Capítulo 4

SÉRIES DE POTÊNCIAS

SÉRIES DE FUNÇÕES COMPLEXAS

Estudaremos, neste capítulo, o desenvolvimento de funções analíticas em séries de potências. Veremos ser este um modo natural de construir funções analíticas e um dos instrumentos mais importantes no tratamento dessas funções. Iniciamos este estudo com algumas definições gerais relativas às séries de funções.

Começamos observando que as definições de limite e convergência de seqüências e séries de números complexos são exatamente as mesmas que já conhecemos do caso real. Desses conceitos seguem as mesmas propriedades já conhecidas no caso real sobre limites de soma, produto, quociente etc., e cujas demonstrações são feitas segundo as mesmas linhas de raciocínio.

Uma *série de funções* é uma série

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \dots$$

cujos termos f_n são, em geral, funções de uma variável (complexa) z, todas com um domínio comum de definição. As expressões

$$\sum f_n(z), \quad \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \quad \text{e} \quad f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z) + \dots$$

são meros símbolos com que denotamos uma série. No caso de uma série

convergente, eles assumem o significado de soma da série, isto é,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \dots = \lim s_n(z),$$

onde $s_n(z)$ é a soma parcial ou reduzida de ordem n:

$$s_n(z) = \sum_{j=0}^{n} f_j(z). \tag{4.1}$$

Em se tratando de uma série convergente, é claro que sua soma $s(z) = \sum f_n(z)$ é, em geral, uma função de z. Neste caso a expressão

$$r_n(z) = s(z) - s_n(z) = \sum_{j=n+1}^{\infty} f_j(z) = f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \dots$$

é chamada o *resto* da série a partir do termo $f_{n+1}(z)$.

Convergência simples ou pontual

Seja

$$s(z) = \sum f_n(z) \tag{4.2}$$

uma série convergente, para todo z num certo conjunto D. Então, dado qualquer $\varepsilon > 0$, para cada $z \in D$ existe N tal que

$$n \geq N \Rightarrow |s(z) - s_n(z)| < \varepsilon, \tag{4.3}$$

onde $s_n(z)$ é a reduzida de ordem n dada em (4.1).

É importante observar que, em geral, N depende não somente de ε mas também do valor z considerado. Por exemplo, consideremos a série geométrica

$$1 - z + z^2 + z^3 + \dots,$$

para a qual

$$s_n(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad z \neq 1.$$

É claro que para $|z| < 1$ a série acima converge e sua soma é $(1-z)^{-1}$:

$$s(z) = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots, \quad |z| < 1.$$

Por outro lado,

$$|s(z) - s_n(z)| = \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|}$$

é menor do que ε se e somente se (estamos supondo $|z| < 1$)

$$n > \frac{\log(\varepsilon|1-z|)}{\log|z|} - 1.$$

Esta última expresão, por sua vez, cresce acima de qualquer valor à medida que z aproxima o valor 1; logo, não é possível determinar N de forma a satisfazer (4.3) para todo z de módulo menor do que 1: o valor de N depende de cada z particular que se considere, por isso mesmo a convergência costuma ser chamada de *convergência simples* ou *convergência pontual*, que é o único tipo de convergência que temos de considerar quando estudamos seqüências e séries numéricas. No entanto, ao tratarmos seqüências e séries de funções, sejam elas reais ou complexas, há um outro tipo muito importante de convergência, chamada *convergência uniforme*, que vamos considerar em seguida. Esse tipo de convergência é um dos tópicos centrais de qualquer curso de Análise ([A2], Capítulo 9).

Convergência uniforme

4.1. Definições. *1) Diz-se que uma seqüência de funções $(f_n(z))$, definidas num mesmo domínio D, converge uniformemente para uma função $f(z)$ se for sempre possível determinar um índice N em correspondência a cada $\varepsilon > 0$, tal que*

$$\forall z \in D \text{ e } n > N \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

2) Diz-se que a série (4.2) converge uniformemente em D se for sempre possível determinar um índice N em correspondência a cada $\varepsilon > 0$, tal que a condição (4.3) fique satisfeita para todo $z \in D$.

4.2. Exemplos. 1) A seqüência $f_n(z) = nze^{-nz}$ converge para zero, qualquer que seja $z = re^{i\theta}$ no setor circular $r \geq 0$ e $|\theta| < \pi/2$, mas não uniformemente. Para vermos isso, observamos que

$$|nze^{-nz}| = nr|e^{-nr(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)}| = nre^{-nr\cos\theta}.$$

Ora, esta última expressão tende a zero em todo ponto z fixo. Mas não uniformemente. Por exemplo, basta imaginar θ fixo e $r = 1/n$: ou, ainda, r fixo e θ aproximando-se de $\pi/2$ de tal modo que $\cos\theta = 1/nr$.

2) A série geométrica, considerada anteriormente, é um exemplo típico de série que converge no disco $|z| < 1$, mas não uniformemente. A mesma série converge uniformemente em qualquer disco fechado $|z| \leq \delta < 1$. Com efeito, temos:

$$\frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} \leq \frac{\delta^{n+1}}{1-|z|} \leq \frac{\delta^{n+1}}{1-\delta}.$$

que é menor do que ε, desde que tomemos

$$n > \frac{\log\varepsilon(1-\delta)}{\log\delta} - 1.$$

Assim, a condição (4.3) fica satisfeita para todo z no disco fechado $|z| \leq \delta$.

4.3. Teorema. *Uma condição necessária e suficiente para que a série (4.1) convirja uniformemente em D é que, dado $\varepsilon > 0$, seja possível determinar N tal que, para todo inteiro positivo p, tenhamos:*

$$z \in D \text{ e } n > N \Rightarrow |s_{n+p}(z) - s_n(z)| < \varepsilon, \tag{4.4}$$

ou seja,

$$z \in D \text{ e } n > N \Rightarrow |f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \ldots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon.$$

Demonstração. Supondo que a série convirja uniformemente em D, seja $s(z)$ sua soma. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que, para todo $n \geq N$ e $z \in D$,

$$|s_n(z) - s(z)| < \frac{\varepsilon}{2};$$

é claro que vale também a desigualdade

$$|s_{n+p}(z) - s(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então, usando a desigualdade do triângulo,

$$\begin{aligned} |s_{n+p}(z) - s_n(z)| &= |[s_{n+p}(z) - s(z)] + [s(z) - s_n(z)]| \\ &\leq |s_{n+p}(z) - s(z)| + |s(z) - s_n(z)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Isto prova que a condição é necessária.

