a B coincide com o espectro de b relativo a A.*

`Demonstração:` Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, é óbvio que $\lambda - b$ inversível em B implica $\lambda - b$ inversível em A. A recíproca segue da Proposição 13.4: $\lambda - b$ inversível em A implica $\lambda - b$ inversível em B. Ou seja, $\lambda \notin \sigma_{B}(b) \Longleftrightarrow \lambda \notin \sigma_{A}(b)$. $\square$

Exemplo (Exemplo 7 da Seção 7 revisitado). Seja $A = \{f \in C(S^1);\ f = g|_{S^1},\ g \in C(D),\ g|_B$ holomorfa$\}$ (lembrando que $D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq 1\}$ e $B = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$). A é uma subálgebra fechada de $C(S^1)$ que não é *espectralmente invariante*: para $\mathrm{id}(z) = z$, $\sigma_{C(S^1)}(\mathrm{id}) = S^1$ e $\sigma_{A}(\mathrm{id}) = D$. Munida da involução $f \mapsto \overline{f}$, $C(S^1)$ é uma C*álgebra, mas A não é invariante pela involução e portanto o Corolário 13.5 não se aplica. A álgebra $C(S^1)$ pode ser munida de uma outra involução isométrica, a saber, $f^*(z) := \overline{f(\overline{z})}$. Esta nova involução deixa A invariante, mas não satisfaz o axioma $\|f^*f\| = \|f\|^2$ e portanto o Corolário 13.5 não se aplica.

14. Cálculo Funcional Contínuo

Proposição 14.1. *Sejam A uma C*álgebra com unidade e $a \in A$ normal. Seja $B = C^*(1, a)$, como definida na página 45, a menor C*subálgebra de A contendo 1 e a. A aplicação*

$$\widehat{B} \ni \phi \ \longmapsto\ \phi(a) \in \sigma(a) \tag{18}$$

é um homeomorfismo.

`Demonstração:` Como B é comutativa, segue do Corolário 10.3 que $\sigma_{B}(a) = \{\phi(a);\, \phi \in \widehat{B}\}$. Pelo Corolário 13.5, $\sigma_{B}(a) = \sigma(a)$. Logo, a aplicação em (18) está bem definida e é sobrejetora.

Suponha que $\phi(a) = \psi(a)$. Como ϕ e ψ são *homomorfismos, ϕ e ψ coincidem em D, definido em (17), que é denso em B. Como ϕ e ψ são funcionais lineares contínuos em B, segue que $\phi = \psi$.

Se $(\phi_\alpha)_\alpha$ é uma rede em $\widehat{B}$ e $\phi_\alpha \to \phi \in \widehat{B}$, segue da definição da topologia de $\widehat{B}$ que $\phi_\alpha(a) \to \phi(a)$.

Sendo a aplicação em (17) uma bijeção contínua entre dois espaços compactos de Hausdorff, ela é um homeomorfismo. □

Teorema 14.2. *Sejam A uma C*álgebra com unidade e $a \in A$ normal. Então existe um *homomorfismo isométrico $\mathfrak{C} : C(\sigma(a)) \longrightarrow A$, cuja imagem coincide com $C^*(1, a)$, e tal que, se $f(z) = p(z, \bar{z})$, $z \in \sigma(a)$, p como em (16), então*

$$\mathfrak{C}(f) \;=\; \sum_{(n,m)\in F} \alpha_{n,m}\, a^n\, (a^*)^m. \tag{19}$$

Segue do Teorema de Stone-Weierstraß que o conjunto dos polinômios em z e $\bar{z}$ é denso em $C(\sigma(a))$. A condição (19) implica portanto a unicidade do *homomorfismo $\mathfrak{C}$ que vamos construir na demonstração seguinte. É também a condição (19) que justifica a notação $\mathfrak{C}(f) = f(a)$, universalmente adotada. O Teorema 14.2 implica e decorre facilmente seguinte afirmação: dados $a \in A$ normal, $F \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ finito e $\alpha_{n,m} \in \mathbb{C}$, $(n, m) \in F$,

$$\left\| \sum_{(n,m)\in F} \alpha_{n,m}\, a^n\, (a^*)^m \right\| \;=\; \sup_{z\in\sigma(a)} \left| \sum_{(n,m)\in F} \alpha_{n,m}\, z^n\, \bar{z}^m \right|.$$

Este é um de diversos exemplos em que se pode deduzir uma igualdade sobre normas de elementos de uma álgebra de Banach como consequência do Teorema de Gelfand.

