

## MAT 5818 - ÁLGEBRAS DE OPERADORES

2º SEMESTRE DE 2017

LISTA DE PROBLEMAS

1) Mostre que  $M_n(\mathbb{C})$  munida da norma  $\|((a_{jk}))_{1 \leq j, k \leq n}\| = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{jk}|$  é uma álgebra de Banach.

2) Defina na álgebra  $\mathbb{C}[X]$  dos polinômios complexos na variável  $X$  a norma  $\|\sum_{j=1}^n a_j X^j\| = \sum_{j=1}^n |a_j|$ .

(a) Mostre que  $(\mathbb{C}[X], \|\cdot\|)$  é uma álgebra normada.

(b) Dê uma “descrição concreta” do completamento de  $(\mathbb{C}[X], \|\cdot\|)$  e do produto nele definido.

3) Dada uma álgebra normada  $A$ , defina em  $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$ , a norma  $\|(a, \lambda)\| = \|a\| + |\lambda|$  e o produto  $(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$ .

(a) Mostre que  $\tilde{A}$  é uma álgebra normada com unidade e que sua unidade tem norma igual a 1.

(b) Mostre que, se  $A$  for uma álgebra de Banach,  $\tilde{A}$  também o será.

(c) Mostre que  $\iota : A \rightarrow \tilde{A}$ ,  $\iota(a) = (a, 0)$ , é um homomorfismo isométrico.

(d) Mostre que  $\pi : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\pi(a, \lambda) = \lambda$  é um homomorfismo limitado cujo núcleo coincide com a imagem de  $\iota$ .

**Preliminares de Topologia Geral.** Seja  $X$  um espaço topológico de Hausdorff, localmente compacto e não-compacto. Define-se uma topologia em  $X^+ = X \cup \{\infty\}$ ,  $\infty \notin X$ , tomando como conjuntos abertos: (i) todos os abertos de  $X$  e (ii) os conjuntos  $(X \setminus K) \cup \{\infty\}$ ,  $K \subseteq X$  compacto. Munido desta topologia,  $X^+$  é chamado de *a compactificação de Alexandroff de  $X$* . Demonstra-se então que: (a)  $X^+$  é compacto e Hausdorff, (b)  $X$  é denso em  $X^+$ , (c) se  $f \in C_0(X)$  (isto é, se para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $K \subseteq X$  compacto tal que  $|f(x)| < \epsilon$  para todo  $x \notin K$ ) então a única extensão contínua  $\tilde{f}$  de  $f$  a  $X^+$  satisfaz  $\tilde{f}(\infty) = 0$ , (e) a inclusão de  $X$  em  $X^+$  é contínua, ou seja, a interseção de um aberto de  $X^+$  com  $X$  é sempre um aberto de  $X$ .

4) Seja  $X$  um espaço de Hausdorff localmente compacto, não-vazio e não-compacto, e seja  $X^+$  sua compactificação de Alexandroff. Dada  $f \in C_0(X)$ , denotemos por  $\tilde{f}$  sua extensão contínua a  $X^+$ .

(a) Mostre que a aplicação  $\widetilde{C_0(X)} \ni (f, \lambda) \mapsto \tilde{f} + \lambda \in C(X^+)$  define um isomorfismo de álgebras, que é também um isomorfismo de espaços de Banach. [Para uma álgebra de Banach  $A$ , definimos  $\tilde{A}$  no Problema 3. Para  $\lambda \in \mathbb{C}$ , também denotamos por  $\lambda$  a função constante igual a  $\lambda$ .]

(b) Mostre que a aplicação do item (a) não é uma isometria no caso em que  $X = \mathbb{R}$ .

5) Seja  $(A, \|\cdot\|)$  uma álgebra normada,  $A \neq \{0\}$ , possuindo uma unidade, denotada por  $\mathbf{1}$ . Para cada  $a \in A$ , seja  $L_a : A \rightarrow A$  o operador limitado  $L_a(x) = ax$ ,  $x \in A$ . Mostre que  $\|a\| = \|L_a\|$  define em  $A$  uma norma equivalente a  $\|\cdot\|$  tal que  $\|\mathbf{1}\| = 1$ .