Para provar que ela é suficiente, partimos da hipótese de que (4.4) esteja satisfeita; logo, para cada z fixo, $s_n(z)$ é uma seqüência numérica de Cauchy, portanto, convergente. Seja $s(z)$ seu limite, que é também o limite de $s_{n-p}(z)$ com $p \to \infty$. Então,

$$\lim_{p\to\infty} [s_{n+p}(z) - s_n(z)] = s(z) - s_n(z);$$

e, em conseqüência, temos também que

$$\lim_{p\to\infty} |s_{n+p}(z) - s_n(z)| = |s(z) - s_n(z)|.$$

Finalmente, passando ao limite em (4.4) com $p \to \infty$, vem:

$$z \in D \text{ e } n > N \Rightarrow |s(z) - s_n(z)| \leq \varepsilon,$$

provando que a condição é suficiente.

Uma conseqüência importante do teorema acima é o chamado *teste de Weierstrass*, que consideramos a seguir. Ele é freqüentemente usado para testar se uma série é ou não uniformemente convergente.

4.4. Teorema (teste M de Weierstrass). *Sejam $\sum M_n$ uma série numérica convergente e $f_n(z)$ uma seqüência de funções definidas num conjunto D, satisfazendo a condição $|f_n(z)| \leq M_n$ para todo n e todo $z \in D$. Então, a série $\sum f_n(z)$ converge uniformemente em D.*

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(z) + \ldots + f_{n+p}(z)| &\leq |f_{n+1}(z)| + \ldots + |f_{n+p}(z)| \\ &\leq M_{n+1} + \ldots + M_{n+p}. \end{aligned}$$

Como $\sum M_n$ é convergente, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe N tal que

$$z \in D \text{ e } n > N \Rightarrow M_{n+1} + \ldots + M_{n+p} < \varepsilon;$$

logo, temos também,

$$z \in D \text{ e } n > N \Rightarrow |f_{n+1}(z) + \ldots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon.$$

Daqui e do Teorema 4.3 segue a convergência uniforme de $\sum f_n(z)$ em D.

4.5. Exemplo. Para vermos que a série geométrica $1 + z + z^2 + \ldots$, considerada anteriormente, converge uniformemente em qualquer disco $|z| \leq \delta < 1$, basta aplicar o teste de Weierstrass, notando que a referida série é dominada pela série numérica $1 + \delta + \delta^2 + \ldots$, a qual é convergente, visto que $\delta < 1$.

O teorema seguinte revela a importância da convergência uniforme das séries de funções analíticas; seu alcance será mais bem compreendido logo adiante, quando tratarmos das séries de potências.

4.6. Teorema. *Seja*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \tag{4.5}$$

uma série de funções contínuas, uniformemente convergente num conjunto D. Então,

1) f é contínua em D;

2) no caso de a convergência ser uniforme ao longo de um contorno C, a integral de f sobre C pode ser obtida por integração de (4.5) termo a termo;

3) se a convergência é uniforme numa região simplesmente conexa R, onde as funções f_n são analíticas, então f também é analítica em R, e suas derivadas podem ser obtidas derivando a série (4.5) termo a termo um

número conveniente de vezes.

Demonstração. 1) Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário e z_0 um ponto qualquer de D. Com a notação

$$s_n(z) = \sum_{j=0}^{n} f_j(z), \qquad r_n(z) = \sum_{j=n+1}^{\infty} f_j(z),$$

resulta que $f(z) = s_n(z) + r_n(z)$; logo,

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq |s_n(z) - s_n(z_0)| + |r_n(z) - r_n(z_0)| \\ &\leq |s_n(z) - s_n(z_0)| + |r_n(z)| + |r_n(z_0)| \end{aligned} \tag{4.6}$$

Da convergência uniforme da série (4.5), segue-se que existe um índice N tal que

$$z \in D. \quad n \geq N \Rightarrow |r_n(z)| < \varepsilon.$$

Fixado $n = N$, usamos a continuidade de $s_N(z)$ para determinar $\delta > 0$ tal que

$$z \in D. \quad |z - z_0| < \delta \Rightarrow |s_N(z) - s_N(z_0)| < \varepsilon.$$

Portanto, com $n = N$ e $|z - z_0| < \delta$, a desigualdade (4.6) nos dá

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

donde a continuidade de f em D.

2) Quanto à integração ao longo de C,

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_C s_n(z)dz + \int_C r_n(z)dz \\ &= \sum_{j=0}^{n} \int_C f_j(z)dz + \int_C r_n(z)dz. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Tomando $n \geq N$ e observando que $|r_n(z)| < \varepsilon$, obtemos:

$$\left| \int_C r_n(z)dz \right| \leq \int_C |r_n(z)||dz| \leq \varepsilon L,$$

onde L é o comprimento do contorno C. Portanto, fazendo $n \to \infty$ em (4.7), obtemos o resultado desejado:

$$\int_C f(z)dz = \sum_{j=0}^{\infty} \int_C f_j(z)dz. \tag{4.8}$$

3) Vamos supor agora que as funções f_n sejam analíticas em R. Então

$$\int_C f_j(z)dz = 0, \quad j = 0, 1, \ldots$$

para todo contorno fechado C em R. Daqui e de (4.8) segue-se que a integral de f sobre C é nula. Como f é contínua e C é arbitrário, concluímos, pelo teorema de Morera (p. 106), que f é analítica em R.

Finalmente, devemos mostrar que $f' = \sum f_n'$. Dado $z \in R$, seja C um contorno fechado simples em R, envolvendo z positivamente; por exemplo, C pode ser um círculo $|\zeta - z| = \delta$. Como a série

$$\frac{k!}{2\pi i} \cdot \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \cdot \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}$$

converge uniformemente em ζ, para $\zeta \in C$, ela pode ser integrada termo a termo ao longo de C; usando a fórmula da derivada k-ésima (p. qq), obtemos, por integração termo a termo:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z).$$

Isto completa a demonstração do teorema.