`Demonstração do Teorema 14.2`: Pela Proposição 14.1, $\widehat{a} : \widehat{B} \longrightarrow \sigma(a)$ é um homeomorfismo. Logo $\widehat{a}^* : C(\sigma(a)) \longrightarrow C(\widehat{B})$, $\widehat{a}^*(f) = f \circ \widehat{a}$, é um *isomorfismo isométrico. A transformada de Gelfand $\kappa : B \longrightarrow C(\widehat{B})$, é um *isomorfismo isométrico, pelo Teorema 12.13. Logo $\mathfrak{C} := \kappa^{-1} \circ \widehat{a}^* : C(\sigma(a)) \longrightarrow B$ é um *isomorfismo isométrico; em particular, $\mathfrak{C}(\mathbf{1}_{C(\sigma(a))}) = \mathbf{1}_A$. Como $\mathfrak{C}$ é um *homomorfismo, para provar (19) basta provar que $\mathfrak{C}(\mathrm{id}) = a$. Isto segue imediatamente das definições: $\mathrm{id} \circ \widehat{a} = \widehat{a} = \kappa(a)$. □

O seguinte exemplo permite encarar o Teorema 14.2, ao qual nos referiremos como "o cálculo funcional contínuo", como uma generalização do teorema espectral para espaços vetoriais complexos de dimensão finita.

Exemplo 1. Seja $A = M_n(\mathbb{C})$, $a \in A$ normal. O espectro de a são seus autovalores, $\sigma(a) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\}$, $m \le n$. Toda função definida em um conjunto discreto é contínua; em particular, $\chi_j : \sigma(a) \longrightarrow \mathbb{C}$, $\chi_j(\lambda_j) = 1$, $\chi_j(\lambda_k) = 0$ se $k \ne j$, pertence a $C(\sigma(a))$, $j = 1, \cdots, m$. Seja $p_j = \chi_j(a)$. As identidades em $M_n(\mathbb{C})$ enumeradas em destaque um pouco mais abaixo decorrem do cálculo funcional contínuo e das seguintes identidades em $C(\sigma(a))$:

(1) $\chi_j = \chi_j^2 = \overline{\chi_j}$, (2) $\chi_j\, \chi_k = 0$ se $j \ne k$, (3) $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \chi_j = 1$, (4) $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \chi_j = \mathrm{id}$.

(1) $p_j = (p_j)^2 = (p_j)^*$,

(2) $p_j p_k = 0$ se $j \neq k$,

(3) $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$,

(4) $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j p_j = a$

Identifiquemos agora $M_n(\mathbb{C})$ com $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ da maneira canônica e denotemos por $V_j \subseteq \mathbb{C}^n$ a imagem de $p_j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Segue de $p_j = (p_j)^2$ que $V_j = \{x \in \mathbb{C}^n;\, p_j x = x\}$. Segue de (2) e de $p_j = p_j^*$ que os espaços V_j, $j = 1, \cdots, m$, são mutuamente ortogonais. Segue de (3) que $\mathbb{C}^n = \oplus_{j=1}^{m} V_j$. Segue de (4), de (2) e de $p_j x = x$ se $x \in V_j$ que $A v_j = \lambda_j v_j$ se $v_j \in V_j$. Em resumo, $\mathbb{C}^n$ pode ser decomposto como a soma direta de autoespaços de A mutuamente ortogonais.

O seguinte exemplo mostra que um pedaço do teorema espectral para operadores compactos normais em espaços de Hilbert pode ser obtido como consequência do cálculo funcional contínuo; e sugere a necessidade de estender o cálculo funcional para funções não contínuas.

Exemplo 2. O espectro de qualquer operador compacto em um espaço de Banach de dimensão infinita é da forma $\{0\} \bigcup E$, sendo E enumerável e contendo no máximo um ponto de acumulação, que será necessariamente 0. Além disso, cada ponto não-nulo do espectro é um autovalor com autoespaço de dimensão finita. Para uma demonstração destas afirmações, veja [1, Teorema 7.3.7].

Seja H um espaço de Hilbert e seja $T : H \to H$ um operador compacto normal, $TT^* = T^*T$. Vamos analisar apenas o caso em que o espectro de T é infinito e, portanto, da forma

$$\sigma(T) \;=\; \{0\} \cup \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\}, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0.$$

Cada ponto diferente de zero em $\sigma(T)$ é um ponto isolado, e portanto, para $j = 1, 2, \cdots$, a função $\chi_j : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ definida por $\chi_j \lambda_j = 1$, $\chi_j(\lambda) = 0$ se $\lambda \neq \lambda_j$, é contínua. Seja $P_j = \chi_j(T)$. Segue do cálculo funcional contínuo e de

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \chi_j \;=\; \mathrm{id} \qquad \text{em } C(\sigma(T))$$

que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j \;=\; A \text{ em } \mathcal{B}(H), \text{ na topologia da norma.}$$

Argumentando como no Exemplo precedente, pode-se provar que $\operatorname{Im} P_j$ consiste de autovetores associados a λ_j, e são mutuamente ortogonais. Mas não se pode repetir o argumento do caso $H = \mathbb{C}^n$ para provar que H pode ser decomposto na soma direta dos autoespaços de T, em parte porque a função característica χ_0 de 0 em $\sigma(T)$ não é contínua. A extensão do cálculo funcional para funções mensuráveis a Borel vai ajudar a esclarecer esta questão.

