MAT 0220 - CÁLCULO 4 - IAG

2° SEMESTRE DE 2017

LISTA DE PROBLEMAS

1) Determine se as seguintes séries convergem ou divegem. Caso convirjam, determine se a convergência é absoluta ou condicional.

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1} \qquad \text{(b)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3-1} \qquad \text{(c)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^3-1} \qquad \text{(d)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{(-3)^n}$$

$$\text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}} \qquad \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{10}}{n!} \qquad \text{(g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^n n!}{n^n}$$

2) Determine o raio de convergência das seguintes séries de potências. Descreva também o que ocorre nos extremos do intervalo de convergência de cada série.

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1} \qquad \text{(b)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^3-1} \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \ln n}{\sqrt{n}}$$

$$\text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10} x^n}{n!} \qquad \text{(e)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n} \qquad \text{(f)} \sum_{n=}^{\infty} 2^n x^{n^2}$$

3) Determine o raio de convergência das séries

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!\, x^n}{(n!)^2} \quad , \qquad \text{(b)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^n x^n}{n!}.$$

4) (a) Mostre que, para todo $x \in \mathbb{R}$, a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n\, x^n}{n!}$ converge absolutamente.

(b) Mostre que a função f definida por $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n\, x^n}{n!}$, satisfaz $f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

5) (a) Mostre que, para todo $x \in \mathbb{R}$, a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{4^n (n!)^2}$ converge absolutamente.

(b) Mostre que a função J_0 definida por $J_0(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{4^n (n!)^2}$, satisfaz $xJ_0''(x) + J_0'(x) + xJ_0(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

5$\frac{1}{2}$) (a) Mostre que, para todo $x \in \mathbb{R}$, a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!n!}$ converge absolutamente.
(b) Mostre que a função J_1 definida por $J_1(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!n!}$, satisfaz $x^2 J_1''(x) + xJ_1'(x) + (x^2 - 1)J_1(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

6) Mostre que as seguintes identidades são válidas se $|x| < 1$.

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)x^n = \frac{1}{(x-1)^3}$$

7) (a) Mostre que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x$ se $|x| < 1$.
(b) Mostre que $\dfrac{\pi}{4} = \arctan \dfrac{1}{2} + \arctan \dfrac{1}{3}$.
(c) Encontre um número racional que aproxime π com erro menor do que 10^{-4}.

8) (a) Mostre que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ se $|x| < 1$.
(b) Faça $x = \frac{1}{3}$ no item (a) e obtenha um racional que aproxime $\ln 2$ com erro menor do que 10^{-4}.

9) Determine números racinais que aproximem as seguintes integrais com erro menor do que 10^{-4}.

$$\text{(a)} \int_0^1 e^{-x^2}\, dx \qquad \text{(b)} \int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\, dx \qquad \text{(c)} \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

$$\text{(d)} \int_{1/2}^1 \ln x\, dx \qquad \text{(e)} \int_0^{1/2} e^{x^2}\, dx$$