EXERCÍCIOS

1. Supondo que a seqüência de números complexos (a_n) seja convergente, prove que a série $\sum a_n z^n$ converge uniformemente em qualquer disco $|z| \leq r < 1$. Prove que isso é verdade mesmo que a seqüência (a_n) seja apenas limitada, não necessariamente convergente.

2. Prove que a seqüência $f_n(z) = nze^{-n^2 z^2}$ tende a zero para todo z no setor circular $r \geq 0$ e $|\theta| < \pi/4$, mas não uniformemente. Prove que a convergência é uniforme em qualquer domínio do tipo $r \geq c > 0$ e $|\theta| < \pi/4 - \delta$, onde $0 < \delta < \pi/4$.

3. Derivando e integrando a série

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

obtenha os seguintes desenvolvimentos, válidos em $|z| < 1$:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n \quad \text{e} \quad \log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n},$$

onde $\log(1-z)$ é o ramo do logaritmo que corresponde a $\log 1 = 0$.

4. Obtenha os seguintes desenvolvimentos:

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n; \quad \frac{1}{1-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n};$$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^n; \quad \log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n;$$

todos válidos em $|z| < 1$.

Usando o teste de Weierstrass, mostre que as séries dadas nos Exercs. 5 a 16 convergem uniformemente nos domínios indicados em cada caso.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos 3n}{1+5n}z^n$, em qualquer disco $|z| \le r < 1$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 - 3\cos n}{10n^2+7}z^{2n-1}$, em qualquer disco $|z| \le r < 1$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+7\sqrt{n-1}}{(n+1)2^n}z^{2n-1}$, em qualquer disco $|z| \le r < \sqrt{2}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1}(z-1)^n$, em qualquer disco $|z-1| \le r < 1$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{R^n}z^n$, em qualquer disco $|z| \le r < R$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}z^n$, em qualquer disco $|z| < R$, qualquer que seja a constante a.

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{2n}}z^n$, em qualquer disco $|z| < R$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos n}{n^3+1}e^{z/n}$, em qualquer disco $|z| < R$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-z}$, em qualquer conjunto compacto que exclua os quadrados perfeitos.

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{z/n}}{n^2+z^2}$, em qualquer conjunto compacto que não contenha números da forma $z = \pm in$ com n natural.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(z-n)}$, em qualquer conjunto compacto que exclua os números naturais.

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n^2-z^2}$, em qualquer conjunto compacto que exclua os números inteiros.

17. Prove que a série $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$ define uma função analítica em $\operatorname{Re} z > 0$, conhecida como *função zeta* de Riemann.

18. Mostre que a série $\sum_{1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nz}{2^n}$ define uma função analítica na faixa $|\operatorname{Im} z| < \log 2$.

19. Mostre que a série $\sum_{1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nz}{n^2}$ converge uniformemente no eixo real, mas em nenhuma região do plano complexo.

SUGESTÕES

17. Qualquer ponto z tal que $\operatorname{Re} z > 0$ está contido num semiplano aberto $\operatorname{Re} z \ge c > 0$.

18. Use o teste de Weierstrass, notando que

$$|\operatorname{sen} nz|^2 = \frac{1}{4}(e^{2ny} + e^{-2ny}) + \frac{1}{2}(\operatorname{sen}^2 nx - \cos^2 nx).$$

19. Use a experiência ganha com o exercício anterior.

SÉRIES DE POTÊNCIAS

Dentre as séries de funções, são de interesse especial as *séries de potências*, ou séries do tipo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n. \tag{4.9}$$

onde os coeficientes a_n e o ponto z_0 são constantes complexas. Como veremos brevemente, toda série de potências convergente define uma função analítica, e toda função analítica num ponto $z = z_0$ pode ser desenvolvida em série de potências numa vizinhança de z_0.

Já vimos alguns exemplos dessas séries no caso das funções $(1-z)^{-1}$ e $(1+z)^{-1}$:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n; \quad \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n. \quad |z| < 1.$$

Aliás, estas séries são muito úteis na obtenção de outros desenvolvimentos, como já tivemos oportunidade de ver nos Exercs. 3 e 4 anteriores. A seguir damos mais quatro exemplos.

4.7. Exemplo. Vamos desenvolver a função $1/z$ em série de potências de $z-3$. Veja:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-3)-3} = \frac{1/3}{1+(z-3)/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (z-3)^n,$$

desenvolvimento este que é válido em $|z-3| < 3$.

4.8. Exemplo. Vejamos agora como desenvolver a mesma função $1/z$, porém em séries de potências de $z+4 = z-(-4)$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z+4)-4} = \frac{-1/4}{1-(z-4)/4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{4^{n+1}} (z+4)^n.$$

Aqui o desenvolvimento é válido em $|z+4| < 4$.

Nesses dois últimos exemplos, temos a mesma função $f(z) = 1/z$ desenvolvida em duas séries de potências distintas, uma em relação ao ponto $z_0 = 3$, a outra em relação ao ponto $z_0 = -4$.

4.9. Exemplo. Vamos desenvolver a função $f(z) = (2z-9)^{-1}$ em potências de $z-3$:

$$\frac{1}{2z-9} = \frac{1}{2(z-3)-3} = \frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{1-2(z-3)/3} = \frac{-1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2(z-3)}{3}\right]^n;$$

logo,

$$\frac{1}{2z-9} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2^n}{3^{n+1}} (z-3)^n,$$

desenvolvimento este que é válido em $|z-3| < 3/2$.

4.10. Exemplo. A mesma função do exemplo anterior será agora desenvolvida em potências de $z+4$:

$$\frac{1}{2z-9} = \frac{1}{2(z+4)-17} = \frac{-1}{17} \cdot \frac{1}{1-2(z+4)/17} = \frac{-1}{17} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2(z+4)}{17}\right]^n;$$

portanto,

$$\frac{1}{2z-9} = \sum \frac{-2^n}{17^{n+1}} (z+4)^n.$$

Este desenvolvimento é válido em $|z+4| < 17/2$.