6) Mostre que a fórmula  $(Vf)(x) = \int_0^x f(t) dt$  define um operador limitado  $V$  no espaço de Banach  $C([0, 1])$  e que  $\|V^n\| = 1/n!$ .

7) Seja  $X$  um espaço topológico de Hausdorff compacto. Mostre que, para toda  $f \in C(X)$ ,  $\sigma(f) = f(X)$ .

8) Existe uma única medida regular  $\mu$  em  $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$  tal que  $\int_{S^1} f d\mu = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) d\theta$ , para toda  $f \in C(S^1)$ . Munindo  $S^1$  dessa medida, considere a aplicação  $M : C(S^1) \rightarrow B(L^2(S^1))$ , definida por  $[M_a(f)](z) = a(z)f(z)$ , para todos  $a \in C(S^1)$ ,  $f \in L^2(S^1)$  e  $z \in S^1$ .

(a) Mostre que  $M$  é um homomorfismo isométrico de álgebras de Banach.

(b) Mostre que  $\sigma(M_a)$  é igual à imagem de  $a$ , para todo  $a \in C(S^1)$ .

**Alternativa ao 8)** Seja  $L^2(S^1)$ ,  $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ , o completamento do espaço normado  $(C(S^1), \|\cdot\|_2)$ ,  $\|f\|_2 = \left[ \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta \right]^{1/2}$ . Considere a aplicação  $M : C(S^1) \rightarrow B(L^2(S^1))$ , definida por  $[M_a(f)](z) = a(z)f(z)$ , para todos  $a \in C(S^1)$ ,  $f \in L^2(S^1)$  e  $z \in S^1$ .

(a) Mostre que  $M$  é um homomorfismo isométrico de álgebras de Banach.

(b) Mostre que  $\sigma(M_a)$  é igual à imagem de  $a$ , para todo  $a \in C(S^1)$ .

9) Seja  $\ell^2(\mathbb{Z})$  o espaço das seqüências complexas  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  tais que  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2 < \infty$ . [Munido do produto interno  $\langle (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (y_n)_{n \in \mathbb{Z}} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \bar{y}_n$ ,  $\ell^2(\mathbb{Z})$  é um espaço de Hilbert.] Considere  $T : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$  o operador unitário  $T((x_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = (x_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$ .

(a) Mostre que  $T - \lambda I$  é injetor, para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

(b) Mostre que  $\sigma(T) = S^1$ .

Dica: O espectro é invariante por conjugação unitária.  $F : L^2(S^1) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ ,  $Ff = (\hat{f}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $\hat{f}_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} f(e^{i\theta}) d\theta$ , é um operador unitário, e  $F^{-1}TF$  é um operador de multiplicação  $M_a$  para algum  $a \in C(S^1)$ . Use o Problema 8.

10) Seja  $A$  uma álgebra de Banach complexa unital e seja  $a \in A$  tal que  $a \neq 0$  e  $\sigma(a) = \{0\}$ . Seja  $B$  a subálgebra de  $A$  gerada por  $\mathbf{1}$  e  $a$ . Ou seja,  $B$  é a menor subálgebra fechada de  $A$  que contém  $\mathbf{1}$  e  $a$ . Ou, equivalentemente,  $B$  é o fecho de  $\{p(a); p \text{ polinômio complexo}\}$ . Note que  $B$  é comutativa, mesmo que  $A$  não o seja.

(a) Mostre que  $\widehat{B}$  é um conjunto unitário.

(b) Mostre que a transformada de Gelfand  $B \rightarrow C(\widehat{B})$  não é injetora, mas é sobrejetora.

**Observação:** Seja  $A$  a subálgebra fechada da álgebra de todos os operadores limitados em  $C[0, 1]$  gerada pela identidade e pelo operador de Volterra. Juntos, o Problema 6 e o Problema 10 mostram que a transformada de Gelfand em  $A$  não é injetora.

