USP - MAT6682 - 2020 - 1^a LISTA

Notação. (1) $\overline{S}$ denota o fecho de S. (2) $B(v,r) = \{w \in V;\ \|w - v\| < r\}$, $B_r = B(0,r)$ (V espaço normado). (3) Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $C_c(\Omega)$ denota o conjunto das funções contínuas $f : \Omega \to \mathbb{C}$ que se anulam fora de um compacto K, $K \subset \Omega$. (4) Dados X e Y espaços vetoriais normados, $\mathcal{B}(X,Y)$ denota o espaço das transformações lineares contínuas de X em Y. Quando $X = Y$, $\mathcal{B}(X)$ denota $\mathcal{B}(X,X)$. (5) I denota o operador identidade em um espaço vetorial.

1) Sejam X e Y espaços vetorias normados e $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ sobrejetora. Suponha que exista $a > 0$ tal que o interior de $\overline{T(B_a)}$ seja não vazio. Mostre que existe $\epsilon > 0$ tal que $B_{\epsilon r} \subset \overline{T(B_r)}$ para todo $r > 0$.

2) Sejam X e Y espaços vetorias normados, $T : X \longrightarrow Y$ aplicação linear. Suponha que exista $a > 0$ tal que o interior de $T(B_a)$ seja não-vazio. Mostre que T é uma aplicação aberta e, portanto, sobrejetora.

Dica. Em um espaço vetorial normado X, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, e para todo $x_0 \in X$, as aplicações $x \longmapsto x + x_0$ e $x \longmapsto \lambda x$ são homeomorfismos de X em X, chamados, respectivamente, de *translações* e *homotetias*. Decorre então que afirmações puramente topológicas, tais como, por exemplo, "o interior do fecho de S é não-vazio", são invariantes por homotetias e translações.

3) Seja $1 \leq p < \infty$. Mostre que $(C_c((0,1)), \|\cdot\|_p)$ tem sua norma induzida por um produto interno se e somente se $p = 2$. $\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$.

`Observação`: Decorre deste problema que $L^p((0,1))$ "não é um espaço de Hilbert" se $p \neq 2$.

4) Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $a \in C(\Omega)$ limitada e $1 \leq p < \infty$.

(a) Mostre que a aplicação $C_c(\Omega) \ni f \mapsto M_a f$, $M_a f(x) = a(x)f(x)$, $x \in \Omega$, se estende a um operador linear contínuo definido em $L^p(\Omega)$, também denotado por M_a, e que $\|M_a\| = \sup\{|a(x)|;\ x \in \Omega\}$.

(b) No caso $p = 2$, mostre que $M_a^* = M_{\overline{a}}$.

(c) Mostre que, se $a(x_0) = 0$ para algum x_0, então existe sequência u_n, $\|u_n\|_p = 1$ e $\|M_a u_n\|_p \to 0$.

(d) Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, mostre que $M_a - \lambda I$ é um isomorfismo linear se e somente se λ não pertence ao fecho da imagem de a e que, sendo este o caso, $(M_a - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(L^p(\Omega))$. `Dicas`: Considere primeiro $\lambda = 0$. Invoque o Teorema da Aplicação Aberta.

`Observação`: É possível resolver este problema sem usar integral de Lebesgue, usando apenas $L^p(\Omega)$ é o completamento de $(C_c(\Omega), \|\cdot\|)$.

5) Seja H um espaço de Hilbert complexo. Seja $T \in \mathcal{B}(H)$ satisfazendo $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in H$. Mostre que $T = T^*$. `Sugestão`: $\langle Tu, u\rangle = \langle u, Tu\rangle$ para todo $u \in H$. Tome $u = x + y$, depois $u = x + iy$. Conclua que $\mathrm{Re}(\langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle) = 0$, $\mathrm{Im}(\langle Ax, y\rangle - \langle Ay, x\rangle) = 0$ e, portanto, $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$.

6) (a) Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(H)$. Mostre que $\|T^*T\| = \|T\|^2$. (b) Supondo ademais que $T = T^*$, mostre que $\limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = \|T\|$.

7) Sejam H um espaço de Hilbert e $P \in \mathcal{B}(H)$. Mostre que P é uma projeção ortogonal sobre um subespaço fechado de H se e somente se $P = P^2 = P^*$.

8) Sejam H um espaço de Hilbert e S e T funções de H em H. Suponha que $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$ para todos $x, y \in H$. Mostre que $S, T \in \mathcal{B}(H)$ e $T^* = S$. `Sugestão`: use o Teorema do Gráfico Fechado.

Na próxima questão será necessário usar o seguinte resultado. Sejam X um espaço de Banach e Z um subespaço fechado de X. O quociente X/Z torna-se um espaço de Banach se munido da norma $X/Z \in [x] \mapsto \inf_{z\in Z} \|x - z\|$. A projeção canônica $X \longrightarrow X/Z$ é uma aplicação linear contínua.

9) Sejam X um espaço se Banach, $Z \subset X$ um subespaço fechado, e $y \in X \setminus Z$. Seja Y o subespaço de X gerado por $Z \cup \{y\}$.

(a) Mostre que Y é fechado.

`Sugestão`: Seja $\pi : X \to X/Z$ a projeção canônica. Mostre que $Y = \pi^{-1}(\mathbb{C}[y])$.

(b) Mostre que $Z \times \mathbb{C} \ni (z, \alpha) \longmapsto z + \alpha y \in Y$ é um isomorfismo de espaços de Banach.

(c) Mostre que existe $\Lambda \in X^*$ tal que $\Lambda(z) = 0$ para todo $z \in Z$ e $\Lambda(y) = 1$.

10) Sejam X um espaço normado, $Z \subseteq X$ um subespaço, $y \in X$, e $d = \inf_{z\in Z} \|y - z\|$. Mostre que existe $\Lambda \in X^*$ tal que $\Lambda(z) = 0$ para todo $z \in Z$ e $\Lambda(y) = d$.

`Dica`: Tome os completamentos e fechos que forem necessários.