Tópicos de Análise Funcional
MAT 6682, IME-USP

Severino Toscano do Rego Melo

Instituto de Matemática e Estatística – Universidade de São Paulo

2° Semestre de 2020

Sumário

Banach, Hilbert

- Todos os nossos espaços vetoriais serão sobre $\mathbb{C}$.

Banach, Hilbert

- Todos os nossos espaços vetoriais serão sobre $\mathbb{C}$.
- Um *espaço de Banach* é um espaço vetorial normado que é completo com a distância $d(x, y) = \|x - y\|$.

Banach, Hilbert

- Todos os nossos espaços vetoriais serão sobre $\mathbb{C}$.
- Um *espaço de Banach* é um espaço vetorial normado que é completo com a distância $d(x, y) = \|x - y\|$.
- Um *espaço de Hilbert* é um espaço vetorial com produto interno que é completo com a norma $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$.

Banach, Hilbert

- Todos os nossos espaços vetoriais serão sobre $\mathbb{C}$.
- Um *espaço de Banach* é um espaço vetorial normado que é completo com a distância $d(x, y) = \|x - y\|$.
- Um *espaço de Hilbert* é um espaço vetorial com produto interno que é completo com a norma $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$.
- Um isomorfismo entre dois espaços de Banach é, por definição, um homeoformismo linear ($\Longleftrightarrow$ normas equivalentes).

Banach, Hilbert

- Todos os nossos espaços vetoriais serão sobre $\mathbb{C}$.
- Um *espaço de Banach* é um espaço vetorial normado que é completo com a distância $d(x, y) = \|x - y\|$.
- Um *espaço de Hilbert* é um espaço vetorial com produto interno que é completo com a norma $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$.
- Um isomorfismo entre dois espaços de Banach é, por definição, um homeoformismo linear ($\iff$ normas equivalentes).
- Um isomorfismo entre dois espaços de Hilbert é, por definição, uma bijeção linear que preserva o produto interno.

Paralelogramo e Polarização

- Em um espaço com produto interno, a norma satisfaz a identidade do paralelogramo: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Paralelogramo e Polarização

- Em um espaço com produto interno, a norma satisfaz a identidade do paralelogramo: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$
- Em um espaço com produto interno, o p.i. pode ser recuperado a partir da norma (identidade de polarização):

$$4\langle x, y\rangle = (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) + i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)$$

Paralelogramo e Polarização

- Em um espaço com produto interno, a norma satisfaz a identidade do paralelogramo: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$
- Em um espaço com produto interno, o p.i. pode ser recuperado a partir da norma (identidade de polarização):

$$4\langle x, y\rangle = (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) + i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)$$

- Uma bijeção linear entre dois espaços com p.i. que preserve a norma preserva também o p.i.

Paralelogramo e Polarização

- Em um espaço com produto interno, a norma satisfaz a identidade do paralelogramo: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$
- Em um espaço com produto interno, o p.i. pode ser recuperado a partir da norma (identidade de polarização):

$$4\langle x, y\rangle = (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) + i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)$$

- Uma bijeção linear entre dois espaços com p.i. que preserve a norma preserva também o p.i.
- Uma norma provém de um produto interno se e só se vale a identidade do paralelogramo.

Paralelogramo e Polarização

- Em um espaço com produto interno, a norma satisfaz a identidade do paralelogramo: $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$
- Em um espaço com produto interno, o p.i. pode ser recuperado a partir da norma (identidade de polarização):

$$4\langle x,y\rangle=(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)+i(\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2)$$

- Uma bijeção linear entre dois espaços com p.i. que preserve a norma preserva também o p.i.
- Uma norma provém de um produto interno se e só se vale a identidade do paralelogramo.
- $L^p([0,1])$, $1\le p<\infty$, $p\neq 2$, não "é" um espaço de Hilbert.

Somas Infinitas

- Em um espaço vetorial normado, diz-se que $x = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ se $\forall\, \epsilon > 0\ \exists F \subseteq I$ finito tal que $F \subseteq G \subseteq I$, G finito, implica

$$\left\| x - \sum_{\alpha \in G} x_\alpha \right\| < \epsilon.$$

Somas Infinitas

- Em um espaço vetorial normado, diz-se que $x = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ se $\forall\, \epsilon > 0\ \exists F \subseteq I$ finito tal que $F \subseteq G \subseteq I$, G finito, implica
$$\left\| x - \sum_{\alpha \in G} x_\alpha \right\| < \epsilon.$$
- Nessa situação, diz-se que $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ é incondicionalmente convergente e x (que é único) é sua soma.

Somas Infinitas

- Em um espaço vetorial normado, diz-se que $x = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ se $\forall\, \epsilon > 0\ \exists F \subseteq I$ finito tal que $F \subseteq G \subseteq I$, G finito, implica
$$\left\| x - \sum_{\alpha \in G} x_\alpha \right\| < \epsilon.$$
- Nessa situação, diz-se que $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ é incondicionalmente convergente e x (que é único) é sua soma.
- $x = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha \iff S = \{\alpha \in I;\, x_\alpha \neq 0\}$ é enumerável e, $\forall$ enumeração $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots\}$, $x = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} x_{\alpha_k}$.

Ref: Observação 6.5 das "Notas de 2004".

Somas Infinitas

- Diz-se que a soma $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ é absolutamente convergente se $\sum_{\alpha \in I} \|x_\alpha\|$ converge em $\mathbb{R}$, o que é equivalente a

$$\sup\{\sum_{\alpha \in F} \|x_\alpha\|;\ F \subseteq I \text{ finito}\} < \infty$$

Somas Infinitas

- Diz-se que a soma $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ é absolutamente convergente se $\sum_{\alpha\in I} \|x_\alpha\|$ converge em $\mathbb{R}$, o que é equivalente a

$$\sup\{\sum_{\alpha\in F} \|x_\alpha\|;\ F \subseteq I \text{ finito}\} < \infty$$

- Em um espaço de Banach, toda soma absolutamente convergente é incondicionalmente convergente, mas não vale a recíproca.

Somas Infinitas

- Diz-se que a soma $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ é absolutamente convergente se $\sum_{\alpha\in I} \|x_\alpha\|$ converge em $\mathbb{R}$, o que é equivalente a

$$\sup\{\sum_{\alpha\in F} \|x_\alpha\|;\ F \subseteq I \text{ finito}\} < \infty$$

- Em um espaço de Banach, toda soma absolutamente convergente é incondicionalmente convergente, mas não vale a recíproca.
- $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ incondicionalmente convergente

$$\Longrightarrow \left\|\sum_{\alpha\in I} x_\alpha\right\| \leq \sum_{\alpha\in I} \|x_\alpha\| \leq \infty.$$

Transformações Lineares Contínuas

- X e Y espaços normados, $T : X \longrightarrow Y$ linear.

Transformações Lineares Contínuas

- X e Y espaços normados, $T : X \longrightarrow Y$ linear.
- T é contínua $\Longleftrightarrow$ T é contínua em 0 $\Longleftrightarrow$
  $\exists\ C \geq 0$ tal que $\|Tx\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in X$.

Transformações Lineares Contínuas

- X e Y espaços normados, $T : X \longrightarrow Y$ linear.
- T é contínua $\iff$ T é contínua em 0 $\iff$ $\exists\ C \geq 0$ tal que $\|Tx\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in X$.
- T contínua $\Longrightarrow \|T\| := \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|} < \infty$.