**11)** Considere o espaço  $\ell^1(\mathbb{N}) = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}}; a_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty\}$ , que se torna um espaço de Banach quando munido da norma  $\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ . Para cada  $z \in D = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$ , defina

$\Phi_z : \ell^1(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{C}$  por  $\Phi_z(\mathbf{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ,  $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$ . Dados  $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $\mathbf{b} = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , defina

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = \mathbf{c} = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

(a) Mostre que  $*$  define um produto em  $\ell^1$ , que assim se torna uma álgebra de Banach comutativa unital, doravante denotada por  $A$ .

(b) Mostre que  $\Phi_z \in \widehat{A}$ , para todo  $z \in D$ , e a aplicação  $\Phi : D \rightarrow \widehat{A}$ ,  $z \mapsto \Phi_z$ , é um homeomorfismo.

(c) Mostre que a transformada de Gelfand  $\kappa : A \rightarrow C(\widehat{A})$  é injetora, mas não é uma isometria.

(d) Mostre que  $B = \{f \in C(D); f = \kappa(\mathbf{a}) \circ \Phi, \mathbf{a} \in A\}$  é uma subálgebra *espectralmente invariante* de  $C(D)$ ; isto é, se  $f \in B$  é inversível em  $C(D)$ , então  $f^{-1} \in B$ .

**12)** Seja  $A = C(S^1)$  munido da norma do supremo e seja  $B = \{f \in A; \text{existe } g \in C(D) \text{ tal que } f \text{ é a restrição de } g \text{ a } S^1 \text{ e } g \text{ restrita ao interior de } D \text{ é holomorfa}\}$ .

(a) Mostre que  $B$  é uma subálgebra fechada de  $A$ . **Dicas:** (1) Princípio do máximo. (2) Limite uniforme de funções holomorfas é holomorfa.

Dada  $f \in B$ , sejam  $\sigma_A(f) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda - f \text{ não possui inversa em } A\}$  e  $\sigma_B(f) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda - f \text{ não possui inversa em } B\}$ . Note que  $\sigma_A(f) \subseteq \sigma_B(f)$  para toda  $f \in A$ .

(b) Considere  $f_0(z) = z$ ,  $z \in S^1$ . Note que  $f_0 \in B$ . Mostre que  $\sigma_A(f_0) \neq \sigma_B(f_0)$ .

(c) Mostre que  $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$ ,  $z \in S^1$ , define uma involução isométrica em  $A$  e que  $B$  é invariante por essa involução:  $f \in B \implies f^* \in B$ .

**12<sup>7</sup>/<sub>9</sub>)** Dado um espaço Hausdorff e localmente compacto  $X$ , denotemos por  $C_b(X)$  o conjunto de todas as funções complexas contínuas e limitadas em  $X$ . Munido da norma do supremo e das operações canônicas (incluindo o conjugado complexo),  $C_b(X)$  torna-se uma  $C^*$ -álgebra comutativa com unidade. Seja  $Z$  uma *compactificação* de  $X$ , isto é,  $Z$  é um espaço compacto e de Hausdorff que possui um subconjunto aberto e denso que é homeomorfo a  $X$ . Fixemos uma aplicação contínua  $\Phi : X \rightarrow Z$  que defina um homeomorfismo sobre um aberto denso de  $Z$ . Mostre que  $A = \{f \in C_b(X); f \circ \Phi^{-1} \text{ possui extensão contínua a } Z\}$  é uma  $C^*$ -subálgebra de  $C_b(X)$  que contém  $C_0(X)$  e a função constante igual a 1.

**12 $\frac{8}{9}$** ) (Preliminares de topologia geral para o 13) Seja  $X$  um espaço topológico de Hausdorff e seja  $Y \subseteq X$  um subespaço denso. Dado  $S \subseteq Y$ , denotemos por  $\text{cl}_Y(S)$  e  $\text{cl}_X(S)$ , respectivamente, o fecho de  $S$  em  $Y$  e o fecho de  $S$  em  $X$ . Analogamente,  $\text{int}_Y(S)$  e  $\text{int}_X(S)$  denotarão o interior de  $S$  em  $Y$  e o interior de  $S$  em  $X$ .