15. Teorema Espectral para Operadores Normais

Há pelo menos três versões do teorema espectral para operadores normais limitados em espaços de Hilbert. Uma delas afirma que qualquer operador desse tipo é unitariamente equivalente a um operador de multiplicação em algum espaço L^2. Uma outra consiste basicamente de estender o cálculo funcional contínua para funções limitadas e mensuráveis a Borel definidas no espectro do operador. A mais conhecida é a versão original de Hilbert e Von Neumann, que escreve o operador como a integral da função identidade com respeito a uma medida que toma valores em projeções ortogonais. Qualquer uma das três versões implica as outras duas sem muito esforço.

Nossa abordagem, baseada em [2, 9], será demonstrar primeiro a versão operador-de-multiplicação, depois estender o cálculo funcional para funções borelianas e só então obter a versão clássica. Vamos usar o cálculo funcional contínuo e o teorema da representação de Riesz para funcionais positivos [11].

Sejam H um espaço de Hilbert, $T \in \mathcal{B}(H)$ normal e $\sigma(T)$ o espectro de T. Segue do Teorema da Aplicação Aberta que, dado $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda I - T$ é inversível em $\mathcal{B}(H)$ se e somente se $\lambda - T$ é uma bijeção. Assim, $\sigma(T)$ consiste dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $\lambda I - T$ não é uma bijeção. Todo autovalor de T pertence ao espectro de T, mas em geral nem todo ponto do espectro é um autovalor se H tiver dimensão infinita.

Pelo Teorema 14.2, existe um *homomorfismo isométrico (o cálculo funcional contínuo)

$$\begin{array}{rcl} C(\sigma(T)) & \longrightarrow & \mathcal{B}(H) \\ f & \longmapsto & f(T) \end{array} \tag{20}$$

tal que, se $f(z) = \sum_{(n,m)\in F} \alpha_{n,m}\, z^n\, \bar{z}^m$, $F \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ finito, $\alpha_{n,m} \in \mathbb{C}$, então $f(T) = \sum_{(n,m)\in F} \alpha_{n,m}\, T^n\, (T^*)^m$.

Dado $v \in H$ não-nulo, considere o funcional linear

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_v : C(\sigma(T)) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & \langle f(T)v, v\rangle \end{array}.$$

Dada $f \in C(\sigma(T))$, $f \geq 0$, seja $g = \sqrt{f}$. Então $g \in C(\sigma(T))$, $g^2 = f$ e $\overline{g} = g$. Aplicando o *homomorfismo em (20) a estas identidades, vem que $g(T)^2 = f(T)$ e $g(T)^* = g(T)$. Daí

$$\Lambda_v(f) = \langle f(T)v, v\rangle = \langle g(T)^* g(T)v, v\rangle = \langle g(T)v, g(T)v\rangle = \|g(T)v\|^2 \geq 0$$

Ou seja Λ_v é um funcional linear positivo. Pelo Teorema da Representação de Riesz, existe uma medida positiva regular μ_v, definida nos borelianos de $\sigma(T)$, finita pois $\sigma(T)$ é compacto, tal que

$$\Lambda_v(f) \;=\; \int_{\sigma(T)} f\, d\mu_v, \quad f \in C(\sigma(T)).$$

Em particular, temos

$$\mu_v(\sigma(T)) = \|v\|^2. \tag{21}$$

. Chama-se μ_v de *medida espectral associada a v.*

Para cada $f \in C(\sigma(T))$, temos

$$\|f(T)v\|^2 = \langle f(T)v, f(T)v\rangle = \langle f(T)^* f(T)v, v\rangle = \langle \overline{f}(T)f(T)v, v\rangle =$$

$$\langle |f|^2(T)v, v\rangle = \int_{C(\sigma(T))} |f|^2\, d\mu_v = \|f\|_2^2$$

com $\|\cdot\|_2$ denotando a norma de $L^2(\sigma(T); d\mu_v)$.

