

15. Usando apenas o primeiro termo da série para $\arctg x$, temos a fórmula de aproximação

$$\arctg x \cong x \quad \text{para } |x| \text{ pequeno.}$$

Como podemos explicar e compreender essa fórmula sem fazer qualquer uso de séries infinitas?

Seção 13.4

16. Calcule os primeiros dois ou três termos não-nulos da expansão em série de potências de cada uma das seguintes funções, primeiro por substituição direta em uma das fórmulas (2) a (7) da Seção 13.4, depois usando fórmulas (11) e (12) daquela seção:

$$(a) \frac{1}{1+x^3}; \quad (b) \operatorname{sen} x^2.$$

17. Use a fórmula (5) da Seção 13.4 para calcular as somas das seguintes séries:

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!}; \quad (b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n!};$$

$$(c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-1}{n!}.$$

CAPÍTULO

14

A TEORIA DAS SÉRIES INFINITAS

14.1 INTRODUÇÃO

No Capítulo 13 apresentamos um rápido esboço das séries infinitas em que somente alguns dos pontos de destaque foram mencionados. As provas de convergência que demos utilizavam métodos especiais de valor limitado que só se aplicam às séries particulares em questão. Descrevemos brevemente diversos métodos muito poderosos para se trabalhar com séries, mas essas observações foram bem informais e nada de substancial foi provado. Nosso objetivo principal naquele capítulo introdutório era ajudar os estudantes a entrarem no assunto e compreenderem suas principais linhas gerais tão rapidamente quanto possível, como viajantes inteligentes que fazem uma excursão preliminar, com guia, numa cidade grande, com o propósito de orientação geral antes de explorar minuciosamente suas ruas, praças, mercados e museus. Estamos agora prontos para essa segunda fase de nosso trabalho.

Os estudantes de Cálculo nem sempre compreendem que as séries infinitas são primordialmente instrumentos para o estudo de funções. Por exemplo, na Seção 13.4 estabelecemos as expansões em série de potências do seno e do co-seno:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \quad \text{e} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots,$$

mas, como essas funções eram presumivelmente bem conhecidas de antemão, pode não ter ficado claro o propósito de expressá-las dessa forma. Expansões de funções conhecidas têm sua própria importância, especialmente no cálculo de valores numéricos para essas funções. Entretanto, em trabalhos mais avançados é freqüente aparecer uma série de potências desconhecida, talvez como solução de uma equação diferencial. Em tal caso, a série é usada para *definir* a função desconhecida de outro modo, isto é, como uma soma, e assim a própria série fica sendo o único instrumento que temos para investigar as propriedades dessa função. A situação pode ser melhor compreendida

supondo-se que os fatos básicos acerca de $\sin x$ e $\cos x$ — sua continuidade, as identidades que satisfazem, suas propriedades a respeito de derivação e integração etc. — poderiam ser descobertos somente pelo exame das séries dadas acima. Para essas funções familiares, um tal processo tortuoso é naturalmente desnecessário, mas para muitas funções importantes da Matemática Avançada não há outra alternativa mais prática. Assim, abordaremos séries numéricas na primeira parte deste capítulo como um prelúdio para estudar séries de funções — especialmente séries de potências — nas seções posteriores; sendo que nosso objetivo final em estudar séries de funções é aprender tudo que pudermos acerca da soma de tais séries.

Todavia, nosso interesse em séries não está restrito a seu valor para essas aplicações, e no decorrer de nosso trabalho tocaremos em muitos tópicos fascinantes da Matemática Pura que vale a pena estudar por seu próprio interesse. Assim, veremos que o estudo de séries está ligado a algumas das partes mais interessantes da Teoria dos Números, tais como: os números primos, os números irracionais e transcendentos, a natureza das constantes e e π e assuntos semelhantes. Desejamos manter a estrutura deste capítulo tão simples quanto possível para que os leitores se sintam interessados. Por essa razão colocamos a maioria deste material opcional no Apêndice A, que poderá ser examinado ou não de acordo com a preferência de cada estudante.

Nossa intenção é começar tudo de novo e não omitir nada de essencial. Isto nos leva a repetir algumas idéias básicas já abordadas no Capítulo 13. Entretanto, seremos tão breves quanto possível, e os estudantes podem pensar que um sumário conciso dessas idéias seja uma maneira útil de começar a construir um sólido alicerce para uma compreensão ampla e profunda do assunto.

14.2 SEQÜÊNCIAS CONVERGENTES

Todo estudo razoavelmente satisfatório de séries deve estar baseado numa definição cuidadosa de convergência de seqüências. No entanto, o comportamento de muitas seqüências é fácil de ser entendido sem explanações elaboradas, e uma teoria maçante de seqüências convergentes seria um obstáculo indesejável, bloqueando nosso caminho para os principais conceitos deste capítulo. Discutiremos, portanto, as seqüências bem resumidamente e tentaremos nos manter num percurso intermediário entre informalidade excessiva e detalhes tediosos.

Se a cada inteiro positivo n corresponde um determinado valor x_n , então dizemos que os x_n 's formam uma *seqüência*. Consideramos os x_n arranjados pela ordem de seus índices,

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots,$$

e, muitas vezes, abreviamos essa disposição por $\{x_n\}$. É claro que uma seqüência nada mais é que uma função definida para todos os inteiros positivos n , com a ênfase colocada na notação indexada x_n em vez de na notação funcional $x(n)$. Os números que constituem uma seqüência chamam-se *termos*. Assim, x_1 e x_2 são o primeiro e o segundo termos da seqüência dada, e x_n é o n -ésimo termo.

Exemplo 1 Em cada um dos seguintes itens, definimos uma seqüência $\{x_n\}$, dando uma fórmula para seu n -ésimo termo:

- (a) $x_n = 1$, isto é, 1, 1, 1, ...;
- (b) $x_n = [1 - (-1)^n]/2$, isto é, 1, 0, 1, 0, ...;
- (c) $x_n = 1/n$, isto é, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ...;
- (d) $x_n = (n-1)/n$, isto é, 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, ...;
- (e) $x_n = (-1)^{n+1}/n$, isto é, 1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, ...;
- (f) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$;
- (g) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$;
- (h) $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Uma seqüência como (a), em que todos os termos são iguais, chama-se *seqüência constante*. Nem toda seqüência tem uma fórmula simples, ou mesmo alguma fórmula. Isto é mostrado pela seqüência $\{d_n\}$, onde d_n é o n -ésimo algarismo após a vírgula na expansão decimal de π .

Às vezes convém relaxar a definição e permitir que uma seqüência comece com o zero-ésimo termo, x_0 , ou mesmo com o segundo ou terceiro termo, x_2 ou x_3 , em vez de exigir que comece com o primeiro termo, x_1 . Uma razão para isto é que desejamos incluir seqüências como as definidas por $x_n = 1/\ln n$, onde x_1 não tem sentido. Em todo caso, continuamos a chamar o termo com o índice n de n -ésimo termo.

Uma seqüência $\{x_n\}$ diz-se *limitada* se existem dois números A e B tais que $A \leq x_n \leq B$ para todo n e, nesse caso, A chama-se *minorante* e B , *majorante* da seqüência. Uma seqüência que não é limitada diz-se *ilimitada*. No Exemplo 1 é fácil ver que as seqüências (a) a (f) são limitadas, mas é menos óbvio que (g) não seja (sugestão: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} > \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$, e assim por diante). A seqüência (h) é também limitada, mas isto não é evidente por simples inspeção e será estabelecido mais tarde.

Nosso principal interesse está no conceito de limite de seqüência. *Grosso modo*, isto refere-se ao fato de que certas seqüências $\{x_n\}$ têm a propriedade de ter os números x_n cada vez mais próximos de algum número real L quando n cresce. Um outro modo de afirmar isto é dizer que $|x_n - L|$ fica cada vez menor quando n cresce. Como ilustração, considere a seqüência $\{x_n\}$, cujo n -ésimo termo é $x_n = (n-1)/n$:

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$$

Esses números parecem “tender” ao número 1 quando nos movemos cada vez mais para a direita. De fato, para cada n temos

$$|x_n - 1| = \left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| = \left| -\frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n};$$

e o número $1/n$, e portanto $|x_n - 1|$, pode ser tornado tão pequeno quanto quisermos, tomando n suficientemente grande. Expressamos esse comportamento dizendo que a sequência tem o limite 1, e escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

É muito útil visualizar esse comportamento da maneira sugerida pela Figura 14.1

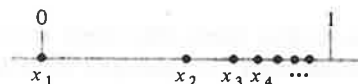


Figura 14.1

A definição geral é a seguinte: dizemos que uma sequência $\{x_n\}$ tem um número L como limite se para cada número positivo ϵ existe um inteiro positivo n_0 com a propriedade

$$|x_n - L| < \epsilon \text{ para todo } n \geq n_0. \quad (1)$$

Quando L está relacionado a $\{x_n\}$ dessa maneira, escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L,$$

ou, mais resumidamente,

$$\lim x_n = L,$$

e dizemos que x_n converge a L . Isto é também expresso dizendo-se que x_n tende a L quando n tende a infinito, o que podemos escrever como

$$x_n \rightarrow L \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty.$$

Essa notação é, muitas vezes, abreviada mais ainda para

$$x_n \rightarrow L$$

Essa definição exige que cada ϵ , não importa quão pequeno seja, tenha pelo menos um correspondente n_0 que “funcione” no sentido expresso por (1). Em geral esperamos que para ϵ 's menores, sejam necessários n_0 's maiores; isto é, quando a requerida medida de proximidade é tornada menor, devemos ir mais para frente na sequência para satisfazê-la.

Dizemos que uma sequência converge ou é convergente se tem um limite. Uma sequência convergente não pode ter dois limites diferentes, pois não é possível x_n estar próximo tanto quanto queiramos de dois números diferentes para todos os n 's suficientemente grandes.

Uma sequência convergente é limitada, mas nem todas as sequências limitadas são convergentes. A sequência 1, 0, 1, 0, ... do Exemplo 1 (b) é uma sequência limitada que não é convergente.

Nem sempre é fácil decidir se uma dada sequência é convergente e, se for, achar seu limite. Os fatos seguintes são, muitas vezes, úteis nos problemas dessa natureza: se $x_n \rightarrow L$ e $y_n \rightarrow M$, então

$$\lim (x_n + y_n) = L + M, \quad \lim (x_n - y_n) = L - M, \quad \lim x_n y_n = LM,$$

e, com a hipótese adicional de que $M \neq 0$,

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{L}{M}.$$

Esses fatos podem ser provados rigorosamente usando a definição e as propriedades de desigualdades. Omitimos esses detalhes. Usando essas regras podemos facilmente realizar façanhas tais como calcular

$$\lim \frac{2n^3 + n - 5}{7n^3 - 2n^2 + 4} = \lim \frac{2 + 1/n^2 - 5/n^3}{7 - 2/n + 4/n^3} = \frac{2 + 0 - 0}{7 - 0 + 0} = \frac{2}{7},$$

onde a primeira etapa essencial é dividir o numerador e o denominador pela potência mais alta de n que ocorre no denominador.

A idéia intuitiva usual de convergência — $x_n \rightarrow L$ significando que x_n pode ser tomado “tão próximo quanto se queira” de L tomando n “suficientemente grande” — é natural e necessária e é a maneira pela qual a maioria dos matemáticos realmente pensa acerca desse conceito. Conseqüentemente, na maior parte de nosso trabalho com sequências confiaremos no senso comum para decidir quais detalhes são necessários para tornar um argumento convincente.

Exemplo 2 Se $|x| < 1$, então $\lim x^n = 0$. A maioria das pessoas aceita isto argumentando que “um número com valor absoluto menor que 1 que é elevado a uma potência cada vez maior torna-se cada vez menor”. Mas se se deseja um argumento mais detalhado, este pode ser dado

como se segue. A asserção é clara se $x = 0$, logo suponhamos que $0 < |x| < 1$. Então $|x| = 1/(1+a)$ para algum $a > 0$; assim, pelo Teorema do Binômio de Newton, temos

$$\frac{1}{|x^n|} = \frac{1}{|x|^n} = (1+a)^n = 1 + na + \text{termos positivos} > na.$$

Vemos disto que $|x^n| < 1/na$; e como $1/na \rightarrow 0$, temos, evidentemente, $x^n \rightarrow 0$.

Exemplo 3 Para todo x , $\lim x^n/n! = 0$. Isto não é de modo algum óbvio, mas o breve argumento dado na Seção 13.4 é tanto convincente quanto satisfatório. Os estudantes devem reexaminar esse argumento.

Exemplo 4 O fato de que $\lim (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$ provavelmente parecerá razoável após pensar um pouco (ele diz apenas que $\sqrt{n}$ é aproximadamente igual a $\sqrt{n+1}$ para n grande), mas um argumento definitivo pode não ser tão fácil de encontrar. Tal argumento pode ser construído escrevendo a quantidade $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ como uma fração com denominador 1 e racionalizando o numerador, como se segue:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{1} &= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{1} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ao trabalhar com seqüências ligadas às séries infinitas, precisaremos, muitas vezes, ser capazes de reconhecer quando uma seqüência é convergente, embora não saibamos nada acerca do valor numérico do limite. Em tal caso, não podemos fazer qualquer uso direto da definição de limite. Abordamos agora um método muito importante para manobrar essas situações.

Uma seqüência $\{x_n\}$ diz-se *crescente* se

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \dots,$$

isto é, se cada termo é maior ou igual ao precedente*.

* Alguns escritores exigem que os termos de uma seqüência crescente satisfaçam a desigualdade estrita $x_n < x_{n+1}$, para todo n . Entretanto, nossa definição permite que uma seqüência crescente seja estacionária, no sentido de que termos adjacentes podem ser iguais.

Entre as seqüências listadas no Exemplo 1, (a), (d), (f) e (g) são evidentemente crescentes; (h) é também crescente, mas isto não é óbvio por inspeção.

Seqüências crescentes são mais agradáveis de trabalhar em virtude de seu comportamento de convergência ser particularmente fácil de determinar. Temos o seguinte critério simples: *uma seqüência crescente converge se e somente se é limitada*. Esse critério, além de simples, é também extremamente importante, porque a teoria de séries convergentes no restante deste capítulo origina-se diretamente dele.

Esse critério é bem fácil de estabelecer. Imagine que os termos da seqüência sejam plotados na reta real, como se mostra na Fig. 14.2, com cada termo à direita de (ou sobre) seu predecessor. Se a seqüência é ilimitada, então seus termos simplesmente marcham para fora da página, e a seqüência evidentemente não pode convergir.



Figura 14.2

Isto prova a metade do critério, a parte "somente se". Para estabelecer a outra metade, assumimos que a seqüência é limitada com um majorante B , como se mostra na Fig. 14.2, e devemos produzir um limite da seqüência. De modo bastante resumido, vemos geometricamente que os x_n 's que se movem uniformemente para a direita, não podendo ultrapassar a barreira em B , devem acumular em algum ponto $L \leq B$, logo L é o limite da seqüência e a seqüência converge a L^* .

Esse critério de convergência tem muitas aplicações importantes, uma das quais é dada no exemplo seguinte. Para isto precisamos da fórmula da soma de uma progressão geométrica,

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}, \quad x \neq 1. \quad (2)$$

* Um argumento mais detalhado pode ser dado como se segue. Todo número maior que B é também um majorante da seqüência, e talvez haja números menores que B também majorantes. Seja o número L o menor majorante da seqüência. Mostramos agora que L é o limite do qual a seqüência se aproxima, de modo que $x_n \rightarrow L$. Seja $\epsilon > 0$ dado. Como L é um majorante, temos $x_n \leq L$ para todo n . Entretanto, deve haver um n_0 tal que $L - \epsilon < x_{n_0}$; caso contrário, se para todo n $x_n \leq L - \epsilon$, então $L - \epsilon$ seria um majorante e L não seria o menor majorante. Como a seqüência é crescente, temos $L - \epsilon < x_n \leq L$ para todo $n \geq n_0$, logo $|x_n - L| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$, e concluímos que $x_n \rightarrow L$. Mesmo essa discussão pode ser considerada um argumento de plausibilidade e não uma prova, pois assumimos que o menor majorante L existe, e isto depende de uma propriedade crucial do sistema de números reais que está longe de ser óbvia. Para mais detalhes sobre menores majorantes (supremos), veja o Apêndice B.1 (Volume I).

Essa fórmula familiar já foi apresentada no Capítulo 13 e pode ser facilmente provada ainda de uma outra maneira, dividindo $x^n - 1$ por $x - 1$.

Exemplo 5 Nosso propósito aqui é provar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) = e. \quad (3)$$

Para isto discutimos conjuntamente as duas seqüências intimamente relacionadas $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ definidas por

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad \text{e} \quad y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Demonstraremos que ambas as seqüências são crescentes e limitadas e, portanto, convergentes e além disso que elas convergem ao mesmo limite. Nosso primeiro passo é mostrar que $\{x_n\}$ é crescente e limitada. Pelo Teorema do Binômio de Newton, x_n pode ser expressa como a seguinte soma de $n + 1$ termos:

$$\begin{aligned} x_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots \\ &\quad + \frac{n(n-1) \cdots [n-(n-1)]}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n} \right). \quad (4) \end{aligned}$$

Quando passamos de x_n a x_{n+1} , substituindo n por $n + 1$, é fácil ver dessa soma que cada termo após $1 + 1$ cresce e também que um outro termo é somado, logo $x_n < x_{n+1}$. Além disso, uma comparação termo a termo de (4) com os y_n 's mostra que $x_n \leq y_n$. Aplicando a fórmula (2), temos que os y_n 's têm como um majorante o número 3, isto é,

$$\begin{aligned} y_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdots n} \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + 2 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) < 3, \end{aligned}$$

e portanto os x_n 's também têm 3 como majorante. Visto que $\{x_n\}$ é uma seqüência crescente com 3 como majorante, sabemos que converge. Seu limite é o número e , que foi introduzido de um modo um pouco diferente na Seção 8.3,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n = \frac{1}{e}, \quad (5)$$

Como $x_n \leq y_n < y_{n+1} < 3$, vemos que $\{y_n\}$ é também uma seqüência crescente limitada que tende a um limite $y \geq e$; isto conduzirá a nossa principal conclusão: que $y = e$. Se $m < n$ e consideramos somente os primeiros $m + 1$ termos de (4), então teremos

$$\begin{aligned} 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) + \cdots \\ + \frac{1}{m!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \cdots \left(1 - \frac{m-1}{n} \right) < x_n < e. \end{aligned}$$

Se m é mantido fixo e n cresce, então obtemos

$$y_m = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!} \leq e,$$

logo $y \leq e$. Concluimos a partir daí que $y = e$, ou

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) = e,$$

que é (3). Observamos também que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e. \quad (6)$$

pois esse limite pode ser escrito como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n/(n+1)}{(1 + 1/n)^n} = \frac{1}{e}.$$

O fato adicional de que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e \quad (7)$$

é uma consequência imediata de (6).

Exemplo 6 A maioria dos estudantes se recorda que um *número primo*, ou simplesmente um *primo*, pode ser definido como um inteiro $p > 1$ que não tem fatores positivos (ou divisores) exceto 1 e p .

Esses números formam uma das seqüências mais interessantes

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \dots \quad (8)$$

O fato de que há infinitos primos, de modo que eles realmente constituem uma seqüência, é um famoso teorema da Teoria dos Números. A seqüência (8) é evidentemente não-convergente, e pode parecer que o conceito de seqüência convergente tem pouco ou nada de relevante com relação aos primos. No entanto, essa impressão é errônea, pois os estudantes que desejam prosseguir no assunto verão que o comportamento de convergência de certas seqüências está intimamente ligado à moderna Teoria dos Números Primos. Sustentamos essa observação enunciando, sem prova, o marcante teorema acerca do valor aproximado do n -ésimo primo: se p_n denota o n -ésimo número primo, então p_n é "assintoticamente igual" a $n \ln n$, no sentido de que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{n \ln n} = 1.$$

Discutimos diversas propriedades dos primos no Apêndice A.1 (Volume I) e, para os leitores que estão interessados, continuamos essa discussão de maneira mais sistemática no Apêndice A.7, também do Volume I.

Problemas

1. Estabeleça se cada uma das seqüências indicadas converge ou diverge e, se convergir, determine o limite

- | | |
|-------------------------------------|---|
| (a) $\sqrt[n]{n}$; | (b) $\frac{1 + (-1)^n}{n}$; |
| (c) $\sin \frac{\pi}{5n}$; | (d) $\frac{10^{10} \sqrt{n}}{n+1}$; |
| (e) $\frac{3^n}{2^n + 10^{10}}$; | (f) $\frac{\sqrt{n+2}}{2\sqrt{n}}$; |
| (g) $\ln(n+1) - \ln n$; | (h) $\frac{n^2}{\sqrt{4n^4 + 5}}$; |
| (i) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$; | (j) $\cos n\pi$; |
| (k) $\cos \frac{(2n+1)^2 \pi}{2}$; | (l) $\frac{5n^3 - 2n}{n^4 + 3n^2 - 10}$; |
| (m) $n^{(-1)^n}$; | (n) $\frac{\sqrt{n} \sin(n!e^n)}{n+1}$; |
| (o) $n \sin \frac{\pi}{n}$; | (p) $\frac{(2 - \sqrt{n})(3 + \sqrt{n})}{4n + 5}$. |

2. Mostre que $n!/n^n \rightarrow 0$. Sugestão: desenvolva e observe.
3. Os limites de muitas seqüências podem ser encontrados substituindo a variável discreta n por uma variável contínua x e aplicando a regra de L'Hospital para o caso $x \rightarrow \infty$. Use esse método para mostrar que

- | |
|---|
| (a) $\frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$; |
| (b) $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$; |
| (c) se $ a < 1$, então $na^n \rightarrow 0$; |
| (d) se k é um inteiro positivo qualquer, então $n^k/e^n \rightarrow 0$; |
| (e) se a é um número real qualquer, então $(1 + a/n)^n \rightarrow e^a$. |

4. Verifique se cada uma das seqüências indicadas converge ou diverge e, se convergir, determine seu limite.

(a) $3^{3/n}$; (b) $e^{-10/n}$;
 (c) $n/2^n$; (d) $\frac{\ln(n+1)}{n}$;
 (e) $n^2/3^n$; (f) $n^{1/(n+1)}$;
 (g) $(n+10)^{1/(n+10)}$; (h) $n^2 \sin n\pi$;
 (i) $n^2 \cos n\pi$.

5. Calcule $\lim x^n$ se

(a) $x_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+a} - \sqrt{n})$;
 (b) $x_n = n \left[\left(a + \frac{1}{n} \right)^4 - a^4 \right]$.

