USP - MAT6682 - 2020 - 2^a LISTA

1) Mostre que um espaço de Fréchet de dimensão infinita não possui base (algébrica) enumerável.
`Sugestão`: use o Teorema de Baire e as proposições anexadas ao final desta lista

2) Seja τ a topologia induzida em $X := C([0,1])$ pela família de seminormas $\{p_x;\, x \in [0,1]\}$, $p_x(f) := |f(x)|$, $f \in X$. Considere também a métrica $d(f,g) := \displaystyle\int_0^1 \frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}\,dx$, $f, g \in X$.
(a) Dados $x_1, \cdots, x_n$, mostre que existe $f \in X$ tal que $f(x_1) = \cdots = f(x_n) = 0$ e $d(f,0) > \frac{1}{4}$.
(b) Mostre que $\{f \in X;\, d(f,0) < \frac{1}{4}\}$ não é uma vizinhança de 0 em (X,τ) e que, portanto, a aplicação identidade $(X,\tau) \longrightarrow (X,d)$ não é contínua.
(c) Seja $(f_n)_n$ uma sequência em X, $f_n \longrightarrow f$ em (X,τ). Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} d(f,f_n) = 0$.
(d) Dê exemplo de uma sequência $(f_n)_n$ em X que converge a 0 em (X,d) mas não em (X,τ). Conclua que a a aplicação identidade $(X,d) \longrightarrow (X,\tau)$ não é contínua.
`Sugestão`: use sem demonstrar que, se $\varphi_n \in X$, $0 \leq \varphi_n(x) \leq 1$ e $\varphi_n(x) \longrightarrow 0$ para todo $x \in [0,1]$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 \varphi_n(x)\,dx = 0$ (esta afirmação decorre facilmente do Teorema da Convergência Dominada).

3) (a) Seja $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial. Mostre que existem $C > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que a desigualdade $\left|\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(x)\varphi(x)\,dx\right| \leq C \left(\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|\right) \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} [(1+|x|^2)^m|\varphi(x)|]$ é satisfeita para toda $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$ e para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
(b) Dada uma função polinomial g e uma função contínua e limitada f, ambas de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{C}$, mostre que a aplicação $M_g(f) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$, $\quad [M_g(f)](\varphi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(x)\varphi(x)\,dx$ está bem definida e pertence a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$
(c) Fixadas g e φ, g uma função polinomial e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, mostre que a aplicação linear

$$C_b(\mathbb{R}^n) \ni f \longmapsto [M_g(f)](\varphi) \in \mathbb{C}$$

é contínua, $C_b(\mathbb{R}^n)$ munido da norma do supremo.

4) Dados $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $h \in \mathbb{R}^n$, defina $(T_hf)(x) = f(x+h)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que $\lim\limits_{h\to 0} T_h(f) = f$ no espaço de Fréchet $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

5) Mostre que não existe distribuição temperada $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ tal que $T(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^x f(x)\,dx$ para toda $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-

Proposição 1. *Seja Z um espaço localmente convexo. Toda transformação linear $T : \mathbb{C}^n \to Z$ é contínua.*

`Demonstração:` Dados p seminorma em Z e $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, e denotando por $\{e_1, \cdots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{C}^n$, temos

$$p(Tx) \leq \sum_{i=1}^{n} p(x_i Te_i) \leq \max_{1\leq i\leq n} p(Te_i) \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Isto prova a continuidade de T. $\square$

Seja X um espaço vetorial munido de uma família enumerável separante $\mathcal{F}$ de seminormas, seja Y um subespaço de dimensão finita de X. No que se segue, X e Y estarão sempre munidos da topologia induzida por $\mathcal{F}$.

Proposição 2. *Se existir um isomorfismo linear $T : Y \longrightarrow \mathbb{C}^n$ que seja também um homeomorfismo, então Y é fechado em X.*

`Demonstração:` Vimos que a topologia de X é metrizável e que uma sequência $(v_n)_n$ em X é de Cauchy se e somente se

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \forall\ p \in \mathcal{F},\ \exists\ N \text{ tal que}: \quad n, m \geq N \implies p(v_n - v_m) < \epsilon.$$

Como T é contínuo, existem $F \subset \mathcal{F}$ finito e $C > 0$ tais que $\|Tv\| \leq C \sum_{p\in F} p(v)$ para todo $v \in Y$.

