

TÓPICOS DE ANÁLISE FUNCIONAL (MAT 6682)
IME-USP
2º SEMESTRE DE 2020

SEVERINO TOSCANO DO REGO MELO

1. ESPAÇOS LOCALMENTE CONVEXOS

Seja X um espaço vetorial complexo. Diz-se que uma aplicação $p : X \rightarrow [0, +\infty)$ é uma *seminorma* se, para todos $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$, são satisfeitas as afirmações: (i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, (ii) $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$. Grosseiramente falando, uma seminorma é “uma norma que pode se anular em vetores não-nulos”. Tal como para normas, segue da definição que também vale $|p(z) - p(w)| \leq p(z - w)$ para todos $z, w \in X$.

Para cada seminorma p , definimos $\ker p = \{x \in X; p(x) = 0\}$. Segue da definição de seminormas que $\ker p$ é um subespaço de X .

Uma dada família de seminormas \mathcal{F} induz em X uma topologia como descrito a seguir.

Dados $x \in X$, $r > 0$ e uma subfamília finita não-vazia $F \subseteq \mathcal{F}$, denotemos:

$$B(x; r, F) = \{y \in X; p(x - y) < r, p \in F\}.$$

No caso em que \mathcal{F} é um conjunto unitário e seu único elemento é uma norma, $\mathcal{F} = \{\|\cdot\|\}$, $B(x; r, \mathcal{F})$ é o que se chama em espaços vetoriais normados de *bola aberta* de centro x e raio r . No caso mais geral, também diremos que um $B(x; r, F)$ é *centrado em x* . Note que, para cada $x \in X$, $B(x; r, F)$ é um *transladado* de $B(0; r, F)$, isto é,

$$B(x; r, F) = x + B(0; r, F) = \{x + z; z \in B(0; r, F)\}.$$

Denotemos por \mathcal{B} a família $\{B(x; r, F); x \in X, r > 0, F \subseteq \mathcal{F} \text{ finita}\}$ de subconjuntos de X . Para cada $x \in X$, definimos $\mathcal{B}_x = \{B(x; r, F); r > 0, F \subseteq \mathcal{F} \text{ finita}\}$. Definimos ainda

$$\tau = \{A \subseteq X; \text{para todo } x \in A \text{ existe } B \in \mathcal{B}_x \text{ tal que } B \subset A\}.$$

Exercício 1.1: Mostre que cada $B \in \mathcal{B}$ é convexo.

Exercício 1.2: Mostre que:

- (a) Dados B e B' em \mathcal{B} e $y \in B \cap B'$, existe $B'' \in \mathcal{B}$ centrado em y tal que $B'' \subset B \cap B'$.
- (b) A família τ é uma topologia em X .
- (c) Cada $B \in \mathcal{B}$ é aberto.
- (d) Para cada $x \in X$, \mathcal{B}_x é um sistema fundamental de vizinhanças de x .

Exercício 1.3: Mostre que, para cada $x \in X$, a aplicação $T_x : X \rightarrow X$, $T_x(y) = x + y$, $y \in X$, é um homeomorfismo.

Dizemos que a família \mathcal{F} é *separante* se, para todo $x \in X$, $x \neq 0$, existe $p \in \mathcal{F}$ tal que $p(x) \neq 0$.

Exercício 1.4: Mostre que, se \mathcal{F} for separante, então (X, τ) é um espaço de Hausdorff.

Quando o contexto estiver claro, muitas vezes assumiremos sem afirmar explicitamente que X está munido da topologia τ definida no Exercício 1.2. Chamaremos τ de *a topologia induzida em X pela família de seminormas \mathcal{F}* . Para desenvolver a intuição, pode ser útil particularizar um enunciado sobre (X, τ) para o caso em que \mathcal{F} contém apenas um elemento e esse elemento é uma norma.