6. Se $0 < a < b$, mostre que $\sqrt[n]{a^n + b^n} = b$.

7. Se $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2/\pi) \arctg nx$, mostre que $f(x) = x/|x|$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Esboce o gráfico dessa função.

8. Se os termos de uma seqüência $\{x_n\}$ são números positivos, mostre que:

- (a) a seqüência é crescente se $x_{n+1}/x_n \geq 1$ para todo n ;
 (b) a seqüência é decrescente se $x_{n+1}/x_n \leq 1$ para todo n^* .

9. Use o Problema 8 para mostrar que $\lim x_n$ existe se

(a) $x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$;
 (b) $x_n = \frac{1}{n^2} \left[\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \right]$;
 (c) $x_n = \frac{1}{n} \left[\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \right]^2$.

* Naturalmente, uma seqüência $\{x_n\}$ é tida decrescente se

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots,$$

isto é, se cada termo é menor ou igual ao precedente.

10. Calcule o valor de

(a) $\lim \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$;
 (b) $\lim \frac{(n+1) \ln n - n \ln(n+1)}{\ln n}$.

11. Mostre que

$$\left[\frac{n+1}{n^2} + \frac{(n+1)^2}{n^3} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \right] \rightarrow e - 1.$$

12. Mostre que

(a) $\left(1 + \frac{1}{2n+3} \right)^{2n+3} \rightarrow e$;
 (b) $\left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^2} \rightarrow e$;
 (c) $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{2n} \rightarrow e^2$;
 (d) $\left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n \rightarrow 1$;
 (e) $\left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n \rightarrow \sqrt{e}$.

13. Considere um número conveniente de círculos de tamanhos iguais agrupados em n fileiras dentro de um triângulo equilátero, como se mostra na Fig. 14.3.

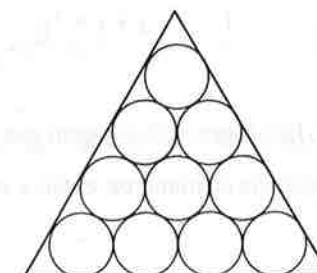


Figura 14.3

Se c_n denota o número desses círculos, então é claro, pela geometria da situação, que $c_1 = 1$, $c_2 = 1 + 2$, $c_3 = 1 + 2 + 3$ e assim por diante. Se A é a área do triângulo e A_n é a soma das áreas dos c_n círculos, mostre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{A} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

14.3 PROPRIEDADES GERAIS DAS SÉRIES CONVERGENTES

Iniciamos com um breve resumo das principais idéias discutidas no Capítulo 13.

Muitas pessoas estão familiarizadas com o fato de que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2. \quad (1)$$

No entanto, como não podemos somar um número infinito de números da mesma maneira que podemos somar um número finito, o significado de (1) é evidentemente bem diferente do significado de uma afirmação como

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

O que (1) significa realmente é que a sequência das somas parciais à esquerda, isto é, a sequência de números

$$\begin{aligned} 1, \\ 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}, \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}, \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1\frac{7}{8}, \\ \dots \end{aligned}$$

converge para o número 2 à direita. Isto sugere a abordagem que adotamos no caso geral.

Se $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ é uma sequência de números, então a expressão

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad (2)$$

é denominada *série infinita*, ou simplesmente *série*, e os a_n são seus *termos*. Enfatizamos que até que seja dado um significado a ela, com uma definição adequada, a expressão (2) é meramente uma coleção formal de símbolos arranjados de uma certa maneira, pois a operação indicada de somar uma quantidade infinita de números não tem significado por si mesma. Para associar um valor numérico para (2), de maneira natural e útil, como sugerido no parágrafo anterior, formamos a sequência das *somas parciais*

$$s_1 = a_1,$$

$$s_2 = a_1 + a_2,$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

Dizemos que a série (2) *converge* ou é *convergente* se a sequência $\{s_n\}$ converge; e, se $\lim s_n = s$, dizemos que a série *converge para s* ou que s é a *soma* da série, e expressamos isto escrevendo

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Se a série não converge, então dizemos que *diverge* ou é *divergente*, e não é atribuída nenhuma soma a ela.

Nesse ponto, algumas observações sobre a notação e uso são necessárias. Como indicamos, a afirmação de que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge para a soma s escreve-se usualmente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Assim, a notação $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é usada com um significado dual; para especificar uma série sem se importar com convergência ou divergência e também (se a série converge) para denotar sua soma. Os estudantes perceberão que essa ambigüidade não causa dificuldade na prática.

Um outro assunto se refere à indexação (ou numeração) dos termos. É, muitas vezes, mais natural numerar os termos de uma série iniciando com $n = 0$, isto é, escrevendo algumas séries na forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots$$

(e nesse caso, escrevemos também $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$). Por exemplo, a série à esquerda em (1) pode ser escrita como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

mas a última forma é um pouco mais nítida. É uma trivialidade que toda afirmação geral acerca de séries escritas como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tem uma análoga para séries escritas como $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Por esta razão, quando não há ambigüidade ou quando a distinção é imaterial, com frequência omitimos os limites de soma e, por simplicidade, escrevemos $\sum a_n$ em vez de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ou $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Estas observações também se aplicam às séries da forma $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ para todo inteiro $k \geq 2$.

Consideramos agora diversos exemplos fundamentais, alguns dos quais já encontramos no Capítulo 13.

Exemplo 1 Provavelmente a mais simples e mais importante de todas as séries infinitas é a conhecida *série geométrica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots \quad (3)$$

Pela equação (2) da Seção 14.2, a n -ésima soma parcial dessa série é dada pela fórmula fechada

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

se $x \neq 1$. Se $|x| < 1$, temos que $s_n \rightarrow 1/(1 - x)$; logo, para esses x temos

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1 - x}.$$

A série (3), portanto, converge para a soma $1/(1 - x)$ se $|x| < 1$, e é fácil ver que diverge para todos os outros valores de x .

Exemplo 2 Uma outra série cujo comportamento é particularmente simples é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots = 1.$$

Para estabelecer a convergência e verificar que a soma é 1, usamos um truque engenhoso devido a Leibniz e observamos que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Isto nos possibilita escrever a n -ésima soma parcial como

$$s_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

e assim é óbvio que $s_n \rightarrow 1$. Toda série cuja n -ésima soma parcial se divide dessa maneira numa fórmula fechada chama-se *série telescópica*.

Como esses exemplos sugerem, o método mais direto para estudar o comportamento de convergência de uma série é encontrar uma fórmula fechada para a n -ésima soma parcial. A principal desvantagem desta abordagem é que ela raramente funciona, porque geralmente é impossível encontrar uma tal fórmula. É essa situação que nos obriga a procurar muitas vezes métodos indiretos para estabelecer a convergência ou divergência da série.

O principal método indireto é relativo ao critério de convergência para as seqüências discutidas na Seção 14.2, isto é, usa o fato de que uma seqüência crescente converge se e somente se é limitada. Assim, se os termos de nossa série são todos números não-negativos, então temos claramente que $s_n \leq s_n + a_{n+1} = s_{n+1}$ para todo n e, portanto, os s_n formam uma seqüência crescente. Segue-se, nesse caso, que a seqüência $\{s_n\}$ de somas parciais — e com ela a série — converge se e somente se os s_n têm um majorante. Nossos próximos exemplos fornecem diversas ilustrações do uso dessa idéia simples mas importante.

Exemplo 3 A *série harmônica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \quad (4)$$

diverge porque suas somas parciais são ilimitadas, como vimos no início da Seção 14.2. Para estabelecer isto com um pouco mais de detalhes, considere m um inteiro positivo e escolha $n > 2^{m+1}$. Então,

$$\begin{aligned} s_n &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{m+1}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^m + 1} + \cdots + \frac{1}{2^{m+1}}\right) \\ &> \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \cdots + 2^m \cdot \frac{1}{2^{m+1}} = (m+1) \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Isto prova que s_n pode ser maior que a soma de qualquer número de $1/2$ e portanto tão grande quanto se queira, tomando n suficientemente grande, e assim os s_n são ilimitados e (4) diverge. Uma série que se comporta dessa maneira é, com frequência, dita *divergir para o infinito*, e expressamos este comportamento escrevendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty.$$

Uma grande quantidade de séries interessantes – algumas convergentes e outras divergentes – pode ser obtida da série harmônica por eliminação, isto é, deixando de lado termos de acordo com um padrão sistemático. Por exemplo, se removemos todos os termos exceto os inversos de potências de 2, o que permanece é a série geométrica convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots;$$

e se removemos todos os termos exceto os inversos dos primos, então – como veremos numa seção posterior – a série resultante diverge

$$\sum \frac{1}{p_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots = \infty.$$

O princípio geral mais simples para decidir se uma série converge ou não é o *teste do n-ésimo termo*: se $\sum a_n$ converge, então $a_n \rightarrow 0$. Para provar isto, simplesmente observamos que $a_n = s_n - s_{n-1} \rightarrow s - s = 0$. Esse resultado mostra que $a_n \rightarrow 0$ é uma condição necessária para a convergência da série $\sum a_n$. Infelizmente, no entanto, não é uma condição suficiente, isto é, não implica a convergência da série. Isto é fácil de ver, considerando a série harmônica $\sum 1/n$ que diverge, embora $1/n \rightarrow 0$. O teste do *n-ésimo termo* é essencialmente um teste de divergência, pois é equivalente à afirmação de que se a_n não tende a zero, então $\sum a_n$ deve divergir. Como exemplos de seu uso, mencionamos a série.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

A primeira diverge porque a sequência $(-1)^{n+1}$ não converge de modo nenhum, e assim não pode convergir a zero, e a segunda diverge porque $n/(n+1) \rightarrow 1 \neq 0$.

Exemplo 4 A série dos inversos dos quadrados

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots, \quad (5)$$

é convergente. Como já vimos no terceiro rodapé da Seção 13.2, isto segue-se imediatamente do fato de que as somas parciais formam uma sequência crescente tendo 2 como um majorante:

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot n} \\ &< 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{n} < 2. \end{aligned}$$

Dissemos antes que a soma da série (5) é $\pi^2/6$, e o argumento de plausibilidade de Euler para esse fato notável está descrito no Apêndice A.7 (Volume I). Uma prova moderna menos interessante – mas mais rigorosa e elementar – é dada no Apêndice A.8.

Exemplo 5 Se lembrarmos que $0! = 1$ e $1! = 1$, então é claro que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

tem somas parciais $s_0 = 1$, $s_1 = 2$ e, para $n \geq 2$,

$$s_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdots n}.$$

Se cada fator nos denominadores é substituído por 2, então vemos que

$$\begin{aligned} s_n &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1 + 2 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3; \end{aligned}$$

logo a série converge com soma ≤ 3 . Pelo exemplo 5 da Seção 14.2 sabemos que a soma dessa série é realmente e :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e, \quad (6)$$

Utilizaremos esse fato proximo para provar que e é um número irracional.

Esses exemplos fornecem um pequeno suprimento de séries específicas de comportamento de convergência conhecido, onde este comportamento é “decidível” por meios bastante elementares. O valor dessas séries particulares para determinar o comportamento de novas séries por vários métodos de comparação começará a aparecer na Seção 14.4. Primeiro, no entanto, há diversas propriedades simples de séries convergentes em geral que devem ser mencionadas explicitamente.

O uso efetivo das séries infinitas repousa na nossa liberdade de manipulá-las por vários processos da álgebra. Entretanto, logo veremos que a falta de cuidado pode levar facilmente à confusão e ao desastre. É portanto de importância primordial conhecer exatamente quais as operações permitidas e quais são armadilhas para o descuido.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a s , escrevemos

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s \quad (7)$$

e chamamos s de “soma” da série. Essa terminologia bem estabelecida é talvez infeliz, pois tende a alimentar a crença de que uma série infinita pode ser tratada como se fosse uma soma finita ordinária. Na realidade, naturalmente, s não é obtida simplesmente por adição, mas é o limite de uma sequência de somas finitas e as propriedades de séries devem ser baseadas nessa definição e não em qualquer analogia tentadora mas enganosa. Como veremos, muitas propriedades de somas finitas passam para as séries, mas devemos sempre ser cuidadosos em não assumir isto sem prova.

Como exemplo das ciladas que estão ao nosso redor, considere o fato familiar de que o rearranjo da ordem dos termos de uma soma finita não tem efeito no valor numérico da soma. Em contraste com isto, no Problema 10 pedimos aos estudantes que vejam por si mesmos que a soma de uma série infinita convergente pode ser alterada escrevendo seus termos — exatamente os mesmos termos! — em uma ordem diferente. Esse comportamento surpreendente (e fascinante) ilustra a necessidade de precaução. E também enfatiza a delicadeza dos conceitos com que estamos trabalhando, além de nos dar uma franca advertência de que não podemos esperar estudar séries infinitas com sucesso sem dar uma razoável atenção à teoria subjacente.

Começamos salientando que ao tratar com somas finitas podemos inserir ou remover parênteses livremente, como nas expressões

$$1 - 1 + 1 = (1 - 1) + 1 = 1 - (1 - 1) = 1,$$

mas isto não é verdadeiro para séries infinitas. Por exemplo, a série $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ evidentemente diverge, mas

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 0 + 0 + \cdots$$

converge a 0, e

$$1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \cdots = 1 - 0 - 0 - \cdots$$

converge a 1. Esses exemplos mostram que a inserção ou remoção de parênteses pode mudar a natureza de uma série infinita. Entretanto, no caso de uma série convergente como (7), qualquer série obtida dela, inserindo parênteses, tais como

$$a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + \cdots,$$

ainda converge e tem a mesma soma. A razão para isto é que as somas parciais da nova série formam uma subsequência da sequência original de somas parciais e, portanto, converge necessariamente ao mesmo limite. Da mesma maneira, vemos que os parênteses podem ser removidos se a série resultante converge.

A seguir observamos que se $a_1 + a_2 + \cdots$ converge a s , então $a_1 + 0 + a_2 + 0 + \cdots$ também converge e tem a mesma soma, pois as duas sequências de somas parciais são $s_1, s_2, \dots$ e $s_1, s_1, s_2, s_2, \dots$, e as repetições na última não interferem com sua convergência a s . Analogamente, número finito de 0 pode ser inserido ou removido em qualquer posição em uma série sem afetar seu comportamento de convergência ou (se convergir) sua soma.

É importante observar que quando duas séries convergentes são somadas, termo a termo, a série resultante converge à soma esperada, isto é, se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = t$, então $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = s + t$. Isto é fácil de provar, pois se s_n e t_n são as somas parciais, então

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\ = s_n + t_n \rightarrow s + t.$$

Analogamente, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = s - t$ e $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cs$ para toda constante c . Convém também saber que se

$$a_1 + a_2 + \cdots = s,$$

então

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = a_0 + s \quad \text{e} \quad a_2 + a_3 + \cdots = s - a_1.$$

A primeira afirmação é clara pelo fato de que

$$\lim (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \lim a_0 + \lim (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = a_0 + s,$$

e a segunda segue-se da mesma maneira. Assim, todo número finito de termos pode ser somado ou subtraído no começo de uma série convergente sem perturbar sua convergência, e as somas das várias séries são relacionadas da maneira esperada.

Usamos agora várias propriedades de séries, abordadas acima, para provar o seguinte teorema de Euler: e é irracional.

Nosso ponto de partida é a equação (6),

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots,$$

onde segue-se que o número

$$e - 1 - 1 - \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots \quad (8)$$

é positivo para todo inteiro positivo n . Suponhamos que e seja racional, de modo que $e = p/q$ para certos inteiros positivos p e q e deduzimos uma contradição dessa hipótese. Seja n em (8) escolhido tão grande que $n > q$ e definimos um número a por

$$a = n! \left[e - 1 - 1 - \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{n!} \right]$$

Como q divide $n!$, a é um inteiro positivo. Entretanto, (8) implica que

$$a = n! \left[\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots \right] \\ = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots \\ < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots \\ = \frac{1}{n+1} \left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots \right] \\ = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1 - 1/(n+1)} = \frac{1}{n}.$$

Essa contradição (não há número inteiro positivo $< 1/n$) completa o argumento.

Mais informações acerca de números irracionais (π é irracional etc.) são dadas no Apêndice A.8.

Problemas

1. Se $\sum a_n$ converge e $\sum b_n$ diverge, mostre que $\sum (a_n + b_n)$ diverge. Sugestão: suponha que convirja e deduza uma contradição.

2. Decida se cada uma das seguintes séries converge ou diverge e dê razões convincentes para sua resposta:

(a) $\frac{1}{500} + \frac{1}{505} + \frac{1}{510} + \cdots$;

(b) $\sum \left[\frac{2}{n} - \left(\frac{3}{4} \right)^n \right]$; (c) $\sum \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} \right)$;

(d) $\sum \left[\frac{2}{n(n+1)} - \frac{100}{n!} \right]$; (e) $\sum 2^{-1/n}$;

(f) $\sum \frac{1}{\ln 2^n}$; (g) $\sum \frac{1}{\ln 2^{n^2}}$;

(h) $\sum \cos \frac{(2n+1)\pi}{2}$; (i) $\sum \cos \frac{n\pi}{4}$.

3. Para cada uma das seguintes séries, determine os valores de x para os quais a série converge e expresse a soma como uma função simples de x :

(a) $ax + ax^3 + ax^5 + \dots$, $a \neq 0$;

(b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots$;

(c) $x + \frac{x}{1+x} + \frac{x}{(1+x)^2} + \dots$;

(d) $\ln x + (\ln x)^2 + (\ln x)^3 + \dots$.

4. Mostre que

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots$$

converge para todo x e determine sua soma.

5. Mostre que $\sum 1/e^n$ converge mas que $\sum 1/(e^{\ln n})$ diverge. Para que valores de x , $\sum e^{nx}$ converge?

6. Mostre que

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} [\arctg^{-1}(n+1) - \arctg^{-1} n] = \pi/4$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \infty$.

7. Se $f(n) \rightarrow L$, mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} [f(n) - f(n+1)] = f(1) - L$$

e use isto para estabelecer as somas indicadas das seguintes séries telescópicas:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n(n+1)} = 1$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{1}{12}$.

8. Segue-se do Exemplo 4 que a série

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \dots,$$

onde os denominadores são os quadrados dos primos sucessivos converge. Por quê?

9. Um decimal $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ é simplesmente um modo abreviado de escrever a série infinita.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots,$$

onde se supõe que a_0 seja um inteiro arbitrário e cada um dos a_n para $n \geq 1$ um dos algarismos 0, 1, 2, ..., 9. Mostre que todo decimal converge.

10. Considere a série familiar (Seção 13.3)

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = \ln 2, \quad (*)$$

e escreva sob ela, como se segue, o resultado de multiplicar pelo fator $1/2$:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \ln 2.$$

Agora some, combinando os termos colocados em colunas verticais, para obter a série

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{3}{2} \ln 2. \quad (+)$$

* Esse fenômeno será explorado sob um ponto de vista diferente e esperamos que seja esclarecido nas Seções 14.5 e 14.7

Verifique (a) que (+) é válida; (b) que essa série pode ser obtida por rearranjo dos termos da série (*), de modo que os primeiros dois termos positivos de (*) são seguidos pelo primeiro termo negativo, depois os próximos dois termos positivos pelo segundo termo negativo etc.; e (c) que o valor da soma da série (*) foi misteriosamente multiplicado dessa maneira pelo fator $3/2^*$.

14.4 SÉRIES DE TERMOS NÃO-NEGATIVOS. TESTES DE COMPARAÇÃO

As séries infinitas mais fáceis de trabalhar são aquelas cujos termos são todos números não-negativos. A razão para isto — como vimos na Seção 14.3 — é que a teoria geral dessas séries pode ser expressa pela seguinte afirmação simples: se $a_n \geq 0$, então a série $\sum a_n$ converge se e somente se sua sequência $\{s_n\}$ de somas parciais é limitada.

Assim, para estabelecer a convergência de uma série de termos não-negativos, é suficiente mostrar que seus termos tendem a zero suficientemente rápido para manter as somas parciais limitadas. Mas quão rápido é “suficientemente rápido”? Uma resposta a essa questão pode ser estabelecida informalmente como se segue: pelo menos tão rápido quando os termos de uma conhecida série convergente de termos não-negativos. Essa idéia está contida em uma afirmação formal chamada *teste de comparação*: se $0 \leq a_n \leq b_n$, então

$\sum a_n$ converge se $\sum b_n$ converge;
 $\sum b_n$ diverge se $\sum a_n$ diverge.

A prova é fácil. A primeira etapa é observar que, se s_n e t_n são as somas parciais de $\sum a_n$ e $\sum b_n$, então a hipótese implica

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_n = t_n.$$

Nossa conclusão agora segue imediatamente dessa desigualdade e da afirmação do parágrafo anterior, pois, se os t_n são limitados, os s_n também são, e se os s_n são ilimitados, então os t_n também são ilimitados.

Exemplo 1 É fácil aplicar o teste de comparação para as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 1} \quad \text{e} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}.$$

A primeira série converge, pois

$$\frac{1}{3^n + 1} \leq \frac{1}{3^n}$$

e $\sum 1/3^n$ converge; e a segunda diverge, pois

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\ln n} \quad (1)$$

e $\sum 1/n$ diverge. [Para verificar (1) na forma equivalente $\ln n \leq n$, lembre-se de que o gráfico de $y = \ln x$ está abaixo do gráfico de $y = x$.]

Vale a pena observar que podemos desprezar qualquer número finito de termos no início de uma série se estamos interessados somente em decidir se essa série converge ou diverge*. Isto nos diz que a condição $0 \leq a_n \leq b_n$ para o teste de comparação não precisa valer para todo n , mas somente para todo n de algum ponto em diante. Como ilustração, suponha que queremos mostrar que $\sum (n+1)/n^n$ converge, por comparação com $\sum 1/n^2$. A desigualdade

$$\frac{n+1}{n^n} \leq \frac{1}{n^2}$$

não é verdadeira para todo n , mas é verdadeira para todo $n \geq 4$. A série, portanto, converge por comparação com a série convergente

$$\sum 1/n^2.$$

O teste de comparação é muito simples em princípio, mas em casos complicados pode ser difícil estabelecer a desigualdade necessária entre os n -ésimos termos das duas séries comparadas. Como os limites são, com frequência, mais fáceis de trabalhar do que desigualdades, o seguinte *teste de comparação de limite* é um instrumento mais conveniente para estudar muitas séries: se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são séries com termos positivos tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L, \quad (2)$$

então ambas convergem ou ambas divergem. Para provar isto, observamos que (2) implica que, para todo n suficientemente grande, temos

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2$$

* Por outro lado, se estamos interessados na soma de uma série convergente, então obviamente devemos levar em conta todos os seus termos.

ou

$$\frac{1}{2} b_n \leq a_n \leq 2b_n. \quad (3)$$

Como o comportamento de convergência de uma série não é afetado por multiplicação de cada um dos seus termos por uma mesma constante não-nula, nossa conclusão é uma consequência fácil das desigualdades (3) e do teste de comparação como foi estabelecido no parágrafo precedente. Assim, por exemplo, se $\sum b_n$ converge, então $\sum 2b_n$ converge e, pela segunda desigualdade em (3), $\sum a_n$ também converge etc.