Transformações Lineares Contínuas

- X e Y espaços normados, $T : X \longrightarrow Y$ linear.
- T é contínua $\iff$ T é contínua em 0 $\iff$ $\exists\ C \geq 0$ tal que $\|Tx\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in X$.
- T contínua $\Longrightarrow \|T\| := \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|} < \infty$.
- $T \mapsto \|T\|$ é norma em $\mathcal{B}(X, Y)$.

Transformações Lineares Contínuas

- X e Y espaços normados, $T : X \longrightarrow Y$ linear.
- T é contínua $\Longleftrightarrow$ T é contínua em 0 $\Longleftrightarrow$ $\exists\ C \geq 0$ tal que $\|Tx\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in X$.
- T contínua $\Longrightarrow \|T\| := \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|} < \infty$.
- $T \mapsto \|T\|$ é norma em $\mathcal{B}(X, Y)$.
- $\|T\|$ é a menor C tal que $\|Tx\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in X$.

Transformações Lineares Contínuas

- X e Y espaços normados, $T : X \longrightarrow Y$ linear.
- T é contínua $\iff$ T é contínua em 0 $\iff$
  $\exists\ C \geq 0$ tal que $\|Tx\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in X$.
- T contínua $\Longrightarrow \|T\| := \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|} < \infty$.
- $T \mapsto \|T\|$ é norma em $\mathcal{B}(X, Y)$.
- $\|T\|$ é a menor C tal que $\|Tx\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in X$.
- Y completo $\Longrightarrow \mathcal{B}(X, Y)$ completo.

Transformações Lineares Contínuas

- X e Y espaços normados, $T : X \longrightarrow Y$ linear.
- T é contínua $\iff$ T é contínua em 0 $\iff$ $\exists\ C \geq 0$ tal que $\|Tx\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in X$.
- T contínua $\Longrightarrow \|T\| := \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|} < \infty$.
- $T \mapsto \|T\|$ é norma em $\mathcal{B}(X, Y)$.
- $\|T\|$ é a menor C tal que $\|Tx\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in X$.
- Y completo $\Longrightarrow \mathcal{B}(X, Y)$ completo.
- $X^* := \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$ ("dual" de X).

Transformações Lineares Contínuas

- X e Y espaços normados, Y completo, $D \subset X$ denso, $T_0 : D \to Y$ linear contínua.

Transformações Lineares Contínuas

- X e Y espaços normados, Y completo, $D \subset X$ denso, $T_0 : D \to Y$ linear contínua.
- $\Longrightarrow$ (B.L.T. Theorem, Reed-Simon)

Transformações Lineares Contínuas

- X e Y espaços normados, Y completo, $D \subset X$ denso, $T_0 : D \to Y$ linear contínua.
- $\Longrightarrow$ (B.L.T. Theorem, Reed-Simon)
- $\exists!\ T \in \mathcal{B}(X, Y)$ tal que $Tx = T_0 x\ \forall x \in D$.

Transformações Lineares Contínuas

- X e Y espaços normados, Y completo, $D \subset X$ denso, $T_0 : D \to Y$ linear contínua.
- $\Longrightarrow$ (B.L.T. Theorem, Reed-Simon)
- $\exists!\ T \in \mathcal{B}(X, Y)$ tal que $Tx = T_0x\ \forall x \in D$.

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $a \in C(\Omega)$ limitada, $1 \leq p < \infty$.

Transformações Lineares Contínuas

- X e Y espaços normados, Y completo, $D \subset X$ denso, $T_0 : D \to Y$ linear contínua.
- $\Longrightarrow$ (B.L.T. Theorem, Reed-Simon)
- $\exists !\ T \in \mathcal{B}(X, Y)$ tal que $Tx = T_0 x\ \forall x \in D$.

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $a \in C(\Omega)$ limitada, $1 \leq p < \infty$.
- $\longmapsto$ (operador de multiplicação por a)

Transformações Lineares Contínuas

- X e Y espaços normados, Y completo, $D \subset X$ denso, $T_0 : D \to Y$ linear contínua.
- $\Longrightarrow$ (B.L.T. Theorem, Reed-Simon)
- $\exists !\ T \in \mathcal{B}(X, Y)$ tal que $Tx = T_0 x\ \forall x \in D$.

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $a \in C(\Omega)$ limitada, $1 \leq p < \infty$.
- $\longmapsto$ (operador de multiplicação por a)
- $\exists !\ M_a \in \mathcal{B}(L^p(\Omega))$ tal que, $\forall f \in C_c(\Omega)$, $(M_a f)(x) = a(x) f(x)$, $x \in \Omega$.

Transformações Lineares Contínuas

- X e Y espaços normados, Y completo, $D \subset X$ denso, $T_0 : D \to Y$ linear contínua.
- $\Longrightarrow$ (B.L.T. Theorem, Reed-Simon)
- $\exists!\ T \in \mathcal{B}(X, Y)$ tal que $Tx = T_0 x\ \forall x \in D$.

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $a \in C(\Omega)$ limitada, $1 \leq p < \infty$.
- $\longmapsto$ (operador de multiplicação por a)
- $\exists!\ M_a \in \mathcal{B}(L^p(\Omega))$ tal que, $\forall f \in C_c(\Omega)$, $(M_a f)(x) = a(x) f(x)$, $x \in \Omega$.
- $\|M_a\| = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$.

Espaços de Hilbert

- Dados M um subespaço fechado de um espaço de Hilbert H e $x \in H$, $\exists! y \in M$ tal que $\|y - x\| < \|z - x\|$, $\forall z \in M$, $z \neq y$.

Espaços de Hilbert

- Dados M um subespaço fechado de um espaço de Hilbert H e $x \in H$, $\exists! y \in M$ tal que $\|y - x\| < \|z - x\|$, $\forall z \in M$, $z \neq y$.
- Seja $P : H \longrightarrow H$, $Px = y$ (projeção ortogonal sobre M).

Espaços de Hilbert

- Dados M um subespaço fechado de um espaço de Hilbert H e $x \in H$, $\exists! y \in M$ tal que $\|y - x\| < \|z - x\|$, $\forall z \in M$, $z \neq y$.
- Seja $P : H \longrightarrow H$, $Px = y$ (projeção ortogonal sobre M).
- $P \in \mathcal{B}(H)$, $\|P\| = 1$, $\operatorname{Im} P = M$, $\ker P = M^{\perp}$, $H = M \oplus M^{\perp}$.

Espaços de Hilbert

- Dados M um subespaço fechado de um espaço de Hilbert H e $x \in H$, $\exists! y \in M$ tal que $\|y - x\| < \|z - x\|$, $\forall z \in M$, $z \neq y$.
- Seja $P : H \longrightarrow H$, $Px = y$ (projeção ortogonal sobre M).
- $P \in \mathcal{B}(H)$, $\|P\| = 1$, $\operatorname{Im} P = M$, $\ker P = M^{\perp}$, $H = M \oplus M^{\perp}$.
- (Lema de Riesz) Dado $\lambda \in H^*$, $\exists! y \in H$ tal que $\lambda(x) = \langle x, y \rangle$, $x \in H$.