Proposição 1. *A aplicação $+$: $X \times X \rightarrow X$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$, é contínua.*

Demonstração: Dados $(x_1, x_2) \in X \times X$ e V uma vizinhança de $x_1 + x_2$, existe $B \in \mathcal{B}_{x_1+x_2}$ tal que $B \subseteq V$. O aberto B é da forma

$$B = \{x_1 + x_2 + z; z \in X \text{ e } p(z) < r \text{ para todo } p \in F\},$$

para algum $r > 0$ e algum $F \subseteq \mathcal{F}$ finito. Defina

$$\tilde{B} = \{z \in X; p(z) < \frac{r}{2} \text{ para todo } p \in F\}$$

Então, $x_i + \tilde{B}$ é vizinhança aberta de x_i , $i = 1, 2$. Segue da definição da topologia do produto cartesiano $X \times X$ que $W = (x_1 + \tilde{B}) \times (x_2 + \tilde{B})$ é uma vizinhança aberta de (x_1, x_2) . Como

$$p((y_1 + y_2) - (x_1 + x_2)) \leq p(y_1 - x_1) + p(y_2 - x_2),$$

decorre agora que, se $(y_1, y_2) \in W$, então $(y_1, y_2) \in \mathcal{B}_{x_1+x_2} \subseteq V$. □

Proposição 2. *A aplicação \circ : $\mathbb{C} \times X \rightarrow X$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, é contínua.*

Demonstração: Dados $(\lambda, x), (\eta, y) \in \mathbb{C} \times X$ e $p \in \mathcal{F}$ arbitrários, temos:

$$p(\lambda x - \eta y) = p(\lambda x - \eta x + \eta x - \eta y) \leq |\lambda - \eta|p(x) + |\eta|p(x - y) \leq |\lambda - \eta|p(x) + (|\lambda - \eta| + |\lambda|)p(x - y).$$

Se $p(x - y) < \delta$ e $|\lambda - \eta| < \delta$, então

$$p(\lambda x - \eta y) \leq \delta(p(x) + |\lambda|) + \delta^2.$$

Fixemos o ponto $(\lambda, x) \in \mathbb{C} \times X$ e uma vizinhança V de $\lambda x \in X$. Existem $\epsilon > 0$ e $F \subseteq \mathcal{F}$ finitas tais que $B(\lambda x; \epsilon, F) \subseteq V$. Tome $\delta > 0$ tal que $\delta(p(x) + |\lambda|) + \delta^2 < \epsilon$ para toda $p \in F$ [Por que existe tal δ ?]. Segue das estimativas do parágrafo anterior que

$$(\eta, y) \in \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda - \eta| < \delta\} \times B(x; \delta, F) \implies \eta y \in B(\lambda x; \epsilon, F) \subseteq V.$$

Provamos que a imagem inversa de V por \circ contém a vizinhança $\{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda - \eta| < \delta\} \times B(x; \delta, F)$ de (λ, x) em $\mathbb{C} \times X$. \square

As Proposições 1 e 2, juntas, poderiam ser resumidas na frase “ (X, τ) é um espaço vetorial topológico”. Mas na definição de espaço vetorial topológico se costuma exigir também, além da continuidade de $+$ e de \circ , que o espaço seja de Hausdorff, o que, no nosso caso, será verificado se a família \mathcal{F} for separante (Exercício 1.4). Um espaço vetorial topológico com a propriedade de que todo ponto possui um sistema fundamental de vizinhanças convexas é chamado de *localmente convexo*. Os Exercícios 1.1 e 1.2d implicam que este nosso (X, τ) , com τ induzida por \mathcal{F} , é localmente convexo. É verdadeira, mas não vamos usar, a seguinte recíproca: *se X é um espaço vetorial complexo, τ é uma topologia de Hausdorff em X , as aplicações $+$ e \circ são contínuas, e a origem possui um sistema fundamental de vizinhanças convexas, então τ é a topologia induzida por alguma família separante de seminormas \mathcal{F}* [3, Theorem 1.36].

Exercício 1.5: Mostre que cada $p : X \mapsto [0, \infty)$, $p \in \mathcal{F}$, é uma função contínua.