Exemplo 2 A série $\sum (n+2)/(2n^3-3)$ converge, pois $\sum 1/2n^2$ converge e

$$\frac{(n+2)/(2n^3-3)}{1/2n^2} = \frac{2n^3+4n^2}{2n^3-3} \rightarrow 1 \text{ quando } n \rightarrow \infty;$$

e $\sum \sin(1/n)$ diverge, pois $\sum 1/n$ diverge e

$$\frac{\sin 1/n}{1/n} \rightarrow 1 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

[Lembre-se de que $\lim (\sin x)/x = 1$; veja a Seção 9.2.]

O teste de comparação de limite é usado mais convenientemente se a condição (2) é substituída por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L,$$

onde $0 < L < \infty$. A prova é essencialmente a mesma e não será repetida.

O Exemplo 2 mostra que, ao usar o teste de comparação de limite, devemos tentar adivinhar o provável comportamento de $\sum a_n$, estimando a "ordem de grandeza" do n -ésimo termo a_n . Isto é, devemos tentar julgar se a_n é aproximadamente igual a uma constante vezes o n -ésimo termo de alguma série cujo comportamento de convergência seja conhecido, tal como

$$\sum x^n, \quad \sum \frac{1}{n}, \quad \sum \frac{1}{n^2}, \quad \text{ou} \quad \sum \frac{1}{n!}.$$

Para aplicar esse método efetivamente, é evidentemente desejável ter a nossa disposição um estoque de séries de comparação de comportamento conhecido. O exemplo seguinte fornece uma família de séries que é particularmente significativa para esse propósito. Enfatizamos uma vez mais que o teste de comparação de limite é usado *somente se os termos da série testada são todos números positivos*.

Exemplo 3 Se p é uma constante positiva, então a p -série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots \quad (4)$$

diverge se $p \leq 1$ e converge se $p > 1$.

Para estabelecer isto, observamos primeiro que se $p \leq 1$, então $n^p \leq n$ ou $1/n \leq 1/n^p$, e assim (4) diverge por comparação com a série harmônica $\sum 1/n$. Provamos agora que (4) converge se $p > 1$ mostrando que suas somas parciais têm uma majorante. Seja n dado, escolha m de modo que $n < 2^m$. Então

$$\begin{aligned} s_n \leq s_{2^m-1} &= 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \right) + \left(\frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{7^p} \right) + \cdots + \left[\frac{1}{(2^{m-1})^p} + \cdots + \frac{1}{(2^m-1)^p} \right] \\ &\leq 1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \cdots + \frac{2^{m-1}}{(2^{m-1})^p}. \end{aligned}$$

Se colocamos $a = 1/2^{p-1}$, então $a < 1$, pois $p > 1$, e

$$s_n \leq 1 + a + a^2 + \cdots + a^{m-1} = \frac{1-a^m}{1-a} < \frac{1}{1-a}.$$

Isto fornece um majorante para os s_n 's e o argumento está completo.

Como ilustração do uso dessa família de séries, vemos que

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n^3+3}}$$

converge, pois a p -série (com $p = \frac{3}{2}$) $\sum 1/n^{3/2}$ converge e

$$\frac{1/\sqrt{n^3+3}}{1/n^{3/2}} = \sqrt{\frac{n^3}{n^3+3}} \rightarrow 1.$$

Vale a pena notar que $\sum 1/n^p$ não converge necessariamente se p é uma variável > 1 . Isto é mostrado pela série

$$\sum \frac{1}{n^{1+1/n}},$$

que diverge, pois $\sum 1/n$ diverge e

$$\frac{1/n^{1+1/n}}{1/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1.$$

(Lembre-se de que $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$.)

Concluimos esta seção com algumas observações sobre o processo de rearranjar os termos de uma série, discutido brevemente na Seção 14.3. Suponha que $\sum a_n$ seja uma série convergente de termos não-negativos cuja soma é s e forme uma nova série $\sum b_n$ rearranjando os a_n de qualquer maneira. Por exemplo, $\sum b_n$ pode ser a série

$$a_{10} + a_3 + a_5 + a_1 + a_6 + a_2 + \dots$$

Seja n um inteiro positivo dado e considere a n -ésima soma parcial $t_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ da nova série. Como cada b é algum a , existe um m com a propriedade de que cada termo em t_n é um dos termos em $s_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m$. Isto nos diz que $t_n \leq s_m \leq s$, e assim $\sum b_n$ converge a uma soma $t \leq s$. Por outro lado, a primeira série é também um rearranjo da segunda, e assim, pelo mesmo raciocínio, temos $s \leq t$ e, portanto, $t \leq s$. Isto prova que se uma série convergente de termos não-negativos é rearranjada de qualquer maneira, então a série resultante também converge e tem a mesma soma. Se essa conclusão parece bem óbvia e trivial para os estudantes, recordem-se do Problema 10, da Seção 14.3, que não é verdadeira se retirarmos a hipótese de que os termos da série dada são números não-negativos.

Problemas

1. Estabeleça a convergência ou divergência das seguintes séries usando o teste de comparação:

- | | |
|------------------------------------|---|
| (a) $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ | (b) $\sum \frac{1}{\sqrt{n^2(n+1)}}$ |
| (c) $\sum \frac{1}{n^n}$ | (d) $\sum \frac{1}{(\ln n)^n}$ |
| (e) $\sum \frac{1}{n^{\ln n}}$ | (f) $\sum \frac{n+1}{n(n-1)}$ |
| (g) $\sum \frac{(2n+3)^n}{n^{2n}}$ | (h) $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ |

Determine, por qualquer método, se cada uma das seguintes séries converge ou diverge:

- | | |
|--|---|
| 2. $\sum \frac{3}{n^2+1}$ | 3. $\sum \frac{1+3n^2}{n^3+700}$ |
| 4. $\sum \sin \frac{1}{n^2}$ | 5. $\sum \cos \frac{1}{n^2}$ |
| 6. $\sum \frac{1}{3^n+9}$ | 7. $\sum \frac{1}{(1+1/n)^n}$ |
| 8. $\sum \frac{\sqrt{n}}{n^2+5}$ | 9. $\sum \frac{\ln n}{n}$ |
| 10. $\sum \frac{3n+2}{n} \cdot \frac{4^n}{5^n+1}$ | 11. $\sum \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ |
| 12. $\sum \frac{\ln n}{n^3}$ | 13. $\sum \frac{1000}{\sqrt[3]{n+1} \sqrt[4]{n^3+5}}$ |
| 14. $\sum \frac{n^2}{n^2+100}$ | 15. $\sum \frac{1}{n10^n}$ |
| 16. $\sum \frac{1}{5000n}$ | 17. $\sum \frac{n^2+3n-7}{n^3-2n+5}$ |
| 18. $\sum \frac{\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt[4]{n^3+3} \sqrt[5]{n^3+5}}$ | 19. $\sum \frac{n^2}{n^5-\pi}$ |
| 20. $\sum \frac{3+\cos n}{n^2}$ | 21. $\sum \ln(1+1/n^p), p > 0$ |
| 22. $\sum \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ | 23. $\sum (1-\cos 1/n)$ |

$$24. \sum \sqrt{n} \ln \frac{n+1}{n}.$$

$$25. \sum \frac{1}{n^p} \left(1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \right), p > 0.$$

26. Se $\sum a_n$ é uma série convergente com termos não-negativos, mostre que $\sum a_n^2$ também converge. Com as mesmas hipóteses, mostre com exemplos que $\sum \sqrt{a_n}$ pode ser convergente ou divergente.

27. Se p é uma constante positiva, mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^p} = 1 + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{5^p} + \cdots$$

converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

28. Mostre que $\sum 1/n$ diverge, comparando com a série divergente $\sum \ln(1 + 1/n)$ do Problema 6 (b) da Seção 14.3. Sugestão: compare os gráficos das funções $y = x$ e $y = \ln(1 + x)$ para $x > 0$.

29. Use a idéia do Problema 28 para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

converge. Determine também a soma dessa série.

14.5 TESTE DA INTEGRAL. A CONSTATANTE DE EULER

Entre as séries infinitas mais simples estão aquelas cujos termos formam uma sequência decrescente de números positivos. Nesta seção estudaremos certas séries desse tipo por meio de integrais impróprias da forma

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

Recordamos que a integral à esquerda é dita *convergente* se o limite à direita existe (como um número finito) e, nesse caso, o valor da integral é, por definição, o valor do limite. Se esse limite não existe, então a integral é chamada *divergente*. Há uma analogia óbvia entre (1) e a correspondente definição para as séries,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n.$$

Nosso propósito é explorar essa analogia utilizando integrais para obter informações acerca de séries.

Considere uma série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad (2)$$

cujos termos são positivos e decrescentes. Na maioria dos casos, o n -ésimo termo a_n é uma função de n dada por uma fórmula simples, $a_n = f(n)$. Suponha que a função $y = f(x)$, obtida substituindo a variável contínua x no lugar da variável discreta n , seja uma função de x decrescente para $x \geq 1$, como é mostrado na Fig. 14.4.

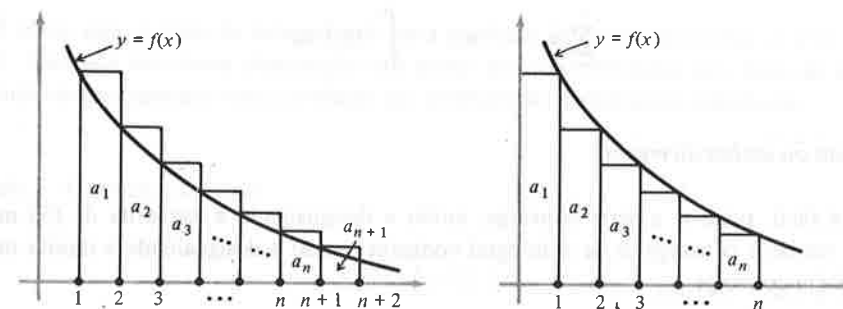


Figura 14.4

À esquerda na figura vemos que os retângulos de áreas $a_1, a_2, \dots, a_n$ têm uma área total maior que a área sob a curva de $x = 1$ a $x = n + 1$; logo,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq \int_1^{n+1} f(x) dx \geq \int_1^n f(x) dx. \quad (3)$$

Na figura à direita fazemos os retângulos se orientarem para a esquerda, de modo que fiquem sob a curva. Se ignoramos momentaneamente o primeiro retângulo, com área a_1 , então vemos que

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leq \int_1^n f(x) dx;$$

e incluindo a_1 temos

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(x) dx. \quad (4)$$

Combinando (3) e (4), obtemos

$$\int_1^n f(x) dx \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(x) dx. \quad (5)$$

O ponto principal de tudo isto é que as desigualdades (5) permitem-nos estabelecer o teste da integral:

Se $f(x)$ é uma função decrescente e positiva para $x \geq 1$, com a propriedade de que $f(n) = a_n$, para cada inteiro positivo n , então a série e a integral

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \int_1^{\infty} f(x) dx$$

ambas convergem ou ambas divergem*.

O argumento é fácil, pois, se a série converge, então a desigualdade à esquerda de (5) mostra que a integral também converge; e se a integral converge, então a desigualdade à direita mostra que a série também converge.

Exemplo 1 (Novamente a p -série) Se p é uma constante positiva, então sabemos, pela Seção 14.4, que a p -série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots \quad (6)$$

* Esse teste é, muitas vezes, chamado de *Teste da Integral de Cauchy*, devido a seu descobridor, o eminente matemático francês do século XIX Augustin Louis Cauchy (pronuncia-se Côchi).

converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$. Há interesse em dar uma outra prova disso como ilustração do teste da integral. Como $a_n = 1/n^p$, consideramos a função $f(x) = 1/x^p$ (que evidentemente satisfaz todas as condições enunciadas) e examinamos a integral

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}.$$

Se $p = 1$, então essa integral diverge, pois

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty.$$

Se $p \neq 1$, então

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{b^{1-p} - 1}{1-p} \right),$$

e a questão de convergência depende do comportamento de b^{1-p} quando $b \rightarrow \infty$. Se $p < 1$, de modo que $1 - p > 0$, então $b^{1-p} \rightarrow \infty$ e a integral diverge. Se $p > 1$, de modo que $1 - p < 0$, então $b^{1-p} \rightarrow 0$ e a integral converge. Pelo teste da integral concluímos novamente que a p -série (6) converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

É claro que o teste da integral vale para qualquer intervalo da forma $x \geq k$, não só para $x \geq 1$. Faremos uso dessa observação em nosso próximo exemplo, que trata de uma classe de séries cujo comportamento não é revelado por nenhum de nossos testes anteriores.

Exemplo 2 Os termos da série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \quad (7)$$

decrecem mais rapidamente que os da série harmônica. Contudo, é fácil ver, pelo teste da integral, que (7) diverge, pois

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln \ln x]_2^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln \ln b - \ln \ln 2) = \infty. \end{aligned}$$

De modo mais geral, se p é uma constante positiva, então

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$; pois, se $p \neq 1$, temos

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p} \right]_2^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{(\ln b)^{1-p} - (\ln 2)^{1-p}}{1-p} \right],$$

e esse limite existe se e somente se $p > 1^*$.

Retornamos agora à série (2) para obter alguma informação adicional das desigualdades (5). Subtraindo a integral que ocorre à esquerda, essas desigualdades podem ser escritas como

$$0 \leq a_1 + a_2 + \dots + a_n - \int_1^n f(x) dx \leq a_1, \quad (8)$$

e isto serve para focalizar nossa atenção sobre a quantidade do meio. Se denotarmos essa quantidade por $F(n)$, de modo que

$$F(n) = a_1 + a_2 + \dots + a_n - \int_1^n f(x) dx,$$

então (8) torna-se

$$0 \leq F(n) \leq a_1.$$

De nosso ponto de vista, a chave para essa situação é o fato de que $\{F(n)\}$ é uma sequência decrescente. Isto segue do cálculo

$$\begin{aligned} F(n) - F(n+1) &= \left[a_1 + a_2 + \dots + a_n - \int_1^n f(x) dx \right] - \left[a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} - \int_1^{n+1} f(x) dx \right] \\ &= \int_n^{n+1} f(x) dx - a_{n+1} \geq 0, \end{aligned}$$

* As séries desse exemplo são chamadas *séries de Abel*, devido ao grande matemático norueguês Niels Henrik Abel, que foi o primeiro a investigá-las e determinar seu comportamento de convergência.

onde a razão para a última desigualdade pode ser entendida examinando-se o lado esquerdo da Fig. 14.4. Como toda sequência decrescente de números não-negativos converge, o limite

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} F(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[a_1 + a_2 + \dots + a_n - \int_1^n f(x) dx \right] \quad (9)$$

existe e satisfaz as desigualdades $0 \leq L \leq a_1$.

Como principal aplicação dessas idéias, deduzimos a existência do importante limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right). \quad (10)$$

É fácil ver que isto é um caso especial de (9) em que $a_n = 1/n$ e $f(x) = 1/x$, pois

$$\int_1^n \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^n = \ln n.$$

O valor do limite (10) é usualmente denotado pela letra grega γ (gama) e chama-se *constante de Euler*:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right). \quad (11)$$

Essa constante ocorre em diversas partes do cálculo avançado, especialmente na Teoria da Função Gama e é, junto com π e e , um dos números especiais mais importantes da Matemática. Seu valor numérico, $\gamma = 0,57721566490153286060\dots$, foi calculado com várias centenas de casas decimais. Todavia, ninguém sabe se γ é racional ou irracional.

Para descrever algumas aplicações da constante de Euler, convém introduzir uma notação que foi amplamente aceita na Matemática do século XX. Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ duas seqüências e suponha que $b_n > 0$. Dizemos que " a_n é bem menor que b_n " e simbolizamos isto escrevendo

$$a_n = o(b_n),$$

se $a_n/b_n \rightarrow 0$. Em particular, $a_n = o(1)$ significa que $a_n \rightarrow 0$. Uma equação da forma $a_n = b_n + o(1)$ significa que $a_n - b_n = o(1)$, e assim a_n e b_n diferem por uma quantidade que tende a zero, quando $n \rightarrow \infty$, como no cálculo

$$[a + o(1)] + 2[b + o(1)] = a + 2b + o(1).$$

Com a ajuda desta notação, (11) pode ser escrita na forma

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1). \quad (12)$$

Como $\ln n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, essa fórmula exhibe de um modo muito transparente a razão para a divergência da série harmônica. É também útil para muitos outros propósitos, como mostram os seguintes exemplos.

Exemplo 3 Podemos usar (12) para dar uma prova simples da fórmula

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2. \quad (13)$$

Seja s_n a n -ésima soma parcial dessa série e observe que

$$\begin{aligned} s_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\ &= [\ln 2n + \gamma + o(1)] - [\ln n + \gamma + o(1)] \\ &= \ln 2 + o(1) \rightarrow \ln 2. \end{aligned}$$

As somas parciais ímpares tendem ao mesmo limite, pois

$$s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1} \rightarrow \lim s_{2n} = \ln 2,$$

logo a prova de (13) está completa. Enfatizamos que esse método estabelece (13) baseado em (12) apenas, sem fazer qualquer uso da expansão em série de potências de $\ln(1+x)$, como é dado na Seção 13.3.

Exemplo 4 Podemos também usar (12) para obter a notável fórmula

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{3}{2} \ln 2, \quad (14)$$

que foi o assunto do Problema 10 da Seção 14.3. Esse método é semelhante ao do Exemplo 3. Se s_n é a n -ésima soma parcial de (14), então, como $2n$ é o n -ésimo número par e $2n-1$ é o n -ésimo número ímpar, temos

$$\begin{aligned} s_{3n} &= \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{4n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{4n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{4n}\right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\ &= [\ln 4n + \gamma + o(1)] - \frac{1}{2} [\ln 2n + \gamma + o(1)] - \frac{1}{2} [\ln n + \gamma + o(1)] \\ &= \ln 4n - \frac{1}{2} \ln 2n^2 + o(1) = \ln \frac{4n}{\sqrt{2}n} + o(1) \\ &= \ln 2^{3/2} + o(1) \rightarrow \ln 2^{3/2} = \frac{3}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

É fácil ver que as somas parciais

$$s_{3n+1} = s_{3n} + \frac{1}{4n+1} \quad \text{e} \quad s_{3n+2} = s_{3n} + \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3}$$

tendem ao mesmo limite, logo a prova de (14) está completa.

Observação A idéia básica do teste da integral é comparar somas com integrais, olhando seus significados geométricos em termos de áreas. Essa idéia pode também ser usada para provar a divergência da série dos inversos dos primos, como foi mencionado na Seção 14.3:

$$\sum \frac{1}{p_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots = \infty.$$

Essa prova é um tanto complicada e, como não é essencial à linha principal de pensamento deste capítulo, será vista no Apêndice A.11.

Problemas

Use o teste da integral para determinar se cada uma das seguintes séries converge ou diverge:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+1}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{1+n^2}$
8. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

9. (a) A série $\sum_{n=3}^{\infty} (\ln n)/n$ diverge por comparação com a série harmônica, pois

$$\frac{1}{n} \leq \frac{\ln n}{n}$$

para $n \geq 3$. Estabeleça essa divergência por meio do teste da integral.

- (b) Se p é uma constante positiva, mostre que $\sum_{n=3}^{\infty} (\ln n)/n^p$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

10. (a) Use o teste da integral para mostrar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} n/e^n$ converge.

- (b) Qual a soma da série em (a)? Sugestão: assuma que a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots = 1/(1-x)$ pode legitimamente ser derivada termo a termo no intervalo $-1 < x < 1$.

11. A curva na Fig. 14.5 é o gráfico de $y = 1/x$. Convença-se de que a área total de todas as infinitas regiões sombreadas é a constante de Euler γ . Por inspeção da figura, mostre que o valor de γ está entre $1/2$ e 1 e que é só um pouco maior que $1/2$.

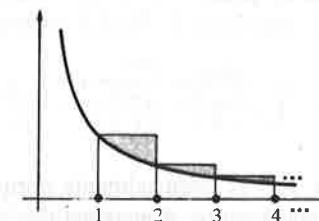


Figura 14.5

12. Use (12) para mostrar que

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \dots = \ln 3.$$

13. Se $\{x_n\}$ é a sequência definida por

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n},$$

então $x_n \rightarrow \ln 2$, pois

$$x_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+1/n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+2/n} + \dots + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+n/n} \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2.$$

Estabeleça esse fato usando a fórmula (12).

14. A série harmônica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

diverge muito lentamente. Para compreender quão lentamente, use (12) para mostrar que, a fim de fazer s_n exceder 10, devemos adicionar cerca de 12.000 termos.

14.6 TESTE DA RAZÃO E TESTE DA RAIZ

No caso da série geométrica Σr^n com $r > 0$, a razão a_{n+1}/a_n do $(n+1)$ -ésimo termo pelo n -ésimo termo tem o valor constante r , pois

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{r^{n+1}}{r^n} = r. \quad (1)$$

Sabemos que essa série converge se $r < 1$, essencialmente porque, para esses r 's, a condição (1) garante que os termos decrescem rapidamente. A analogia nos leva a esperar que toda série Σa_n de termos positivos também converge se a razão a_{n+1}/a_n é pequena para n grande, embora essa razão possa não ter um valor constante.

Essas idéias são tornadas precisas no teste da razão:

Se Σa_n é uma série de termos positivos tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L, \quad (2)$$

então

- (a) se $L < 1$, a série converge;
- (b) se $L > 1$, a série diverge;
- (c) se $L = 1$, o teste não é conclusivo.

