

Séries - Definições e Teoremas

Convergência.

Dados $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se a sequência das somas parciais

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

possui um limite real, isto é, se existe $S \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$. Se o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ não existe ou se é infinito, dizemos que a série diverge. O limite S , quando existe, é chamado de *soma da série*. Denota-se então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Crítério do termo geral.

Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. A recíproca não é verdadeira. Pode acontecer de ser verdade que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ e, entretanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergir. O exemplo mais conhecido é $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Esta série diverge, apesar de $\frac{1}{n}$ tender a zero quando n tende a infinito.

Séries de termos não-negativos.

Se $a_n \geq 0$ para todo n , a sequência das somas parciais é não-decrescente, isto é, $s_n \leq s_{n+1}$ para todo n . Se existe $M > 0$ tal que $s_n \leq M$ para todo n , então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e a soma da série é menor ou igual a M . Se não existe um tal M , então $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$ e, portanto, a série diverge.

Crítério da comparação.

Se $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo n e se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Obviamente vale também a contrapositiva: se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge. Mas não vale a recíproca. Pode acontecer de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergir e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergir. Por exemplo, $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$ para todo n , $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Crítério da integral.

Sejam n_0 um inteiro positivo e seja $f : [n_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e decrescente. Então:

- (1) Se $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{n_0}^a f(x) dx = M \in \mathbb{R}$, então $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ converge e $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n) < f(n_0) + M$.
- (2) Se $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{n_0}^a f(x) dx = +\infty$, então $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ diverge.

Séries alternadas.

Sejam $a_n > 0$ tais que $a_{n+1} < a_n$ para todo $n > 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Então a série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge. Chamando de S a soma da série, $S = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots$, a desigualdade $\left| S - \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k \right| < a_{n+1}$ é válida para todo n .

Séries absolutamente convergentes.

Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ também converge e temos $\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. Dizemos então que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é *absolutamente convergente*. Diz-se que uma série é *condicionalmente convergente* se ela converge, mas não converge absolutamente. Por exemplo, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ é condicionalmente convergente.

Critério da razão.

Sejam $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

- (1) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L < 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.
- (2) Se $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$ para todo n suficientemente grande (isto ocorre, por exemplo, se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$), então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Raio de convergência de uma série de potências.

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_n \in \mathbb{R}$, uma série de potências. Um dos três casos seguintes ocorre.

- (1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.
- (2) Existe $r > 0$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente se $|x| < r$ e diverge se $|x| > r$.
- (3) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverge se $x \neq 0$.

Quando ocorre o caso (2), o número r é chamado *raio de convergência*. No caso (1), diz-se que o raio de convergência é infinito. No caso (3), o raio de convergência é zero.

Derivação e integração de séries de potências.

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, uma série de potências com raio de convergência r , $0 < r \leq \infty$. A soma da série $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é

uma função derivável no domínio $\{x; |x| < r\}$. Os raios de convergência das séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n$ são

iguais e vale a igualdade $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n$, $|x| < r$.

Se $-r < a < b < r$,

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

A soma de algumas séries de potências.

As seguintes fórmulas são válidas para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$$

As seguintes fórmulas são válidas para todo x tal que $|x| < 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x$$