Cada uma das séries consideradas nesses quatro últimos exemplos converge nos pontos z de um disco de centro z_0. E é fácil ver que elas divergem nos pontos z fora desses discos. Esta situação é de caráter geral e segue do teorema que consideramos a seguir.

4.11. Teorema. *A toda série de potências (4.9) está associado um número não-negativo r, tal que a série converge absolutamente em $|z-z_0| < r$ e uniformemente em qualquer disco $|z-z_0| \leq r' < r$. Ela diverge em $|z-z_0| > r$. O número r, que pode assumir os valores $r = 0$ e $r = \infty$, é chamado o "raio de convergência" da série; e o disco de raio r e centro z_0, o seu "disco de convergência".*

Demonstração. Pode acontecer que a série só convirja em $z = z_0$, caso em que, é claro, $r = 0$. Do contrário, a série converge em um certo $z = z_1 \neq z_0$; então, o termo geral $a_n(z_1 - z_0)^n$ tende a zero, donde segue-se que existe M tal que $|a_n(z_1 - z_0)^n| \leq M$ para todo n. Portanto,

$$|a_n(z-z_0)^n| = |a_n(z_1-z_0)^n| \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n \leq M \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n. \tag{4.10}$$

Isto mostra que a série $\sum |a_n(z-z_0)^n|$ é majorada pela série

$$M \sum \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n,$$

a qual converge no disco $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$; logo. a série (4.9) converge absolutamente em todo z desse disco.

Seja r o supremo do conjunto dos números $|z_1 - z_0|$, onde z_1 varia no conjunto dos pontos onde a série (4.9) converge. Dado qualquer z' no disco $|z - z_0| < r$ (Fig. 4.1), pela definição de r existe z_1 onde a série converge, e tal que $|z' - z_0| < |z_1 - z_0|$. Daqui e do que vimos no parágrafo anterior, concluímos que a série converge absolutamente em $z = z'$ e, portanto, no disco $|z - z_0| < r$.

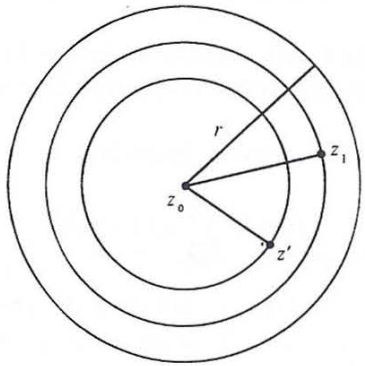

Fig. 4.1

Pela sua própria definição, vê-se também que, se r for finito, a série diverge em $|z - z_0| > r$.

Resta provar a convergência uniforme em qualquer disco $|z - z_0| \leq r' < r$. Fixemos z_1 tal que $r' < |z_1 - z_0| < r$ (Fig. 4.2). Então,

$$\left|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right| \leq \frac{r'}{|z_1 - z_0|} = q < 1.$$

Daqui e de (4.10). obtemos: $|a_n(z - z_0)^n| < Mq^n$: aplicando o teste de Weierstrass (Teorema 4.4), concluímos que a série (4.9) converge uniformemente no disco $|z - z_0| \leq r' < r$, o que completa a demonstração. (Observe que o teorema nada esclarece sobre os pontos da fronteira do disco de convergência.)

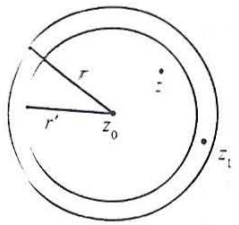

Fig. 4.2

4.12. Teorema. *O raio de convergência r da série (4.9) é dado por*

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|,$$

quando este limite existe. Em geral, r é dado por

$$r = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}},$$

com a convenção de se tomar $r = 0$ ou $r = \infty$, conforme o denominador desta expressão seja infinito ou zero, respectivamente.

Demonstração. Suponhamos que exista o primeiro limite referido. Então, pelo teste da razão, a série $\sum |a_n(z - z_0)^n|$ converge (portanto, converge também a série (4.9)) se

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n(z - z_0)^n}{a_{n+1}(z - z_0)^{n+1}}\right| = \frac{1}{|z - z_0|} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

for maior do que 1, vale dizer, $|z - z_0| < \lim |a_n/a_{n+1}| = r$.

Para completar a demonstração da primeira parte, resta provar que a série (4.9) diverge se $|z - z_0| > r$. Ora, se ela convergisse em um certo z_1, com $|z_1 - z_0| > r$, então, pelo teorema anterior, convergiria absolutamente em qualquer z' com $|z_1 - z_0| > |z' - z_0| > r$, contradizendo o teste da razão.

A demonstração da segunda parte é análoga, utilizando o teste da raiz, segundo o qual a série $\sum |a_n(z - z_0)^n|$ converge ou diverge conforme seja

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = |z - z_0|\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$$

menor ou maior do que 1, respectivamente.

EXERCÍCIOS

Nos Exercs. 1 a 5, obtenha os desenvolvimentos em séries de potências, conforme especificação em cada caso. Determine os respectivos discos de convergência e represente-os graficamente.

1. $f(z) = 1/z$ em potências de $z + i$.
2. $f(z) = 1/z$ em potências de $z - i$.
3. $f(z) = i/(z + i)$ em potências de $z - 1$.
4. $f(z) = 1/(2z - 3)$ em potências de z.
5. $f(z) = 1/(2z - 3)$ em potências de $z + i$.
6. $f(z) = 1/z^2$ em potências de $z - 1$.
7. $f(z) = 1/z^3$ em potências de $z + 2$.

Determine os raios de convergência das séries dadas nos Exercs. 8 a 16.

8. $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$.
9. $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$.
10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!}$.
11. $\sum_{n=0}^{\infty} \log(3n^2 + 5)(z + i)^n$.
12. $\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{sen} n)z^n$.
13. $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{2})^{3n} z^n$.
14. $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n})^n z^n$.
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n} z^{2n}$.
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} z^{n^2}$.
17. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, onde $a_{2n} = 2^{2n}$ e $a_{2n-1} = z^{2n-1}$.
18. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, onde $a_n = n^2$ se n é primo e $a_n = 0$ se n não é primo.