Para estabelecer (a), assumimos que $L < 1$ e escolhemos um número qualquer r entre L e 1, de modo que $L < r < 1$. Então o significado de (2) nos diz que existe um n_0 tal que $a_{n+1}/a_n \leq r$ para todo $n \geq n_0$, logo

$$\frac{a_{n+1}}{r^{n+1}} \leq \frac{a_n}{r^n} \quad \text{para } n \geq n_0.$$

Isto implica que a sequência $\{a_n/r^n\}$ é decrescente para $n \geq n_0$; em particular, $a_n/r^n \leq a_{n_0}/r^{n_0}$ para $n \geq n_0$. Assim, se fizermos $K = a_{n_0}/r^{n_0}$, teremos

$$a_n \leq Kr^n \quad \text{para } n \geq n_0. \quad (3)$$

Mas ΣKr^n converge, pois $r < 1$ e, portanto, pelo teste da comparação, (3) implica que Σa_n converge. Para provar (b), observamos simplesmente que $L > 1$ implica que $a_{n+1}/a_n \geq 1$, ou, de modo equivalente, $a_{n+1} \geq a_n$ de algum ponto em diante; logo, a_n não pode tender a zero e, pelo teste do n -ésimo termo, sabemos que a série diverge. A parte (c) diz que se $L = 1$, então nenhuma conclusão pode ser tirada, isto é, às vezes a série converge e às vezes diverge. Para demonstrar isto, consideramos a p -série $\Sigma 1/n^p$. É claro que, para todos os valores de p , temos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^p}{(n+1)^p} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^p \rightarrow 1,$$

e ainda essa série converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

O teste da razão é especialmente útil para manipular séries cujo n -ésimo termo a_n é dado por uma fórmula que envolve vários produtos, pois mesmo que o próprio a_n seja complicado, a razão a_{n+1}/a_n pode, muitas vezes, ser simplificada por cancelamentos.

Exemplo 1 Sabemos que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

converge pelo argumento dado na Seção 14.3. O teste da razão conduz à mesma conclusão muito mais facilmente, pois

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Como $L < 1$, a série converge.

Os estudantes devem observar o uso da equação $(n+1)! = (n+1)n!$ nesse exemplo; esse fato será, com frequência, necessário em nosso trabalho futuro.

Exemplo 2 No caso da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}, \quad (4)$$

é fácil ver que

$$L = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \lim \frac{3}{n+1} = 0.$$

Novamente temos $L < 1$, logo a série converge.

Desde que o n -ésimo termo de qualquer série convergente tende a zero e portanto a convergência de (4) nos diz que $3^n/n! \rightarrow 0$, sabemos que $n!$ cresce mais rápido que 3^n quando $n \rightarrow \infty$. Os estudantes devem tentar desenvolver um sentimento intuitivo para as taxas relativas de crescimento de expressões como essas como uma ajuda para formar julgamentos rápidos mas confiáveis acerca do comportamento provável da série. Nessa ligação salientamos que o numerador 3^n do n -ésimo termo da série (4) contribui com o 3 no numerador da razão a_{n+1}/a_n após simplificação, e que o $n!$ no denominador contribui com o $n+1$ no denominador dessa razão.

Exemplo 3 Para a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{3^n},$$

temos

$$L = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)^{10}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^{10}} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Novamente temos $L < 1$, logo a série converge, pelo teste da razão.

Nesse exemplo, a convergência da série nos diz que 3^n cresce mais rápido que n^{10} e vemos do cálculo de L que a série comporta-se como a série geométrica com $r = 1/3$. Observamos também que o fator polinomial n^{10} contribui com o fator 1 para o cálculo de L , e assim nenhum fator polinomial como este tem qualquer efeito sobre o resultado do teste da razão.

Exemplo 4 A observação que precede o Exemplo 1 é ilustrada com clareza especial pela série

$$\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 5 \cdot 8} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)} + \cdots$$

Aqui o cancelamento de fatores leva a

$$L = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)(3n+2)} \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} = \lim \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2}{3},$$

e a série converge, pois $L < 1$.

Discutimos agora o chamado teste da raiz, que é um outro instrumento conveniente para estudar o comportamento de convergência de séries.

Suponha que $\sum a_n$ seja uma série de termos não-negativos com a propriedade de que a partir de algum n temos

$$a_n \leq r^n, \quad \text{onde } 0 < r < 1. \quad (5)$$

A série geométrica $\sum r^n$ evidentemente converge, logo $\sum a_n$ também converge pelo teste da comparação. O fato de que as desigualdades (5) podem ser escritas na forma

$$\sqrt[n]{a_n} \leq r < 1 \quad (6)$$

dá-nos um enunciado conveniente do teste da raiz:

Se $\sum a_n$ é uma série de termos não-negativos tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L, \quad (7)$$

então

- (a) se $L < 1$, a série converge;
- (b) se $L > 1$, a série diverge;
- (c) se $L = 1$, o teste não é conclusivo.

A prova repousa nas observações precedentes. Para (a), se $L < 1$ e r é um número qualquer tal que $L < r < 1$, então o significado de (7) nos diz que (6) vale para todos os n suficientemente grandes, e assim $\sum a_n$ converge. Para (b), se $L > 1$, então $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ de algum ponto em diante, e assim $a_n \geq 1$ para todos os n suficientemente grandes e a série diverge, pois a_n não tende a zero. Finalmente, estabelecemos (c) observando que $L = 1$ para a série divergente $\sum 1/n$ e a série convergente $\sum 1/n^2$, pois $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$.

Exemplo 5 No caso da série

$$\sum \frac{1}{(\ln n)^n},$$

temos

$$L = \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{1}{\ln n} = 0.$$

Como $L < 1$, a série converge.

Em geral, o teste da raiz é provavelmente mais útil para tratar séries em que a_n é complicado mas $\sqrt[n]{a_n}$ é simples, de modo que $\lim \sqrt[n]{a_n}$ é fácil de calcular. Entretanto, o valor prático do teste da raiz é excedido por seu significado teórico, e isto fica evidenciado principalmente na Teoria Avançada de Série de Potências.

Observação 1 O teste da razão e o teste da raiz foram primeiro estabelecidos e corretamente provados por Cauchy, em 1821, como parte da primeira exposição satisfatória dos conceitos básicos da Teoria das Séries.

Observação 2 Vimos que o teste da razão não é conclusivo quando $\lim a_{n+1}/a_n = 1$, mas isto está longe do final da história. Se $a_{n+1}/a_n \rightarrow 1$ por valores superiores, então temos $a_{n+1}/a_n \geq 1$ ou $a_{n+1} \geq a_n$, e $\sum a_n$ certamente diverge, pois a_n não tende a zero. Mas se $a_{n+1}/a_n \rightarrow 1$ por valores inferiores então há diversos testes mais delicados que são capazes de trazer informações adicionais. O leitor curioso encontrará alguns desses testes discutidos no Apêndice B.1.

Problemas

Use o teste da razão para determinar o comportamento das seguintes séries:

1. $\sum \frac{n}{2^n}$

2. $\sum \frac{n^2}{2^n}$

3. $\sum \frac{n^n}{2^n}$

4. $\sum \frac{n!}{2^n}$

5. $\sum \frac{n!}{n^n}$

6. $\sum \frac{n!}{(2n)!}$

7. $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

8. $\sum \frac{(n!)^3}{(2n)!}$

9. $\sum \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{n!}$

10. $\sum \frac{2^{2n}}{(2n+1)!}$

11. $\sum \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$

12. $\sum \frac{(2n+2)!}{3^n(n!)^2}$

13. $1 + \frac{1 \cdot 3}{2!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!} + \cdots$

$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!} + \cdots$

14. $\sum \frac{(n!)^{23^n}}{(2n)!}$

15. Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos com a seguinte propriedade: existe um número $r < 1$ e um inteiro positivo n_0 tal que $a_{n+1}/a_n \geq r$ para todo $n \geq n_0$. Mostre que $\sum a_n$ converge embora $\lim a_{n+1}/a_n$ possa não existir.

Use o teste da raiz para determinar o comportamento das seguintes séries:

16. $\sum (\sqrt[n]{n} - 1)^n$

17. $\sum \sqrt{n} \left(\frac{2n-1}{n+13} \right)^n$

18. $\sum \frac{e^n}{n^n}$

19. $\sum \left(\frac{n+1}{n} \right)^{3n} \cdot \frac{1}{3^n}$

20. $\sum e^{2n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$

21. $\sum e^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$

22. $\sum \frac{n^3}{(\ln 2)^n}$

23. $\sum \frac{n^{10}}{(\ln 3)^n}$

14.7 TESTE DA SÉRIE ALTERNADA. CONVERGÊNCIA ABSOLUTA

A maior parte de nossa atenção até agora foi dirigida para séries de termos positivos. Desejamos agora considerar séries com termos positivos e negativos. As mais simples são aquelas cujos termos são alternadamente positivos e negativos. Estas são chamadas *séries alternadas* e podem ser escritas na forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots, \quad (1)$$

onde os a_n são todos números positivos. Como exemplos que já são familiares em nosso trabalho prévio, mencionamos a série do $\ln 2$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2, \quad (2)$$

e também a série

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}, \quad (3)$$

cuja soma foi descoberta por Leibniz em 1673.

É fácil ver que as duas séries alternadas (2) e (3) têm a propriedade de que os a_n formam uma sequência decrescente que tende a zero:

- (i) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$;
- (ii) $a_n \rightarrow 0$.

Em 1705 Leibniz observou que essas duas condições simples são suficientes para garantir que toda série alternada (1) converge. Esse fato chama-se *teste da série alternada*.

A essência da situação está no movimento para frente e para trás das somas parciais da série (1) sob as hipóteses estabelecidas, como está ilustrado na Fig. 14.6.

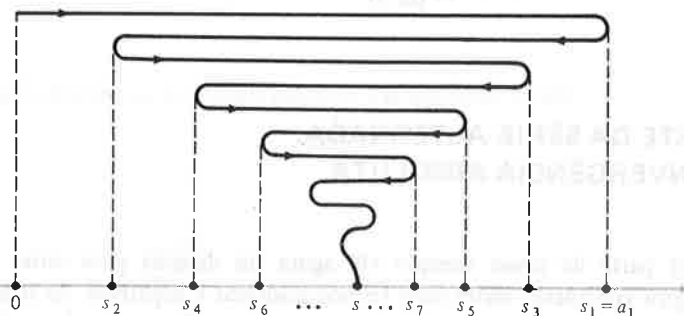


Figura 14.6 O teste da série alternada.

Para localizar as somas parciais $s_1, s_2, s_3, \dots$, começamos na origem e vamos para a direita uma distância a_1 para atingir s_1 , então vamos para a esquerda uma distância menor a_2 para atingir s_2 , depois vamos para a direita uma distância ainda menor a_3 para atingir s_3 e assim por diante. O comportamento dessas somas parciais é semelhante ao de um pêndulo que oscila para frente e para trás e vagarosamente se aproxima de uma posição de equilíbrio que representa a soma s da série. Sugerimos que os estudantes tenham essa figura em mente ao ler a prova no parágrafo seguinte.

Agora os detalhes do argumento. Uma típica soma parcial s_{2n} pode ser escrita de duas maneiras:

$$\begin{aligned} s_{2n} &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}, \end{aligned}$$

onde cada expressão entre parênteses é não-negativa, pois os a_n formam uma sequência decrescente. A primeira maneira de escrever s_{2n} exibe-a como a soma de n termos não-negativos, logo $s_{2n} \leq s_{2n+2}$ e as somas parciais pares formam uma sequência crescente, como se mostra na figura. A segunda maneira de escrever s_{2n} mostra que $s_{2n} \leq a_1$, logo os s_{2n} têm um majorante. Como toda sequência crescente limitada converge, existe um número s tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = s.$$

Mas as somas parciais ímpares tendem ao mesmo limite, pois

$$s_{2n+1} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots - a_{2n} + a_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}.$$

e, portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = s + 0 = s,$$

pois $a_{2n+1} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Isto nos diz que a sequência $\{s_n\}$ de todas as somas parciais converge ao limite s e, portanto, a série alternada (1) converge à soma s sob as condições estabelecidas.

Exemplo 1 O teste da série alternada evidentemente implica a convergência das séries (2) e (3),

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2 \quad \text{e} \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4},$$

pois $1/n$ e $1/(2n - 1)$ ambos decrescem a zero. No entanto, esse teste não nos dá informação, de modo algum, acerca das somas dessas séries, e os estudantes se lembrarão de que as somas indicadas aqui foram estabelecidas em discussões prévias usando métodos muito diferentes de provar convergência.

Exemplo 2 Determine o comportamento de convergência das séries alternadas

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{1000 + 5n}; \quad (b) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}.$$

Solução (a) Apesar dessa série ser alternada, temos que $a_n = n/(1000 + 5n) \rightarrow 1/5$ quando $n \rightarrow \infty$, logo a série diverge pelo teste do n -ésimo termo.

(b) Para provar que essa série converge, usando o teste da série alternada, devemos mostrar que $a_n = (\ln n)/n$ decresce a zero. Sabemos que $(\ln n)/n \rightarrow 0$ pelo Problema 3(a) da Seção 14.2. Para demonstrar que os a_n 's são decrescentes, observamos que a função

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad \text{tem derivada} \quad f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Essa derivada é negativa para $x > e$, logo $f(x)$ é também uma função decrescente para $x > e$, e, portanto, $a_n \geq a_{n+1}$ para $n \geq 3$. (Como é usual ao considerar o assunto de convergência, podemos desprezar os primeiros termos da série.) Nesse caso — e em outros — podemos estar convencidos de que a_n decresce a zero sem sentir nenhuma necessidade de uma verificação detalhada. Entretanto, se existir qualquer dúvida, devemos estar preparados para fornecer uma tal verificação.

Convergência Absoluta

Por que a série harmônica alternada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

converge enquanto a série harmônica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

diverge? A razão essencial para a divergência da série harmônica é que seus termos não decrescem suficientemente rápido, como o fazem os termos da série convergente $\sum 1/2^n$, por exemplo. As somas parciais de $\sum 1/n$ consistem em muitos termos pequenos que somados dão um total grande, enquanto os termos de $\sum 1/2^n$ decrescem tão rapidamente que nenhuma soma de qualquer número deles pode mesmo atingir 2.

Em contraste com o comportamento relativamente simples dessas séries, a série harmônica alternada converge, não só porque seus termos ficam pequenos mas também porque os sinais de menos bem colocados impedem que as somas parciais cresçam muito e permitem que elas se aproximem de um limite finito.

Algumas séries com termos de sinais mistos não precisam da existência dos sinais de menos para a convergência, mas convergem apenas por causa da pequenez de seus termos; elas ainda convergiriam mesmo que todos os sinais de menos fossem substituídos por sinais de mais. Séries dessa natureza são particularmente importantes e são chamadas absolutamente convergentes, isto é, uma série $\sum a_n$ diz-se *absolutamente convergente* se $\sum |a_n|$ converge.

Essas observações sugerem que convergência absoluta é uma propriedade mais forte que convergência ordinária, no sentido de que *convergência absoluta implica convergência*. Isto é verdade e é fácil de provar, como se segue. Suponha que $\sum a_n$ seja uma série absolutamente convergente, de modo que $\sum |a_n|$ converge. As desigualdades $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$ são evidentemente válidas, pois $a_n + |a_n|$ é igual a 0 ou $2|a_n|$ conforme $a_n < 0$ ou $a_n \geq 0$; e como $\sum 2|a_n|$ converge, sabemos que $\sum (a_n + |a_n|)$ também converge pelo teste de comparação. Como $\sum (a_n + |a_n|)$ e $\sum |a_n|$ convergem, sua diferença, que é $\sum a_n$, também converge.

Quando tentamos estabelecer a convergência de uma série cujos termos têm sinais misturados, testar convergência absoluta é um bom primeiro passo, pois (como acabamos de ver) isto implica convergência. Para fazer isto, simplesmente trocamos todos os sinais de menos por sinais de mais e testamos a série resultante de termos não-negativos. Recordamos aos estudantes que nossos testes prévios — testes de comparação, teste da integral, teste da razão e teste da raiz — se aplicam apenas a séries de termos positivos (ou não-negativos) e são, portanto, essencialmente testes de convergência absoluta.

Exemplo 3 Teste as seguintes séries para convergência absoluta e também para convergência:

$$(a) 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots;$$

$$(b) 1 \pm \frac{1}{2^2} \pm \frac{1}{3^2} \pm \frac{1}{4^2} \pm \cdots;$$

$$(c) 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots.$$

Solução (a) Aqui a série $\sum |a_n|$ dos valores absolutos é $\sum 1/n^2$, que converge. Isto nos diz que a série (a) é absolutamente convergente e, portanto, convergente. Essa série também converge pelo teste da série alternada.

(b) O intento aqui é que os sinais de mais e de menos devem ser inseridos de qualquer maneira, ou aleatoriamente ou de acordo com algum padrão sistemático. Em qualquer caso, é claro que, exatamente como em (a), a série é absolutamente convergente e, portanto, convergente. Entretanto, sem o conceito de convergência absoluta não teríamos meios para determinar o comportamento de convergência dessa série.

(c) Nesse caso, a série dos valores absolutos é $\sum 1/\sqrt{n}$, que é uma p -série divergente. A série (c) é, portanto, não absolutamente convergente. Todavia, essa série é claramente convergente pelo teste da série alternada.

Observação 1 Uma série convergente que não é absolutamente convergente diz-se *condicionalmente convergente*. Como exemplo, mencionamos as séries (2) e (3) e também a série do Exemplo 3 (c). Todas as séries dessa natureza são propensas a ter um mau comportamento, surpreendente mas fascinante, e devem ser classificadas como “maneje com cuidado”. Por exemplo, toda série desse tipo pode ser convergente a qualquer número dado ou mesmo divergente, por convenientes mudanças na ordem de seus termos. Por outro lado, toda série absolutamente convergente pode ser rearranjada de qualquer maneira sem alterar seu comportamento de convergência ou sua soma. Numa seção anterior dissemos que “o uso efetivo de séries infinitas repousa em nossa liberdade de manipulá-las pelos vários métodos da álgebra”. De modo geral, essa liberdade é disponível somente quando estamos trabalhando com séries absolutamente convergentes. Esses itens e outros que não são normalmente partes de um primeiro curso serão abordados com detalhes no Apêndice B.2.

Observação 2 O único teste disponível que estabelece convergência diferente da convergência absoluta é o teste da série alternada. Diversos outros testes dessa espécie são apresentados no Apêndice B.3.

Observação 3 Os estudantes podem ter notado que quase todo o nosso trabalho nas seções precedentes deste capítulo foi devotado a mostrar se uma série converge ou diverge, e que muito pouco foi feito para achar a soma de uma série convergente. Uma boa razão para isto é que o segundo problema é usualmente muito mais difícil que o primeiro. Por exemplo, a convergência da série dos inversos dos quadrados é bem fácil de estabelecer, mas o valor exato de sua soma, ou seja, o fato de que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6},$$

está longe de ser óbvio e pode ser descoberto somente com alguma engenhosidade. Além disso, a convergência da série dos inversos dos cubos é igualmente fácil de estabelecer, mas sua soma *já* foi descoberta e permanece até hoje um dos problemas não resolvidos mais atormentadores da Matemática:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots = ?$$

Uma segunda e talvez mais importante razão para não forçarmos inicialmente o cálculo da soma de uma série convergente é que esse problema estará constantemente diante de nós nas aplicações que discutiremos no restante do capítulo. Isto é, estaremos “representando” uma dada função por uma certa espécie de série e sempre daremos atenção especial ao fato de provar que essa série realmente converge a uma dada função como sua soma. Dessa maneira, as somas de muitas séries numéricas convergentes serão conhecidas como uma consequência imediata de nosso trabalho sobre séries convergentes de funções.

Problemas

Classifique cada uma das seguintes séries como absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente:

- $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+10}}$
- $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$
- $\sum (-1)^{n+1} \frac{n}{n+2}$
- $\sum (-1)^{n+1} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}$
- $\sum (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n!}$
- $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{3^{1/n}}$
- $\sum (-1)^{n+1} \frac{n^3}{1+n^5}$
- $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+2)}$
- $\sum (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$
- $\sum (-1)^{n+1} \ln \frac{1}{n}$
- $\sum (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$
- $\sum (-1)^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$
- $\sum (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n+3}$
- $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{5n}$
- $\sum (-1)^{n+1} \frac{2}{3n^2}$
- $\sum (-1)^{n+1} \sin n\pi$

17. $\sum (-1)^{n+1} \frac{\sin^2 n}{n^2}$. 18. $\sum (-1)^{n+1} \frac{\sin^2 n}{n^{5/2}}$.
19. $\sum (-1)^{n+1} \frac{\sin^2 n}{n^{9/2}}$. 20. $\sum (-1)^{n+1} \ln \sqrt[n]{n}$.
21. $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{n^4}}$. 22. $\sum (-1)^{n+1} \frac{n^4 3^n}{n!}$.
23. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6} + \dots$.
24. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \dots$.
25. $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$.
26. Sabemos que se $\{a_n\}$ é uma sequência decrescente de números positivos tais que $a_n \rightarrow 0$, então a série alternada (1) converge a algum número s como sua soma. Mostre que s está entre as somas parciais consecutivas s_n e s_{n+1} e que $|s_n - s| \leq a_{n+1}$.
27. Verifique se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:
- toda série alternada convergente é condicionalmente convergente;
 - toda série absolutamente convergente é convergente;
 - toda série convergente é absolutamente convergente;
 - toda série alternada converge;
 - se $\sum a_n$ é condicionalmente convergente, então $\sum |a_n|$ diverge;
 - se $\sum |a_n|$ diverge, então $\sum a_n$ é condicionalmente convergente.
28. Se os a_n 's são todos números positivos, mostre que a série $-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots$ converge se e somente se a série $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$ converge. [Isto mostra que começar uma série alternada com um termo positivo, como em (1), é simplesmente uma conveniência, não uma necessidade.]
29. Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são absolutamente convergentes, mostre que
- $\sum (a_n + b_n)$ é absolutamente convergente;
 - $\sum ca_n$ é absolutamente convergente, para toda constante c .
30. Se $\sum a_n^2$ e $\sum b_n^2$ convergem, mostre que $\sum a_n b_n$ é absolutamente convergente. Sugestão: $(a-b)^2 \geq 0$, logo $2ab \leq a^2 + b^2$.

31. Use o Problema 30 para mostrar que, se $\sum a_n^2$ converge, então $\sum a_n/n$ é absolutamente convergente.
32. Ao usar o teste da série alternada, é um erro comum verificar apenas se $a_n \rightarrow 0$, pois isto não é suficiente e a convergência não pode ser deduzida a menos que ambas as condições (i) e (ii) sejam verificadas. Demonstre esse fato no caso da série alternada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \dots$$

mostrando que

- $a_n \rightarrow 0$;
 - os a_n não formam uma sequência decrescente;
 - a série diverge (sugestão: considere s_{2n}).
33. Se s é um número dado qualquer, mostre que a série harmônica alternada $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ pode ser rearranjada (isto é, seus termos podem ser escritos numa ordem diferente) de tal modo que a série resultante convirja a s . Sugestão: tome um número suficiente de termos positivos para ficar acima de s , depois um número suficiente de termos para ficar abaixo de s etc.