- (a) Mostre que, se  $F \subseteq Y$  é fechado em  $X$ , então  $\text{int}_Y F = \text{int}_X F$ .
- (b) Mostre que, se  $V \subseteq Y$  é aberto em  $Y$  e  $\text{cl}_Y V$  é compacto em  $Y$ , então  $\text{cl}_Y V = \text{cl}_X V$ .
- (c) Mostre que, se  $V \subseteq Y$  é aberto em  $Y$  e  $\text{cl}_Y V$  é compacto, então  $\text{int}_X(\text{cl}_X V) = V$ .
- (d) Mostre que, se  $Y$  é localmente compacto, então  $Y$  é aberto em  $X$ .

**13)** Dado um espaço Hausdorff e localmente compacto  $X$ , seja  $C_b(X)$  a  $C^*$ álgebra definida no Problema 12 $\frac{7}{9}$ . Seja  $A \subseteq C_b(X)$  uma  $C^*$ subálgebra contendo  $C_0(X)$  e a função constante igual a 1. Considere a aplicação  $\Phi : X \rightarrow \widehat{A}$ ,  $[\Phi(x)](f) = f(x)$ ,  $x \in X$ ,  $f \in A$ .

- (a) Mostre que  $\Phi$  é uma aplicação contínua e injetora.
- (b) Mostre que  $\Phi$  é um homeomorfismo sobre sua imagem.
- (c) Mostre que a imagem de  $\Phi$  é um subconjunto denso de  $\widehat{A}$ . **Sugestão:** Suponha, por absurdo, que exista  $\varphi \in \widehat{A}$  que não pertença ao fecho da imagem de  $\Phi$ . Use o Lema de Urysohn, ou algum resultado equivalente, para mostrar que isso implicaria que a transformada de Gelfand de  $A$  não é bijetora.
- (d) Mostre que a imagem de  $\Phi$  é um aberto de  $\widehat{A}$ . **Sugestão:** use o 12 $\frac{8}{9}$ .

**Observação:** Os enunciados do Problema 12 $\frac{7}{9}$  e do Problema 13 podem ser resumidos na afirmação de que  $A \mapsto \widehat{A}$  é uma bijeção, definida nas  $C^*$ subálgebras de  $C_b(X)$  que contêm  $C_0(X)$  e a identidade, tomando valores nas compactificações do espaço Hausdorff e localmente compacto  $X$ . Para  $X$  não compacto, os casos extremos  $A = C_0(X) \oplus \mathbb{C}$  e  $A = C_b(X)$ , definem as compactificações de Alexandroff e de Stone-Čech. Duas outras compactificações definidas dessa maneira, no caso em que  $X = \mathbb{R}$ , são descritas nos Problemas 14 e 16.

**14)** Seja  $A$  a álgebra de todas as funções contínuas  $f$  de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{C}$  que possuem limites em  $+\infty$  e em  $-\infty$ , os quais denotaremos por  $f(+\infty)$  e  $f(-\infty)$ , respectivamente. Seja  $s \in A$  a função definida por  $s(x) = x/\sqrt{1+x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Para cada  $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , considere  $\Phi_x \in \widehat{A}$ ,  $\Phi_x(f) = f(x)$ .

- (a) Mostre que  $f \mapsto f \circ s$  define um isomorfismo isométrico entre as álgebras  $C[-1, +1]$  e  $A$ .
- (b) Mostre que  $A$  é a menor  $C^*$ subálgebra de  $C_b(\mathbb{R})$  que contém 1 e  $s$ .
- (c) Mostre que  $\Phi : \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \rightarrow \widehat{A}$ ,  $x \mapsto \Phi_x$ , é uma bijeção.
- (d) Defina uma topologia em  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  decretando que  $\Phi$  é um homeomorfismo e denote esse espaço topológico por  $[-\infty, +\infty]$ . Mostre que  $s : \mathbb{R} \rightarrow (-1, +1)$  se estende a um homeomorfismo de  $[-\infty, +\infty]$  em  $[-1, +1]$ .