RESPOSTAS E SUGESTÕES

1. $\frac{1}{z} = \frac{1}{-i + (z + i)}$ = etc. O disco de convergencia é $|z + i| < 1$.
3. $\frac{i}{z + i} = \frac{i}{1 + i + (z - 1)} = \frac{i}{1 + i} \cdot \frac{1}{1 + (z - 1)/(1 + i)}$ = etc. O disco de convergência é $|z - 1| < \sqrt{2}$.

6. Obtenha primeiro a série de $1/z$, depois derive.

8. $r = 1$. 11. $r = 1$. 12. $r = 1/e$. 14. $r = 0$.

15. Trata-se de uma série de potências de $w = z^2$.

16. Observe que $a_{n^2} = n/3n$.

17. $r = 1/5$. 18. $r = 1$.

SÉRIES DE POTÊNCIAS, SÉRIE DE TAYLOR

Vamos estabelecer agora uma caracterização das funções analíticas como aquelas que podem ser desenvolvidas em séries de potências.

4.13. Teorema. *Toda série de potências*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{4.11}$$

representa uma função analítica no seu disco de convergência $|z - z_0| < r$. Ela pode ser derivada termo a termo um número arbitrário de vezes; e as séries assim obtidas possuem o mesmo raio de convergência r da série original, e representam as derivadas da função f.

Demonstração. Dado z qualquer no disco $|z - z_0| < r$, é claro que existe $r_1 < r$ tal que $|z - z_0| < r_1$ (Fig. 4.3a). Neste disco a série (4.11) converge uniformemente (Teorema 4.11) e pode, então, ser derivada termo a termo (Teorema 4.6). A série de derivadas

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)a_{n+1}(z - z_0)^n \tag{4.12}$$

converge pelo menos no disco $|z - z_0| < r$, de forma que seu raio de convergência r' é pelo menos r.

Suponhamos que r' pudesse ser maior do que r. Seja então r'' tal que $r < r'' < r'$ e seja z tal que $r < |z - z_0| < r''$ [Fig. 4.3(b)]. A série (4.12) converge uniformemente em $|z - z_0| < r''$ (Teorema 4.11); logo, pode ser integrada termo a termo ao longo de um caminho C, ligando z_0 a z (Teorema

4.6), resultando em (4.11). Esta série deve então convergir pelo menos para $|z - z_0| < r''$, o que é uma contradição. Fica assim provado que as séries (4.11) e (4.12) possuem o mesmo raio de convergência. O resto do teorema segue facilmente por indução.

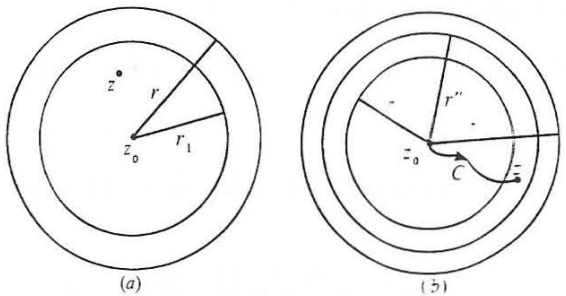

Fig. 4.3

4.14. Teorema (da série de Taylor). *Seja f uma função analítica numa região R, z_0 um ponto qualquer de R, e $r_0 > 0$ tal que o disco $|z - z_0| \leq r_0$ esteja todo contido em R. Então, nesse disco a função f pode ser desenvolvida em série de potências de $z - z_0$. Conhecido como a "série de Taylor" da função f relativa ao ponto z_0. esse desenvolvimento é dado univocamente por*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

O caso $z_0 = 0$ é conhecido como série de MacLaurin da função f.

Demonstração. Sejam z um ponto qualquer do disco $|z - z_0| < r_0$, $r = |z - z_0|$, e r_1 tal que $r < r_1 < r_0$ (Fig. 4.4). Pela fórmula de Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

onde C_1 é o círculo $|\zeta - z_0| = r_1$. Observe agora que

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}},$$

de forma que a expressão anterior de f fica sendo:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n \right] d\zeta. \tag{4.13}$$

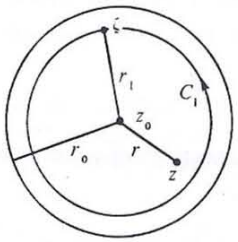

Fig. 4.4

Como $f(\zeta)$ é contínua, portanto, limitada por uma constante M sobre o círculo C_1, temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n \right| \leq \frac{M}{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1} \right)^n$$

Daqui e do teste de Weierstrass segue-se que a série em (4.13) converge uniformemente em $\zeta \in C_1$. Podemos, então, integrá-la termo a termo, obtendo:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n.$$

Este é o desenvolvimento procurado, pois a expressão entre colchetes que aí aparece é igual a $f^{(n)}(z_0)/n!$, como vimos na p. qq. Assim, podemos escrever:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n. \tag{4.14}$$

Resta provar que o desenvolvimento acima é único. Isto é conseqüência imediata do teorema que consideramos a seguir.

4.15. Teorema (da identidade de séries de potências). *Sejam*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n \tag{4.15}$$

duas séries de potências, convergentes numa vizinhança $|z-z_0|<r$ de z_0. Seja z_n uma seqüência de pontos distintos, que converge para z_0, e tal que as duas séries coincidem nos pontos dessa seqüência. Então, as referidas séries são idênticas, isto é, $a_n=b_n$ para todo n. Em particular, esta conclusão é válida se as séries coincidem numa vizinhança de z_0, ou mesmo num segmento ou pequeno arco com extremidade em z_0.

Demonstração. As séries representam funções f e g, respectivamente, as quais são contínuas em $z=z_0$; e como $f(z_n)=g(z_n)$, passando ao limite, obtemos $f(z_0)=g(z_0)$, ou seja, $a_0=b_0$.

Supondo que $a_j=b_j$, $j=0,\ldots,k-1$, vamos mostrar que $a_k=b_k$. Com efeito, cancelando os primeiros k termos das séries (4.15) e dividindo-as por $(z-z_0)^k$, obtemos as séries

$$a_k+a_{k+1}(z-z_0)+\ldots \quad \text{e} \quad b_k+b_{k-1}(z-z_0)+\ldots,$$

que convergem em $|z-z_0|<r$ e coincidem para $z=z_n$. Então, pelo mesmo argumento anterior, $a_k=b_k$, o que completa a demonstração.