14.8 SÉRIES DE POTÊNCIAS, NOVAMENTE. INTERVALO DE CONVERGÊNCIA

Nas seções anteriores deste capítulo concentramos nossa atenção sobre séries cujos termos são constantes. Nas cinco próximas seções voltaremos ao estudo de séries de potências cujos termos são funções muito simples de uma variável x . Já tomamos algum contato com as séries de potências no Capítulo 13, principalmente com aquelas que aparecem de um modo bem direto da série geométrica $1 + x + x^2 + \dots$. Entretanto abordaremos agora esse assunto de um ponto de vista diferente, sendo que raramente teremos ocasião de nos referir ao trabalho anterior.

Lembramos que uma *série de potências* é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots, \quad (1)$$

onde os coeficientes a_n são constantes e x é uma variável. Como as séries de potências são quase sempre indexadas de $n = 0$ a $n = \infty$, frequentemente simplificamos a notação escrevendo (1) como $\sum a_n x^n$.

As séries de potências servem a muitos propósitos importantes tanto na teoria como nas aplicações da Matemática. Primeiro, elas são particularmente adequadas para o cálculo e são, portanto, úteis em muitos problemas numéricos. Segundo, fornecem um caminho alternativo para expressar muitas funções familiares e, muitas vezes, contribuem para nossa compreensão dessas funções. E, finalmente, no estudo das equações diferenciais, com frequência descobrimos que as séries de potências são usadas para definir funções que são difíceis ou impossíveis de definir de qualquer modo. Para ser mais explícito acerca disso, uma equação diferencial pode, muitas vezes, ser usada para gerar uma solução na forma de série de potências, como ilustrado na Seção 13.1; é então não só conveniente mas perfeitamente razoável definir uma função $f(x)$ dizendo que é a soma de uma série de potências

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots,$$

supondo, é claro, que a série converge.

A série geométrica

$$\sum x^n = 1 + x + x^2 + \cdots \quad (2)$$

é evidentemente a série de potências mais simples. Sabemos que essa série converge para $|x| < 1$ e diverge para $|x| \geq 1$. Em geral, esperamos que uma série de potências convirja para alguns valores de x e divirja para outros.

Estaremos certamente muito interessados em conhecer os valores de x para os quais uma dada série de potências $\sum a_n x^n$ converge. Para tais x , a soma da série é um número cujo valor depende de x e é, portanto, uma função de x . Se denotamos essa função por $f(x)$, então $f(x)$ pode ser encarada como definida pela equação

$$f(x) = \sum a_n x^n. \quad (3)$$

Às vezes uma série de potências tem uma função conhecida como sua soma. Por exemplo, se $|x| < 1$, sabemos que a série (2) tem $(1/(1-x))$ como sua soma. Entretanto, em geral não há razão para esperar que a soma de uma série de potências convergente venha a ser uma função que possamos reconhecer facilmente.

Trataremos de dois grandes grupos de questões: Primeiro, que propriedades tem a função $f(x)$ definida por (3)? É contínua? É derivável? Se é derivável, sua derivada pode ser calculada derivando (3) termo a termo? E segundo — invertendo a situação — se uma função $f(x)$ é dada de antemão, sob que circunstâncias ela tem uma expansão em série de potências da forma (3)? Como podemos calcular essa expansão e o que pode ser dito acerca dos valores de x para os quais a expansão é válida? Estes são alguns dos pontos que estudaremos nas próximas seções.

Começamos determinando a natureza do conjunto de pontos para os quais uma série de potências arbitrária converge.

Primeiro, alguns exemplos. É claro que toda série de potências converge quando $x = 0$. Algumas séries convergem *somente* para esse valor de x , por exemplo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n = x + 2^2 x^2 + 3^3 x^3 + 4^4 x^4 + \cdots * \quad (4)$$

Para ver isso, basta observar que, para todo $x \neq 0$, temos $|nx| > 1$ se n é suficientemente grande, de modo que o n -ésimo termo $(nx)^n$ não tende a zero e a série não pode convergir. Em contrapartida, existem séries como

$$\sum \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \quad (5)$$

que convergem para todos os valores de x . Estabelecemos isto mostrando que (5) é absolutamente convergente para todo x e isto é fácil de provar pelo teste da razão:

$$\frac{|x^{n+1}/(n+1)!|}{|x^n/n!|} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0.$$

(Quando se usa o teste da razão, é necessário testar convergência absoluta, pois esse teste se aplica somente a séries de termos positivos.) Como um exemplo simples que está entre esses extremos, temos a série geométrica (2), que converge no intervalo $|x| < 1$ e diverge fora desse intervalo.

Nossa tarefa é descobrir a estrutura do conjunto dos x para os quais uma dada série converge. Os exemplos discutidos acima mostram que há pelo menos três possibilidades: esse conjunto pode consistir no único ponto $x = 0$ ou ser a reta toda ou um intervalo limitado centrado na origem. Provaremos que estas são as *únicas* possibilidades.

A fim de estabelecer isto, precisamos do seguinte lema:

Se uma série de potências $\sum a_n x^n$ converge em x_1 , $x_1 \neq 0$, então ela converge absolutamente em todo x com $|x| < |x_1|$; e se ela diverge em x_1 , então diverge em todo x com $|x| > |x_1|$.

A prova é bem fácil. Se $\sum a_n x_1^n$ converge, então $a_n x_1^n \rightarrow 0$. Em particular, se n é suficientemente grande, temos $|a_n x_1^n| < 1$ e, portanto,

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \left| \frac{x}{x_1} \right|^n < r^n, \quad (6)$$

onde $r = |x/x_1|$. Agora suponha que $|x| < |x_1|$. Então, temos

$$r = \left| \frac{x}{x_1} \right| < 1,$$

* Essa série é indexada de $n = 1$ a $n = \infty$, pois n^n não tem sentido quando $n = 0$.

e a desigualdade (6) nos diz que $\sum |a_n x^n|$ converge por comparação com a série geométrica convergente $\sum r^n$. Isto prova a primeira afirmação. Para provar a segunda afirmação, assumimos que $\sum a_n x_1^n$ diverge. Então $\sum a_n x^n$ não pode convergir para todo x com $|x| < x_1$, pois, de conformidade com o que foi provado anteriormente, implicaria a convergência absoluta — e, portanto, a convergência de $\sum a_n x_1^n$, e isto contradiz a nossa hipótese.

Estamos agora em posição de enunciar e provar os principais fatos acerca do comportamento de convergência de uma série de potências arbitrária.

Dada uma série de potências $\sum a_n x^n$, exatamente uma das seguintes afirmações é verdadeira:

- (i) A série converge somente para $x = 0$.
- (ii) A série é absolutamente convergente para todo x .
- (iii) Existe um número real positivo R tal que a série é absolutamente convergente para $|x| < R$ e divergente para $|x| > R$.

O argumento segue o seguinte caminho. Se (i) não é verdade, então a série converge para algum $x_1 \neq 0$ e, pelo lema anterior, sabemos que, se $r = |x_1|$, então $\sum a_n x^n$ é absolutamente convergente sobre o intervalo $-r < x < r$. Seja S o conjunto de todos os números positivos r com a propriedade anterior. Se S é ilimitado, então (ii) é verdadeira. Agora, suponha que nem (i) nem (ii) sejam verdadeiras, de modo que S é um conjunto não-vazio de números positivos que tem um majorante. Pela propriedade básica de completividade do sistema de números reais, S tem supremo. Isto significa que existe um menor número R tal que $r < R$ para todos os valores r de S^* . Agora é fácil ver que R tem as propriedades enunciadas em (iii).

O número real positivo R no caso (iii) chama-se *raio de convergência* da série de potências. Vimos que a série converge absolutamente em todo ponto do intervalo aberto $(-R, R)$ e diverge fora do intervalo fechado $[-R, R]$. Nenhuma afirmação geral pode ser feita acerca do comportamento da série nas extremidades R e $-R$. Há exemplos de séries que convergem em ambas as extremidades, ou divergem em ambas ou, ainda, convergem em uma e divergem na outra; para determinar o que acontece com qualquer série particular, devemos testar cada extremidade separadamente. O conjunto de todos os x para os quais uma série de potências converge chama-se *intervalo de convergência*. Essas idéias são ilustradas na Fig. 14.7.



Figura 14.7

* Veja o Apêndice B.1 (Volume 1) para uma discussão geral de supremos.

É costume tomar $R = 0$ quando a série converge somente para $x = 0$ e $R = \infty$ quando converge para todo x . Essa convenção permite-nos cobrir todas as possibilidades (exceto o comportamento nas extremidades) em uma única afirmação:

Toda série de potências $\sum a_n x^n$ tem um raio de convergência R , onde $0 \leq R \leq \infty$, com a propriedade de que a série converge absolutamente se $|x| < R$ e diverge se $|x| > R$. Deve ser observado que se $R = 0$, então nenhum x satisfaz a condição $|x| < R$, e se $R = \infty$, então nenhum x satisfaz a condição $|x| > R$; logo, em ambos esses casos, nossa afirmação geral é verdadeira por vacuidade.

Se uma série de potências $\sum a_n x^n$ é dada, como achar o seu intervalo de convergência?

A primeira etapa é achar o raio de convergência R . Há uma fórmula simples para R que funciona em muitas situações:

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad (7)$$

supondo que esse limite exista — podendo eventualmente valer $+\infty$. Isto segue-se diretamente do teste da razão, pois a série converge absolutamente ou diverge, conforme o número

$$\lim \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x| = \frac{|x|}{\lim |a_n/a_{n+1}|}$$

seja < 1 ou > 1 , isto é, conforme

$$|x| < \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{ou} \quad |x| > \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Isto estabelece (7).

A segunda etapa é testar o comportamento da série nas extremidades.

Exemplo 1 Determine o intervalo de convergência da série

$$\sum \frac{x^n}{n^2} = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots$$

como indicado, essa série é entendida como sendo indexada de $n = 1$ a $n = \infty$, pois $a_n = 1/n^2$ não tem significado para $n = 0$.

Solução Aqui temos

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1/n^2}{1/(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \rightarrow 1,$$

logo $R = 1$. Nesse exemplo, a série converge em ambas as extremidades: em $x = 1$, a série é $\sum 1/n^2$, que é uma p -série convergente, em $x = -1$, é $\sum (-1)^n/n^2$, que converge pelo teste da série alternada. O intervalo de convergência é portanto o intervalo fechado inteiro $[-1, 1]$.

Exemplo 2 Determine o intervalo de convergência da série

$$\sum \frac{n+2}{3^n} x^n = 2 + \frac{3}{3}x + \frac{4}{3^2}x^2 + \dots$$

Solução Desta vez temos

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{n+2}{3^n} \cdot \frac{3^{n+1}}{n+3} = \frac{n+2}{n+3} \cdot 3 \rightarrow 3,$$

logo $R = 3$. Nesse caso, a série diverge em ambas as extremidades: em $x = 3$, é o mesmo que $2 + 3 + 4 + \dots$ e em $x = -3$ torna-se $2 - 3 + 4 - \dots$. O intervalo de convergência é, portanto, $(-3, 3)$.

Exemplo 3 Determine o intervalo de convergência da série

$$\sum \frac{x^n}{n+1} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \dots$$

Solução Aqui temos

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1/(n+1)}{1/(n+2)} = \frac{n+2}{n+1} \rightarrow 1,$$

logo $R = 1$. Em $x = 1$, a série é a harmônica $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$, que diverge, e em $x = -1$, é a série harmônica alternada $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$, que converge. O intervalo de convergência é, portanto, $[-1, 1]$.

Exemplo 4 Determine o intervalo de convergência da série

$$\sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad (8)$$

Solução A fórmula (7) não se aplica diretamente, pois a metade dos coeficientes dessa série de potências é zero. Todavia, a série pode ser escrita na forma

$$1 - \frac{y}{2!} + \frac{y^2}{4!} - \dots,$$

onde $y = x^2$. Nossa fórmula pode ser aplicada a essa série e acarreta

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1/(2n)!}{1/(2n+2)!} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} = (2n+1)(2n+2) \rightarrow \infty,$$

logo $R = +\infty$ para a y -série. Segue-se que a x -série também converge para todo x , logo o intervalo de convergência desejado para (8) é $(-\infty, \infty)$.

Se a é um número real, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots \quad (9)$$

chama-se *série de potências em $(x-a)$* . Para efeito de ênfase, o caso particular (1) em que $a = 0$ chama-se, muitas vezes, *série de potências em x* . Se colocamos $z = x - a$, então (9) torna-se $\sum a_n z^n$, que é uma série de potências em z . Se podemos determinar o intervalo de convergência dessa última série pelos métodos previamente descritos, então essa informação pode ser utilizada para determinar o intervalo de convergência de (9). Por exemplo, se $\sum a_n z^n$ tem $[-R, R)$ como seu intervalo de convergência, então ela converge para $-R \leq z < R$. Isto significa que $-R \leq x - a < R$ ou $a - R \leq x < a + R$. Dizemos então que $[a - R, a + R)$ é o *intervalo de convergência* e que R é o *raio de convergência* da série de potências (9).

Para efeito de simplicidade de notação, limitaremos a maioria de nossas discussões detalhadas a séries de potências em x .

Problemas

Determine o intervalo de convergência de cada uma das seguintes séries de potências.

1. $\sum \frac{n}{4^n} x^n$
2. $\sum n! x^n$
3. $\sum \frac{n!}{100^n} x^n$
4. $\sum \frac{2^n}{n^2} x^n$

5. $\sum \frac{x^n}{n+4}$
6. $\sum (-1)^{n+1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$
7. $\sum \frac{x^n}{n^3+1}$
8. $\sum \frac{2^n}{(2n)!} x^{2n}$
9. $\sum \frac{(3n)!}{(2n)!} x^n$
10. $\sum \frac{x^n}{n(n+1)}$
11. $\sum \frac{x^{2n+1}}{(-3)^n}$
12. $\sum \frac{x^n}{n2^n}$
13. $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$
14. $\sum n^2 x^n$
15. $\sum \frac{(-2)^n}{n} x^n$
16. $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n} 2^n} x^n$
17. $\sum \frac{x^n}{\ln n}$
18. $\sum \frac{\ln n}{n} x^n$
19. $\sum \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2} x^n$
20. $\sum \frac{3^n}{n4^n} x^n$
21. $\sum \frac{n^2}{2^n} (x-4)^n$
22. $\sum \frac{3^n}{n^2+1} (x-1)^n$
23. $\sum \frac{10^n}{(2n)!} (x-7)^n$
24. $\sum \frac{(x-3)^n}{n^2 2^n}$
25. $\sum \frac{(2n)!}{n!} (x-10)^n$
26. $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n} (x-3)^n$
27. $\sum \frac{\ln n}{e^n} (x-e)^n$
28. $\sum \frac{n^2}{2^{3n}} (x+2)^n$

29. Determine o raio de convergência da
(a) série hipergeométrica

$$1 + \frac{ab}{c} x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)} x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!c(c+1)(c+2)} x^3 + \dots;$$

- (b) função de Bessel

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

30. Dê um exemplo de uma série de potências com $R = \pi$.

31. Se infinitos coeficientes de uma série de potências são inteiros não-nulos, mostre que $R \leq 1$.

14.9 DERIVAÇÃO E INTEGRAÇÃO DE SÉRIES DE POTÊNCIAS

Considere uma série de potências $\sum a_n x^n$ com um raio de convergência positivo R . Vimos na Seção 14.8 que essa série pode ser usada para definir uma função $f(x)$ cujo domínio de definição é o intervalo de convergência da série. Especificamente, para cada x nesse intervalo, definimos $f(x)$ como sendo a soma da série

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (1)$$

Essa relação entre a série e a função é expressa, com frequência, dizendo-se que $\sum a_n x^n$ é uma *expansão em série de potências* de $f(x)$. Por exemplo, sabemos que se $|x| < 1$, então

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots, \quad (2)$$

pois a série geométrica $\sum (-1)^n x^n$ converge e tem a soma $1/(1+x)$. Consequentemente, a função $f(x) = 1/(1+x)$ tem a série à direita de (2) como uma expansão em série de potências.

Os polinômios, que são somas finitas de termos da forma $a_n x^n$, são funções muito simples. Elas são contínuas em toda parte e podem ser derivadas e integradas termo a termo. Como vimos no Capítulo 13, a soma de uma série de potências pode ser uma função muito mais complicada, mas é ainda suficientemente simples para gozar dessas três propriedades em comum com os polinômios, dentro do intervalo de convergência.

Damos o seguinte enunciado formal desses fatos muito importantes:

- (i) A função $f(x)$ definida por (1) é contínua no intervalo aberto $(-R, R)$.
- (ii) A função $f(x)$ é derivável em $(-R, R)$ e sua derivada é dada pela fórmula.

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + na_n x^{n-1} + \dots, \quad (3)$$

- (iii) Se x é um ponto qualquer de $(-R, R)$, então

$$\int_0^x f(t) dt = a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 + \dots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} + \dots \quad (4)$$

As provas dessas afirmações dependem de uma natureza especial de convergência chamada *convergência uniforme*. Os detalhes podem ser encontrados no Apêndice B.4.

Vários comentários são feitos a seguir.

Primeiro, observamos que se (ii) é aplicada à função $f'(x)$ em (3), então segue-se que $f'(x)$ é também derivável. Isto, por sua vez, implica que $f''(x)$ é derivável e assim por diante. Assim, a função original $f(x)$ tem derivadas de todas as ordens. Podemos resumir a situação dessa maneira: *no interior de seu intervalo de convergência, uma série de potências define uma função infinitamente derivável cujas derivadas podem ser calculadas derivando-se a série termo a termo*. A derivação termo a termo pode ser enfatizada escrevendo-se (3) como

$$\frac{d}{dx} \left(\sum a_n x^n \right) = \sum \frac{d}{dx} (a_n x^n).$$

Vale a pena observar que a derivabilidade termo a termo de uma série convergente de funções é, em geral, falsa; ela é verdadeira aqui apenas porque estamos tratando de uma espécie particular de séries. Como exemplo simples da falha dessa propriedade, mencionamos a série $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin nx)/n^2$, que é absolutamente convergente para todo x por comparação com a série convergente $\sum 1/n^2$, pois $|(\sin nx)/n^2| \leq 1/n^2$. A dificuldade aparece com a série derivada termo a termo $\sum (\cos nx)/n$, pois essa série diverge para $x = 0$.

No caso de (iii), se preferirmos evitar o uso da variável t , então (4) pode ser escrita na forma

$$\int f(x) dx = a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 + \cdots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} + \cdots, \quad (5)$$

supondo que achamos uma integral indefinida à esquerda que é igual a zero quando $x = 0$. A integração termo a termo da série de potências pode ser enfatizada escrevendo-se (5) como

$$\int \left(\sum a_n x^n \right) dx = \sum \left(\int a_n x^n dx \right).$$

Salientamos também que é parte do significado de (3) e (4) que as séries derivada e integrada nos primeiros membros dessas equações convergem no intervalo (R, R) . Provaremos isto no fim desta seção. Entretanto, antes disso, damos diversos exemplos do valor prático dos procedimentos discutidos aqui.

Exemplo 1 Determine uma expansão em série de potências de $\ln(1+x)$.

Solução Nosso ponto de partida é o fato de que a derivada de $\ln(1+x)$ é $1/(1+x)$ e para $|x| < 1$ essa função tem a expansão em série de potências dada por (2). Agora, usando (5) e o fato de que $\ln(1+x)$ é igual a zero quando $x = 0$, e integrando (2) termo a termo obtemos imediatamente

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

Sabemos a partir da discussão anterior que essa expansão é válida para $|x| < 1$. Como vimos na Seção 13.3, é também válida para $x = 1$, mas nossos métodos presentes não dão informação sobre esse fato.

Exemplo 2 Determine a expansão em série de potências de $\arctg x$.

Solução A derivada dessa função é $1/(1+x^2)$ e vemos, substituindo x por x^2 em (2), que

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

se $|x| < 1$. Usando (4), temos

$$\begin{aligned} \arctg x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots) dt \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

para $|x| < 1$. Novamente, nossos métodos presentes não dão informação acerca do que acontece nas extremidades $x = \pm 1$.

Exemplo 3 Determine a expansão em série de potências de e^x .

Solução Na Seção 8.3 provamos que e^x é a única função que é igual a sua própria derivada em toda parte e tem o valor 1 em $x = 0$. Para construir uma série de potências igual a sua própria derivada, usamos o fato de que, quando tal série é derivada, o grau de cada termo diminui de 1. Queremos, portanto, que cada termo seja a derivada de um termo que o segue começando com 1 como o termo constante, o próximo devendo ser x , depois $\frac{1}{2} x^2$, depois $\frac{1}{2 \cdot 3} x^3$ e assim por diante. Isto produz a série

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad (6)$$

que converge para todo x , pois

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n!}{1/(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

Construímos a série (6) de modo que sua soma fique inalterada por derivação e tenha o valor 1 em $x = 0$. Em vista da observação acima, isto estabelece a validade da expansão

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

para todo x .

Exemplo 4 Determine as expansões em séries de potências de $1/(1-x)^2$ e $1/(1-x)^3$.

Solução Começamos notando que

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right).$$

As próximas etapas são expandir $1/(1-x)$ na série de potências $\sum x^n$ para $|x| < 1$ e depois derivar essa série termo a termo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2} &= \frac{d}{dx} (1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n. \end{aligned}$$

Uma outra derivação dá

$$\begin{aligned} \frac{2}{(1-x)^3} &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{(1-x)^2} \right] = \frac{d}{dx} (1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots) \\ &= 2 + 3 \cdot 2x + 4 \cdot 3x^2 + \cdots + n(n-1)x^{n-2} + \cdots, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^3} &= \frac{1}{2} [2 + 3 \cdot 2x + 4 \cdot 3x^2 + \cdots + n(n-1)x^{n-2} + \cdots] \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2} x^n. \end{aligned}$$

Exemplo 5 Determine a soma da série

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Solução É fácil ver que $R = 1$, logo a série converge a alguma função $f(x)$ para $|x| < 1$. Derivando essa série, obtém-se a forma simplificada

$$f'(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Como $f(0) = 0$, a integração agora acarreta

$$f(x) = -\ln(1-x).$$

Exemplo 6 Calcule a soma

$$x + 4x^2 + 9x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n.$$

Solução Novamente temos $R = 1$, logo a série converge a alguma função $f(x)$ para $|x| < 1$. Podemos escrever

$$f(x) = x + 4x^2 + 9x^3 + \cdots + n^2 x^n + \cdots = xg(x),$$

onde

$$g(x) = 1 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2 x^{n-1} + \cdots.$$

Nesse ponto observamos que

$$g(x) = \frac{d}{dx} (x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots) = \frac{d}{dx} [x(1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots)].$$

Pelo Exemplo 4,

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2},$$

logo

$$g(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{x}{(1-x)^2} \right] = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

e

$$f(x) = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}.$$

Em conclusão, devemos agora mostrar que as séries (3) e (4) convergem no intervalo $(-R, R)$.