Seja D o subespaço de H definido por $D = \{f(T)v;\ f \in C(\sigma(T))\}$. A série de igualdades logo acima mostra que $f(T)v \mapsto f$ define uma isometria V de D em $L^2(\sigma(T); d\mu_v)$ com imagem igual a $C(\sigma(T))$, que é um subespaço denso de $L^2(\sigma(T); d\mu_v)$. Seja H_v o fecho de D. Por densidade, a isometria V se estende a um operador unitário, que também denotaremos por V, de H_v em $L^2(\sigma(T); d\mu_v)$

Teorema 15.1. *Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(H)$ normal. Seja $v \in H$ não-nulo, seja μ_v a medida espectral associada a v, seja $D = \{f(T)v;\ f \in C(\sigma(T))\}$ e $H_v = \overline{D}$ seu fecho. Então H_v é invariante por T e existe um operador unitário $U : L^2(\sigma(T); d\mu_v) \to H_v$ tal que, para toda $f \in L^2(\sigma(T); d\mu_v)$*

$$(U^{-1}TUf)(\lambda) = \lambda f(\lambda), \quad \mu_v\text{-qtp.} \tag{22}$$

`Demonstração:` Seja U a inversa do operador unitário $V : H_v \longrightarrow L^2(\sigma(T); d\mu_v)$ definido logo antes do enunciado do teorema. D é invariante por T pois $Tf(T)v = g(T)v$, $g(\lambda) = \lambda f(\lambda)$. Por densidade H_v também é invariante por T. Por definição, para toda $g \in C(\sigma(T))$, $Ug = g(T)v$. Daí para toda $f \in C(\sigma(T))$,

$$U(\mathrm{id}\, f) = (\mathrm{id}\, f)(T)v = \mathrm{id}(T)\, f(T)v = T\, f(T)v = TU(f), \quad \text{logo } \ \mathrm{id}\, f = U^{-1}TUf,$$

ou seja, (22) vale para toda f em $C(\sigma(T))$, que é um subespaço denso de $L^2(\sigma(T); d\mu_v)$. Multiplicação pela função contínua limitada $\mathrm{id}(\lambda) = \lambda$, $\lambda \in \sigma(T)$, é um operador linear contínuo em $L^2(\sigma(T); d\mu_v)$. Logo o resultado segue por densidade. □

Proposição 15.2. *Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(H)$ normal. Se M é um subespaço fechado invariante por T e T^*, então $T|_M$ é normal em $\mathcal{B}(M)$ e $\sigma(T|_M) \subseteq \sigma(T)$. Ademais, para cada $f \in C(\sigma(T))$, temos*

$$f(T)|_M = g(T|_M), \textit{ sendo } g \in C(\sigma(T_M)) \textit{ a restrição de } f \textit{ a } \sigma(T|_M). \tag{23}$$

`Demonstração:` Como M é subespaço fechado de H, M é um espaço de Hilbert.

Se $\lambda I_H - T : H \longrightarrow H$ for uma bijeção, então $\lambda I_M - T|_M : M \longrightarrow M$ também é uma bijeção. Logo $\sigma(T|_M) \subseteq \sigma(T)$.

Segue imediatamente da definição de adjunto que $(T^*)|_M = (T|_M)^*$, e portanto $T|_M$ é normal; e portanto podemos definir o cálculo funcional contínuo para $T|_M$,

$$C(\sigma(T|_M)) \ni g \longmapsto g(T|_M) \in \mathcal{B}(M).$$

Se $f \in C(\sigma(T))$ é da forma $f(z) = \sum_{(n,m)\in F} \alpha_{n,m}\, z^n\, \bar{z}^m$, $F \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ finito, então a restrição $g = f|_M \in C(\sigma(T|_M))$ é dada pela mesma fórmula e temos

$$g(T|_M) = \sum_{(n,m)\in F} \alpha_{n,m}\, (T|_M)^n\, (T^*|_M)^m = \left.\left(\sum_{(n,m)\in F} \alpha_{n,m}\, T^n\, (T^*)^m \right)\right|_M = f(T)|_M$$

Logo (23) vale para todo polinômio em z e $\overline{z}$, que é um subconjunto denso de $C(\sigma(T))$. Como o cálculo funcional contínuo, visto como aplicação linear entre dois espaços de Banach, é uma aplicação contínua, a demonstração pode ser concluída tomando uma sequência p_n de polinômios em z e $\overline{z}$ convergindo uniformemente para uma dada $f \in C(\sigma(T))$. Obviamente, p_n convergirá uniformemente também para g em $C(\sigma(T|_M))$. □

Corolário 15.3. *Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(H)$ normal. Se M é um subespaço fechado invariante por T e T^*, então M é invariante por $f(T)$, para toda $f \in C(\sigma(T))$.*

`Demonstração:` A afirmação segue de (23). □

Seja $\{H_\alpha;\, \alpha \in I\}$ uma família de subespaços fechados H mutuamente ortogonais, isto é, se $x_\alpha \in H_\alpha$, $x_\beta \in H_\beta$ e $\alpha \neq \beta$, então $\langle x_\alpha, x_\beta \rangle = 0$. Denotaremos por $\oplus_{\alpha\in I} H_\alpha$ o subespaço de H gerado por $\cup_{\alpha\in I} H_\alpha$.

