O Índice de Fredholm dos Operadores de Toeplitz

Panoramas da Matemática

Severino Toscano do Rego Melo
⟨toscano@ime.usp.br⟩
2020-II

Sumário

I| Resultados da Álgebra Linear

Exemplo I.1 (A alternativa de Fredholm)**.** Denote por $\mathscr{C}([a,b])$ o conjunto das funções contínuas definidas no intervalo $[a,b]$ e considere um operador $T\colon \mathscr{C}([a,b]) \longrightarrow \mathscr{C}([a,b])$ dado por

$$Tu(x) = u(x) + \int_a^b \kappa(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y$$

onde $\kappa \in \mathscr{C}([a,b]\times[a,b])$. Em determinado contexto, tem-se interesse em estudar as equações do tipo $Tu = f$, para uma dada $f \in \mathscr{C}([a,b])$. Um resultado obtido por Fredholm é de que existe um $Y \subset \mathscr{C}([a,b])$ tal que $\dim \mathscr{C}([a,b])/Y < \infty$ e para qualquer $f \in Y$, existe uma solução u, tal que $Tu = f$. Na verdade, ele ainda provou que $\dim \mathscr{C}([a,b])/Y = \dim\ker T$.

Ou seja, a menos de um subespaço de dimensão finita, a equação $Tu = f$ admite uma solução. Tal propriedade é conhecida como *solvabilidade normal*.

1 Introdução

Definição I.2. Sejam X e Y espaços vetoriais complexos, uma aplicação $T\colon X \to Y$ linear é um ***operador de Fredholm*** se $\dim\ker T < \infty$ e $\dim Y/T(X) < \infty$. Definimos o índice de T como sendo a diferença das dimensões:

$$\operatorname{ind} T \coloneqq \dim\ker T - \dim Y/T(X).$$

Exemplo I.3. Se X e Y tem dimensões finitas, não tem graça nenhuma porque todo operador linear é de Fredholm. De fato, como X tem dimensão finita e $\ker T$ é um subespaço, $\dim\ker T < \infty$. Para observar que o quociente $Y/T(X)$ tem dimensão finita, segue do ***teorema do núcleo e da imagem*** que:

$$\dim X = \dim\ker T + \dim T(X) = \dim\ker T + \left(\dim Y - \dim Y/T(X)\right)$$

e portanto, $\dim Y/T(X) < \infty$.

Exemplo I.4. Considere $\mathbb{C}[x]$ o conjunto dos polinômios com coeficientes complexos. Dado $p \in \mathbb{C}[x]$, $Tp(x) \coloneqq xp(x)$ e $Sp(x) \coloneqq p'(x)$ são operadores de Fredholm com $\operatorname{ind} T = -1$ e $\operatorname{ind} S = 1$.

Exercício I.5. Suponha que $V = V_1 \oplus V_2$ é uma soma direta de espaços vetoriais e $T_i\colon V_i \longrightarrow V_i$ um operador de Fredholm, com $i \in \{1,2\}$. Defina $T(v_1+v_2) \coloneqq T_1v_1 + T_2v_2$, onde $v_i \in V_i$ para cada i. Prove que T é de Fredholm e $\operatorname{ind} T = \operatorname{ind} T_1 + \operatorname{ind} T_2$.

Exercício I.6. Se X é um espaço vetorial de dimensão infinita, mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe um $T_n\colon X \longrightarrow X$ de Fredholm tal que $\operatorname{ind} T_n = n$

Observação I.7. Todo operador $X \longrightarrow X$ inversível é de Fredholm com índice 0.

2 Sequências Exatas de Espaços Vetoriais

Definição I.8. Considere uma família de espaços vetoriais V_n com transformações lineares da forma $T_i\colon V_i \longrightarrow V_{i+1}$ para todo i. Dizemos que a sequência

$$V_0 \xrightarrow{T_0} V_1 \xrightarrow{T_1} V_2 \xrightarrow{T_2} \cdots \xrightarrow{T_{n-1}} V_n \xrightarrow{T_n} V_{n+1}$$

é uma ***sequência exata*** se $\ker T_i = T_{i-1}(V_{i-1})$ para todo i. Inclusive, $T_i \circ T_{i-1} = 0$ para todo i.

Proposição I.9. Se $U \xrightarrow{T} V \xrightarrow{S} W$ é uma sequência exata com U e W tem uma dimensão finita, então necessariamente V também tem dimensão finita.

Demonstração. Segue do teorema do Núcleo e da Imagem:

$$\begin{aligned} \dim V &= \dim \ker S + \dim {}^{W}\!/_{S(V)} \\ &= \dim T(U) + \dim {}^{W}\!/_{S(V)} \\ &\leqslant \dim U + \dim W \end{aligned}$$

□

Proposição I.10. Se $0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{T_1} V_2 \xrightarrow{T_2} \cdots \xrightarrow{T_{n-1}} V_n \longrightarrow 0$ é uma sequência exata com a dimensão de V_i finita para cada i, então:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \dim V_i = 0$$

Demonstração. Seguimos por indução sobre n. Se $0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow 0$ é exata, então $\dim V_1 = 0$. Agora, se $0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{T_1} V_2 \longrightarrow 0$ é exata, então T_1 é necessariamente um isomorfismo e portanto, $\dim V_1 - \dim V_2 = 0$. Suponha que o resultado seja verdade para algum n e considere a sequência