Exercício 1.6: Seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em X . Mostre que $x_n \rightarrow x$, $x \in X$, se e somente se $p(x - x_n) \rightarrow 0$ para toda $p \in \mathcal{F}$.

Exercício 1.7: Sejam \mathcal{F} e \mathcal{G} famílias de seminormas em X e τ e σ , respectivamente, as topologias induzidas por \mathcal{F} e \mathcal{G} em X . Mostre que $\sigma \subseteq \tau$ se e somente se, para todo $q \in \mathcal{G}$, existe $F \subseteq \mathcal{F}$ tal que $q(x) \leq p(x)$, para todo $x \in X$ e para toda $p \in F$.

O Exercício 1.7 é um caso particular do Exercício 1.8, no caso em que $X = Y$ e T é a aplicação identidade.

Exercício 1.8: Sejam X e Y espaços vetoriais, sejam \mathcal{F} e \mathcal{G} famílias de seminormas em X , sejam τ e σ , respectivamente, as topologias induzidas por \mathcal{F} e \mathcal{G} em X e em Y . Mostre que uma aplicação linear $T : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$, é contínua se e somente se, para todo $q \in \mathcal{G}$, existe $F \subseteq \mathcal{F}$ finita tal que $q(Tx) \leq p(x)$ para todo $x \in X$ e para toda $p \in F$. Sugestão: imite uma demonstração que não use sequências da afirmação de que uma transformação linear entre espaços vetoriais normados é contínua se e somente se é limitada.

Consideremos agora uma classe especial de espaços localmente convexos, aqueles cujas seminormas são definidas a partir de aplicações lineares definidas em X . Veremos alguns exemplos dessa classe na Seção 3.

Seja Y um espaço vetorial normado e seja \mathcal{L} uma família de transformações lineares de X em Y . É bom frisar que X pode não ter uma topologia ainda, de modo que nem faz sentido, em geral, pedir que essas transformações lineares sejam contínuas. Para cada $L \in \mathcal{L}$, defina $p_L : X \mapsto [0, +\infty)$ por

$$p_L(x) = \|Lx\|, \quad x \in X.$$

Diremos que a família \mathcal{L} separa pontos se, para todo $x \in X$, $x \neq 0$, existe $L \in \mathcal{L}$ tal que $Lx \neq 0$. É claro então que \mathcal{L} separa pontos é equivalente à família de seminormas $\mathcal{F} = \{p_L; L \in \mathcal{L}\}$ ser separante. É comum chamar a topologia τ induzida por \mathcal{F} também de *a topologia induzida por \mathcal{L}* e denotar $\tau = \sigma(X, \mathcal{L})$.

Proposição 3. *Seja X um espaço vetorial de dimensão infinita munido da topologia induzida por uma família \mathcal{L} que satisfaz a seguinte propriedade: dados $L_1, L_2, \dots, L_n \in \mathcal{L}$ arbitrários, a interseção $\bigcap_{j=1}^n \ker L_j$ tem dimensão infinita. Então, para $F = \{p_{L_1}, \dots, p_{L_n}\}$ e para todo $r > 0$, a vizinhança da origem $B(0; r, F)$ contém um subespaço de dimensão infinita.*

Demonstração: Segue das definições que

$$\bigcap_{j=1}^n \ker L_j = \bigcap_{j=1}^n \ker p_{L_j} \subseteq B(0; r, F),$$

o que demonstra a afirmação. □

Dizemos que um subespaço U de um espaço vetorial W tem codimensão finita se existe subespaço $V \subseteq W$ de dimensão finita tal que $U \oplus V = W$. Isto é equivalente a pedir que o quociente W/U tenha dimensão finita.