A prova de (4) é fácil: como $\sum |a_n x^n|$ converge e

$$\left| \frac{a_n x^n}{n+1} \right| \leq |a_n x^n|,$$

o teste de comparação implica que $\sum \left| \frac{a_n x^n}{n+1} \right|$ converge e, portanto,

$$x \sum \frac{a_n x^n}{n+1} = \sum \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$$

também converge.

A prova de (3) é um pouco mais complicada. Seja x um ponto no intervalo $(-R, R)$ e escolha $\epsilon > 0$ de modo que $|x| + \epsilon < R$. Como $|x| + \epsilon$ está no intervalo, $\sum |a_n (|x| + \epsilon)^n|$ converge. No Problema 7 é pedido aos estudantes mostrar que a desigualdade

$$|n x^{n-1}| \leq (|x| + \epsilon)^n$$

é verdadeira para todos os valores de n suficientemente grandes. Isto implica que

$$|n a_n x^{n-1}| \leq |a_n (|x| + \epsilon)^n|,$$

logo a série $\sum |n a_n x^{n-1}|$ converge pelo teste da comparação.

Problemas

1. Determine as expansões em séries de potências das seguintes funções e os valores de x para os quais essas expansões são válidas:

(a) $\frac{1}{(1+x)^2}$;

(b) $\frac{1}{(1+x)^3}$.

2. Mostre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} x^n = \frac{1}{(1-x)^4}.$$

3. Calcule a soma de cada uma das seguintes séries:

(a) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$;

(b) $1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \cdots$;

(c) $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots$;

(d) $x + 2x^3 + 3x^5 + \cdots + nx^{2n-1} + \cdots$.

4. Mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = - \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt.$$

5. Mostre que a função de Bessel

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots$$

satisfaz a equação diferencial $xy'' + y' + xy = 0$.

6. Obtenha a série

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \cdots$$

integrando uma outra série.

7. Se $\epsilon > 0$, mostre que a desigualdade $|n x^{n-1}| \leq (|x| + \epsilon)^n$ é verdadeira para todos os valores de n suficientemente grandes. Sugestão: $n^{1/n} |x|^{1-(1/n)} \rightarrow |x|$.

14.10 SÉRIE DE TAYLOR E FÓRMULA DE TAYLOR

Já resolvemos o problema de determinar a natureza geral da soma de uma série de potências: dentro do intervalo de convergência, ela é uma função contínua com derivadas de todas as ordens. Investigaremos agora o problema inverso de começar com uma dada função infinitamente derivável e expandi-la em uma série de potências. Na Seção 14.9 estabelecemos várias expansões desse tipo para algumas funções especiais com derivadas particularmente simples. Nosso propósito aqui é considerar um método de maior generalidade.

Pode parecer que os coeficientes de uma série de potências não têm necessariamente ligação entre si. Entretanto, na verdade, eles são ligados por uma cadeia invisível, que esclarecemos agora.

Com esse fim, vamos assumir que uma função $f(x)$ seja a soma de uma série de potências com raio de convergência positivo,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots, \quad R > 0. \quad (1)$$

Pelos resultados da Seção 14.9, a repetida derivação termo a termo é legítima e acarreta

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots, \\ f''(x) &= 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + 3 \cdot 4a_4 x^2 + \cdots, \\ f'''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4 x + 3 \cdot 4 \cdot 5a_5 x^2 + \cdots, \end{aligned}$$

e em geral

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + \text{termos contendo } x \text{ como fator}$$

Sabemos que essas expansões das derivadas em série de potências são válidas no intervalo aberto $|x| < R$. Colocando $x = 0$ nessas equações obtemos

$$\begin{aligned} f(0) &= a_0, & f'(0) &= a_1, & f''(0) &= 1 \cdot 2a_2, \\ f'''(0) &= 1 \cdot 2 \cdot 3a_3, & \dots, & & f^{(n)}(0) &= n!a_n, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} a_0 &= f(0), & a_1 &= f'(0), \\ a_2 &= \frac{f''(0)}{2!}, & a_3 &= \frac{f'''(0)}{3!}, & \dots, & a_n &= \frac{f^{(n)}(0)}{n!}. \end{aligned} \quad (2)$$

Essas fórmulas são realmente notáveis, pois nos dizem que se $f(x)$ tem uma expansão em série de potências da forma (1), então seus coeficientes devem ser os números dados por (2). A série (1) torna-se, portanto,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots. \quad (3)$$

A série de potências à direita de (3) chama-se *série de Taylor de $f(x)$* [em $x = 0$]. A conclusão seguinte está implícita nessa discussão:

Se uma função é representada por uma série de potências com raio de convergência positivo, então existe somente uma série como essa e deve ser a série de Taylor da função.

Resumidamente, as expansões em série de potências são únicas, pois (2) nos diz que os coeficientes são univocamente determinados pela própria função. Se usarmos as convenções-padrão mencionadas anteriormente, que $0! = 1$ e que a zero-ésima derivada de $f(x)$ é a própria $f(x)$ [$f^{(0)}(x) = f(x)$], então (3) pode ser escrita como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \quad (4)$$

Os números $a_n = f^{(n)}(0)/n!$ chamam-se *coeficientes de Taylor de $f(x)$* .*

A equação (3) era verdadeira na discussão precedente porque começamos com uma série convergente tendo $f(x)$ como sua soma. Começamos agora com uma função $f(x)$ que tem derivadas de todas as ordens em algum intervalo aberto I contendo o ponto $x = 0$. Podemos formar a série de Taylor à direita de (3) e colocar a questão: é a equação (3) uma expansão válida de $f(x)$ no intervalo I ? Para que não haja qualquer má compreensão, estabelecemos tão claramente quanto possível que essa equação nem sempre é válida e se é ou não depende inteiramente da natureza individual da função $f(x)$. Na Observação 2, daremos um exemplo de uma função infinitamente derivável cuja série de Taylor converge em toda parte, mas não ao valor da função; logo, nesse caso particular, a equação (3) é falsa.

A fim de esclarecer melhor nossas idéias, procedemos como se segue. Paramos a série de Taylor, à direita de (3), no termo contendo x^n e definimos o resto $R_n(x)$ pela equação

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x). \quad (5)$$

* Brook Taylor (1685-1731) foi secretário da Royal Society e um entusiástico defensor de Newton em sua controvérsia acrimoniosa com Leibniz e os irmãos Bernoulli acerca da invenção do Cálculo. Taylor publicou sua expansão em série de potências de uma função em 1715, mas simplesmente como uma fórmula e sem qualquer consideração de convergência. Essa expansão já tinha sido publicada por John Bernoulli em 1694. Taylor estava totalmente ciente desse fato, mas preferiu ignorá-lo. Naqueles dias a ciência desperdia paixões que hoje vemos somente em política e religião.

Então a série de Taylor, à direita em (3), converge à função $f(x)$ exatamente quando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0. \quad (6)$$

Essas equações realmente não resolvem nada, porque $R_n(x)$ é definida como sendo o que torna (5) verdadeira, e (6) é simplesmente o significado da afirmação de que a série de Taylor converge à função. Essa abordagem é útil apenas quando podemos mostrar que $R_n(x)$ pode ser expressa em uma forma que torna viável a prova de (6) no caso de funções particulares. Enfatizamos que (6) nem sempre é verdadeira, porque (3) não é sempre verdadeira. A fórmula geral mais conveniente para $R_n(x)$ é

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad (7)$$

onde c é algum número entre 0 e x . Quando $R_n(x)$ é expressa dessa maneira, (5), chama-se a *fórmula de Taylor com resto na forma de derivada**. A prova de (7) é razoavelmente técnica e é dada na Observação 3, de modo que os estudantes que desejarem ignorá-la podem fazê-lo tranquilamente.

Damos agora diversas ilustrações do uso de (6) e (7). Primeiro, no entanto, observamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0 \quad (8)$$

para todo x , pois a série $\sum x^n/n!$ é absolutamente convergente em toda parte. Precisaremos desse fato em nossos dois primeiros exemplos.

Exemplo 1 Determine a série de Taylor para a função $f(x) = e^x$ e use (6) e (7) para provar que converge a e^x para todo x .

Solução Temos claramente

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x, & f(0) &= 1; \\ f'(x) &= e^x, & f'(0) &= 1; \\ f''(x) &= e^x, & f''(0) &= 1; \end{aligned}$$

* Há outras formas do resto que não abordaremos.

e assim por diante. Por substituição em (3), obtemos

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \quad (9)$$

e para provar a validade da expansão pelos nossos métodos presentes, examinamos o resto $R_n(x)$. Para todo x , é fácil ver que o valor máximo da função exponencial no intervalo de 0 a x é seu valor M na extremidade direita. Por (7) e (8) temos, portanto,

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \left| \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0,$$

logo (9) é válida. Naturalmente, estabelecemos (9) de uma outra maneira na Seção 14.9.

Exemplo 2 Determine a série de Taylor para $f(x) = \sin x$ e use (6) e (7) para provar que converge a $\sin x$ para todo x .

Solução Podemos esquematizar nosso trabalho como se segue:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, & f(0) &= 0; \\ f'(x) &= \cos x, & f'(0) &= 1; \\ f''(x) &= -\sin x, & f''(0) &= 0; \\ f'''(x) &= -\cos x, & f'''(0) &= -1; \end{aligned}$$

e as derivadas subseqüentes seguem esse mesmo padrão. Por substituição em (3), obtemos

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (10)$$

Até agora, tudo que sabemos é que se $\sin x$ tem uma expansão em série de potências, então essa expansão deve ser (10). Para provar que (10) é realmente verdadeira para todo x , usamos (6) e (7). Como

$$|f^{(n+1)}(x)| = |\sin x| \quad \text{ou} \quad |f^{(n+1)}(x)| = |\cos x|,$$

é claro que $|f^{(n+1)}(c)| \leq 1$ para todo número c . Portanto, por (7) e (8), temos

$$|R_n(x)| = |f^{(n+1)}(c)| \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0,$$

logo (10) é verdadeira. Os estudantes devem recordar que provamos (10) na Seção 13.4 por um método muito diferente, exigindo considerável engenhosidade. Nosso método presente tem a vantagem de ser direto e sistemático.

Exemplo 3 Determine a série de Taylor para $\cos x$ e prove que converge a $\cos x$ para todo x .

Solução Poderíamos proceder de modo direto, como no Exemplo 2. Em vez disso, que é deixado aos estudantes para ser feito nos problemas, obtemos a série desejada derivando (10),

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \quad (11)$$

A validade dessa expansão é garantida pelos resultados da Seção 14.9. Como já encontramos a expansão em série de potências de $\cos x$, sabemos, pela discussão da unicidade feita anteriormente, que essa deve ser a série de Taylor.

As três séries estabelecidas nesses exemplos podem ser usadas para determinar expansões em série de potências para muitas outras funções. Assim, como (9) é verdadeira para todo x , uma representação em série de potências de e^{-x^2} pode ser encontrada substituindo $-x^2$ por x . Isto acarreta

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots. \quad (12)$$

Podemos aplicar essa fórmula para calcular a integral definida

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx,$$

mesmo que a correspondente integral indefinida não possa ser calculada em termos de funções elementares*. Integração termo a termo dá

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \cdots \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \cdots.$$

Essa expressão para o valor da integral como uma série numérica é exata e pode ser usada para obter esse valor em forma decimal com qualquer grau de precisão.

* Veja a Seção 10.8 (Volume I).

Observação 1 Dada uma função $f(x)$ que é infinitamente derivável em algum intervalo contendo o ponto $x = 0$, examinamos a possibilidade de expandir essa função como série de potências em x . De modo mais geral, se $f(x)$ é infinitamente derivável em algum intervalo contendo o ponto $x = a$, podemos perguntar acerca de sua possível expansão como uma série de potências em $x - a$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots. \quad (13)$$

Esse problema é equivalente ao primeiro, porque (13) é o mesmo que a série $g(w) = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \cdots$, onde $w = x - a$ e $g(w) = f(x)$, e portanto nenhuma discussão separada é exigida. Como $g^{(n)}(0) = f^{(n)}(a)$, a série de Taylor de $f(x)$ em potências de $x - a$ (ou em $x = a$) é

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \cdots. \quad (14)$$

Alguns autores referem-se a (3), que é o caso especial de (14) correspondente a $a = 0$, como a série de Maclaurin. Entretanto esse costume não tem justificativa histórica e está sendo rapidamente abandonado. Sempre que usarmos a frase "série de Taylor" sem qualquer especificação, estaremos querendo dizer "série de Taylor em potências de x " ou em $x = 0$.

Observação 2 No Problema 42 da Seção 12.3 pedimos aos estudantes para considerar a função $f(x)$ definida para todos os números reais x por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Essa função é contínua e tem derivadas de todas as ordens para todos os valores de x . Além disso, toda derivada se anula em $x = 0$, isto é, $f^{(n)}(0) = 0$ para todo inteiro positivo n . Isto significa que o gráfico da função (Fig. 14.8) é extremamente achatado na origem — poderíamos dizer "infinitamente achatado". Para essa função, a fórmula de Taylor (5) torna-se

$$f(x) = 0 + 0 + \cdots + 0 + R_n(x).$$

A série de Taylor da função é, portanto, a série

$$0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots,$$

que converge para todo x mas converge a $f(x)$ apenas para $x = 0$.

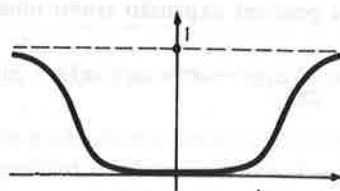


Figura 14.8

Assim, embora a função tenha derivadas de todas as ordens em toda parte, ainda não é necessariamente representada por sua série de Taylor, e se desejamos estabelecer a validade de uma tal representação, devemos invocar outros argumentos sólidos de alguma natureza, como é ilustrado nos três exemplos discutidos acima.

Observação 3 Damos agora uma prova da fórmula (7) para o resto $R_n(x)$. Primeiro, definimos $s_n(x)$ escrevendo

$$R_n(x) = S_n(x)x^{n+1}$$

para $x \neq 0$. A seguir, mantemos x fixo e definimos uma função $F(t)$ para $0 \leq t \leq x$ (ou $x \leq t \leq 0$) escrevendo

$$F(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - S_n(x)(x-t)^{n+1}.$$

A equação (5) mostra que $F(0) = 0$. Também é óbvio que $F(x) = 0$. Segue-se que $F'(c) = 0$ para algum número c entre 0 e x^* . Derivando $F(t)$ com relação a t , cancelando e substituindo t por c , obtemos

$$F'(c) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n + S_n(x)(n+1)(x-c)^n = 0,$$

logo

$$S_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

e a prova de (7) está completa.

* Em palavras, se o gráfico de nossa função $F(t)$ toca o eixo t em dois pontos, então deve ter uma tangente horizontal em algum ponto entre eles. Essa inferência repousa no fato de que $F(t)$ é contínua no intervalo fechado $0 \leq t \leq x$ (ou $x \leq t \leq 0$) e derivável no interior desse intervalo. Veja o teorema de Rolle no Apêndice B.4 (Volume I).

Problemas

- Use (3) para determinar a série de Taylor de cada uma das seguintes funções e depois use (6) e (7) para provar que cada uma dessas expansões é válida para todo x :

(a) $\cos x$; (b) e^{-x} ; (c) e^{3x} .

- Obtenha a série (11) para $\cos x$ a partir da série (10) para $\sin x$, integrando termo a termo. Sugestão: lembre-se de que a integral indefinida deve ser igual a zero quando $x = 0$.
- Obtenha a série (10) para $\sin x$ derivando a série (11) para $\cos x$.
- Determine a expansão em série de Taylor de cada uma das seguintes funções (sugestão: toda série de potências que converge a uma função num intervalo centrado em $x = 0$ deve ser a série de Taylor dessa função):

- (a) $x^2 e^x$;
 (b) $x e^{-3x}$;
 (c) $\cos \sqrt{x}$;
 (d) $x \sin 5x$;
 (e) $\sin x^2$;
 (f) $\cos^2 x$ [sugestão: $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$];
 (g) $\sin^2 x$;
 (h) $1 - 7 \sin^2 x$;

(i) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ para $x \neq 0$, $f(0) = 1$.

Nos Problemas de 5 a 9, use qualquer método para obter cada uma das expansões dadas em série de Taylor como estão indicados, sem se preocupar com convergência.

- $\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots$
- $\sec^2 x = 1 + x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \dots$
- $\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \dots$
- $\ln(1 + \sin x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \dots$
- $\ln(1 + e^x) = \ln 2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + \dots$
- Mostre que um polinômio $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ é sua própria série de Taylor.
- Se $P(x)$ é um polinômio de grau n e a é um número qualquer, mostre que

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

12. Determine a expansão em série de Taylor de

(a) $3x^2 - 5x + 7$ em potências de $x - 1$;

(b) x^3 em potências de $x + 2$.

Confira as expansões em (a) e (b) usando álgebra.

13. (a) Seja p uma constante arbitrária. Use (3) para obter a *série binomial*

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

(b) Observe que essa série termina e é um polinômio sempre que p é um inteiro não-negativo e somente nesse caso. Em todos os outros casos, mostre que essa série tem raio de convergência $R = 1$. O fato de que a expansão em (a) é válida para $|x| < 1$ não é fácil de provar pelos métodos dessa seção; um tipo diferente de prova é esboçado no Problema Suplementar 75, no fim deste capítulo.

14. Use o Problema 13 para escrever a expansão em série de Taylor de $(1-x^2)^{-1/2}$ e integre esta para obter a série de Taylor de $\arcsin x$.

15. Determine as representações em série de potências para

(a) $\int \frac{\sin x}{x} dx$; (b) $\int \sqrt{1+x^3} dx$;

(c) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

14.11 (OPCIONAL) OPERAÇÕES COM SÉRIES DE POTÊNCIAS

Na Seção 14.10 obtivemos a série de Taylor para várias funções usando a fórmula $a_n = f^{(n)}(0)/n!$ para achar os coeficientes. Entretanto, computar derivadas sucessivas pode ser um trabalho difícil e desencorajador se não tiver algum padrão simples. Podemos observar facilmente esse fato no cálculo da 7ª derivada de uma função, tal como $\tan x$ ou $x^5/(1-x^4)$, pois os cálculos visivelmente afundam-nos cada vez mais no pântano a cada etapa. Para algumas funções fomos capazes de estabelecer a validade de suas expansões de Taylor, provando que $R_n(x) \rightarrow 0$ quando

$n \rightarrow \infty$, mas isto também pode ser difícil. Para evitar tais problemas, discutimos agora diversos métodos algébricos para obter novas expansões de Taylor válidas a partir de outras que já conhecemos.

Antes de começar, lembramos aos estudantes que as expansões em série de Taylor são únicas. Isto significa que se uma função $f(x)$ pode ser expressa como a soma de uma série de potências *por qualquer método*, então essa deve ser a série de Taylor de $f(x)$. Por exemplo, sabemos da Seção 14.3 que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad |x| < 1; \quad (1)$$

e substituindo x por x^4 e depois multiplicando por x^5 obtemos

$$\frac{1}{1-x^4} = 1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \dots, \quad |x| < 1,$$

$$\frac{x^5}{1-x^4} = x^5 + x^9 + x^{13} + x^{17} + \dots, \quad |x| < 1.$$

Evitamos deliberadamente a tarefa muito laboriosa de usar a fórmula $a_n = f^{(n)}(0)/n!$ para verificar que as três séries à direita são realmente as séries de Taylor das funções à esquerda. Mas essas verificações não são necessárias, porque essa conclusão segue-se automaticamente do princípio enunciado acima.

Multiplicação

Suponha que sejam dadas duas expansões em série de potências,

$$f(x) = \sum a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \quad (2)$$

e

$$g(x) = \sum b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots, \quad (3)$$

ambas válidas num intervalo $|x| < R$. Se ignoramos a questão de convergência por um momento, então podemos multiplicar essas séries da mesma maneira que multiplicamos dois polinômios. Ou seja, multiplicamos sistematicamente cada termo da primeira série e depois juntamos os termos envolvendo as mesmas potências de x . Primeiro, a multiplicação termo a termo:

$$\begin{array}{ll} a_0: & a_0b_0 + a_0b_1x + a_0b_2x^2 + a_0b_3x^3 + \dots \\ a_1x: & a_1b_0x + a_1b_1x^2 + a_1b_2x^3 + \dots \\ a_2x^2: & a_2b_0x^2 + a_2b_1x^3 + \dots \\ a_3x^3: & a_3b_0x^3 + \dots \\ & \dots \end{array}$$

Somando essas colunas, obtemos a série de potências

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)x^3 + \dots \quad (4)$$

A forma do coeficiente de x^n em (4) é evidente: os índices dos a crescem quando os índices dos b decrescem, e a sua soma permanece constante e é igual ao expoente n de x^n . Resumindo, multiplicamos (2) e (3) obtendo

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n. \quad (5)$$

Afirmamos que o produto das séries (2) e (3) realmente converge no intervalo $|x| < R$ ao produto das funções $f(x)$ e $g(x)$, como foi indicado em (5). A prova não é fácil e depende da convergência absoluta das duas séries no intervalo dado. Os detalhes podem ser encontrados no Apêndice B.2.

Exemplo 1 Determine a série de Taylor para $e^x \sin x$.

Solução Sabemos que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (6)$$

e

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad (7)$$

Nosso trabalho pode ser realizado como se segue:

$$\begin{aligned} e^x \sin x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots \right) \left(x - \frac{x^3}{6} + \dots \right) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \dots \\ &\quad + x^2 - \frac{x^4}{6} + \dots \\ &\quad + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \dots \\ &\quad \dots \\ &= x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots \end{aligned}$$

Como as duas séries dadas (6) e (7) convergem para todo x , o mesmo é verdadeiro para a série produto. Não é fácil — e usualmente é quase impossível — reconhecer a fórmula para o termo geral da série produto nesse processo.

Exemplo 2 Determine a série de Taylor de $[\ln(1-x)]/(x-1)$.

Solução Sabemos que

$$\ln(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots\right), \quad |x| < 1,$$

logo

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1-x)}{x-1} &= \left(\frac{1}{1-x}\right) [-\ln(1-x)] = (1+x+x^2+\dots) \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots\right) \\ &= x + \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)x^n, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

Este é um dos raros casos em que o termo geral da série produto é fácil de reconhecer.