Proposição 15.4. *Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(H)$ normal. Existe uma família de subespaços fechados mutuamente ortogonais não-nulos $\{H_\alpha;\, \alpha \in I\}$ satisfazendo:*

$$H = \overline{\left(\bigoplus_{\alpha\in I} H_\alpha \right)} \tag{24}$$

e, para todo $\alpha \in I$, existe $v_\alpha \in H_\alpha$ tal que $\{f(T)v_\alpha;\, f \in C(\sigma(T))\}$ é denso em H_α.

`Demonstração:` Seja $\mathfrak{S}$ o conjunto de todas as famílias de subespaços fechados mutuamente ortogonais $\{H_\alpha;\, \alpha \in I\}$ satisfazendo: para todo $\alpha \in I$, existe $v_\alpha \in H_\alpha$, $v_\alpha \neq 0$, tal que $\{f(T)v_\alpha;\, f \in C(\sigma(T))\}$ é denso em H_α. Ordenando $\mathfrak{S}$ por inclusão, todo subconjunto totalmente ordenado de $\mathfrak{S}$ possui cota superior, a saber, a união de todas as famílias desse subconjunto. Pelo Lema de Zorn, $\mathfrak{S}$

possui um elemento maximal. Para demonstrar a proposição, basta provar que, se um elemento de $\mathfrak{S}$ não satisfizer (24), então ele não é maximal.

Tomemos portanto $\{H_\alpha;\, \alpha \in I\} \in \mathfrak{S}$ tal que

$$(H_0)^\perp \neq \{0\}, \qquad H_0 := \bigoplus_{\alpha \in I} H_\alpha.$$

Para todo $\alpha \in I$, para toda $f \in C(\sigma(a))$, $Tf(T)v_\alpha = g(T)v_\alpha$, $T^*f(T)v_\alpha = h(T)v_\alpha$, $g(\lambda) = \lambda f(\lambda)$, $h(\lambda) = \overline{\lambda} f(\lambda)$, $\lambda \in \sigma(T)$. Ou seja, o subespaço $\{f(T)v_\alpha;\, f \in C(\sigma(T))\}$, que é denso de H_α, fica invariante por T e T^*. Consequentemente, cada H_α fica invariante por T e T^*. Logo, se $x \in H_0$, então Tx e T^*x pertencem a H_0. Agora tome $x \in (H_0)^\perp$. Para cada $y \in H_0$, usando a invarância de H_0 por T e T^*, vem

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = 0, \quad \text{e} \quad \langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = 0.$$

Ou seja, $(H_0)^\perp$ é invariante por T e T^*. Segue do Corolário 15.3 aplicado com $(H_0)^\perp$ no lugar de M que $(H_0)^\perp$ é invariante por $f(T)$ para toda $f \in C(\sigma(T))$ Tome $v_1 \in (H_0)^\perp$ não-nulo e defina

$$H_1 \;=\; \overline{\{f(T)v_1;\, f \in C(\sigma(T))\}}.$$

Então $\{H_\alpha;\, \alpha \in I\} \cup H_1$ é um elemento de $\mathfrak{S}$ que contém estritamente $\{H_\alpha;\, \alpha \in I\}$. □

O próximo teorema é a "versão operador-de-multiplicação" do Teorema Espectral para operadores limitados normais em espaços de Hilbert.

Teorema 15.5. *Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(H)$ normal. Então existe um espaço de medida (X, μ), que pode ser escolhido de modo que $\mu(X) \leq 1$ no caso em que H é separável, um operador unitário $U : L^2(X; d\mu) \to H$ e uma função mensurável limitada $g : X \to \mathbb{C}$, $g(x) \in \sigma(T)$ para todo $x \in X$, tais que*

$$(U^{-1}TUf)(\lambda) \;=\; g(\lambda)\, f(\lambda), \quad \mu\text{-qtp}, \tag{25}$$

para toda $f \in L^2(X; d\mu)$.

`Demonstração:` Tome uma decomposição de H fornecida pela Proposição 15.4. Para cada $\alpha \in I$, seja μ_α a medida espectral associada a v_α. Segue do Teorema 15.1 que existe um operador unitário $U_\alpha : L^2(\sigma(T); \mu_\alpha) \longrightarrow H_\alpha$ tal que $U^{-1}TU$ é igual ao operador de multiplicação pela função identidade id.

Seja $X = \sigma(T) \times I$. O conjunto de todos os subconjuntos E de X tais

$$E_\alpha = \{\lambda \in \sigma(T);\, (\lambda, \alpha) \in E\} \subseteq \sigma(T)$$

é mensurável a Borel é uma sigma-álgebra e $\mu(E) = \sum_{\alpha\in I} \mu_\alpha(E_\alpha)$ é uma medida positiva em X. Cada $L^2(\sigma(T);\, \mu_\alpha)$ pode ser canonicamente mergulhado em $L^2(X;\, d\mu)$, identificando um elemento de $L^2(\sigma T;\, d\mu_\alpha)$ com uma função que se anula em $\{(\lambda, \beta);\, \beta \neq \alpha\}$. Usando esses mergulhos como identificações, os subespaços $L^2(\sigma(T);\, d\mu_\alpha)$ são mutuamente ortogonais e podemos escrever

$$L^2(X;\, d\mu) \;=\; \overline{\bigoplus_{\alpha\in I} L^2(\sigma(T);\, d\mu_\alpha)}.$$