Espaços de Hilbert

- Dados M um subespaço fechado de um espaço de Hilbert H e $x \in H$, $\exists! y \in M$ tal que $\|y - x\| < \|z - x\|$, $\forall z \in M$, $z \neq y$.
- Seja $P : H \longrightarrow H$, $Px = y$ (projeção ortogonal sobre M).
- $P \in \mathcal{B}(H)$, $\|P\| = 1$, $\operatorname{Im} P = M$, $\ker P = M^{\perp}$, $H = M \oplus M^{\perp}$.
- (Lema de Riesz) Dado $\lambda \in H^*$, $\exists! y \in H$ tal que $\lambda(x) = \langle x, y \rangle$, $x \in H$.
- $H \ni y \mapsto \langle \cdot, y \rangle \in H^*$ é uma bijeção linear-conjugada isométrica.

Espaços de Hilbert

- Dados M um subespaço fechado de um espaço de Hilbert H e $x \in H$, $\exists! y \in M$ tal que $\|y - x\| < \|z - x\|$, $\forall z \in M$, $z \neq y$.
- Seja $P : H \longrightarrow H$, $Px = y$ (projeção ortogonal sobre M).
- $P \in \mathcal{B}(H)$, $\|P\| = 1$, $\operatorname{Im} P = M$, $\ker P = M^\perp$, $H = M \oplus M^\perp$.
- (Lema de Riesz) Dado $\lambda \in H^*$, $\exists! y \in H$ tal que $\lambda(x) = \langle x, y \rangle$, $x \in H$.
- $H \ni y \mapsto \langle \cdot, y \rangle \in H^*$ é uma bijeção linear-conjugada isométrica.

- **Adjuntos**
  Dados $T \in \mathcal{B}(H)$ e $y \in H$, $\langle T(\cdot), y \rangle \in H^*$.

Espaços de Hilbert

- Dados M um subespaço fechado de um espaço de Hilbert H e $x \in H$, $\exists! y \in M$ tal que $\|y - x\| < \|z - x\|$, $\forall z \in M$, $z \neq y$.
- Seja $P : H \longrightarrow H$, $Px = y$ (projeção ortogonal sobre M).
- $P \in \mathcal{B}(H)$, $\|P\| = 1$, $\operatorname{Im} P = M$, $\ker P = M^{\perp}$, $H = M \oplus M^{\perp}$.
- (Lema de Riesz) Dado $\lambda \in H^*$, $\exists! y \in H$ tal que $\lambda(x) = \langle x, y \rangle$, $x \in H$.
- $H \ni y \mapsto \langle \cdot, y \rangle \in H^*$ é uma bijeção linear-conjugada isométrica.

- **Adjuntos**
  Dados $T \in \mathcal{B}(H)$ e $y \in H$, $\langle T(\cdot), y \rangle \in H^*$.
- Seja $z \in H$ tal que $\langle Tx, y \rangle = \langle x, z \rangle$, $x \in H$. $T^* y := z$.

Espaços de Hilbert

- Dados M um subespaço fechado de um espaço de Hilbert H e $x \in H$, $\exists! y \in M$ tal que $\|y - x\| < \|z - x\|$, $\forall z \in M$, $z \neq y$.
- Seja $P : H \longrightarrow H$, $Px = y$ (projeção ortogonal sobre M).
- $P \in \mathcal{B}(H)$, $\|P\| = 1$, $\operatorname{Im} P = M$, $\ker P = M^{\perp}$, $H = M \oplus M^{\perp}$.
- (Lema de Riesz) Dado $\lambda \in H^*$, $\exists! y \in H$ tal que $\lambda(x) = \langle x, y \rangle$, $x \in H$.
- $H \ni y \mapsto \langle \cdot, y \rangle \in H^*$ é uma bijeção linear-conjugada isométrica.

- **Adjuntos**
  Dados $T \in \mathcal{B}(H)$ e $y \in H$, $\langle T(\cdot), y \rangle \in H^*$.
- Seja $z \in H$ tal que $\langle Tx, y \rangle = \langle x, z \rangle$, $x \in H$. $T^* y := z$.
- $T^* \in \mathcal{B}(H)$, $\|T^*\| = \|T\|$, $\|TT^*\| = \|T\|^2$.

Espaços de Hilbert

- Dados M um subespaço fechado de um espaço de Hilbert H e $x \in H$, $\exists! y \in M$ tal que $\|y - x\| < \|z - x\|$, $\forall z \in M$, $z \neq y$.
- Seja $P : H \longrightarrow H$, $Px = y$ (projeção ortogonal sobre M).
- $P \in \mathcal{B}(H)$, $\|P\| = 1$, $\operatorname{Im} P = M$, $\ker P = M^\perp$, $H = M \oplus M^\perp$.
- (Lema de Riesz) Dado $\lambda \in H^*$, $\exists! y \in H$ tal que $\lambda(x) = \langle x, y \rangle$, $x \in H$.
- $H \ni y \mapsto \langle \cdot, y \rangle \in H^*$ é uma bijeção linear-conjugada isométrica.

- **Adjuntos**
  Dados $T \in \mathcal{B}(H)$ e $y \in H$, $\langle T(\cdot), y \rangle \in H^*$.
- Seja $z \in H$ tal que $\langle Tx, y \rangle = \langle x, z \rangle$, $x \in H$. $T^* y := z$.
- $T^* \in \mathcal{B}(H)$, $\|T^*\| = \|T\|$, $\|TT^*\| = \|T\|^2$.
- P projeção ortogonal $\iff P = P^2 = P^*$.

Espaços de Hilbert

- Seja $S = \{e_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset H$ *ortonormal*: $\langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ 1, & \alpha = \beta \end{cases}$

Espaços de Hilbert

- Seja $S = \{e_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset H$ *ortonormal*: $\langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ 1, & \alpha = \beta \end{cases}$
- São equivalentes:
  1. S é maximal, i.e., $\langle x, e_\alpha \rangle = 0 \ \forall \alpha \implies x = 0$
  2. O subespaço gerado por S é denso em H.
  3. $\forall x \in H, \ \|x\|^2 = \sum_{\alpha \in I} |\langle x, e_\alpha \rangle|^2$.
  4. $\forall x \in H, \ x = \sum_{\alpha \in I} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha$.

Espaços de Hilbert

- Seja $S = \{e_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset H$ *ortonormal*: $\langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ 1, & \alpha = \beta \end{cases}$
- São equivalentes:
  1. S é maximal, i.e., $\langle x, e_\alpha \rangle = 0 \ \forall \alpha \implies x = 0$
  2. O subespaço gerado por S é denso em H.
  3. $\forall x \in H, \ \|x\|^2 = \sum_{\alpha \in I} |\langle x, e_\alpha \rangle|^2$.
  4. $\forall x \in H, \ x = \sum_{\alpha \in I} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha$.
- Nessas condições, diz-se que S é *base hilbertiana* de H.

Espaços de Hilbert

- Seja $S = \{e_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset H$ *ortonormal*: $\langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ 1, & \alpha = \beta \end{cases}$
- São equivalentes:
  1. S é maximal, i.e., $\langle x, e_\alpha \rangle = 0 \; \forall \alpha \implies x = 0$
  2. O subespaço gerado por S é denso em H.
  3. $\forall x \in H, \; \|x\|^2 = \sum_{\alpha \in I} |\langle x, e_\alpha \rangle|^2$.
  4. $\forall x \in H, \; x = \sum_{\alpha \in I} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha$.
- Nessas condições, diz-se que S é *base hilbertiana* de H.
- Todo H tem base (Zorn), todas com a mesma cardinalidade.