Lema 1. *Seja V um espaço vetorial e sejam V_1, V_2, \dots, V_n subespaços de codimensão finita de V . Então $V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n$ tem codimensão finita.*

Demonstração: Basta supor $n = 2$. A aplicação $(V_1 + V_2)/V_2 \rightarrow V_1/(V_1 \cap V_2)$, $v_1 + v_2 + V_2 \mapsto v_1 + V_1 \cap V_2$, $v_i \in V_i$, $i = 1, 2$, está bem definida e é um isomorfismo. O quociente $(V_1 + V_2)/V_2$ pode ser visto como um subespaço de V/V_2 , que tem dimensão finita por hipótese. Logo $V_1 \cap V_2$ é um subespaço de codimensão finita em V_1 , que por sua vez tem codimensão finita em V , por hipótese. Logo $V_1 \cap V_2$ tem codimensão finita em V . □

Proposição 4. *A hipótese sobre \mathcal{L} na Proposição 3 é sempre satisfeita se $Y = \mathbb{C}$ (norma dada pelo valor absoluto). Daí, se X tiver dimensão infinita e \mathcal{L} for uma família de funcionais lineares de X , toda vizinhança da origem de X (na topologia $\sigma(X, \mathcal{L})$) contém um subespaço de dimensão infinita.*

Demonstração: Em vista do Lema 1, é suficiente provar que, para todo funcional linear $\lambda : X \rightarrow \mathbb{C}$, $\ker \lambda$ tem codimensão finita. Sem perda de generalidade, podemos supor que λ não é o funcional nulo. Daí, existe $x_0 \in X$ tal que $\lambda(x_0) = 1$. Para todo $x \in X$,

$$\lambda(x - \lambda(x)x_0) = \lambda(x) - \lambda(x)\lambda(x_0) = 0.$$

Isto mostra que X é gerado por $\ker \lambda \cup \{x_0\}$. □

2. REDES

Embora o Exercício 1.6 seja útil em muitas situações, não se pode usá-lo para demonstrar os Exercícios 1.7 e 1.8, pois a topologia induzida por uma família de seminormas não necessariamente satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade. O conceito de *redes* generaliza o de seqüências e o substituí, muito frequentemente, na demonstração para espaços topológicos mais gerais de resultados que seriam canonicamente demonstrados em espaços métricos usando seqüências. Este é o assunto desta seção.

Um *conjunto dirigido* é um conjunto parcialmente ordenado (I, \prec) satisfazendo que, dados $\alpha, \beta \in I$, existe $\gamma \in I$ tal que $\alpha \prec \gamma$ e $\beta \prec \gamma$. O conjunto dos naturais \mathbb{N} com a ordem usual é o exemplo mais canônico de um conjunto dirigido. Outro exemplo muito usado é o conjunto das vizinhanças de um ponto x de um espaço topológico, ordenadas por “ $U \prec V$ se e somente se $U \supseteq V$ ”. Pode-se tomar também um sistema fundamental de vizinhanças de um ponto dado como um conjunto dirigido. Pensando nas bolas abertas de raio $\frac{1}{n}$ centradas em um ponto x de um espaço métrico, deve soar mais natural que a ordem de um sistema de vizinhanças seja definida por \supseteq em vez de \subseteq .

Seja X um espaço topológico. Uma rede em X é uma aplicação definida em um conjunto dirigido I e tomando valores em X , comumente denotada por $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$. Dizemos que a rede $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge para $x \in X$, o que se denota por $\lim x_\alpha = x$, se, para todo aberto U contendo x , existe $\alpha_0 \in I$ tal que $x_\alpha \in U$ para todo α que satisfaça $\alpha_0 \prec \alpha$. Se X for um espaço de Hausdorff, o limite de uma rede é único, caso exista.

A grande utilidade das redes repousa principalmente nas duas proposições seguintes.

Proposição 5. *Seja X um espaço topológico e seja $F \subset X$. O conjunto F será fechado em X se e somente se contiver os limites de todas as redes convergentes $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ tais que $x_\alpha \in F$ para todo $\alpha \in I$.*

Demonstração: Suponha que F seja fechado e tome arbitrariamente uma rede $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ tal que $x_\alpha \in F$ para todo $\alpha \in I$. Se $\lim x_\alpha = x$, então toda vizinhança de x contém algum x_α , $x_\alpha \in F$. Ou seja, x pertence a \overline{F} , o fecho de F . Como F é fechado, $\overline{F} = F$, logo $x \in F$.