Definimos $U : L^2(X;\, d\mu) \longrightarrow H$ declarando que a restrição de U a cada $L^2(\sigma(T);\, d\mu_\alpha$ é igual a U_α. U é um operador unitário e $U^{-1}TU$ é igual ao operador de multiplicação por g, $g((\lambda, \alpha)) = \lambda$ para todo $(\lambda, \alpha) \in \sigma(T) \times I = X$. Em particular, $g(x) \in \sigma(T)$ para todo $x \in X$.

No caso em que H é separável, I é enumerável, $I = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots\}$. Antes da etapa em que construímos o espaço de medida e o operador unitário, podemos substituir cada v_{α_j} por um seu múltiplo v_j, $\|v_j\| = 2^{-j}$. Segue de (21) que $\mu_{\alpha_j}(\sigma(T)) = 2^{-j}$ e portanto $\mu(X) \leq 1$. $\square$

Cálculo funcional boreliano.

Denotemos por $B(\sigma(T))$ a álgebra das funções complexas mensuráveis a Borel e limitadas e por $\|\cdot\|_\infty$ a norma do supremo nela definida, $\|f\|_\infty = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |f(\lambda)|$, munida da qual $B(\sigma(T))$ se torna uma C*álgebra comutativa. Se $f_n \in B(\sigma(T))$ e $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, então $f \in B(\sigma(T))$.

Sejam $T \in \mathcal{B}(H)$, $U : L^2(X; d\mu) \longrightarrow H$ e $g : X \to \mathbb{C}$ como no enunciado do Teorema 15.5. A equação (25) pode ser reescrita como $T = UM_gU^{-1}$, M_g denotando o operador de multiplicação por g. Para cada $h : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ mensurável a Borel e limitada, $h \circ g : X \to \mathbb{C}$ é mensurável e limitada e pode-se considerar o operador de multiplicação por $h \circ g$ em $L^2(X;\, d\mu)$, $M_{h\circ g} \in \mathcal{B}(L^2(X;\, d\mu))$. Denotemos por $h(T)$ o operador limitado em $\mathcal{B}(H)$ definido por

$$h(T) \;\coloneqq\; UM_{h\circ g}U^{-1}.$$

É fácil ver que $\|M_{h\circ g}\| \leq \|h\|_\infty$ e portanto $\|h(T)\| \leq \|h\|_\infty$.

Teorema 15.6. *A aplicação $\Phi : B(\sigma(T)) \longrightarrow \mathcal{B}(H)$, $\Phi(h) = h(T)$, é um *homomorfismo de C*álgebras, que estende o cálculo funcional contínuo de (20) e satisfaz*

(1) $\|\Phi(h)\| \leq \|h\|_\infty$ *para toda* $h \in B(\sigma(T))$,
(2) $h_n(T)v \to h(T)v$ *para todo* $v \in H$, *se* $h_n(\lambda) \to h(\lambda)$ *para todo* $\lambda \in \sigma(T)$ *e* $\sup_n \|h_n\|_\infty < \infty$.

Segue de toda função de $B(\sigma(T))$ ser o limite ponto-a-ponto de uma sequência de limitada funções em $C(\sigma(T))$ que Φ é a única extensão do cálculo funcional contínuo satisfazendo o item (2) do enunciado do Teorema 15.6.

`Demonstração:` É bem direto mostrar que Φ é um *homomorfismo, isto será omitido.

É evidente que $1_{B(\sigma(T))}(T) = I_H$ e $\mathrm{id}\,(T) = T$. Daí, se $h(z) = \sum_{(n,m)\in F} \alpha_{n,m}\, z^n\, \overline{z}^m$, $F \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ finito, $\alpha_{n,m} \in \mathbb{C}$, então $h(T) = \sum_{(n,m)\in F} \alpha_{n,m}\, T^n\, (T^*)^m$.

Já vimos que $\|h(T)\| \leq \|h\|_\infty$, ou seja, o item (1) é satisfeito, ou seja, a aplicação linear Φ é limitada e $\|\Phi\| \leq 1$.

Como Φ coincide com o cálculo funcional contínuo nos polinômios em z e $\overline{z}$, que formam um subconjunto $\|\cdot\|_\infty$-denso de $C(\sigma(T))$, segue de $\|\Phi\| \leq 1$ que Φ coincide com o cálculo funcional contínuo em $C(\sigma(T))$.