Divisão

Duas séries de potências podem ser divididas pelo processo da divisão longa, utilizada em álgebra elementar para dividir polinômios. Como estamos trabalhando com séries de potências, os termos são naturalmente arranjados em ordem de expoentes crescentes, em vez de em ordem de expoentes decrescentes como é usual com polinômios. Em casos particulares, no entanto, uma ou ambas as séries dadas podem ser um polinômio.

Exemplo 3 Determine a série de Taylor de $\operatorname{tg} x$ dividindo a série de $\operatorname{sen} x$ pela série de $\cos x$.

Solução Temos

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots \overline{) \begin{array}{l} x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots \\ x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots \\ \hline \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{10}x^5 + \dots \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5 + \dots \\ \hline \frac{2}{15}x^5 + \dots \end{array}}$$

logo

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots \quad (8)$$

Pode ser mostrado que essa expansão é válida no intervalo $|x| < \pi/2$. Como este é o maior intervalo com centro $x = 0$ no qual o denominador $\cos x$ é não-nulo, a série (8) tem raio de convergência $R = \pi/2$. Como descobrir uma fórmula para o termo geral dessa série foi resolvido por Euler em 1748. Sua solução depende das idéias da Seção 14.12 e é esboçada no Apêndice A.12.

O processo usado para dividir uma série de potências por outra certamente não é muito difícil. A teoria que justifica esse processo é dada no Apêndice B.5.

Substituição

Este é um método que já usamos: se uma série de potências

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \quad (9)$$

converge para $|x| < R$ e se $|g(x)| < R$, então podemos certamente achar $f[g(x)]$ substituindo x por $g(x)$ em (9). Por exemplo, não há problema em usar as séries (1), (6) e (7) para obter

$$\frac{1}{1+2x^2} = \frac{1}{1-(-2x^2)} = 1 + (-2x^2) + (-2x^2)^2 + \dots = 1 - 2x^2 + 4x^4 - \dots, \quad |2x^2| < 1;$$

$$e^{x^4} = 1 + x^4 + \frac{(x^4)^2}{2!} + \frac{(x^4)^3}{3!} + \dots = 1 + x^4 + \frac{x^8}{2!} + \frac{x^{12}}{3!} + \dots, \quad \text{todo } x;$$

e

$$\sin 3x = 3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} - \dots = 3x - \frac{27}{3!}x^3 + \frac{243}{5!}x^5 - \dots, \quad \text{todo } x.$$

Nesses exemplos, substituímos as funções simples $g(x) = -2x^2$, x^4 e $3x$ por séries de potências apropriadas, mas muito mais é possível. Sob condições adequadas, podemos realmente substituir uma série de potências por outra! Assim, suponha que a função $g(x)$ seja dada por uma série de potências

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots, \quad (10)$$

e substitua essa série inteira no lugar de x em (9)

$$\begin{aligned} f[g(x)] &= a_0 + a_1g(x) + a_2[g(x)]^2 + \dots \\ &= a_0 + a_1[b_0 + b_1x + \dots] + a_2[b_0 + b_1x + \dots]^2 + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Novamente isto é perfeitamente legítimo contanto que $|g(x)| < R$. Entretanto, a série à direita de (11) pode agora ser convertida em uma série de potências em x elevando ao quadrado, ao cubo etc., e colecionando as mesmas potências de x e, pode ser provado que a série de potências formada dessa maneira converge a $f[g(x)]$ sempre que (10) seja absolutamente convergente e $|g(x)| < R^*$.

Exemplo 4 Aplique o método de substituição para determinar a série de Taylor de $e^{\operatorname{sen} x}$ até o termo que contém x^4 .

Solução Podemos usar (6) e (7) para escrever

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + \dots\right) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + \dots\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^3}{6} + \dots\right)^3 + \frac{1}{24} \left(x - \frac{x^3}{6} + \dots\right)^4 + \dots \\ &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + \dots\right) + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \dots\right) + \frac{1}{6} (x^3 + \dots) + \frac{1}{24} (x^4 + \dots) + \dots \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \dots \end{aligned}$$

* Veja p. 180 de K. Knopp, *Theory and Applications of Infinite Series*, Hafner, 1951.

Se tentamos aplicar esse método a $e^{\cos x}$, vemos que infinitos termos contribuem para a formação de cada coeficiente, o que é uma situação difícil de ser tratada. Por essa razão, o método da substituição não é um instrumento prático a menos que $b_0 = 0$ na série (10).

Funções Pares e Ímpares

Uma função $f(x)$ definida num intervalo $|x| < R$ é *par* se $f(-x) = f(x)$ e *ímpar* se $f(-x) = -f(x)$. A série de Taylor da função par $\cos x$ contém somente potências pares de x e a série de Taylor da função ímpar $\sin x$ contém somente potências ímpares de x . Esses fatos são casos particulares de um princípio geral: se $f(x)$ é uma função par, então sua série de Taylor tem a forma

$$a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6 + \dots;$$

e se $f(x)$ é uma função ímpar, então sua série de Taylor tem a forma

$$a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + a_7x^7 + \dots$$

Ou seja, a série de Taylor de uma função par (ímpar) contém somente potências pares (ímpares) de x . Isto é muito fácil de provar a partir da unicidade de expansões em série de potências*. Como um outro exemplo desse fenômeno, sabemos de antemão que a série à direita em (8) contém somente potências ímpares de x , porque $\operatorname{tg} x$ é uma função ímpar.

Muitas funções são pares e muitas são ímpares, mas a maioria não é nenhuma das duas. Entretanto, toda função definida num intervalo $|x| < R$ pode ser expressa como a soma de uma função par e de uma função ímpar:

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = g(x) + h(x),$$

onde, como é facilmente verificado,

$$g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \quad \text{é par}$$

e

$$h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] \quad \text{é ímpar.}$$

* Temos apenas de salientar que se $f(x) = \sum a_n x^n$, pela unicidade temos $a_n = (-1)^n a_n$ e, portanto, $a_n = -a_n$, ou $a_n = 0$ se n é ímpar. Raciocínio análogo se aplica quando $f(x)$ é ímpar.

Além disso, se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, então

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} \quad \text{e} \quad h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}.$$

Assim, a série de Taylor de $f(x)$ é dividida em duas séries de potências, uma com expoentes pares representando a parte par de $f(x)$ e uma com expoentes ímpares representando a parte ímpar.

Exemplo 5 A parte par e a parte ímpar de

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

são

$$g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

e

$$h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Estas são as duas funções hiperbólicas $\cosh x$ e $\sinh x$ que já foram definidas na Seção 9.7.

Exemplo 6 Determine a soma da série

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

Solução Esta é a parte par da série familiar

$$f(x) = -\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

A soma da série dada é, portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] &= \frac{1}{2}[-\ln(1-x) - \ln(1+x)] \\ &= -\frac{1}{2} \ln(1-x^2) = -\ln \sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

Problemas

1. No Exemplo 1, continue o cálculo e determine os termos da série produto até o termo contendo x^6 .

Nos Problemas 2 a 13, use a multiplicação para mostrar que a função dada tem a expansão em série de potências indicada.

$$2. \frac{\sin x}{1-x} = x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{5}{6}x^4 + \frac{101}{120}x^5 + \dots$$

$$3. e^{x+x^2} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \dots$$

$$4. e^x \cos x = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \dots$$

$$5. \frac{\arctg x}{1-x} = x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{13}{15}x^5 + \dots$$

$$6. \ln^2(1-x) = x^2 + x^3 + \frac{11}{6}x^4 + \frac{5}{2}x^5 + \dots$$

$$7. \frac{\cos x}{1-x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{13}{24}x^4$$

$$+ \frac{13}{24}x^5 + \dots$$

$$8. \operatorname{tg}^2 x = x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{17}{45}x^6 + \dots$$

$$9. \frac{e^x}{2+x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{48}x^3 + \frac{1}{96}x^4 + \dots$$

$$10. \sqrt{1+x} \ln(1+x) = x - \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{7}{1920}x^5 + \dots$$

$$11. e^{-x} \operatorname{tg} x = x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \dots$$

$$12. \frac{1-x}{1-x^3} = \frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + x^9 - x^{10} + \dots$$

$$13. \frac{\sin x}{1+x} = x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{5}{6}x^4 + \frac{101}{120}x^5 + \dots$$

14. Elevando ao quadrado a série de $\sin x$ e $\cos x$, mostre que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ pelo menos até o termo x^6 .

15. Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, use multiplicação de séries para mostrar que

$$\frac{1}{1-x} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 + a_1 + \dots + a_n) x^n.$$

Use esse resultado para escrever as séries nos Problemas 2, 5 e 7 por inspeção.

16. Use o Problema 15 para determinar a soma da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

17. A expansão em série binomial de $1/\sqrt{1-x}$ é

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^4 \cdot 4!}x^4 + \dots$$

Confira isto elevando ao quadrado a série e mostrando que o resultado é $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$, pelo menos até o termo x^4 .

18. No Exemplo 3, continue o cálculo e determine a série de $\operatorname{tg} x$ até o termo contendo x^7 .

19. Use divisão para obter as expansões em série dadas nos Problemas 2, 5, 7, 9, 12 e 13.

Nos Problemas 20 a 27, use divisão para obter as expansões dadas.

$$20. \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

$$21. \frac{1-x}{1-x+x^2} = 1 - x^2 - x^3 + x^5 + x^6$$

$$- x^8 - x^9 + \dots$$

$$22. \frac{x^2}{1-x+x^2-x^3} = x^2 + x^3 + x^6 + x^7 + \dots$$

$$23. \frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 + \dots$$

$$24. \frac{1}{1+x+x^2+x^3+\dots} = 1-x.$$

$$25. \frac{\sin x}{\ln(1+x)} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{24}x^3 + \dots$$

$$26. \sec x = \frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \dots$$

$$27. \frac{\arcsin x}{\cos x} = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{11}{30}x^5 + \dots$$

Nos Problemas 28 e 29, use o método da substituição para determinar a série de Taylor dada.

28. $\ln(1 + \sin x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots$
29. $\frac{1}{1 - x^2e^x} = 1 + x^2 + x^3 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{6}x^5 + \frac{73}{24}x^6 + \dots$
30. Use substituição e o fato de que $\sec x = 1/\cos x = 1/(1 - (1 - \cos x))$ para determinar a série de Taylor de $\sec x$ até o termo contendo x^6 . Qual o raio de convergência?
31. Use multiplicação e o resultado do Problema 30 para determinar a série de Taylor de $\tan x$ até o termo contendo x^7 .
32. (a) Determine a série de Taylor de $\sec^2 x$ até o termo contendo x^6 , expandindo $\sec^2 x = 1/\cos^2 x = 1/(1 - \sin^2 x)$ como uma série geométrica em $\sin^2 x$.
 (b) Determine a mesma série elevando ao quadrado a série encontrada no Problema 30.
 (c) Determine a mesma série derivando a série encontrada no Problema 31.
33. Mostre que uma função $f(x)$ definida num intervalo $|x| < R$ pode ser expressa de uma única maneira como a soma de uma função par $g(x)$ e uma função ímpar $h(x)$.
34. Calcule a soma da série $+\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$.
35. Calcule cada um dos seguintes limites determinando primeiro a série de Taylor da função dada:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

Dessa maneira, o uso da série de Taylor fornece, com frequência, uma alternativa conveniente para o uso da regra de L'Hospital.

36. Calcule a soma de cada uma das seguintes séries:

$$(a) x + x^2 - x^3 + x^4 + x^5 - x^6 + + - \dots;$$

$$(b) x^2 + x^3 + x^4 - x^5 + x^6 + x^7 + x^8 - x^9 + + + - \dots;$$

$$(c) \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + \dots;$$

$$(d) 1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{12}}{12!} + \dots$$

37. Calcule $f^{(7)}(0)$ se $f(x) = \tan x$ e use isto para obter o coeficiente de x^7 na expansão encontrada no Problema 18.

14.12 (OPCIONAL) NÚMEROS COMPLEXOS E FÓRMULA DE EULER

Considere as três conhecidas expansões em série de potências

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \quad (1)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad (2)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad (3)$$

A segunda e a terceira dessas séries parecem ser partes da primeira série de algum modo não óbvio que envolve mudanças nos sinais de alguns dos termos. Isto, por sua vez, sugere que as três funções à esquerda sejam provavelmente relacionadas entre si. Existe mesmo tal relação, que é conhecida como *fórmula de Euler*:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad (4)$$

onde $i = -1$ é a chamada unidade imaginária. Essa fórmula vem a ser um dos resultados mais importantes de toda a Matemática, com implicações que influenciam profundamente a própria Matemática e também muitas de suas aplicações, particularmente nos campos da Física e Engenharia Elétrica. Uma explanação completa da fórmula de Euler exigiria o desenvolvimento de uma teoria bastante completa dos números complexos e funções de uma variável complexa. Deixamos essa tarefa para um curso mais avançado e esboçamos resumidamente algumas das idéias necessárias, de modo muito incompleto, que, pelo menos, tem o mérito de emprestar um pouco de credibilidade à fórmula (4).

Até este ponto, todo nosso trabalho neste livro esteve no contexto do conjunto dos números reais. Contudo, os números reais têm uma deficiência — nem toda equação polinomial tem solução. Assim, a equação quadrática $x^2 + 1 = 0$ não tem solução no sistema de números reais porque não existe número real cujo quadrado seja igual a -1 . Essa deficiência foi tão enfraquecedora que várias centenas de anos atrás os matemáticos sentiram a necessidade de usar o símbolo aparentemente contraditório $\sqrt{-1}$ para significar uma solução de $x^2 + 1 = 0$. Esse símbolo foi mais tarde denotado pela letra i e foi encarado como um número imaginário ou fictício que podia ser manipulado algebricamente assim como um número real ordinário, exceto que $i^2 = -1$. Quaisquer escrúpulos que esses primeiros matemáticos possam ter sentido acerca da natureza desafiadora desse “número” foram deixados de lado, porque ele era muito útil para ser ignorado. Assim, por exemplo, a equação $x^2 + 1 = 0$ era fatorada escrevendo-a na forma equivalente $x^2 - i^2 = 0$ ou $(x + i)(x - i) = 0$, e suas soluções foram exibidas com os números $x = \pm i$.

Sem entrar nos detalhes que seriam necessários para dar uma respeitabilidade matemática a nossa discussão, descrevemos agora, simplesmente, os *números complexos* como todas as expressões formais $a + bi$, onde a e b são números reais e i é a unidade imaginária para a qual $i^2 = -1$. Os números complexos tomam o caráter de um legítimo sistema de números por meio da seguinte regra geral para realizar cálculos: na adição, multiplicação e divisão siga todas as regras familiares da álgebra elementar e depois simplifique sempre que possível, usando a equação $i^2 = -1$ para eliminar todas as potências de i maiores que a primeira, como em

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i, \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1, \quad i^5 = i^4 \cdot i = i, \quad (5)$$

e assim por diante.

Os números complexos $a + bi$ podem ser identificados com os números reais a se $b = 0$; logo, o conjunto dos números complexos constitui-se numa ampliação do sistema dos números reais. Não só a equação $x^2 + 1 = 0$ possui as duas soluções i e $-i$ dessa maneira, mas também toda equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ tem as duas soluções familiares

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

que são reais e distintas se $b^2 - 4ac > 0$, reais e iguais se $b^2 - 4ac = 0$, e complexas e distintas se $b^2 - 4ac < 0$. Por exemplo, a equação $x^3 - 6x + 13 = 0$ tem as raízes complexas distintas

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{-1}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i.$$

Além disso outras propriedades são válidas, pois toda equação polinomial da forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

onde n é um inteiro positivo e os a são números reais arbitrários com $a_n \neq 0$, tem exatamente n raízes (algumas das quais podem ser iguais) entre os números complexos. Mais ainda, isto é verdadeiro mesmo que os coeficientes sejam complexos. Este fato é conhecido como *Teorema Fundamental da Álgebra*. Ele mostra que não há necessidade de se construir ampliações do conjunto de números complexos a fim de resolver todas as equações polinomiais com coeficientes complexos*.

Retornamos agora ao nosso propósito original, que era ganhar um pouco de discernimento sobre a validade da fórmula de Euler.

* Há muitas provas deste teorema importante, em vários níveis de sofisticação. Veja, por exemplo, pp. 269-271 de R. Courant e H. Robbins, *That is Mathematics?*, Oxford University Press, 1941.

Uma teoria perfeitamente satisfatória de série de potências pode ser construída na qual a variável é permitida ser um número complexo em vez de meramente um número real. Dentro dessa teoria, toda as séries (1), (2) e (3) convergem para todos os valores complexos da variável. Se substituirmos x em (1) por ix e usamos (5), então obtemos

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \cdots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \frac{x^5}{5!} - \cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right), \end{aligned}$$

que dá a fórmula de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Se agora substituirmos x por $-x$ e usamos o fato de que $\cos(-x) = \cos x$ e $\sin(-x) = -\sin x$, obtemos

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x;$$

e somando primeiro e depois subtraindo membro a membro as duas equações, obtemos imediatamente

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{e} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Essas fórmulas têm várias aplicações na Matemática Avançada. Uma aplicação particularmente interessante é esboçada no Apêndice A.12. Salientamos também que se pomos $x = \pi$ na fórmula de Euler, temos

$$e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi$$

ou

$$e^{\pi i} = -1.$$

Essa bela equação, que liga os números misteriosos e difundidos π , e e i , é um dos fatos mais notáveis da Matemática.

As idéias desta seção são esboçadas de maneira tão superficiais que elas são limitadas a serem mais sugestivas do que convincentes. O eminente matemático britânico E. C. Titchmarsh observou certa vez: "Encontrei-me com uma pessoa, recentemente, que me contou que estava demasiado longe de acreditar na raiz quadrada de menos um, pois não acreditava nem mesmo no menos um. Esta é, de qualquer modo, uma atitude consistente". Há só um modo de passar esses conceitos do *status* de especulações razoáveis para o reino da certeza, e este é empreender um estudo cuidadoso da teoria das funções de uma variável complexa. Esse assunto é um dos ramos mais ricos e mais compensadores da Matemática e nós recomendamos o seu estudo, de coração.

Problemas Suplementares do Capítulo 14

Seção 14.2

1. Determine $\lim x_n$ se

$$(a) x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right);$$

$$(b) x_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right);$$

$$(c) x_n = \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n};$$

$$(d) x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}.$$

2. Se $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\lim_{m \rightarrow \infty} (2/\pi) \arctan(m \sin^2[n! \pi x])]$, mostre que $f(x) = 0$ quando x é racional e 1 quando x é irracional.
3. Se $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\lim_{m \rightarrow \infty} \cos^m(n! \pi x)]$, mostre que $f(x) = 1$ quando x é racional e 0 quando x é irracional.
4. Determine o valor de cada um dos seguintes limites:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n + x^{-n}} \quad (x > 0); \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} + n}{x^n + 2n}.$$

5. Para cada sequência $\{x_n\}$ cujo n -ésimo termo é dado, verifique que os três primeiros termos são $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ e calcule o quarto termo:

$$(a) x_n = \frac{1}{n}; \quad (b) x_n = \frac{1}{2n^3 - 12n^2 + 23n - 12};$$

$$(c) x_n = \frac{1}{n2^{(n-1)(n-2)(n-3)}}.$$

6. Se a é um número dado qualquer, defina uma sequência $\{x_n\}$ (construindo uma fórmula adequada para x_n em termos de n) que tem a propriedade de que

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{3} \text{ e } x_4 = a.$$

7. A chamada *seqüência de Fibonacci* $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ é definida recursivamente pondo $x_1 = 1, x_2 = 1$ e $x_n = x_{n-2} + x_{n-1}$ para $n > 2$. Determine uma fórmula para x_n em termos de n . Sugestão: faça a conjectura engenhosa de que x_n tem a forma $\alpha A^n + \beta B^n$ para valores convenientes de α, β, A, B ; daí, determine A e B de modo que a fórmula de recorrência seja verdadeira para todos os α e β e, finalmente, determine α e β de modo que $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$.

8. Se $\{x_n\}$ é a seqüência de Fibonacci definida no Problema 7, mostre que

$$\lim x_{n+1}/x_n = (1 + \sqrt{5})/2.$$

9. A seqüência $\sqrt{2}, \sqrt{2}\sqrt{2}, \sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}, \dots$ pode ser definida recursivamente pondo $x_1 = \sqrt{2}$ e $x_{n+1} = \sqrt{2}x_n$ para $n \geq 1$.

- (a) Use indução matemática para provar que $x_n < x_{n+1} < 2$ para todo n . Isto mostra que a seqüência é crescente e tem 2 como um majorante e, portanto, converge a um limite $x \leq 2$.

- (b) Mostre que $x = 2$ usando a fórmula de recorrência.

- (c) Mostre que $x = 2$ determinando uma fórmula explícita para x_n em termos de n .

* Fibonacci ou Leonardo de Pisa (1170-1230) foi um homem de negócios italiano que viajava por todo o Oriente Médio, tendo sido o principal responsável pela introdução dos numerais indo-arábicos (isto é, 1, 2, 3, ...) na Europa. Ele encontrou sua seqüência num problema sobre a prole de coelhos. Ela tem sido aplicada amplamente (e excentricamente) à religião, arte, formas de caracóis do mar etc.

** O princípio de indução garante o seguinte: uma afirmação $S(n)$ que é significativa (no sentido de ser ou verdadeira ou falsa) para cada inteiro positivo n é verdadeira para todo n se (i) $S(1)$ é verdadeira; e (ii) $S(n)$ implica $S(n+1)$. Esse princípio é discutido com detalhes no Apêndice D.2.

10. A sequência $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \dots$ pode ser definida recursivamente pondo $x_1 = \sqrt{2}$ e $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$ para $n \geq 1$. Mostre que ela é crescente tendo 2 como um majorante e calcule seu limite.
11. Se $a > 0$, então a sequência $\sqrt{a}, \sqrt{a+\sqrt{a}}, \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}, \dots$ pode ser definida recursivamente como no Problema 10. Mostre que ela converge e calcule seu limite.
12. Seja $f(x)$ uma função contínua crescente no intervalo $0 \leq x \leq 1$. Defina as sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ por

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

- (a) Mostre que

$$a_n \leq \int_0^1 f(x) dx \leq b_n \quad \text{e} \quad 0 \leq \int_0^1 f(x) dx - a_n \leq \frac{f(1) - f(0)}{n}.$$

- (b) Mostre que ambas as sequências convergem ao limite $\int_0^1 f(x) dx$.
- (c) Estabeleça um fato correspondente para o intervalo $a \leq x \leq b$.