Reciprocamente, seja $F \subseteq X$ e suponha que o limite de toda rede convergente $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$, $x_\alpha \in F$ para todo $\alpha \in I$, pertence a um dado F . Tome $x \in \overline{F}$ arbitrário e defina $I = \{S \subseteq X; S \text{ é vizinhança de } x\}$. Para cada $\alpha \in I$, tome $x_\alpha \in \alpha \cap F$. Então a rede $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge para x . Segue da hipótese que $x \in F$. Provamos que $\overline{F} \subseteq F$. \square

Proposição 6. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função definida entre os espaços topológicos X e Y . A função f será contínua se e somente se $\lim f(x_\alpha) = f(x)$ para toda rede $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ em X tal que $\lim x_\alpha = x$.*

Demonstração: Suponha que $f : X \rightarrow Y$ seja contínua e que $\lim x_\alpha = x$. Para toda vizinhança V de $f(x)$, $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de x . Tome α_0 tal que $x_\beta \in f^{-1}(V)$ para todo β satisfazendo $\alpha_0 \prec \beta$. Logo $f(x_\beta) \in V$ para todo β satisfazendo $\alpha_0 \prec \beta$. Provamos que $\lim f(x_\alpha) = f(x)$

Reciprocamente, suponha que $\lim f(x_\alpha) = f(x)$ sempre que $\lim x_\alpha = x$. Dado $x \in X$ arbitrário, seja V uma vizinhança de $f(x)$. Nosso objetivo é mostrar que U é vizinhança de x . Se não fosse, toda vizinhança de x conteria pontos do complementar de U . Para cada vizinhança α de x , tome $x_\alpha \in \alpha$, $x_\alpha \notin U$. Então $\lim x_\alpha = x$ e, portanto, $\lim f(x_\alpha) = f(x)$. Como V é vizinhança de $f(x)$, existe α_0 tal que $f(x_{\alpha_0}) \in V$ e portanto $x_{\alpha_0} \in U$, o que contradiz $x_{\alpha_0} \notin U$. \square

Exercício 2.1: Seja X um espaço localmente convexo com a topologia induzida pela família \mathcal{F} de seminormas e seja $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma rede em X . Mostre que $\lim x_\alpha = x$, $x \in X$, se e somente se $p(x - x_\alpha) \rightarrow 0$ para toda $p \in \mathcal{F}$.

Exercício 2.2: Resolva o Exercício 1.8 usando redes.

Redes só não substituem sequências perfeitamente porque uma rede convergente em um espaço métrico pode não ser limitada. Por exemplo, seja I o conjunto de todas as vizinhanças do zero em um espaço vetorial normado X . Para cada $\alpha \in I$, seja t_α o supremo de $\{\|v\|; v \in \alpha\}$. Para cada $\alpha \in I$, tome $v_\alpha \in \alpha$ tal que $\|v_\alpha\| > t_\alpha/2$. Então $\lim v_\alpha = 0$, $\lim \|v_\alpha\| = 0$, mas $\sup\{\|v_\alpha\|, \alpha \in I\} = \infty$

3. TOPOLOGIAS FRACAS EM ESPAÇOS DE BANACH

As quatro topologias consideradas nesta seção são da forma $\sigma(X, \mathcal{L})$ (veja a página 4). A topologia fraca de um espaço de Banach X é a topologia induzida pela família de todos os funcionais lineares contínuos de X . A topologia fraca-* do dual X^* de um espaço de Banach X é induzida por uma

família de funcionais lineares contínuos de X^* . A topologia forte de operadores e a topologia fraca de operadores são definidas no espaço de Banach $\mathfrak{B}(X, Y)$ de todas as transformações lineares contínuas entre os espaços de Banach X e Y . A forte de operadores usa uma família de transformações lineares de X em Y , a fraca de operadores usa uma família de funcionais lineares em $\mathfrak{B}(X, Y)$.