Suponha que $h_n(\lambda) \to h(\lambda)$ para todo $\lambda \in \sigma(T)$, $h_n, h \in B(\sigma(T))$. Para provar que $h_n(T)v \to h(T)v$ para todo $v \in H$, basta provar que $U^{-1}h_n(T)Uf \to U^{-1}h(T)Uf$ para toda $f \in L^2(X;\, d\mu)$; ou seja, que $M_{h_n\circ g}f \to M_{h\circ g}f$ para toda $f \in L^2(X;\, d\mu)$; ou seja, que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |h_n(g(x)) - h(g(x))|^2\, |f(x)|^2\, d\mu(x) \;=\; 0.$$

Segue da hipótese $C \coloneqq \sup_n \|h_n\|_\infty < \infty$ que o integrando acima é majorado por $4C^2|f(x)|^2$, que pertence a $L^1(X;\, d\mu)$, pois $f \in L^2(X;\, d\mu)$. O resultado que desejamos segue então do Teorema da Convergência Dominada. $\square$

O grupo dos operadores unitários em um espaço de Hilbert.

O conjunto dos operadores unitários em um espaço de Hilbert $H, \mathcal{U}(H) \coloneqq \{U \in \mathcal{B}(H);\, U^* = U^{-1}\}$, é um grupo topológico com a composição de operadores como operação e com a topologia relativa do espaço normado $\mathcal{B}(H)$. Como $\|U\|^2 = \|U^*U\| = \|I\|$, segue que $\|U\| = 1$ para todo $U \in \mathcal{U}(H)$.

Um operador é unitário se se somente é um isomoformismo linear isométrico de H em H, o que por sua vez é equivalente a $U : H \to H$ ser uma bijeção que preserva o produto interno.

Proposição 15.7. *Se $U \in \mathcal{U}(H)$, então $\sigma(U) \subseteq S^1$.*

`Demonstração:` Sendo U normal, podemos considerar o cálculo funcional contínuo a ele associado. Tome $f \in C(\sigma(U))$ definida por $f(\lambda) = \lambda\overline{\lambda}$, $\lambda \in \sigma(U)$. Então $f(U) = UU^* = I = \mathbf{1}_{C(\sigma(U))}(U)$, logo $z\overline{z} = 1$ para todo $z \in \sigma(U)$, logo $\sigma(U) \subseteq S^1$. $\square$

A proposição seguinte estabelece que $\mathcal{U}(H)$ é conexo por caminhos.

Proposição 15.8. *Dado* $U \in \mathcal{U}(H)$*, existe uma curva contínua na topologia da norma* $[0,1] \ni t \longmapsto U_t \in \mathcal{U}(H) \subset \mathcal{B}(H)$ *tal que* $U_0 = I$ *e* $U_1 = U$*.*

`Demonstração:` Para cada $t \in [0,1]$, considere $h_t : S^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$h_t(e^{i\theta}) \;=\; e^{it\theta}, \quad \text{para todo} \;\; \theta \in (-\pi, \pi]$$

(na linguagem clássica, h_t é o *ramo principal* da *função multivalente* $z \mapsto z^t$). Para cada t, a função h_t é contínua exceto em $z = -1$, ponto em que possui limites laterais distintos se $0 < t < 1$. Logo, h_t é mensurável a Borel. Segue da desigualdade

$$|e^{it\theta} - e^{is\theta}| \leq \pi|t - s|, \quad \text{para todo} \;\; \theta \in (-\pi, \pi],$$

válida para todos $t, s \in [0,1]$, que

$$[0,1] \ni t \;\longmapsto\; h_t \in B(\sigma(U))$$

é contínua relativamente à norma $\|\cdot\|_\infty$.

Sabemos da Proposição 15.7 que $\sigma(U) \subseteq S^1$. Denotando também por h_t a restrição de h_t a $\sigma(U)$, segue da continuidade do *cálculo funcional boreliano* $\Phi : B(\sigma(U)) \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ que

$$[0,1] \ni t \;\longmapsto\; h_t(U) \in \mathcal{B}(H)$$

é uma curva contínua ligando $h_0(U) = I$ a $h_1(U) = U$.

Resta provar que $h_t(U)$ é unitário para todo t. Segue da definição de h_t que $h_t(\lambda)\overline{h_t(\lambda)} = 1$ para todo $\lambda \in \sigma(U)$. Aplicando Φ a esta identidade, decorre que $h_t(U)h_t(U)^* = h_t(U)^*h_t(U) = I$. $\square$

O Teorema Espectral para Operadores Compactos.

Seja T um operador normal compacto no espaço de Hilbert H. Suponha que o espectro de T é infinito (o caso em que o espectro é finito fica para o leitor). Como já mencionamos no Exemplo 2 da Seção 14, segue de [1, Teorema 7.3.7] que

$$\sigma(T) \;=\; \{0\} \cup \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\}, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$$

($\lambda_j \neq 0$ para todo j e $\lambda_j \neq \lambda_k$ se $j \neq k$). Chamaremos 0 de λ_0 para facilitar a exposição seguinte.