**15)** Seja  $C$  uma  $C^*$ álgebra comutativa com unidade gerada pelas  $C^*$ subálgebras  $A$  e  $B$ , ambas contendo a unidade (*gerada* significa que a menor  $C^*$ subálgebra de  $C$  que contém  $A$  e  $B$  é a própria

$C$ ). Considere a aplicação  $\Xi : \widehat{C} \rightarrow \widehat{A} \times \widehat{B}$ ,  $\Xi(\varphi) = (\varphi|_A, \varphi|_B)$ . Mostre que  $\Xi$  é um homeomorfismo sobre sua imagem.

**16)** Considere a  $C^*$ -subálgebra  $A$  de  $C_b(\mathbb{R})$  e homeomorfismo  $\Phi : [-\infty, +\infty] \rightarrow \widehat{A}$  definidos no Problema 14. Seja  $B$  a álgebra de todas as funções contínuas periódicas de período  $2\pi$  de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{C}$ , e seja  $C$  a  $C^*$ -subálgebra de  $C_b(\mathbb{R})$  gerada por  $A$  e  $B$  (ou seja,  $C$  é a menor  $C^*$ subálgebra de  $C_b(\mathbb{R})$  que contém  $A$  e  $B$ ). Seja  $\Xi$  a aplicação definida no Problema 15.

(a) Mostre que  $\Psi : S^1 \rightarrow \widehat{B}$ ,  $[\Psi(e^{i\theta})](f) = f(\theta)$ , é um homeomorfismo.

Defina  $h : \widehat{A} \times \widehat{B} \rightarrow [-\infty, +\infty] \times S^1$  por  $h(\varphi, \psi) = (\Phi^{-1}(\varphi), \Psi^{-1}(\psi))$ , e considere  $g = h \circ \Xi$ .

(b) Mostre que, se  $(x, e^{i\theta}) \in \text{Im } g$ , com  $x \in \mathbb{R}$ , então  $e^{i\theta} = e^{ix}$ .

(c) Mostre que  $(-\infty, z)$  e  $(+\infty, z)$  pertencem a  $\text{Im } g$ , para todo  $z \in S^1$ .

Sejam  $\chi_1$  e  $\chi_2$  pertencentes a  $A$  tais que  $\chi_1(+\infty) = \chi_2(-\infty) = 1$  e  $\chi_1(-\infty) = \chi_2(+\infty) = 0$ .

Seja  $C_0$  a álgebra finitamente gerada por  $A$  e  $B$ , isto é,  $C_0$  é a subálgebra densa de  $C$  que consiste das combinações lineares de produtos  $fg$ ,  $f \in A$ ,  $g \in B$ .

(d) Mostre que toda  $f \in A$  pode ser escrita de maneira única como  $f = f(+\infty)\chi_1 + f(-\infty)\chi_2 + f_0$ ,  $f_0 \in C_0(\mathbb{R})$ .

(e) Mostre que toda  $f \in C_0$  pode ser escrita de maneira única como  $f = f_1\chi_1 + f_2\chi_2 + f_0$ ,  $f_0 \in C_0(\mathbb{R})$ ,  $f_1, f_2 \in B$ , e que  $f_1$  e  $f_2$  independem da escolha de  $\chi_1$  e  $\chi_2$ .

(f) Usando a notação do item e, mostre que  $\|f_i\| \leq \|f\|$ ,  $i = 1, 2$ .

**Dica:** Já que as  $f_i$ s não dependem da escolha das  $\chi_i$ s, não é perda de generalidade supor que  $\chi_1(x) = 1$  para todo  $x > 1$ ,  $\chi_1(x) = 0$  para todo  $x < -1$  e  $\chi_1 + \chi_2 \equiv 1$ . Prove então que, para todo  $t > 1$  (que pode tender a infinito),  $\|f_1\| \leq \sup_{x \geq 1} |f_1(x) + f_0(x)| + \sup_{t \leq x \leq t+2\pi} |f_0(x)|$ .

(g) Mostre que  $C_0$  é completa e que, portanto,  $C = C_0$ .