Para evitar confusão com a topologia forte de operadores, é prudente não chamar a topologia definida pela norma de operadores em $\mathfrak{B}(X, Y)$ de topologia forte, apesar de ela ser a mais forte de todas. É comum chamá-la de *topologia uniforme*, ou simplesmente de *topologia da norma*.

3.1. Topologia fraca. Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita e denotemos por X^* seu dual. Para cada $\lambda \in X^*$, seja $p_\lambda : X \rightarrow \mathbb{C}$ a seminorma $p_\lambda(x) = |\lambda(x)|$, $x \in X$.

Segue do Teorema de Hahn-Banach que, se $x \in X$ é tal que $p_\lambda(x) = 0$ para todo $\lambda \in X^*$, então $x = 0$. Ou seja, a família de semi-normas $\mathcal{F}_1 = \{p_\lambda; \lambda \in X^*\}$ é separante.

A *topologia fraca* de X é, por definição, a topologia induzida por \mathcal{F}_1 em X . Segue do Exercício 1.9 que uma rede $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge para $x \in X$ se e somente se, para todo $\lambda \in X^*$, $\lim |\lambda(x - x_\alpha)| = 0$, ou seja $\lim \lambda(x_\alpha) = \lambda(x)$. Dados $\lambda \in X^*$ e $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma rede em X e $x \in X$, temos $|\lambda(x - x_\alpha)| \leq \|\lambda\| \|x - x_\alpha\|$. Daí,

$$\lim \|x - x_\alpha\| = 0 \implies \lim \lambda(x_\alpha) = \lambda(x) \forall \lambda \in X^* \implies \lim x_\alpha = x \text{ fracamente.}$$

Daí segue da Proposição 6 que a aplicação identidade de $(X, \|\cdot\|)$ em $(X, \tau_{\mathcal{F}_1})$ é contínua. Ou seja, a topologia da norma é mais fina do que a topologia induzida por \mathcal{F}_1 .

Na notação da página 4, a topologia induzida pela família de seminormas \mathcal{F}_1 é a topologia $\sigma(X, X^*)$. Segue da Proposição 4 que toda vizinhança fraca de $0 \in X$ contém um subespaço de dimensão infinita. Em particular, a bola aberta $\{x \in X; \|x\| < 1\}$ não é um aberto da topologia fraca.

Problema: Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita. Defina $B = \{x \in X; \|x\| < 1\}$, $D = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$ e $S = \{x \in X; \|x\| = 1\}$.

- Mostre que B está contido no fecho de S na topologia fraca.
- Supondo que X é um espaço de Hilbert, mostre que o fecho de S na topologia fraca é igual a D .
- Mostre que o fecho fraco de S é igual a D no caso geral.

Dicas e comentários: É óbvio que (c) implica (b). Mas é mais fácil “enxergar” a solução de (b) usando ortogonalidade. Tal como em \mathbb{R}^3 , dado qualquer x com $\|x\| > 1$, o hiperplano H que passa pelo ponto x e é perpendicular ao vetor x não intersecta D . Depois disso fica faltando mostrar que H está contido em um aberto V que também não intersecta D . Use então que todo funcional linear contínuo em X é da forma $\langle \cdot, z \rangle$ para algum $z \in X$. Uma figurinha em \mathbb{R}^3 pode ajudar a descobrir

o funcional e o raio que servem para definir V . Quanto ao (c), para resolver um problema em um espaço de Banach que você sabe resolver em um espaço de Hilbert, a melhor estratégia é quase sempre tentar de alguma maneira usar o teorema de Hahn-Banach como substituto para a ortogonalidade indisponível.

3.2. Topologia fraca*. Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita e denotemos por X^* seu dual. Para cada $x \in X$, seja $p_x : X^* \rightarrow \mathbb{C}$ a seminorma $p_x(\lambda) = |\lambda(x)|$, $\lambda \in X^*$.