Exemplos de séries de potências

4.16. A exponencial. Como primeiro exemplo, vamos considerar a função exponencial $f(z)=e^z$. Temos aqui $f^{(n)}(z)=e^z$; logo, $f^{(n)}(0)=1$. Portanto, neste caso o desenvolvimento (4.14) com $z_0=0$ nos dá a série de MacLaurin da exponencial:

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots,$$

válido para todo z. A constante de Euler é então dada por

$$e=e^0=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\ldots$$

4.17. Série binomial. Consideremos a função $f(z)=(1+z)^\alpha$, onde α é um número complexo qualquer. A não ser que α seja inteiro, essa função é multivalente, com ramificação no ponto $z=-1$. Vamos considerar o ramo da função fixado pela condição $f(0)=1$. Como

$$f'(z)=\alpha(1+z)^{\alpha-1}. \quad f''(z)=\alpha(\alpha-1)z^{(\alpha-2}.$$

e, em geral

$$f^{(n)}(z)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+z)^{\alpha-n}.$$

obtemos

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Portanto,

$$(1+z)^\alpha=1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}z^n, \quad |z<1. \tag{4.16}$$

onde o símbolo do coeficiente binomial que aí aparece está definido para todo α complexo pela expressão

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

O desenvolvimento acima da função $(1+z)^\alpha$ é conhecido como "desenvolvimento binomial" ou "série binomial". No caso de α ser um inteiro positivo, a série termina com o termo em z^α, pois, neste caso, o coeficiente binomial se anula para $n>\alpha$.

O desenvolvimento de qualquer outro ramo $g(z)$ da função $(1+z)^\alpha$ segue de (4.16); basta notar que $g(z)=e^{2k\pi\alpha i}f(z)$, onde o inteiro k caracteriza o ramo particular $g(z)$ que se considere. Portanto, o desenvolvimento de $g(z)$ é obtido multiplicando cada termo de (4.16) por $e^{2k\pi\alpha i}$.

4.18. Observações. O cálculo direto das derivadas de uma função nem sempre é o modo mais prático de construir sua série de Taylor. Um procedimento muito útil consiste em utilizar desenvolvimentos conhecidos, como já tivemos oportunidade de ver por meio de exemplos e exercícios. Às vezes é mais fácil obter o desenvolvimento da derivada ou da integral da função original; o desenvolvimento desta é então obtido por integração ou derivação, respectivamente. Consideremos, como exemplo ilustrativo, a função $f(z) = \operatorname{arc\,sen} z$, ou melhor, a determinação dada por $f(0) = 0$. Sua derivada pode ser desenvolvida usando o desenvolvimento binomial. Veja:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = (1-z^2)^{-1/2} \\ &= 1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1\cdot 3}{2^2 2!}z^4 + \frac{1\cdot 2\cdot 5}{2^3 3!}z^6 + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\dots(2n-1)}{2^n n!}2^{2n}. \end{aligned}$$

Como

$$1\cdot 3\dots(2n-1) = \frac{(2n)!}{(2\cdot 1)(2\cdot 2)\dots(2n)} = \frac{(2n)!}{2^n(n!)},$$

podemos escrever:

$$f'(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} z^{2n}.$$

Integrando de $z = 0$ a z, encontramos o resultado procurado:

$$f(z) = \operatorname{arc\,sen} z = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(2n+1)(n!)^2} z^{2n+1}, \quad |z| < 1.$$

Produto e quociente de séries de potências

Consideremos duas funções, f e g, regulares num ponto z_0, dadas por suas séries de potências relativamente a esse ponto:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{e} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n, \tag{4.17}$$

ambas convergentes num disco $|z - z_0| < r$. O produto $h = fg$ também é regular em z_0 e tem série de potências

$$h(z) = f(z)g(z) = \sum_n c_n (z-z_0)^n, \tag{4.18}$$

que converge pelo menos no mesmo disco $|z - z_0| < r$.

Para determinar os coeficientes c_n em termos dos coeficientes a_n e b_n, lembramos que

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad b_n = \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \text{e} \quad c_n = \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Assim,

$$c_0 = f(z_0)g(z_0) = a_0 b_0;$$

$$c_1 = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0) = a_1 b_0 + a_0 b_1;$$

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{1}{2!}[f''(z_0)g(z_0) - 2f'(z_0)g'(z_0) - f(z_0)g''(z_0)] \\ &= a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{1}{3!}[f'''(z_0)g(z_0) - 3f''(z_0)g'(z_0) + 3f'(z_0)g''(z_0) - f(z_0)g'''(z_0)] \\ &= a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3; \end{aligned}$$

e assim por diante. Em geral, utilizando a regra de derivação de Leibniz (Exerc. 2, p. 52),

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} - \dots + a_n b_0 = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}. \tag{4.19}$$

De modo análogo, se deduz uma regra para a divisão de séries de potências. Sejam dadas as séries de $f(z)$ e $h(z)$, indicadas em (4.17) e (4.18), respectivamente. Vamos determinar a série do quociente $g(z) = h(z)/f(z)$. Devemos supor, então, que $f(z_0) = a_0 \neq 0$. Em conseqüência, a função f não se anula em toda uma vizinhança de z_0, onde g é regular e possui desenvolvimento indicado em (4.17). A determinação dos coeficientes b_n em

termos dos coeficientes a_n e c_n se faz usando novamente a relação $fg = h$, donde as relações (4.19). Assim,

$$a_0b_0 = c_0 \Rightarrow b_0 = c_0/a_0,$$

$$a_0b_1 + a_1b_0 = c_1 \Rightarrow b_1 = (c_1 - a_1b_0)/a_0;$$

e, em geral. para $n = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$

$$a_0b_n + \ldots + a_nb_0 = c_n \Rightarrow b_n = (c_n - a_1b_{n-1} - \ldots - a_nb_0)/a_0.$$

O cálculo dos coeficientes de uma série de potências pelo produto ou quociente de duas outras é, em geral, complicado. Mas é sempre possível calcular os primeiros coeficientes da série, o que muitas vezes contém as informações desejadas. Vejamos alguns exemplos.