Espaços de Hilbert

- Seja $S = \{e_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset H$ *ortonormal*: $\langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ 1, & \alpha = \beta \end{cases}$
- São equivalentes:
  1. S é maximal, i.e., $\langle x, e_\alpha \rangle = 0 \ \forall \alpha \implies x = 0$
  2. O subespaço gerado por S é denso em H.
  3. $\forall x \in H, \ \|x\|^2 = \sum_{\alpha \in I} |\langle x, e_\alpha \rangle|^2$.
  4. $\forall x \in H, \ x = \sum_{\alpha \in I} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha$.
- Nessas condições, diz-se que S é *base hilbertiana* de H.
- Todo H tem base (Zorn), todas com a mesma cardinalidade.
- Esse cardinal é a *dimensão* de H.

Espaços de Hilbert

- Seja $S = \{e_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset H$ *ortonormal*: $\langle e_\alpha, e_\beta\rangle = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ 1, & \alpha = \beta \end{cases}$
- São equivalentes:
  1. S é maximal, i.e., $\langle x, e_\alpha\rangle = 0 \ \forall\alpha \implies x = 0$
  2. O subespaço gerado por S é denso em H.
  3. $\forall x \in H,\ \|x\|^2 = \sum_{\alpha\in I} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2$.
  4. $\forall x \in H,\ x = \sum_{\alpha\in I} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha$.
- Nessas condições, diz-se que S é *base hilbertiana* de H.
- Todo H tem base (Zorn), todas com a mesma cardinalidade.
- Esse cardinal é a *dimensão* de H.
- Dois espaços de Hilbert são isomorfos $\Leftrightarrow$ têm a mesma dimensão (uma bijeção entre bases define um isomorfismo).

Espaços de Hilbert

- H possui base enumerável $\iff$
  H possui subconjunto enumerável denso (H é *separável*).

Espaços de Hilbert

- H possui base enumerável $\iff$
  H possui subconjunto enumerável denso (H é *separável*).
  ($\Longrightarrow$): combinações lineares racionais.
  ($\Longleftarrow$): extraia base algébrica do espaço gerado por D, Gram-Schmidt.

Espaços de Hilbert

- H possui base enumerável $\iff$
  H possui subconjunto enumerável denso (H é *separável*).
  $(\Longrightarrow)$: combinações lineares racionais.
  $(\Longleftarrow)$: extraia base algébrica do espaço gerado por D, Gram-Schmidt.

- $\ell^2 := \{(a_n)_{n=1}^{\infty};\ a_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}$, $\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}$.

Espaços de Hilbert

- H possui base enumerável $\iff$
  H possui subconjunto enumerável denso (H é *separável*).
  ($\Longrightarrow$): combinações lineares racionais.
  ($\Longleftarrow$): extraia base algébrica do espaço gerado por D, Gram-Schmidt.

- $\ell^2 := \{(a_n)_{n=1}^{\infty};\, a_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}$, $\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}$.

- H separável. Base $\{e_1, e_2, \cdots\}$ base define isomorfismo
  $\ell^2 \ni (a_n) \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in H$ com inversa $H \ni x \longmapsto (\langle x, e_n \rangle) \in \ell^2$.

Espaços de Hilbert

- H possui base enumerável $\iff$
  H possui subconjunto enumerável denso (H é *separável*).
  $(\Longrightarrow)$: combinações lineares racionais.
  $(\Longleftarrow)$: extraia base algébrica do espaço gerado por D, Gram-Schmidt.

- $\ell^2 := \{(a_n)_{n=1}^{\infty};\ a_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}$, $\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}$.

- H separável. Base $\{e_1, e_2, \cdots\}$ base define isomorfismo
  $\ell^2 \ni (a_n) \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in H$ com inversa $H \ni x \longmapsto (\langle x, e_n \rangle) \in \ell^2$.

  Exemplo

- $F_d : L^2(S^1) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$, $f \longmapsto (\widehat{f_n})_{n \in \mathbb{Z}}$. Inversa é *série de Fourier*.

Espaços de Hilbert

- $f : S^1 \to \mathbb{C}$ é contínua $\iff g(\theta) = f(e^{i\theta})$, $\theta \in \mathbb{R}$, é contínua.
  $f : S^1 \to \mathbb{C}$ é C^∞ se $g(\theta) = f(e^{i\theta})$, $\theta \in \mathbb{R}$, é C^∞.

Espaços de Hilbert

- $f : S^1 \to \mathbb{C}$ é contínua $\iff g(\theta) = f(e^{i\theta})$, $\theta \in \mathbb{R}$, é contínua.
  $f : S^1 \to \mathbb{C}$ é C^∞ se $g(\theta) = f(e^{i\theta})$, $\theta \in \mathbb{R}$, é C^∞.
- $\langle f, g \rangle := \displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\, d\theta$ é produto interno em $C(S^1)$.

Espaços de Hilbert

- $f : S^1 \to \mathbb{C}$ é contínua $\iff g(\theta) = f(e^{i\theta})$, $\theta \in \mathbb{R}$, é contínua.
  $f : S^1 \to \mathbb{C}$ é C^∞ se $g(\theta) = f(e^{i\theta})$, $\theta \in \mathbb{R}$, é C^∞.
- $\langle f, g\rangle := \displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\, d\theta$ é produto interno em $C(S^1)$.
- Defina $e_n \in C^\infty(S^1)$, $n \in \mathbb{Z}$, por $e_n(e^{i\theta}) = (2\pi)^{-1/2}e^{in\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.
  `Af`: $\{e_n;\ n \in \mathbb{Z}\}$ é base de $L^2(S^1)$, o completamento de $C(S^1)$.

Espaços de Hilbert

- $f : S^1 \to \mathbb{C}$ é contínua $\iff g(\theta) = f(e^{i\theta})$, $\theta \in \mathbb{R}$, é contínua.
  $f : S^1 \to \mathbb{C}$ é C^∞ se $g(\theta) = f(e^{i\theta})$, $\theta \in \mathbb{R}$, é C^∞.
- $\langle f, g\rangle := \displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\, d\theta$ é produto interno em $C(S^1)$.
- Defina $e_n \in C^\infty(S^1)$, $n \in \mathbb{Z}$, por $e_n(e^{i\theta}) = (2\pi)^{-1/2}e^{in\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.
  `Af:` $\{e_n;\ n \in \mathbb{Z}\}$ é base de $L^2(S^1)$, o completamento de $C(S^1)$.
- `Dem:` $\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)|;\ z \in S^1\}$. $\|\cdot\|_2 \leq \sqrt{2\pi}\|\cdot\|_\infty$ em $C(S^1)$.
  $s_n = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} - f \right\|_\infty = 0$ (Fejér).