Seja $(v_n)_n$ uma sequência em Y, $v_n \longrightarrow v$, $v \in X$. Então $(v_n)_n$ é de Cauchy. Segue das duas observações precedentes que $(Tv_n)_n$ é de Cauchy. Logo, $Tv_n \longmapsto x$ em $\mathbb{C}^n$. Como T^{-1} é contínua, $v_n \mapsto T^{-1}x = v$. Logo $v \in Y$. $\square$

Proposição 3. *Todo isomorfismo linear $T : Y \longrightarrow \mathbb{C}^n$ é um homeomorfismo.*

`Demonstração:` Segue da Proposição 1 que T^{-1} é contínua se T for um isomorfismo linear.

Seja $\{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base de Y. Para cada $i = 1, \cdots, n$, seja $\widehat{v_i} : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ linear tal que $\widehat{v_i}(v_i) = 1$ e $\widehat{v_i}(v_j) = 0$ para todo $j \neq i$. Então $T(v) = \sum_{i=1}^{n} \widehat{x_i}(v) T(x_i)$ para todo $v \in Y$. Para provar que T é contínuo, portanto, basta provar que todo funcional linear $\lambda : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ é contínuo.

Sem perda de generalidade, podemos supor que λ é sobrejetor.

Vamos usar indução sobre $n = \dim Y$.

Suponha que $\dim Y = 1$. Seja $v \in Y$ tal que $\lambda(v) = 1$. Então $Y = \{tv;\, t \in \mathbb{C}\}$ e $\lambda(tv) = t$ para todo $t \in \mathbb{C}$. Basta provar que λ é contínuo na origem. Seja $(t_\alpha v)_{\alpha \in I}$, $t_\alpha \in \mathbb{C}$, uma rede convergente para 0 em Y. Tome uma seminorma $p \in \mathcal{F}$ tal que $p(v) \neq 0$. Então $|t_\alpha| = \dfrac{p(t_\alpha v)}{p(v)} \longrightarrow 0$ em $\mathbb{C}$, o que prova que λ é contínuo.

Segue da Proposição 1 que T é um homeomorfismo e segue da Proposição 2 que Y é fechado

Suponha que a Proposição é verdadeira para todo subespaço de X de dimensão $n-1$, tome Y de dimensão n e $\lambda : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ linear e sobrejetor. Como $\ker \lambda$ tem dimensão $n-1$, segue da hipótese de indução e da Proposição 2 que $\ker \lambda$ é fechado em X.

Tome $v \in Y \setminus \ker \lambda$. Como $\ker \lambda$ é fechado, existem $\delta > 0$ e $F \subset \mathcal{F}$ finito tais que

$$B(v; \delta, F) \bigcap \ker \lambda \;=\; \emptyset.$$

O subconjunto do plano complexo $D := \{Tu;\, u \in B(0; \delta, F)\}$ tem a seguinte propriedade: se $z \in D$ e $|w| \leq 1$, então $wz \in D$. Logo, ou D é limitado ou $D = \mathbb{C}$. Se $D = \mathbb{C}$, existe $u \in B(0; \delta, F)$ tal que $|\lambda(u)| = |\lambda(-v)|$, e então existe $w \in \mathbb{C}$, $|w| = 1$, tal que $\lambda(wu) = \lambda(-v)$. Mas se $u \in B(0; \delta, F)$ e $|w| = 1$, então $wu \in B(0; \delta, F)$ e portanto $v + wu \in \ker \lambda \cap B(v; \delta, F)$. Isto contradiz a escolha que fizemos de δ e F. Logo D é limitado. Sendo $M := \sup\limits_{z \in D} |z|$, temos portanto

$$|p(y)| < \delta \text{ para todo } p \in F \quad \Longrightarrow \quad |\lambda(y)| \leq M.$$

Se $y \in Y$ e $p(y) \neq 0$ para alguma $p \in F$, então $p\left(\dfrac{\delta\, y}{2\sum_{p \in F} p(y)}\right) < \delta$ e, portanto,

$$|\lambda(y)| \leq \frac{2M}{\delta} \sum_{p \in F} p(y)$$

Para provar que a desigualdade precedente vale para todo $y \in Y$ e que, portanto, λ é contínuo, basta provar que "$p(y) = 0$ para todo $p \in F$" implica que $\lambda(y) = 0$. Tome $y \in Y$ tal que $p(y) = 0$ para todo $p \in F$. Então $p(ty) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, logo $|\lambda(ty)| \leq M$ para todo $t \in \mathbb{R}$, logo $\lambda(y) = 0$. $\square$