USP - MAT6682 - 2020 - 4^a LISTA

1) Considere $A = \{(a_n)_{n=0}^{\infty};\ a_n \in \mathbb{C},\ \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty\}$ munida da norma $\|\mathbf{a}\| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, $\mathbf{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$, e do produto

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k \right)_{n=0}^{\infty}, \qquad \mathbf{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty},\ \mathbf{b} = (b_n)_{n=0}^{\infty}.$$

Esta é uma álgebra de Banach comutativa com unidade, $\mathbf{1}_A = (\delta_{n,0})_n$, $\delta_{0,0} = 1$, $\delta_{n,0} = 0$ se $n \neq 0$.

(a) Seja $D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq 1\}$. Mostre que $\phi : D \longrightarrow \widehat{A}$, $\phi_z(\mathbf{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in D$, define um homeomorfismo.

Considere o isomorfismo de C*álgebras $\phi^* : C(\widehat{A}) \longrightarrow C(D)$, $\phi^*(f) = f \circ \phi$; a transformada de Gelfand $\kappa : A \longrightarrow C(\widehat{A})$; e denote $\Lambda = \phi^* \circ \kappa$.

(b) Mostre que $(\Lambda \mathbf{a})(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in D$, $\mathbf{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty} \in A$.

Considere o homorfismo $R : \operatorname{Im} \Lambda \longrightarrow C(S^1)$ que aplica $f \in \operatorname{Im} \Lambda$ na restrição de f a S^1.

(c) Mostre que $B \coloneqq \operatorname{Im} R$ é uma subálgebra fechada de $C(S^1)$.
`Sugestão`: use o princípio do máximo para funções holomorfas e use que o limite uniforme de funções holomorfas é uma função holomorfa.

(d) Considere $\mathrm{id} \in C(S^1)$, $\mathrm{id}(z) = z$. Mostre que o espectro de id em $C(S^1)$ é S^1, e em B é D.

Em geral, se B é uma subálgebra fechada de uma álgebra de Banach A, $\mathbf{1}_A \in B$ e $b \in B$, então a componente conexa ilimitada do resolvente de b relativo a A e a compnentes conexa do resolvente de b relativo a B são iguais.

2) Seja A uma álgebra de Banach comutativa com unidade, seja $\kappa : A \longmapsto C(\widehat{A})$ a transformada de Gelfand. Mostre que $\ker \kappa = \{a \in A;\ \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = 0\}$.

3) Considere $V : C([0,1]) \longrightarrow C([0,1])$, $Vf(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, $x \in [0,1]$, $f \in C([0,1])$.

(a) Mostre que $\|V^n\| = \dfrac{1}{n!}$. `Sugestão`: troque a ordem de integração em $V^2 f(x) = \int_0^x \int_0^t f(s)\, ds\, dt$.

(b) Calcule o raio espectral de V, visto como elemento da álgebra de Banach de todos os operadores lineares limitados de $C([0,1])$ em si próprio.

(c) Conclua que $\sigma(V) = \{0\}$.

4) Seja X um espaço compacto de Hausdorff. Defina $\mu : X \longrightarrow \widehat{C(X)}$ por $\mu_x(f) = f(x)$. Mostre que μ é um homeomorfismo.
`Dica`: Se μ não fosse sobrejetora, existiria $g \in C(\widehat{C(X)})$, $\|g\|_\infty = 1$, $g(\mu_x) = 0$ para todo $x \in X$.

Preliminares: (1) Uma aplicação contínua $f : X \to Y$ entre os espaços compactos de Hausdorff X e Y induz um *homomorfismo $f^* : C(Y) \to C(X)$, $f^*(g) = g \circ f$. Uma sucessão de argumentos simples mostra que, se $f : X \to Y$ é um homeomorfismo, então f^* é um isomorfismo de C*-álgebras. (2) Um *homomorfismo $f : A \to B$ entre duas C*álgebras comutativas com unidade A e B induz uma aplicação contínua $f^* : \widehat{B} \to \widehat{A}$, $f^*(\phi) = \phi \circ f$. Uma sucessão de argumentos simples mostra que, se f é um isomorfismo, então f^* é um homeomorfismo. O Problema seguinte pede que se demonstrem as recíprocas destas duas afirmações.

5) (a) Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua entre os espaços compactos de Hausdorff X e Y. Mostre que, se $f^* : C(Y) \to C(X)$ for um isomorfismo, então f é um homeomorfismo. `Sugestão`: mostre que $\mu_Y \circ f = f^{**} \circ \mu_X$, sendo μ_X e μ_Y os homeomorfismos do Problema 4 para X e para Y,

(b) Seja $f : A \to B$ um *homomorfismo entre as C*álgebras comutativas com unidade A e B. Mostre que, se $f^* : \widehat{B} \to \widehat{A}$ for um homeomorfismo, então f é um isomorfismo. `Sugestão`: mostre que $\kappa_B \circ f = f^{**} \circ \kappa_A$, sendo κ_A e κ_B as transformadas de Gelfand para A e para B.

A regra que associa da cada espaço compacto de Hausdorff X a C*álgebra comutativa $C(X)$ e a cada $f : X \to Y$ contínua o *homomorfismo $f^* : C(Y) \to C(X)$ é o que se chama de um *funtor contravariante* da *categoria* dos espaços compactos de Hausdorff na categoria da C*álgebras comutativas. O prefixo "contra" é usado para indicar que o domínio e o contradomínio trocam de lugar quando se vai de f para f^*. Analogamente, a regra que associa a cada C*álgebra comutativa com unidade A seu espectro $\widehat{A}$ e *homomorfismos f a aplicações contínuas f^* é um funtor contravariante da categoria das C*álgebras comutativas com unidade na categoria dos espaços compactos de Hausdorff. O que o Problema 5 afirma é que esses dois funtores definem uma *equivalência* entre essas duas categorias. Para C*álgebras comutativas possivelmente sem unidade, decorre dos resultados que provamos para C*álgebras unitais que a regra que associa a cada espaço localmente compacto de Hausdorff Ω a C*álgebra $C_0(\Omega)$ também é uma equivalência de categorias. São muitos os detalhes técnicos envolvidos nesta empreitada, mas um deles vale a pena mencionar aqui. Consideram-se apenas funções contínuas *próprias* (i.e., pré-imagem de compacto é compacto) entre espaços localmente compactos, $f : \Omega_1 \to \Omega_2$. Isto é necessário para que f^* induza uma aplicação de $C_0(\Omega_2)$ em $C_0(\Omega_1)$.