Espaços de Hilbert

- $f : S^1 \to \mathbb{C}$ é contínua $\iff g(\theta) = f(e^{i\theta})$, $\theta \in \mathbb{R}$, é contínua.
  $f : S^1 \to \mathbb{C}$ é C^∞ se $g(\theta) = f(e^{i\theta})$, $\theta \in \mathbb{R}$, é C^∞.
- $\langle f, g \rangle := \displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\, d\theta$ é produto interno em $C(S^1)$.
- Defina $e_n \in C^\infty(S^1)$, $n \in \mathbb{Z}$, por $e_n(e^{i\theta}) = (2\pi)^{-1/2}e^{in\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.
  `Af`: $\{e_n;\ n \in \mathbb{Z}\}$ é base de $L^2(S^1)$, o completamento de $C(S^1)$.
- `Dem`: $\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)|;\ z \in S^1\}$. $\|\cdot\|_2 \leq \sqrt{2\pi}\|\cdot\|_\infty$ em $C(S^1)$.
  $$s_n = \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k,\ \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} - f \right\|_\infty = 0 \text{ (Fejér)}.$$
- $f = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_n e_n$, $f \in L^2(S^1) \supset C(S^1) \supset C^1(S^1) \supset \cdots \supset C^\infty(S^1)$.
  $$\widehat{f}_n := \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}\, d\theta, \text{ se } f \in C(S^1).$$

Consequências do Teorema de Baire

Teorema de Baire: Um espaço métrico completo não pode ser escrito como a união enumerável de fechados com interior vazio.

Consequências do Teorema de Baire

Teorema de Baire: Um espaço métrico completo não pode ser escrito como a união enumerável de fechados com interior vazio.

Problema 1: Seja Y um espaço vetorial normado de dimensão finita. Mostre que Y é completo.
`Sugestão`: Use um isomorfismo linear de Y em $\mathbb{C}^n$ para empurrar a norma de Y para $\mathbb{C}^n$. Todas as normas de $\mathbb{C}^n$ são equivalentes.

Consequências do Teorema de Baire

Teorema de Baire: Um espaço métrico completo não pode ser escrito como a união enumerável de fechados com interior vazio.

Problema 1: Seja Y um espaço vetorial normado de dimensão finita. Mostre que Y é completo.
Sugestão: Use um isomorfismo linear de Y em $\mathbb{C}^n$ para empurrar a norma de Y para $\mathbb{C}^n$. Todas as normas de $\mathbb{C}^n$ são equivalentes.

Problema 2: Sejam X um espaço vetorial normado de dimensão infinita e $Y \subset X$ um subespaço de dimensão finita. Mostre que Y é fechado e tem interior vazio em X.

Consequências do Teorema de Baire

Teorema de Baire: Um espaço métrico completo não pode ser escrito como a união enumerável de fechados com interior vazio.

Problema 1: Seja Y um espaço vetorial normado de dimensão finita. Mostre que Y é completo.
`Sugestão`: Use um isomorfismo linear de Y em $\mathbb{C}^n$ para empurrar a norma de Y para $\mathbb{C}^n$. Todas as normas de $\mathbb{C}^n$ são equivalentes.

Problema 2: Sejam X um espaço vetorial normado de dimensão infinita e $Y \subset X$ um subespaço de dimensão finita. Mostre que Y é fechado e tem interior vazio em X.

Corolário: Um espaço de Banach X de dimensão infinita não possui base algébrica enumerável.

Consequências do Teorema de Baire

Teorema de Baire: Um espaço métrico completo não pode ser escrito como a união enumerável de fechados com interior vazio.

Problema 1: Seja Y um espaço vetorial normado de dimensão finita. Mostre que Y é completo.
Sugestão: Use um isomorfismo linear de Y em $\mathbb{C}^n$ para empurrar a norma de Y para $\mathbb{C}^n$. Todas as normas de $\mathbb{C}^n$ são equivalentes.

Problema 2: Sejam X um espaço vetorial normado de dimensão infinita e $Y \subset X$ um subespaço de dimensão finita. Mostre que Y é fechado e tem interior vazio em X.

Corolário: Um espaço de Banach X de dimensão infinita não possui base algébrica enumerável. (Se X possuísse base $\{v_1, v_2, \cdots\}$, X seria a união dos $V_k = [v_1, \cdots, v_k]$, $k \in \mathbb{N}$, cada V_k sendo fechado de interior vazio.)

Consequências do Teorema de Baire

$r > 0,\ B_r = \{x \in X;\ \|x\| < r\}.$

Consequências do Teorema de Baire

$r > 0$, $B_r = \{x \in X;\ \|x\| < r\}$.

Teorema da Aplicação Aberta: X, Y Banach, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ sobrejetora. Então T é aplicação aberta.

Consequências do Teorema de Baire

$r > 0$, $B_r = \{x \in X;\ \|x\| < r\}$.
Teorema da Aplicação Aberta: X, Y Banach, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ sobrejetora. Então T é aplicação aberta.

Dem: $Y = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_n) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_n)} \implies$ algum $\overline{T(B_n)}$ tem interior não-vazio.

Consequências do Teorema de Baire

$r > 0$, $B_r = \{x \in X;\ \|x\| < r\}$.
Teorema da Aplicação Aberta: X, Y Banach, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ sobrejetora. Então T é aplicação aberta.

`Dem:` $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_n) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_n)} \Longrightarrow$ algum $\overline{T(B_n)}$ tem interior não-vazio. Linearidade, continuidade $\Longrightarrow$ existe $\epsilon > 0$, $B_{\epsilon r} \subseteq \overline{T(B_r)}\ \forall\, r > 0$.

Consequências do Teorema de Baire

$r > 0$, $B_r = \{x \in X;\ \|x\| < r\}$.
Teorema da Aplicação Aberta: X, Y Banach, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ sobrejetora. Então T é aplicação aberta.

Dem: $Y = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_n) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_n)} \implies$ algum $\overline{T(B_n)}$ tem interior não-vazio. Linearidade, continuidade $\implies$ existe $\epsilon > 0$, $B_{\epsilon r} \subseteq \overline{T(B_r)}\ \forall\, r > 0$.
Basta mostrar que $\overline{T(B_1)} \subset T(B_2)$.

Consequências do Teorema de Baire

$r > 0$, $B_r = \{x \in X;\ \|x\| < r\}$.
Teorema da Aplicação Aberta: X, Y Banach, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ sobrejetora. Então T é aplicação aberta.

Dem: $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_n) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_n)} \implies$ algum $\overline{T(B_n)}$ tem interior não-vazio. Linearidade, continuidade $\implies$ existe $\epsilon > 0$, $B_{\epsilon r} \subseteq \overline{T(B_r)}\ \forall\, r > 0$.
Basta mostrar que $\overline{T(B_1)} \subset T(B_2)$.
Dado $y \in \overline{T(B_1)}$, existe $x_1 \in B_1$, $y - Tx_1 \in B_{\epsilon/2} \subseteq \overline{T(B_{1/2})}$.

Consequências do Teorema de Baire

$r > 0$, $B_r = \{x \in X;\ \|x\| < r\}$.
Teorema da Aplicação Aberta: X, Y Banach, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ sobrejetora. Então T é aplicação aberta.

Dem: $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_n) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_n)} \implies$ algum $\overline{T(B_n)}$ tem interior não-vazio. Linearidade, continuidade $\implies$ existe $\epsilon > 0$, $B_{\epsilon r} \subseteq \overline{T(B_r)}\ \forall\, r > 0$.
Basta mostrar que $\overline{T(B_1)} \subset T(B_2)$.
Dado $y \in \overline{T(B_1)}$, existe $x_1 \in B_1$, $y - Tx_1 \in B_{\epsilon/2} \subseteq \overline{T(B_{1/2})}$.
Por indução, $\forall n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in B_{1/2^{n-1}}$,

$$y - (Tx_1 + Tx_2 + \cdots Tx_n) \in B_{\epsilon/2^{n-1}} \subseteq \overline{T(B_{1/2^{n-1}})}$$

Consequências do Teorema de Baire

$r > 0$, $B_r = \{x \in X;\ \|x\| < r\}$.
Teorema da Aplicação Aberta: X, Y Banach, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ sobrejetora. Então T é aplicação aberta.