Definimos, tal como na Seção 14, $\chi_j = \chi_{\lambda_j}$, $j = 0, 1, 2, \cdots$, $\chi_{\{\lambda\}}$ denotando a função característica de do conjunto unitário $\{\lambda\}$, $\lambda \in \sigma(T)$. Para todo $j > 0$, $\chi_j \in C(\sigma(T))$, pois λ_j é um ponto isolado, e $\chi_0 \in B(\sigma(T))$ pois $\{0\}$ é fechado.

Para todo $j = 0, 1, 2, \cdots$, segue das identidades $\chi_j = \chi_j^2 = \overline{\chi_j}$, que $P_j := \chi_j(T)$ satisfaz $P_j = P_j^2 = P_j^*$; logo P_j é a projeção ortogonal sobre $V_j := \operatorname{Im} P_j$. Como, para $j > 0$, χ_j é contínua e o cálculo funcional contínuo é uma isometria, segue que $\|P_j\| = \|\chi_j\|_\infty = 1$, logo $\dim V_j > 0$ se $j > 0$. Segue da identidade $\chi_j \chi_k = 0$ que $P_j P_k = 0$ se $j \neq k$ e portanto os subespaços fechados V_j, $j \geq 0$, são mutuamente ortogonais.

Segue da identidade $\operatorname{id} \chi_j = \lambda_j \chi_j$ que $TP_j = \lambda_j P_j$. Para $j > 0$, os elementos não-nulos de V_j, que existem, são portanto autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_j \neq 0$. Como T é compacto e a bola unitária de um espaço normado só é compacta se sua dimensão for finita, segue que cada V_j tem dimensão finita. Segue da identidade $\operatorname{id} \chi_0 = 0$ que $TP_0 = 0$ e portanto os elementos de V_0 (que em princípio pode ser nulo) estão contidos no núcleo de T.

Como, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|\chi_0 + \chi_1 + \cdots + \chi_n\|_\infty = 1$, segue da identidade

$$1 = \chi_0(\lambda) + \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \chi_j(\lambda), \quad \text{para todo } \lambda \in \sigma(T).$$

e do item (2) do enunciado do Teorema 15.6 que

$$v = P_0 v + \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} P_j v, \quad \text{para todo } v \in H.$$

Isto mostra que H pode ser expresso como o fecho da soma dos V_js, autoespaços mutuamente ortogonais,

$$H \;=\; \overline{\left(\bigoplus_{j=0}^{\infty} V_j \right)}.$$

No caso em que H é separável, um operador compacto pode ser injetor e V_0 pode não aparecer na soma acima. No caso em que a cardinalidade das bases ortonormais de H é não-enumerável, necessariamente V_0 tem dimensão não enumerável e a parte não-nula de T essencialmente “vive” em um subespaço fechado separável ortogonal ao núcleo. Esta observação ajuda a entender também o caso em que o espectro é finito, que ficou para o leitor.

Outra maneira de expressar o resultado do parágrafo anterior é escrevendo

$$I \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} P_j, \text{ na topologia forte de operadores em } \mathcal{B}(H).$$

Vimos no Exemplo 2 da Seção 14, usando apenas o cálculo funcional contínuo, que podemos escrever

$$T \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j P_j, \text{ na topologia da norma em } \mathcal{B}(H).$$

Estas duas fórmulas evidenciam o fato de que o que acabamos de demonstrar é uma generalização do Teorema Espectral para espaços complexos com produto interno de dimensão finita, ambiente no qual todos os operadores são compactos. Para o caso de operadores não-compactos, o cálculo funcional boreliano permitirá definir uma “medida tomando valores em projeções ortogonais” e estas somas infinitas serão substituídas por integrais.

Referências

[1] G. Botelho, D. Pellegrino, E. Teixeira. Fundamentos da Análise Fucional. IMPA.

[2] Rodrigo A. H. M. Cabral. O teorema espectral e a propriedade de 'self-adjointness' para alguns operadores de Schrödinger. Dissertação de Mestrado, IME-USP, 2014.

[3] H. O. Cordes. Elliptic pseudo-differential operators - an abstract theory. Springer Lecture Notes Math. **756**.

[4] R. G. Douglas. Banach Algebra Techniques in Operator Theory.

[5] R. Exel. Uma introdução às C*álgebras, http://mtm.ufsc.br/∼exel/papers/intro.pdf.

[6] G. Folland. A course in abstract harmonic analysis.

[7] G. Murphy. C*-Algebras and operator theory.

[8] G. K. Pedersen. Analysis Now.

[9] M. Reed & B. Simon. Methods of Modern Mathematical Physics I (Functional Analysis).

[10] W. Rudin. Functional Analysis.

[11] W. Rudin. Real and Complex Analysis.