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{T_1} V_2 \xrightarrow{T_2} \cdots \xrightarrow{T_{n-2}} V_{n-1} \xrightarrow{T_{n-1}} V_n \xrightarrow{T_n} V_{n+1} \longrightarrow 0$$

supondo que ela seja exata. Restrinja tal sequência até a imagem do último espaço não nulo:

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{T_1} V_2 \xrightarrow{T_2} \cdots \xrightarrow{T_{n-2}} V_{n-1} \xrightarrow{T_{n-1}} T_{n-1}(V_{n-1}) \longrightarrow 0$$

Por hipótese de indução, segue que

$$\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} \dim V_i + (-1)^n \big(\dim V_{n-1} - \dim T(V_{n-1})\big) = 0. \tag{1}$$

Pelo teorema do núcleo e da imagem sobre T_n,

$$\begin{aligned} \dim V_n &= \dim \ker T_n + \dim T_n(V_n) \\ &= \dim T_{n-1}(V_{n-1}) + \dim V_{n+1} \end{aligned}$$

Assim, basta substituir em (1) e concluir pelo princípio da indução finita. □

Teorema I.11. Sejam $T\colon U \longrightarrow V$ e $S\colon V \longrightarrow W$ operadores de Fredholm. Então $S \circ T$ é um operador de Fredholm e além disso $\operatorname{ind}(S \circ T) = \operatorname{ind} S + \operatorname{ind} T$.

Demonstração. Vamos montar uma sequência exata especial. O início dela será claramente $\ker T \hookrightarrow \ker(S \circ T)$. Como $S \circ T(U) \subset S(V) \subset W$, então temos outra aplicação notória ${}^{W}\!/_{S \circ T(U)} \longrightarrow {}^{W}\!/_{S(V)}$. Formamos a seguinte sequência:

$$0 \longrightarrow \ker T \hookrightarrow \ker(S \circ T) \xrightarrow{T} \ker S \xrightarrow{\pi} \frac{V}{T(V)} \xrightarrow{\tilde{S}} \frac{W}{S \circ T(U)} \longrightarrow \frac{W}{S(V)} \longrightarrow 0 \tag{2}$$

onde $\pi\colon V \longrightarrow {}^{V}\!/_{T(U)}$ é a projeção natural e $\tilde{S}\colon x + T(U) \longmapsto Sx + S \circ T(U)$ (que de fato está bem definida).

Afirmamos que a sequência (2) é exata. Mostremos algumas inclusões:

- <u>$\mathbf{ker}\,\boldsymbol{\pi} \subset \boldsymbol{T}(\mathbf{ker}(\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{T}))$</u> Seja $x \in \ker \pi$, ou seja: $x \in \ker S \cap T(U)$. Se $y \in U$ é tal que $x = Ty$, segue que $0 = Sx = (S \circ T)y$. Dessa forma, $y \in \ker(S \circ T)$ e portanto $x \in T(\ker(S \circ T))$.
- <u>$\mathbf{ker}\,\tilde{\boldsymbol{S}} \subset \boldsymbol{\pi}(\mathbf{ker}\,\boldsymbol{S})$</u> Seja $x \in V$ tal que $\tilde{S}(x + T(U)) = 0$. Dessa forma, $Sx + S \circ T(U) = 0$, i.e., $Sx \in S \circ T(U)$.

  Se $y \in U$ é tal que $S \circ Ty = Sx$, defina $x' \coloneqq x - Ty$. Logo:

  $$x' + T(U) = x + T(U) = \pi(x')$$

  e portanto $x' \in \ker S$. Finalmente, temos $\pi(x') = x \in \pi(\ker S)$.
- <u>**As demais inclusões ficam como exercício.**</u>

Da proposição I.9 segue que todos os espaços da sequência 2 são de dimensão finita. E pela proposição I.10, segue que:

$$\dim\ker T - \dim\ker(S \circ T) + \dim\ker S - \dim\frac{V}{T(U)} + \dim\frac{W}{S \circ T} - \dim\frac{W}{S(V)} = 0$$

ou seja: $\operatorname{ind} T + \operatorname{ind} S = \operatorname{ind}(S \circ T)$. □

Teorema I.12. Um operador $T\colon X \longrightarrow Y$ é de Fredholm se, e somente se, existe um aplicação $S\colon Y \longrightarrow X$ tal que $S \circ T - Id_X$ e $T \circ S - Id_Y$ tem a dimensão da imagem finita.

Definição I.13. Dado X um espaço vetorial, definimos $\mathcal{E}(X)$ o conjunto dos operadores $X \longrightarrow X$ de posto finito.

Corolário I.14. $\mathcal{E}(X)$ é um ideal da álgebra $\mathcal{L}(X)$.

Se $\pi\colon \mathcal{L}(X) \longrightarrow {}^{\mathcal{L}(X)}\!/\mathcal{E}(X)$ é a projeção usual, podemos reformular este enunciado da seguinte maneira: $T \in \mathcal{L}(X)$ é Fredholm se, e somente se, $\pi(T)$ é inversível.

Teorema I.15. Se $T\colon X \longrightarrow Y$ é Fredholm e $F\colon X \longrightarrow Y$ tem posto finito, então $T + F$ é Fredholm e $\operatorname{ind}(T + F) = \operatorname{ind} T$.

Para uma referência sobre estes teoremas, consulte a seção "*Algebraic theory of Fredholm operators*" do apêndice 2 de Cordes (2006).

Referências

[Cordes 2006] Cordes, Heinz O.: *Elliptic pseudo-differential operators: An abstract theory*. Bd. 756. Springer, 2006. – URL https://b-ok.lat/book/2127623/9aaf38