Dem: $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_n) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_n)} \implies$ algum $\overline{T(B_n)}$ tem interior não-vazio. Linearidade, continuidade $\implies$ existe $\epsilon > 0$, $B_{\epsilon r} \subseteq \overline{T(B_r)}\ \forall\, r > 0$.
Basta mostrar que $\overline{T(B_1)} \subset T(B_2)$.
Dado $y \in \overline{T(B_1)}$, existe $x_1 \in B_1$, $y - Tx_1 \in B_{\epsilon/2} \subseteq \overline{T(B_{1/2})}$.
Por indução, $\forall n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in B_{1/2^{n-1}}$,

$$y - (Tx_1 + Tx_2 + \cdots Tx_n) \in B_{\epsilon/2^{n-1}} \subseteq \overline{T(B_{1/2^{n-1}})}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < 2 \implies \exists\, x \in B_2,\ x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n,\ Tx = y.$$

Consequências do Teorema de Baire

Corolário: X, Y Banach, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ bijetora. Então T^{-1} é contínua.

Consequências do Teorema de Baire

Corolário: X, Y Banach, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ bijetora. Então T^{-1} é contínua.

Sejam $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ espaços de Banach.
$\|(x, y)\| = \|x\|_E + \|y\|_E$ é norma em $E \times F$, que faz dele Banach.

Consequências do Teorema de Baire

Corolário: X, Y Banach, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ bijetora. Então T^{-1} é contínua.

Sejam $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ espaços de Banach.
$\|(x, y)\| = \|x\|_E + \|y\|_E$ é norma em $E \times F$, que faz dele Banach.

Sejam E e F subespaços fechados do Banach X, $E \oplus F = X$.
$E \times F \ni (e, f) \longmapsto e + f \in X$ é uma bijeção contínua.
T.A.A. $\Longrightarrow$ $X \ni x = e + f \longmapsto (e, f) \in E \times F$ é contínua.

Consequências do Teorema de Baire

Corolário: X, Y Banach, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ bijetora. Então T^{-1} é contínua.

Sejam $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ espaços de Banach.
$\|(x, y)\| = \|x\|_E + \|y\|_E$ é norma em $E \times F$, que faz dele Banach.

Sejam E e F subespaços fechados do Banach X, $E \oplus F = X$.
$E \times F \ni (e, f) \longmapsto e + f \in X$ é uma bijeção contínua.
T.A.A. $\Longrightarrow$ $X \ni x = e + f \longmapsto (e, f) \in E \times F$ é contínua.

Logo $X \ni x = e + f \longmapsto e \in E$ é contínua.
Esta é a “projeção sobre E ao longo de F”.

Consequências do Teorema de Baire

Corolário: X, Y Banach, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ bijetora. Então T^{-1} é contínua.

Sejam $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ espaços de Banach.
$\|(x, y)\| = \|x\|_E + \|y\|_E$ é norma em $E \times F$, que faz dele Banach.

Sejam E e F subespaços fechados do Banach X, $E \oplus F = X$.
$E \times F \ni (e, f) \longmapsto e + f \in X$ é uma bijeção contínua.
T.A.A. $\Longrightarrow$ $X \ni x = e + f \longmapsto (e, f) \in E \times F$ é contínua.

Logo $X \ni x = e + f \longmapsto e \in E$ é contínua.
Esta é a "projeção sobre E ao longo de F".

Reciprocamente, se existe $Q \in \mathcal{B}(X)$, $Q = Q^2$, então $E =$Im Q é fechada e Q é a projeção sobre E ao longo de ker Q.

Consequências do Teorema de Baire

Corolário: X, Y Banach, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ bijetora. Então T^{-1} é contínua.

Sejam $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ espaços de Banach.
$\|(x, y)\| = \|x\|_E + \|y\|_E$ é norma em $E \times F$, que faz dele Banach.

Sejam E e F subespaços fechados do Banach X, $E \oplus F = X$.
$E \times F \ni (e, f) \longmapsto e + f \in X$ é uma bijeção contínua.
T.A.A. $\Longrightarrow$ $X \ni x = e + f \longmapsto (e, f) \in E \times F$ é contínua.

Logo $X \ni x = e + f \longmapsto e \in E$ é contínua.
Esta é a "projeção sobre E ao longo de F".

Reciprocamente, se existe $Q \in \mathcal{B}(X)$, $Q = Q^2$, então $E =$Im Q é fechada e Q é a projeção sobre E ao longo de ker Q.

Um subespaço fechado de X é *complementado* se e só se é a imagem de um idempotente de $\mathcal{B}(X)$.

Consequências do Teorema de Baire

Dado $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, $\operatorname{gr} T := \{(x, Tx);\, x \in X\}$ é fechado em $X \times Y$.

Consequências do Teorema de Baire

Dado $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, $\operatorname{gr} T := \{(x, Tx); x \in X\}$ é fechado em $X \times Y$.

Teorema do Gráfico Fechado: X, Y Banach, $T : X \longrightarrow Y$ linear.
Se $\operatorname{gr} T$ for fechado, então $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Consequências do Teorema de Baire

Dado $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, $\operatorname{gr} T := \{(x, Tx);\, x \in X\}$ é fechado em $X \times Y$.

Teorema do Gráfico Fechado: X, Y Banach, $T : X \longrightarrow Y$ linear.
Se $\operatorname{gr} T$ for fechado, então $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

`Dem`: Π_X, Π_Y projeções canônicas de $X \times Y$ em X, Y, respectivamente.
Restrição de Π_X a $\operatorname{gr} T$, $(x, Tx) \mapsto x$, é bijeção contínua.
Pelo T.A.A, sua inversa I_X é contínua. $T = \Pi_Y \circ I_X$.

Consequências do Teorema de Baire

Dado $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, $\operatorname{gr} T := \{(x, Tx);\, x \in X\}$ é fechado em $X \times Y$.

Teorema do Gráfico Fechado: X, Y Banach, $T : X \longrightarrow Y$ linear.
Se $\operatorname{gr} T$ for fechado, então $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

`Dem`: Π_X, Π_Y projeções canônicas de $X \times Y$ em X, Y, respectivamente.
Restrição de Π_X a $\operatorname{gr} T$, $(x, Tx) \mapsto x$, é bijeção contínua.
Pelo T.A.A, sua inversa I_X é contínua. $T = \Pi_Y \circ I_X$.

Corolário: X, Y Banach, $T : X \longrightarrow Y$ linear. Suponha que $y = 0$ sempre que $x_n \to 0$ em X e $Tx_n \to y$ em Y. Então $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Consequências do Teorema de Baire

Dado $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, $\operatorname{gr} T := \{(x, Tx); x \in X\}$ é fechado em $X \times Y$.

Teorema do Gráfico Fechado: X, Y Banach, $T : X \longrightarrow Y$ linear.
Se $\operatorname{gr} T$ for fechado, então $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

`Dem:` Π_X, Π_Y projeções canônicas de $X \times Y$ em X, Y, respectivamente.
Restrição de Π_X a $\operatorname{gr} T$, $(x, Tx) \mapsto x$, é bijeção contínua.
Pelo T.A.A, sua inversa I_X é contínua. $T = \Pi_Y \circ I_X$.