13. Use o Problema 12 para obter os seguintes limites:

- (a) $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \rightarrow \frac{1}{2};$
- (b) $\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{n^2}{n^3} \rightarrow \frac{1}{3};$
- (c) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \rightarrow \ln 2;$
- (d) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{kn} \rightarrow \ln k;$
- (e) $\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \rightarrow \frac{\pi}{4};$
- (f) $\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{(n+n)^2} \rightarrow \frac{1}{2};$
- (g) $\frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{n\pi}{n} \right) \rightarrow \frac{2}{\pi};$
- (h) $\frac{1}{n} \left(\sin^2 \frac{\pi}{n} + \sin^2 \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin^2 \frac{n\pi}{n} \right) \rightarrow \frac{1}{2};$

(i) $\frac{1}{n} (\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \dots + \sqrt[n]{e^n}) \rightarrow e - 1;$

(j) $\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \rightarrow \ln(1+\sqrt{2});$

(k) $\frac{1}{n} \left(\ln \frac{1}{n} + \ln \frac{2}{n} + \dots + \ln \frac{n}{n} \right) \rightarrow -1.$

14. Utilize a parte (k) do Problema 13 para mostrar que

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \rightarrow \frac{1}{e}.$$

15. Utilize o Problema 14 para mostrar que

(a) $\frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \dots (n+n)} \rightarrow \frac{4}{e};$

(b) $\frac{1}{n} \sqrt[n]{(2n+1)(2n+2) \dots (2n+n)} \rightarrow \frac{27}{4e}.$

16. Se $x_n \rightarrow x$, então a sequência das médias aritméticas dos x_n também converge a x , isto é,

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \rightarrow x.$$

Prove isto em duas etapas, como se segue.

- (a) Comece assumindo que $x = 0$, determine um inteiro positivo n_0 tal que $|x_n| < \epsilon/2$ para todo $n \geq n_0$ e utilize o fato de que para esses valores de n temos

$$|y_n| \leq \frac{|x_1 + x_2 + \dots + x_{n_0-1}|}{n} + \frac{|x_{n_0}| + \dots + |x_n|}{n} < \frac{a}{n} + \frac{\epsilon}{2},$$

onde $a = |x_1 + x_2 + \dots + x_{n_0-1}|$ é uma constante.

- (b) No caso geral, em que $x = 0$ não é assumido, utilize o fato de que, como $x_n - x \rightarrow 0$, podemos inferir da parte (a) que

$$\frac{y_n - x}{n} = \frac{(x_1 - x) + (x_2 - x) + \cdots + (x_n - x)}{n} \rightarrow 0.$$

17. Utilize o Problema 16 para mostrar que

(a) $\frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + 1/n}{n} \rightarrow 0;$

(b) $\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} \rightarrow 1.$

18. Se $\{x_n\}$ é uma sequência de números positivos tais que $x_{n+1}/x_n \rightarrow r$, então temos também $\sqrt[n]{x_n} \rightarrow r$. Prove isto da seguinte maneira: ponha $y_n = \ln x_{n+1}/x_n$; mostre que

$$\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}}{n} = \ln \sqrt[n]{x_n} - \ln \sqrt[n]{x_1};$$

e aplique o Problema 16.

19. Utilize o Problema 18 para mostrar que $\sqrt[n]{n!}/n \rightarrow 1/e$.

20. O produto de Wallis, que pode ser expresso na forma

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \rightarrow \frac{\pi}{2},$$

é provado no Apêndice A.5. Como $2n/(2n+1) \rightarrow 1$, o produto de Wallis pode também ser escrito como

$$\frac{2^2}{3^2} \cdot \frac{4^2}{5^2} \cdot \frac{6^2}{7^2} \cdots \frac{(2n-2)^2}{(2n-1)^2} \cdot 2n \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

Extraindo raízes quadradas e multiplicando o numerador e o denominador por $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)$, deduza a fórmula

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{2/2n}}{(2n)! \sqrt{n}} = \sqrt{\pi},$$

que será necessária no Problema 21.

21. É um fato notável que a função $f(x) = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ seja uma boa aproximação de $n!$ para n grande, no sentido de que o erro relativo tende a zero:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f(n) - n!}{n!} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f(n)}{n!} - 1 \right] = 0.$$

Isto é equivalente à afirmação de que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}} = 1,$$

que é conhecida como *fórmula de Stirling**. Além de seu interesse intrínseco, essa fórmula é um instrumento útil (em estatística e na Teoria de Probabilidade) para o cálculo numérico aproximado de $n!$ quando n é grande. Prove a fórmula de Stirling, verificando as seguintes afirmações:

- (a) $2/(2n+1) \leq \ln(1+1/n)$ (sugestão: compare a área sob a curva $y = 1/x$ de $x = n$ a $x = n+1$ com a área do trapézio cuja base superior é tangente à curva em $x = n+1/2$);

(b) $e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1/2}$ [sugestão: $\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1/2}$];

- (c) a área A sob $y = \ln x$ de $x = 1$ a $x = n$ é

$$\int_1^n \ln x \, dx = n \ln n - n + 1 = \ln \left(\frac{n}{e}\right)^n + 1;$$

- (d) o número x_n definido por

$$x_n = \frac{(n/e)^n \sqrt{n}}{n!}$$

é ≤ 1 [sugestão: compare a área A da parte (c) com a área $B = 1 + \ln n! - \ln \sqrt{n}$ da seguinte figura: divida o intervalo de $x = 1$ a $x = n$ em subintervalos pelos pontos $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots, n - \frac{1}{2}$; nos primeiro e último subintervalos construa retângulos com alturas 2 e $\ln n$ e nos

* James Stirling (1692-1770) começou sua carreira sendo expulso de Oxford por apoiar a extinta dinastia Stuart e terminou-a como um bem-sucedido diretor de uma companhia de mineração. Em seus dias de mocidade ele era amigo de Newton e escreveu um ensaio sobre séries infinitas em que quase descobriu a fórmula que leva seu nome.

subintervalos restantes construa trapézios cujas bases superiores são tangentes à curva $y = \ln x$ em $x = 2, 3, \dots, n-1$;

(e) $\{x_n\}$ é uma sequência crescente que é limitada pela parte (d), logo existe $\lim x_n$;

(f) $\lim x_n = \lim \frac{x_n^2}{x_{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

[sugestão: utilize a fórmula estabelecida no Problema 20];

(g) a parte (f) implica a fórmula de Stirling.

Seção 14.3

22. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, qual a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$?

23. Para que valores de x é válido

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^5} + \dots = \frac{x}{x^2 - 2} ?$$

24. Determine os valores de x para os quais

$$\frac{x}{1+x} - \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{x}{1+x}\right)^3 - \dots$$

converge. Qual é sua soma?

25. Determinando uma fórmula fechada para a n -ésima soma parcial s_n , mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ converge a $x/(1-x)^2$ quando $|x| < 1$ e diverge caso contrário.

26. Calcule a soma da série $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{27} + \dots$.

27. Utilize o fato de que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ para mostrar que

(a) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$;

(b) $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$;

(c) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{17^2} + \dots = \frac{\pi^2}{9}$.

28. Mostre que

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

expressando o integrando como uma série geométrica e integrando termo a termo.

29. Mostre que

(a) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots = \ln 2$;

(b) $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots = 1 - \ln 2$;

(c) $\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots = 2 \ln 2 - 1$.

30. Mostre que

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots = 1$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1) \cdots (n+k)} = \frac{1}{k \cdot k!}$.

31. Calcule a soma de

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$.

32. Se $f(n) \rightarrow L$, mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} [f(n) - f(n+2)] = f(1) + f(2) - 2L$$

e utilize isto para estabelecer as seguintes afirmações:

$$(a) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \dots = \frac{3}{4};$$

$$(b) \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{4 \cdot 6} + \dots = \frac{1}{4}.$$

33. Se $a_1, a_2, a_3, \dots$ são os inteiros positivos cujas representações decimais não contêm o algarismo 5, mostre que $\sum 1/a_n$ converge e tem soma < 90 .
34. A Fig. 14.9 mostra a região limitada pelos dois círculos de raio 1 tangentes entre si e por uma reta tangente a ambos.

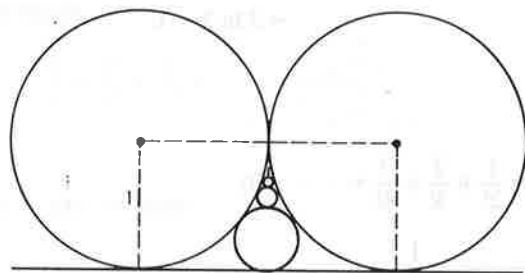


Figura 14.9

Uma sequência de círculos menores, cada um tendo o raio máximo, é inscrita na região da maneira mostrada na figura. É claro, pela geometria da situação, que os comprimentos dos diâmetros desses círculos menores são os termos de uma série convergente cuja soma é 1. Mostre que essa série é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

Seção 14.4

35. Determine se cada uma das seguintes séries converge ou diverge:

$$(a) \sum \frac{2}{n^2 + n};$$

$$(b) \sum \frac{n^2 + 31}{10,000n^3};$$

$$(c) \sum \frac{1}{(n+3)^2};$$

$$(d) \sum \frac{n}{\sqrt{n^2 + 2}};$$

$$(e) \sum \frac{1}{[1 + (n-1)/n]^n}; \quad (f) \sum \frac{\sqrt{n}}{n+5};$$

$$(g) \sum \frac{\tan^{-1} n}{n^3}; \quad (h) \sum \frac{3}{2 + \sqrt{n}};$$

$$(i) \sum \frac{(3n+1)^3}{(n^3+2)^2}; \quad (j) \sum \frac{1}{\sqrt[3]{3n^2+1}};$$

$$(k) \sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}};$$

$$(l) \sum \frac{2n+3}{n \cdot 3^n}; \quad (m) \sum \frac{5n-7}{(n+5)n!};$$

$$(n) \sum \sqrt{\sin^3 \frac{1}{n}}; \quad (o) \sum \left(\frac{n+1}{2n} \right)^n;$$

$$(p) \sum \left(\frac{n^2-1}{n^3+3} \right)^{1/3}; \quad (q) \sum \frac{\sqrt{n+1}}{n^{n+1/2}};$$

$$(r) \sum \frac{2^n + 3^n}{3^n + 4^n}; \quad (s) \sum (1 - e^{-1/n})^n;$$

$$(t) \sum \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}; \quad (u) \sum \sin^2 \pi \left(n + \frac{1}{n} \right);$$

$$(v) \sum \frac{[\ln(n+1)]^n}{n^{n+1}}.$$

36. Se $a > 1$, mostre que $\sum 1/a^{\ln n}$ diverge se $a \leq e$ e converge se $a > e$.
37. Prove que toda série convergente de termos positivos pode ser rearranjada de modo que seus termos formem uma sequência decrescente.
38. Se p é uma constante positiva qualquer, mostre que $\sum 1/(\ln n)^p$ diverge.
39. Mostre que as séries

$$\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \quad \text{e} \quad \sum \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}$$

são ambas convergentes. Sugestão: expresse $(\ln n)^{\ln n}$ como uma potência de n .

40. Mostre que

$$\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$$

diverge. Sugestão: $(\ln \ln n)^2 \leq \ln n$ para n grande (por quê?).

41. Se $a_n \leq 0$ e $\sum a_n$ converge e se $\{b_n\}$ é uma sequência limitada de números não-negativos, prove que $\sum a_n b_n$ também converge. Utilize a série $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ para mostrar que o resultado é falso se as hipóteses $a_n \leq 0$ e $b_n \leq 0$ são abandonadas.

42. Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são séries de termos não-negativos tais que $\sum a_n^2$ e $\sum b_n^2$ convergem, mostre que $\sum a_n b_n$ também converge.

Seção 14.5

43. Mostre que

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}$$

diverge e também que, se p é uma constante positiva, então

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^p}$$

converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

44. Se
- k
- é um inteiro qualquer
- > 1
- , mostre que

$$\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{kn} \right) \rightarrow \ln k.$$

45. A soma da série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$ não é conhecida. Entretanto, se essa soma é denotada por s , mostre que

$$(a) \frac{1}{1^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \dots = \frac{7}{8}s;$$

$$(b) \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \dots = \frac{3}{4}s.$$

46. Para $p > 1$, a soma da p -série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ é uma função de p chamada *função zeta* (o símbolo ζ é a letra grega *zeta*) e denotada por $\zeta(p)$, isto é,

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$$

Euler descobriu que $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90$ e $\zeta(6) = \pi^6/945$ (veja o Apêndice A.12), mas o valor de $\zeta(p)$ não é conhecido quando p é ímpar.

- (a) Utilize as desigualdades (5) da Seção 14.5 para mostrar que a função zeta satisfaz as desigualdades

$$\frac{1}{p-1} \leq \zeta(p) \leq \frac{p}{p-1}$$

e

$$1 \leq \zeta(p) \leq \frac{p}{p-1}.$$

- (b) Mostre que $\lim_{p \rightarrow 1} \zeta(p) = \infty$ e $\lim_{p \rightarrow \infty} \zeta(p) = 1$.

- (c) Mostre que $\lim_{a \rightarrow 0+} a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+a}} = 1$.

47. Seja k um inteiro > 1 e mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(k)}{n} = \ln k,$$

onde $a_n(k)$ é definida por

$$a_n(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ não é múltiplo de } k, \\ -(k-1) & \text{se } n \text{ é múltiplo de } k. \end{cases}$$

48. O teste da condensação de Cauchy afirma que se $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ é uma sequência decrescente de números positivos, então as duas séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots$$

convergem ou divergem. (Essa afirmação chama-se *teste de condensação* porque diz que uma proporção bem pequena dos termos das primeiras séries determina seu comportamento de convergência.)

- (a) Prove o teste de condensação. Sugestão: se s_n e t_n são as somas parciais, agrupe os termos das primeiras séries em blocos para mostrar que $s_n \leq t_m$ se $n \leq 2^m$ e $t_m \leq 2s_n$ $2^m \leq n$.

- (b) Utilize o teste de condensação para mostrar que as séries

$$\sum \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \sum \frac{1}{n \ln n}$$

divergem e que as séries

$$\sum \frac{1}{n^p} \quad \text{e} \quad \sum \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

convergem se $p > 1$.

49. Prove que

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{2} \ln n + \ln 2 + \frac{1}{2} \gamma + o(1).$$

50. Mostre que

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} = 2 - 2 \ln 2;$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4n^2-1)} = 2 \ln 2 - 1;$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(9n^2-1)} = \frac{3}{2} (\ln 3 - 1);$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(16n^2-1)} = 3 \ln 2 - 2;$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(36n^2-1)} = \frac{3}{2} \ln 3 + 2 \ln 2 - 3;$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2-1)^2} = \frac{1}{8};$$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4n^2-1)^2} = \frac{3}{2} - 2 \ln 2.$$

Seção 14.6

Utilize o teste da razão para determinar o comportamento das seguintes séries.

$$51. \sum \frac{n}{e^n}.$$

$$52. \sum n^{1000} \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

$$53. \sum \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}.$$

$$54. \sum \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}.$$

$$55. \sum \frac{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdots (5n-4)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-2)}.$$

$$56. \sum \frac{1000^n}{n!}.$$

$$57. \sum \frac{(n+3)!}{n! 3^n}.$$

$$58. \sum \frac{2^{2n}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}.$$

$$59. \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} + \cdots.$$

60. (a) Mostre que o teste da razão falha para a série

$$\sum \frac{1}{2^{n+(-1)^n}}.$$

- (b) Mostre que o teste da raiz funciona para a série da parte (a) e nos diz que essa série converge.

(Assim, o teste da raiz funciona em alguns casos em que o teste da razão falha. Podemos dizer ainda mais, pois o Problema Suplementar 18 garante que, se $\{a_n\}$ é uma sequência qualquer de números positivos, então

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow L \quad \text{implica} \quad \sqrt[n]{a_n} \rightarrow L.$$

Em princípio o teste da raiz é mais poderoso que o teste da razão.)

61. Considere a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \cdots,$$

onde $0 < a < b < 1$. Mostre que o teste da razão falha e estabeleça a convergência usando o teste da raiz.

Seção 14.7

62. Mostre que a série

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots$$

diverge. Isto contradiz o teste da série alternada?

63. Utilize o teste da série alternada para provar a existência da constante de Euler γ como se segue.

(a) Mostre que a série

$$1 - \int_1^2 \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} - \int_2^3 \frac{dx}{x} + \frac{1}{3} - \int_3^4 \frac{dx}{x} + \frac{1}{4} - \int_4^5 \frac{dx}{x} + \dots$$

converge.

(b) Se a soma da série em (a) é denotada por γ , mostre que

$$s_{2n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

de modo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = \gamma.$$

64. Utilize o teste da série alternada para mostrar que a integral imprópria

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

converge. Sugestão: esboce o gráfico de $y = (\sin x)/x$ para $x > 0$ e observe que consiste em um número infinito de partes, cada uma cobrindo um intervalo de comprimento π e estando alternadamente acima e abaixo do eixo x , e depois expresse a integral como uma série alternada,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \dots = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

65. Mostre que $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{3} \ln 2 + \pi/3\sqrt{3}$.

66. Mostre que

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \gamma \ln 2 - \frac{1}{2} (\ln 2)^2.$$

Sugestão: veja a equação (9) da Seção 14.5.

Seção 14.8

67. Considere uma série de potências $\sum a_n x^n$ e suponha que $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ existe, podendo valer $+\infty$. Mostre que o raio de convergência R da série é dado pela fórmula

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Utilize essa fórmula para determinar o raio de convergência de

$$(a) \sum \frac{x^n}{n^n};$$

$$(b) \sum \frac{1}{(\ln n)^n} x^n;$$

$$(c) \sum \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}} x^n.$$

68. Se o raio de convergência de $\sum a_n x^n$ pode ser calculado a partir da fórmula (7) da Seção 14.8, mostre que ele também pode ser calculado a partir da fórmula do Problema 67. (Sugestão: veja o Problema Suplementar 18.) Mostre que a última fórmula é mais poderosa que a primeira, considerando a série.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + (-1)^{n+1}} = \frac{x}{2^2} + \frac{x^2}{2^1} + \frac{x^3}{2^4} + \frac{x^4}{2^3} + \dots$$

69. Se uma série de potências converge condicionalmente num ponto x_1 ou diverge de tal modo que seus termos são limitados, mostre que x_1 deve ser uma extremidade do intervalo de convergência.

70. Utilize o Problema 69 para determinar por inspeção o raio de convergência de

(a) $1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} + \frac{x^3}{3^3} + \dots$;

(b) $x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \dots$;

(c) $\sum x^n = x + x + x^2 + x^6 + x^{24} + \dots$;

(d) $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3^2} + \frac{x^3}{2^3} + \frac{x^4}{3^4} + \frac{x^5}{2^5} + \frac{x^6}{3^6} + \dots$;

(e) $\sum [2^{(-1)^n} x]^n = 1 + \frac{x}{2} + 2^2 x^2 + \frac{x^3}{2^3} + 2^4 x^4 + \dots$.

71. Determine o intervalo de convergência de $\sum a_n x^n$ se seus coeficientes são ordenados aleatoriamente dentre os números 2, 3, ..., 12, jogando um par de dados.

Seção 14.9

72. Considere uma série de potências $\sum a_n x^n$ em que os coeficientes se repetem ciclicamente, $a_{n+1} = a_n$. Mostre que

(a) $R = 1$;

(b) a soma é

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{k-1} x^{k-1}}{1 - x^k}$$

73. Calcule a soma de cada uma das seguintes séries:

(a) $x - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{5^2} - \frac{x^7}{7^2} + \dots$;

(b) $\frac{x^2}{1 \cdot 2} - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} - \frac{x^5}{4 \cdot 5} + \dots$;

(c) $1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + 25x^4 + \dots$;

(d) $\frac{x^4}{4} + \frac{x^8}{8} + \frac{x^{12}}{12} + \frac{x^{16}}{16} + \dots$;

(e) $x + 2^3 x^2 + 3^3 x^3 + 4^3 x^4 + \dots$;

(f) $4 + 5x + 6x^2 + 7x^3 + \dots$.

Seção 14.10

74. Utilize qualquer método para obter cada uma das seguintes expansões em série de Taylor:

(a) $\sin x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \dots$;

(b) $\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{48}x^3 + \dots$;

(c) $e^{x^2-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots$.

75. Considere a série binomial

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{p(p-1)(p-2) \cdots (p-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

onde p é uma constante arbitrária. No Problema 13 da Seção 14.10 a série à direita foi obtida como a série de Taylor da função $(1+x)^p$ e também vimos que essa série converge para $|x| < 1$. Esboçamos aqui uma sequência de passos para provar que a série à direita realmente converge à função da esquerda para esses valores de x .

(a) Denote por $f(x)$ a soma da série para $|x| < 1$, calcule $f'(x)$ e $xf'(x)$ e mostre que

$$(1+x)f'(x) = pf(x).$$

(b) Defina $g(x)$ por

$$g(x) = \frac{f(x)}{(1+x)^p}$$

e utilize a parte (a) para mostrar que $g'(x) = 0$ para $|x| < 1$, de modo que $g(x) = c$ para alguma constante c .

(c) Mostre que $c = 1$ na parte (b) e conclua que

$$(1+x)^p = f(x).$$

Seção 14.11

76. Se $f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$, calcule $(1-x)f_1(x)$ e utilize o resultado para determinar uma fórmula fechada para $f_1(x)$.
77. Utilize a idéia do Problema 76 para determinar uma fórmula fechada para $f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$.
78. Utilize a idéia dos Problemas 76 e 77 para determinar uma fórmula fechada para $f_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(n+2)x^n$.
79. Na notação dos Problemas 76 a 78 mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = f_2(x) - f_1(x)$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n = f_3(x) - 3f_2(x) + f_1(x).$$

Utilizando essas idéias como um ponto de partida, esboce uma prova do seguinte teorema: se $p(n)$ é um polinômio em n , então $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n$ é uma função racional.

80. Mostre que $1/\sqrt{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$, onde $P_n(x)$ é um polinômio de grau n , substituindo $h = 2xt - t^2$ na série binomial por $1/\sqrt{1-h}$ [veja o Problema 17 da Seção 14.11]. Determine $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$. Os polinômios $P_n(x)$, chamados *polinômios de Legendre*, são importantes em Física, Matemática, por exemplo, no estudo de fluxo de calor em esferas sólidas.

81. Calcule os seguintes limites utilizando as séries de Taylor:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2 \operatorname{tg} x}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen}^2 x};$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} + \cos x - 2}{x^4}.$$