O funcional $\lambda \in X^*$ ser não-nulo é o mesmo que existir $x \in X$ tal que $p_x(\lambda) = |\lambda(x)| \neq 0$. Ou seja, a família de semi-normas $\mathcal{F}_2 = \{p_x; x \in X\}$ é separante.

A *topologia fraca** de X^* é, por definição, a topologia induzida por \mathcal{F}_2 em X^* . Segue do Exercício 1.9 que uma rede $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge para $\lambda \in X^*$ na topologia fraca* se e somente se $\lim |(\lambda - \lambda_\alpha)(x)| = 0$ para todo $x \in X$, ou seja, se e somente se $\lim \lambda_\alpha(x) = \lambda(x)$ para todo $x \in X$. É por isso que a topologia fraca* em X^* também é chamada de *a topologia da convergência pontual*.

Sejam $\lambda \in X^*$ e $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma rede em X^* . Para todo $\alpha \in I$ e para todo $x \in X$, temos $|\lambda_\alpha(x) - \lambda(x)| \leq \|\lambda_\alpha - \lambda\| \|x\|$. Daí:

$$\lim \|\lambda_\alpha - \lambda\| = 0 \implies \lim \lambda_\alpha(x) = \lambda(x) \text{ para todo } \lambda \in X^*.$$

Ou seja, a aplicação identidade de $(X^*, \|\cdot\|)$ em $(X^*, \tau_{\mathcal{F}_2})$ é contínua. Ou seja, a topologia da norma em X^* é mais fina do que a topologia induzida por \mathcal{F}_2 .

Dado $x \in X$, denotamos por $\hat{x} : X^* \rightarrow \mathbb{C}$ o funcional linear $\hat{x}(\lambda) = \lambda(x)$. Segue do Teorema de Hahn-Banach que a aplicação $x \mapsto \hat{x}$ é uma imersão isométrica de X em X^{**} . Denotando também por X a imagem dessa aplicação, podemos escrever $X \subseteq X^{**}$. Na notação da página 4, a topologia induzida pela família de seminormas \mathcal{F}_2 é então a topologia $\sigma(X^*, X)$. Segue da Proposição 4 que toda vizinhança fraca* de $0 \in X^*$ contém um subespaço de dimensão infinita. Em particular, a bola aberta $\{\lambda \in X^*; \|\lambda\| < 1\}$ não é um aberto da topologia fraca*.

Problema: Mostre que X é denso em X^{**} na topologia $\sigma(X^{**}, X^*)$ (isto é, na topologia fraca* de $X^{**} = (X^*)^*$). Dicas: (i) Para todo $r > 0$ e para todo $F \subset X^*$ finito, existe $x \in X$ tal que $|\lambda(x)| < r$ para todo $\lambda \in F$. (ii) A topologia $\sigma(X^{**}, X^*)$ é invariante por translações (Exercício 1.3).

Diz-se que X é *reflexivo* quando $X^{**} = \{\hat{x}; x \in X\}$. Se for este o caso, então $\sigma(X^*, X) = \sigma(X^*, X^{**})$. Em outras palavras, se X for reflexivo, então as topologias fraca e fraca* em X^* coincidem.

Um resultado muito importante sobre a topologia fraca* é que a bola unitária fechada em X^* é compacta na topologia fraca* (Seção 4). Quando X é reflexivo, X^* também é. Segue que, se X é reflexivo, então $\{x; \|x\| \leq 1\}$ é “fracamente compacto”.

3.3. Topologia forte de operadores.

3.4. Topologia fraca de operadores.

4. TEOREMA DE BANACH-ALOGLU

REFERÊNCIAS

- [1] G. K. PEDERSEN. Analysis NOW. ¹
- [2] M. REED & B. SIMON. Methods of Modern Mathematical Physics I (Functional Analysis).
- [3] W. RUDIN. Functional Analysis.

¹O “NOW” do título desse livro pode ser interpretado como “Norms, Operators and Weak Topologies”.