Corolário: X, Y Banach, $T : X \longrightarrow Y$ linear. Suponha que $y = 0$ sempre que $x_n \to 0$ em X e $Tx_n \to y$ em Y. Então $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Problema 3: H Hilbert, T e S funções de H em H. Suponha que $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$, $x, y \in H$. Mostre que T e S pertencem a $\mathcal{B}(H)$, $S = T^*$.

Consequências do Teorema de Baire

Teorema (P.L.U). X e Y normados, X completo, $\mathscr{F} \subset \mathcal{B}(X, Y)$.
Se, para cada $x \in X$, $\sup\limits_{T \in \mathscr{F}} \|Tx\| < \infty$, então $\sup\limits_{T \in \mathscr{F}} \|T\| < \infty$.

Consequências do Teorema de Baire

Teorema (P.L.U). X e Y normados, X completo, $\mathscr{F} \subset \mathcal{B}(X, Y)$.
Se, para cada $x \in X$, $\sup\limits_{T \in \mathscr{F}} \|Tx\| < \infty$, então $\sup\limits_{T \in \mathscr{F}} \|T\| < \infty$.

Dem: $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x \in X; \|Tx\| \leq n, \forall T \in \mathscr{F}\}$.
Interior de um desses não vazio implica a tese.

Consequências do Teorema de Baire

Teorema (P.L.U). X e Y normados, X completo, $\mathscr{F} \subset \mathcal{B}(X, Y)$.
Se, para cada $x \in X$, $\sup_{T \in \mathscr{F}} \|Tx\| < \infty$, então $\sup_{T \in \mathscr{F}} \|T\| < \infty$.

Dem: $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X;\ \|Tx\| \leq n,\ \forall T \in \mathscr{F}\}$.
Interior de um desses não vazio implica a tese.

Corolário. X, Y e Z normados, X completo, $B : X \times Y \to Z$ bilinear, $B(x, \cdot)$ e $B(\cdot, y)$ contínuos $\forall (x, y)$. Então B é contínua.

Consequências do Teorema de Baire

Teorema (P.L.U). X e Y normados, X completo, $\mathscr{F} \subset \mathcal{B}(X, Y)$.
Se, para cada $x \in X$, $\sup\limits_{T \in \mathscr{F}} \|Tx\| < \infty$, então $\sup\limits_{T \in \mathscr{F}} \|T\| < \infty$.

Dem: $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x \in X;\ \|Tx\| \leq n, \forall T \in \mathscr{F}\}$.
Interior de um desses não vazio implica a tese.

Corolário. X, Y e Z normados, X completo, $B : X \times Y \to Z$ bilinear, $B(x, \cdot)$ e $B(\cdot, y)$ contínuos $\forall (x, y)$. Então B é contínua.
Dem: Aplique P.L.U. a $\mathscr{F} = \{B(\cdot, y);\ \|y\| \leq 1\} \subset \mathcal{B}(X, Z)$.

Consequências do Teorema de Baire

Teorema (P.L.U). X e Y normados, X completo, $\mathscr{F} \subset \mathcal{B}(X, Y)$.
Se, para cada $x \in X$, $\sup_{T \in \mathscr{F}} \|Tx\| < \infty$, então $\sup_{T \in \mathscr{F}} \|T\| < \infty$.

Dem: $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X;\ \|Tx\| \leq n, \forall T \in \mathscr{F}\}$.
Interior de um desses não vazio implica a tese.

Corolário. X, Y e Z normados, X completo, $B : X \times Y \to Z$ bilinear, $B(x, \cdot)$ e $B(\cdot, y)$ contínuos $\forall (x, y)$. Então B é contínua.
Dem: Aplique P.L.U. a $\mathscr{F} = \{B(\cdot, y);\ \|y\| \leq 1\} \subset \mathcal{B}(X, Z)$.
$C := \sup_{\|y\| \leq 1} \|B(\cdot, y)\| < \infty$ implica $\|B(x, y)\| \leq C\|x\|$, $\|y\| \leq 1$.

Consequências do Teorema de Baire

Teorema (P.L.U). X e Y normados, X completo, $\mathscr{F} \subset \mathcal{B}(X, Y)$.
Se, para cada $x \in X$, $\sup_{T \in \mathscr{F}} \|Tx\| < \infty$, então $\sup_{T \in \mathscr{F}} \|T\| < \infty$.

Dem: $X = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X;\ \|Tx\| \leq n, \forall T \in \mathscr{F}\}$.
Interior de um desses não vazio implica a tese.

Corolário. X, Y e Z normados, X completo, $B : X \times Y \to Z$ bilinear, $B(x, \cdot)$ e $B(\cdot, y)$ contínuos $\forall (x, y)$. Então B é contínua.
Dem: Aplique P.L.U. a $\mathscr{F} = \{B(\cdot, y);\ \|y\| \leq 1\} \subset \mathcal{B}(X, Z)$.
$C := \sup_{\|y\| \leq 1} \|B(\cdot, y)\| < \infty$ implica $\|B(x, y)\| \leq C\|x\|$, $\|y\| \leq 1$.

Daí $\|B(x, y)\| \leq C\|x\|\|y\|$, $(x, y) \in X \times Y$.

Hahn-Banach

Teorema de Hahn-Banach: X normado, Y subespaço, $T_0 : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ contínuo. Então existe $T \in X^*$, $\|T\| = \|T_0\|$, $Tx = T_0x$ para todo $x \in Y$.

Hahn-Banach

Teorema de Hahn-Banach: X normado, Y subespaço, $T_0 : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ contínuo. Então existe $T \in X^*$, $\|T\| = \|T_0\|$, $Tx = T_0 x$ para todo $x \in Y$.

Problema 4: Mostre que, no caso em que X é um espaço de Hilbert, é única a extensão cuja existência é garantida por Hahn-Banach.

Hahn-Banach

Teorema de Hahn-Banach: X normado, Y subespaço, $T_0 : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ contínuo. Então existe $T \in X^*$, $\|T\| = \|T_0\|$, $Tx = T_0 x$ para todo $x \in Y$.

Problema 4: Mostre que, no caso em que X é um espaço de Hilbert, é única a extensão cuja existência é garantida por Hahn-Banach.

Corolário 1: X normado. $\forall\, x \in X$, $\exists\, \lambda \in X^*$, $\|\lambda\| = 1$, tal que $\lambda(x) = \|x\|$.

Hahn-Banach

Teorema de Hahn-Banach: X normado, Y subespaço, $T_0 : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ contínuo. Então existe $T \in X^*$, $\|T\| = \|T_0\|$, $Tx = T_0x$ para todo $x \in Y$.

Problema 4: Mostre que, no caso em que X é um espaço de Hilbert, é única a extensão cuja existência é garantida por Hahn-Banach.

Corolário 1: X normado. $\forall\, x \in X$, $\exists\, \lambda \in X^*$, $\|\lambda\| = 1$, tal que $\lambda(x) = \|x\|$.

Corolário 2: $X \ni x \mapsto \widehat{x} \in X^{**}$, $\widehat{x} : X^* \to \mathbb{C}$, $\widehat{x}(\lambda) = \lambda(x)$, é uma isometria.

Hahn-Banach

Teorema de Hahn-Banach: X normado, Y subespaço, $T_0 : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ contínuo. Então existe $T \in X^*$, $\|T\| = \|T_0\|$, $Tx = T_0 x$ para todo $x \in Y$.