(h) Seja  $f \in C_b(\mathbb{R})$  uma função que nunca se anula, e sejam  $f_1, f_2 \in B$  tais que  $f - f_1\chi_1 - f_2\chi_2 \in C_0(\mathbb{R})$ . Mostre que  $f_1$  e  $f_2$  também nunca se anulam e que  $\frac{1}{f} - \frac{\chi_1}{f_1} - \frac{\chi_2}{f_2} \in C_0(\mathbb{R})$ .

**Sugestão:** Use o Teorema de Gelfand para  $C$ .

**Observação:** Pode-se dizer informalmente que  $\widehat{C} \cong \text{Im } g = \{(x, e^{i\theta}) \in [-\infty, +\infty] \times S^1; \theta = x \text{ se } x \in \mathbb{R}\}$  “é uma compactificação de  $\mathbb{R}$  que se obtém adicionando uma cópia do círculo em cada extremidade da reta”. Mais precisamente, a aplicação  $\iota : \mathbb{R} \rightarrow [-\infty, +\infty] \times S^1$ ,  $\iota(x) = (x, e^{ix})$ , é um homeomorfismo de  $\mathbb{R}$  no aberto  $\text{Im } \iota \subset [-\infty, +\infty] \times S^1$ , e  $\overline{\text{Im } \iota} = \text{Im } g$  é homeomorfo a  $\widehat{C}$ .

**17)** Seja  $A$  uma  $C^*$ álgebra (com norma  $\|\cdot\|_A$  e involução  $*$ ), e seja  $\widetilde{A} = \{(a, \lambda); a \in A, \lambda \in \mathbb{C}\}$  a álgebra com produto definido por  $(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$ . Para cada  $(a, \lambda) \in \widetilde{A}$ , defina  $(a, \lambda)^* = (a^*, \bar{\lambda})$ ,  $\|(a, \lambda)\| = \sup\{\|ax + \lambda x\|_A; x \in A, \|x\|_A \leq 1\}$  e  $\|(a, \lambda)\|_{\sim} = \max\{\|(a, \lambda)\|, |\lambda|\}$ .

(a) Mostre que  $(\widetilde{A}, \|\cdot\|_{\sim}, *)$  é uma álgebra normada com involução (ou seja,  $\|\cdot\|_{\sim}$  é uma norma

submultiplicativa e  $\star : \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  é uma involução isométrica), com unidade  $(0, 1)$ .

(b) Mostre que  $\iota : A \rightarrow \tilde{A}$ ,  $\iota(a) = (a, 0)$ , é um  $\star$ -homomorfismo isométrico.

(c) Mostre que  $\tilde{A}$  é completa com a norma  $\|\cdot\|_{\sim}$ .

(d) Mostre que  $(\tilde{A}, \|\cdot\|_{\sim}, \star)$  é uma  $C^*$ álgebra.

**18)** Seja  $A$  uma  $C^*$ álgebra sem unidade. Usando as definições do problema anterior, mostre que  $\|x\|_{\sim} = \|x\|$ , para todo  $x \in \tilde{A}$ .

**Dicas:** (1) Usando que existe no máximo uma norma que torna uma álgebra em uma  $C^*$ álgebra, basta provar que  $(\tilde{A}, \|\cdot\|)$  é uma  $C^*$ álgebra. (2) Só é preciso usar que  $A$  não tem unidade para provar que  $\|x\| = 0$  só se  $x = 0$ . (3) A parte mais difícil do problema é provar que  $(\tilde{A}, \|\cdot\|)$  é completa. Minha sugestão para fazer isso é: dada uma sequência de Cauchy  $(a_n, \lambda_n)$ , mostre que  $|\lambda_n|$  não tende a infinito, pois, se tendesse,  $A \oplus \{0\}$  não seria fechada em  $\tilde{A}$ . (4) Uma sugestão alternativa para resolver este problema é estudar como o livro de Murphy prova que  $\tilde{A}$  é uma  $C^*$ álgebra, no caso em que  $A$  não tem unidade. Ele primeiro prova que a *multiplier algebra* é uma  $C^*$ álgebra e depois mergulha  $\tilde{A}$  dentro dessa álgebra maior. Simplesmente repetir tudo o que Murphy faz, mesmo que com outras palavras, não seria uma solução satisfatória deste problema, na minha opinião. Mas, entendendo direitinho o que é feito lá, deve dar para extrair um argumento mais simples que resolva o problema.