4.19. Exemplo. Consideremos o produto $e^z\sqrt{1+z}$, onde tomamos a determinação principal da raiz quadrada. Então,

$$\begin{aligned} e^z\sqrt{1+z} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right)\left[\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}z^n\right] \\ &= \left(1+z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{2}z-\frac{1}{8}z^2+\frac{1}{16}z^3+\ldots\right) \\ &= 1+\frac{3}{2}z+\frac{7}{8}z^2+\frac{17}{48}z^3+\ldots, \quad |z|<1. \end{aligned}$$

4.20. Exemplo. Seja agora a função

$$f(z) = \frac{z}{e^z-1} = \frac{z}{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}}.$$

Embora $z/(e^z-1)$ não tenha sentido para $z=0$, a última expressão está definida mesmo para $z=0$ e coincide com $f(z)$ no seu domínio de definição (que exclui os pontos onde $e^z = 1$, isto é, $z = 2k\pi i,\ k = 0,\ \pm1, \ldots$). Logo. é natural definir $f(0) = 1$. Para expandir $f(z)$ em potências de z, pomos

$$f(z) = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}} = \sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n.$$

donde

$$1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{c_r}{(n-r+1)!}\right)z^n.$$

Daqui segue-se que

$$c_0 = 1, \quad \sum_{r=0}^{\infty}\frac{c_r}{(n-r+1)!} = 0, \quad n = 1.2, \ldots$$

Estas relações determinam os coeficientes c_n sucessivamente:

$$c_0 = 1.\ \ c_1 = -1/2,\ \ c_2 = 1/12, \ldots$$

Então,

$$f(z) = \frac{z}{e^z-1} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12} + \ldots$$

e esta série tem raio de convergência $r = 2\pi$, pois a função f é regular no disco $|z| < 2\pi$, mas não em $z = \pm 2\pi i$, onde $e^z - 1 = 0$.

4.21. Teorema (da série dupla de Weierstrass) *Seja*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}f_n(z)$$

uma série uniformemente convergente num disco $|z - z_0| < r$. Suponhamos que as funções f_n sejam regulares no mesmo disco, de forma que

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}(z-z_0)^k, \quad |z-z_0| < r.$$

Então as séries $\sum_{n=0}^{\infty}a_{nk}$ convergem para todo k e

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_{nk}\right)(z-z_0)^k, \quad |z-z_0| < r.$$

Demonstração. f é analítica no disco $|z - z_0| < r$ (Teorema 4.6), logo, possui desenvolvimento em série de potências de $z - z_0$, cujos coeficientes A_k são dados por $A_k = f^{(k)}(z_0)/k!$. Ainda de acordo com o teorema citado,

$$A_k = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n^{(k)}(z_0)}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty}a_{nk}.$$

Isto completa a demonstração.

4.22. Exemplo. Seja desenvolver em série de potências de z a função inteira $f(z) = e^{\operatorname{sen} z}$. Usando a regra de multiplicação e o Teorema de Weierstrass, obtemos:

$$e^{\operatorname{sen} z} = 1 + \operatorname{sen} z + \frac{\operatorname{sen}^2 z}{2!} + \frac{\operatorname{sen}^3 z}{3!} + \dots$$

$$= 1 + \left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots\right) + \frac{1}{2!}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots\right)^3 + \dots$$

$$= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \left(-\frac{1}{3!} + \frac{1}{3!}\right) z^3 + \left(-\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) z^4 + \dots,$$

ou seja,

$$e^{\operatorname{sen} z} = 1 + z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{8} + \dots$$

Esta expressão nos mostra, em particular, que as funções $e^{\operatorname{sen} z}$ e e^z coincidem até segunda ordem com $z \to 0$:

$$e^{\operatorname{sen} z} - e^z = O(z^3), \quad z \to 0.$$

EXERCÍCIOS

Obtenha os desenvolvimentos em séries de potências de z dados nos Exercs. 1 a 4, e verifique que eles são válidos para todo z.

1. $\operatorname{sen} z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$.

2. $\cos z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$.

3. $\operatorname{senh} z = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

4. $\cosh z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$.

Desenvolva em séries de potências de z as funções dadas nos Exercs. 5 a 7, cujos ramos são fixados pelas condições $\arccos 0 = 1$, $\operatorname{arc\,tg} 0 = 0$ e $\sqrt[3]{1} = 1$.

5. $\arccos z$.

6. $\operatorname{arc\,tg} z$.

7. $\dfrac{1+z}{\sqrt[3]{1-z^2}}$.

8. Desenvolva em série de potências de $z - 1$ a determinação principal ($\log 1 = 0$) de $f(z) = z \log z - z$.

9. Desenvolva em série de potências de z e $(z-2)$, respectivamente, as funções

$$f(z) = \frac{1}{(4-z)^3} \quad \text{e} \quad g(z) = \frac{1}{z^5}$$

e represente graficamente seus discos de convergência.

10. Desenvolva em séries de potências de z as funções

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z - 2} \quad \text{e} \quad g(z) = \frac{z}{(z+i)^2(z-1)}.$$

11. Mostre que $\operatorname{sen} z = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+j}}{(2j+1)!} (z - n\pi)^{2j+1}$, onde n é um inteiro qualquer.

12. Obtenha o desenvolvimento de $\cos z$ em potências de $(z - n\pi - \pi/2)$, onde n é um inteiro.

13. Diz-se que uma função f é *par* (*ímpar*) se $f(z) = f(-z)$ ($f(z) = -f(-z)$) para todo z. Demonstre que o desenvolvimento de uma função par (ímpar) em potências de z só contém potências pares (ímpares).

14. Ao fazer o produto de duas séries de potências (4.17), em geral elas têm raios de convergência distintos. Mostre que o raio de convergência da série produto (4.18) é no mínimo o menor dos raios de convergência das séries (4.17). Dê exemplos de séries de potências cujo produto seja uma série com raio de convergência igual ao menor dos raios de convergência das séries dadas; e exemplos em que o produto seja uma série com raio de convergência maior que o menor dos raios de convergência das séries dadas, ou mesmo tenha raio de convergência infinito.