Problema 4: Mostre que, no caso em que X é um espaço de Hilbert, é única a extensão cuja existência é garantida por Hahn-Banach.

Corolário 1: X normado. $\forall\, x \in X$, $\exists\, \lambda \in X^*$, $\|\lambda\| = 1$, tal que $\lambda(x) = \|x\|$.

Corolário 2: $X \ni x \mapsto \widehat{x} \in X^{**}$, $\widehat{x} : X^* \to \mathbb{C}$, $\widehat{x}(\lambda) = \lambda(x)$, é uma isometria.

Corolário 3 $x \in X$, $\forall\, \lambda \in X^*$, $\lambda(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Hahn-Banach

Teorema de Hahn-Banach: X normado, Y subespaço, $T_0 : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ contínuo. Então existe $T \in X^*$, $\|T\| = \|T_0\|$, $Tx = T_0 x$ para todo $x \in Y$.

Problema 4: Mostre que, no caso em que X é um espaço de Hilbert, é única a extensão cuja existência é garantida por Hahn-Banach.

Corolário 1: X normado. $\forall\, x \in X$, $\exists\, \lambda \in X^*$, $\|\lambda\| = 1$, tal que $\lambda(x) = \|x\|$.

Corolário 2: $X \ni x \mapsto \widehat{x} \in X^{**}$, $\widehat{x} : X^* \to \mathbb{C}$, $\widehat{x}(\lambda) = \lambda(x)$, é uma isometria.

Corolário 3 $x \in X$, $\forall\, \lambda \in X^*$, $\lambda(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Definição: X é *reflexivo* se a isometria $\widehat{(\cdot)}$ é sobrejetora.

Hahn-Banach

Teorema de Hahn-Banach: X normado, Y subespaço, $T_0 : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ contínuo. Então existe $T \in X^*$, $\|T\| = \|T_0\|$, $Tx = T_0x$ para todo $x \in Y$.

Problema 4: Mostre que, no caso em que X é um espaço de Hilbert, é única a extensão cuja existência é garantida por Hahn-Banach.

Corolário 1: X normado. $\forall\, x \in X$, $\exists\, \lambda \in X^*$, $\|\lambda\| = 1$, tal que $\lambda(x) = \|x\|$.

Corolário 2: $X \ni x \mapsto \widehat{x} \in X^{**}$, $\widehat{x} : X^* \to \mathbb{C}$, $\widehat{x}(\lambda) = \lambda(x)$, é uma isometria.

Corolário 3 $x \in X$, $\forall\, \lambda \in X^*$, $\lambda(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Definição: X é *reflexivo* se a isometria $\widehat{(\cdot)}$ é sobrejetora.

Exemplos: $1 < p < \infty$. São reflexivos: $L^p(\Omega)$, ℓ^p, mais geralmente $L^p(X)$, X espaço de medida. $\ell^p(S)$ denota $L^p(S)$, S com a medida de contagem.

Funções Holomorfas com valores em Espaços de Banach

$\Omega \subset \mathbb{C}$ aberto, X Banach. $f : \Omega \to X$ é *holomorfa* se, $\forall\, z \in \Omega$, existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} := f'(z)$$

Funções Holomorfas com valores em Espaços de Banach

$\Omega \subset \mathbb{C}$ aberto, X Banach. $f : \Omega \to X$ é *holomorfa* se, $\forall\, z \in \Omega$, existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} := f'(z)$$

Teorema. Se $f : \mathbb{C} \to X$ é holomorfa e $\lim_{z \to \infty} f(z) = 0$, então $f \equiv 0$.

Funções Holomorfas com valores em Espaços de Banach

$\Omega \subset \mathbb{C}$ aberto, X Banach. $f : \Omega \to X$ é *holomorfa* se, $\forall\, z \in \Omega$, existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} := f'(z)$$

Teorema. Se $f : \mathbb{C} \to X$ é holomorfa e $\lim_{z \to \infty} f(z) = 0$, então $f \equiv 0$.

Dem: $\forall \lambda \in X^*$, $\lambda \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é holomorfa e $\lim_{z \to \infty} (\lambda \circ f)(z) = 0$.
Liouville $\Longrightarrow$

$$\forall \lambda \in X^*,\ z \in \mathbb{C},\ \lambda(f(z)) = 0. \quad \text{H-B} \implies f \equiv 0$$

Funções Holomorfas com valores em Espaços de Banach

Teorema. Seja $f : \{z \in \mathbb{C};\ |z| < a\} \to X$ holomorfa. Suponha que existem $0 < b < a$ e $x_n \in X$; $\forall\, |z| < b$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$ converge absolutamente e é igual a $f(z)$. Então vale o mesmo para todo $|z| < a$.

Funções Holomorfas com valores em Espaços de Banach

Teorema. Seja $f : \{z \in \mathbb{C};\ |z| < a\} \to X$ holomorfa. Suponha que existem $0 < b < a$ e $x_n \in X$; $\forall\, |z| < b$, $\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$ converge absolutamente e é igual a $f(z)$. Então vale o mesmo para todo $|z| < a$.

Dem: $\forall\, \lambda \in X^*$, $|z| < b$, $(\lambda \circ f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(x_n) z^n$.

$\lambda \circ f$ holomorfa em $|z| < a \implies$ vale igualdade se $|z| < a$. Em particular,

Funções Holomorfas com valores em Espaços de Banach

Teorema. Seja $f : \{z \in \mathbb{C};\ |z| < a\} \to X$ holomorfa. Suponha que existem $0 < b < a$ e $x_n \in X$; $\forall\, |z| < b$, $\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$ converge absolutamente e é igual a $f(z)$. Então vale o mesmo para todo $|z| < a$.

Dem: $\forall\, \lambda \in X^*$, $|z| < b$, $(\lambda \circ f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(x_n) z^n$.

$\lambda \circ f$ holomorfa em $|z| < a \Longrightarrow$ vale igualdade se $|z| < a$. Em particular, $\forall \lambda \in X^*$, $|z| < a$, $\sup_n |\lambda(x_n z^n))| < \infty$. H-B & P.L.U $\Longrightarrow$

Funções Holomorfas com valores em Espaços de Banach

Teorema. Seja $f : \{z \in \mathbb{C};\ |z| < a\} \to X$ holomorfa. Suponha que existem $0 < b < a$ e $x_n \in X$; $\forall\, |z| < b$, $\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$ converge absolutamente e é igual a $f(z)$. Então vale o mesmo para todo $|z| < a$.

Dem: $\forall\, \lambda \in X^*$, $|z| < b$, $(\lambda \circ f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(x_n) z^n$.

$\lambda \circ f$ holomorfa em $|z| < a \Longrightarrow$ vale igualdade se $|z| < a$. Em particular, $\forall \lambda \in X^*$, $|z| < a$, $\sup_n |\lambda(x_n z^n))| < \infty$. H-B & P.L.U $\Longrightarrow$ $M_z := \sup_n \|x_n z^n\| < \infty$ se $|z| < a$. $|z| < |z_0| < a \Longrightarrow$ $\|z^n x_n\| \leq M_{z_0} |\frac{z}{z_0}|^n$. Logo $\sum z^n x_n$ conv abs. $\forall \lambda \in X^*$, $|z| < a$, $\lambda(f(z)) = \lambda\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n\right)$. H-B implica o que queríamos.