**19)** Seja  $A$  uma  $C^*$ álgebra unital, com norma  $\|\cdot\|_A$ , involução  $\star$  e unidade  $1_A$ . Considere  $A \oplus \mathbb{C} = \{(a, \lambda); a \in A, \lambda \in \mathbb{C}\}$  munida do produto  $(a, \lambda)(b, \mu) = (ab, \lambda\mu)$ , da involução  $(a, \lambda)^\star = (a^\star, \bar{\lambda})$  e da norma  $\|(a, \lambda)\|_1 = \max\{\|a\|_A, |\lambda|\}$ .

(a) Mostre que  $(A \oplus \mathbb{C}, \|\cdot\|_1, \star)$  é uma  $C^*$ álgebra com unidade  $1_{\oplus} = (1_A, 1)$ .

(b) Usando as definições do Problema 17, mostre que a aplicação  $\Phi : \tilde{A} \rightarrow A \oplus \mathbb{C}$ ,  $\Phi(a, \lambda) = (a + \lambda 1_A, \lambda)$ , é um  $\star$ -isomorfismo isométrico.

**20)** Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $\Omega$  um espaço de Hausdorff localmente compacto. Uma função  $f : \Omega \rightarrow X$  se anula no infinito se, para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $K \subset \Omega$  tal que  $\|f(x)\| < \epsilon$  para todo  $x \notin K$ . Denotamos por  $C_0(\Omega, X)$  o conjunto de todas as funções contínuas de  $\Omega$  em  $X$  que se anulam no infinito e por  $C_c(\Omega, X)$  o das funções contínuas de suporte compacto. Dados  $f \in C_0(\Omega)$  e  $x \in X$ , denotamos por  $f \otimes x$  a função  $(f \otimes x)(\omega) = f(\omega)x$ ,  $\omega \in \Omega$ .

(a) Mostre que  $C_0(\Omega, X)$  é um espaço de Banach com a norma  $\|f\| = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$ .

(b) Mostre que  $C_c(\Omega, X)$  é denso em  $C_0(\Omega, X)$ .

(c) Mostre que, se  $A$  é uma  $C^*$ álgebra, então se pode canonicamente definir um produto e uma involução em  $C_0(\Omega, A)$ , munida dos quais ela se torna uma  $C^*$ álgebra.

(d) Dados  $f \in C_c(\Omega, X)$  e  $\epsilon > 0$ , mostre que existem abertos  $U_1, \dots, U_n$  tais que  $\bigcup_{j=1}^n U_j$  contém o suporte de  $f$  e, para todo  $j$  e para todos  $x, y \in U_j$ ,  $\|f(x) - f(y)\| < \epsilon$ .

(e) Dados  $f \in C_c(\Omega, X)$  e  $\epsilon > 0$ , e sendo  $U_1, \dots, U_n$  os abertos obtidos no item *d*, mostre que existem

$f_j \in C_c(U_j)$  e  $x_j \in X$ , tais que  $\left\| f - \sum_{j=1}^n f_j \otimes x_j \right\| < \epsilon$ .

**Sugestão:** Tome uma *partição da unidade* do suporte de  $f$  subordinada aos abertos  $U_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ ; isto é, tome  $\varphi_j \in C_c(U_j)$ ,  $0 \leq \varphi_j \leq 1$ , tais que  $\sum_{j=1}^n \varphi_j(\omega) = 1$ , para todo  $\omega$  no suporte de  $f$ . Que tais  $\varphi_j$  existem decorre, por exemplo, dos resultados iniciais do Capítulo 2 de *Rudin, Real & Complex Analysis*.

(f) Conclua que  $\left\{ \sum_{j=1}^n f_j \otimes x_j; n \in \mathbb{N}, f_j \in C_0(\Omega), x_j \in X \right\}$  é denso em  $C_0(\Omega, X)$ .