15. Obtenha os primeiros quatro termos do desenvolvimento de $z/(e^z - 1)$ em potências de z. Mostre que

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} - 1 - \frac{z}{2}$$

é função par, significando que a função dada pode ser escrita na forma

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n,$$

onde $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$, $B_4 = -1/30$ e $B_{2n+1} = 0$ para $n \geq 1$. Esses B_n são os chamados *números de Bernoulli* (Jacques Bernoulli (1654-1705)).

16. Mostre que $\dfrac{z}{e^z - 1} + \dfrac{z}{2} = \dfrac{z}{2} \coth \dfrac{z}{2}$ e conclua que $\dfrac{z}{2} \coth \dfrac{z}{2} = \displaystyle\sum_{0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$. Substituindo z por $2z$, obtém-se $z \coth z = \displaystyle\sum_{0}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$.

17. Mostre que, para $|z| < 1$,

$$\exp\left(\frac{1}{1-z}\right) = e + ez + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+2)\dots(k+n)}{k!}\right] z^n.$$

18. Determine os três primeiros termos do desenvolvimento

$$\log\cos z = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n,$$

tomando $\log 1 = 0$.

19. Sejam f uma função analítica numa região R, $z_0 \in R$ e r o raio de um disco centrado em z_0 e todo contido em R. Mostre que os coeficientes $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ da série de Taylor da função f relativa ao ponto z_0 são tais que $|a_n| \leq M/r^n$, onde M é o máximo de $|f(z)|$ em $|z - z_0| = r$.

SUGESTÕES

9. Observe que $f(z) = 1/4^3)/(1 - z/4)^3$ e aplique o desenvolvimento binomial; ou desenvolva $1/(4 - z)$ em potências de z e derive duas vezes. Quanto a $g(z)$, proceda de modo análogo, escrevendo $z = 2 + (z - 2)$.

10. Use decomposição em frações simples.

18. Observe que $\log(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$ e $\cos z = 1 + (\cos z - 1)$.

SÉRIE DE LAURENT

Vimos, no caso da série de Taylor, que é sempre possível desenvolver em série de potências de $z - z_0$ uma função que seja regular em z_0. Veremos agora que o desenvolvimento pode ainda ser possível, mesmo que a função não seja regular em z_0, desde que se admitam potências com expoentes negativos. Um exemplo dessa situação é dado por

$$\frac{e^z}{z^3} = \frac{1}{z^3}\sum \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-3}}{n!} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \frac{z^2}{5!} + \ldots$$

Esse tipo de série, conhecido como *série de Laurent*, é uma generalização da série de Taylor. O resultado geral é dado pelo teorema seguinte.

4.23. Teorema. *Seja f uma função univalente e analítica numa região anular G: $r < |z - z_0| < R$. Então, para todo z nesta região,*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n. \qquad (4.20)$$

onde os coeficientes a_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, são dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \qquad (4.21)$$

sendo C um contorno fechado em G, envolvendo z_0 uma vez no sentido positivo.

Demonstração. Dado $z \in G$, sejam r_1 e r_2 tais que $r < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R$ (Fig. 4.5). Designemos por C_1 e C_2 os círculos de centro z_0 e raios r_1 e r_2, respectivamente, orientados no sentido positivo. Ligando C_1 e C_2 por um arco L, obtemos um contorno fechado $\gamma = C_2 + L - C_1 - L$, numa região de regularidade da função f; logo, pela fórmula de Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

As integrais ao longo de L e $-L$ se cancelam mutuamente; portanto,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \qquad (4.22)$$

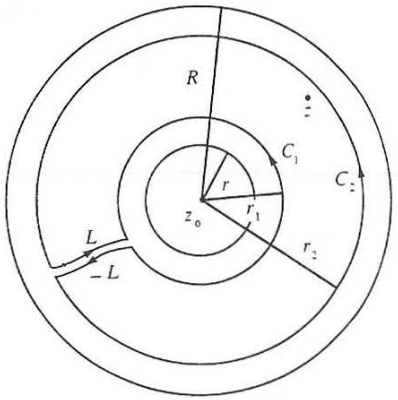

Fig. 4.5

A primeira destas integrais é tratada exatamente como no caso da série de Taylor (Teorema 4.14) e resulta na série de potências positivas que

aparece em (4.20), a qual, substituída em (4.22), nos dá:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a_0)^n - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta. \qquad (4.23)$$

Quanto a esta última integral, notamos primeiro que

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{-1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n-1}}.$$

Esta série converge uniformemente em $\zeta \in C_1$; logo,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n-1}} d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n}} d\zeta. \end{aligned}$$

Escrevendo $n + 1$ como novo índice n, obtemos:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z - z_0)^n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n-1}} d\zeta.$$

Substituindo em (4.23), obtemos o desenvolvimento dado por (4.20) e (4.21), já que a integral que aparece em (4.21) tem o mesmo valor, qualquer que seja o contorno C descrito no teorema, em particular C_1 ou C_2. Isto completa a demonstração.

Como dissemos anteriormente, a série de Laurent é uma generalização da série de Taylor. Se a função f é regular mesmo para $|z - z_0| \leq r$, então, para $n = -1, -2, \ldots$ é também regular em todo o disco $|z - z_0| < R$ a função de ζ dada por

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = f(\zeta)(\zeta - z_0)^{-n-1},$$

Em conseqüência, $a_{-n} = 0$ para $n = 1, 2, \ldots$, e a série de Laurent se reduz à série de Taylor.

Regularidade no infinito

É interessante notar que, enquanto a primeira das integrais em (4.22) é uma função regular no disco $|z - z_0| < R$ (na verdade, regular em $|z - z_0| < r_2$: mas, dado qualquer z tal que $|z - z_0| < R$, sempre existe $r_2 < R$ tal que $|z - z_0| < r_2$), a segunda integral é regular para $|z - z_0| > r$, inclusive no ponto $z = \infty$, de acordo com a definição que damos a seguir.

Uma função $g(z)$ se diz *analítica*, *regular* ou *holomorfa* no ponto $z = \infty$ se $g(1/\zeta)$ for regular no ponto $\zeta = 0$. Neste caso,

$$g(1/\zeta) = b_0 + b_1\zeta + b_2\zeta^2 + \ldots$$

numa vizinhança de $\zeta = 0$, o que equivale a

$$g(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \ldots$$

numa vizinhança de $z = \infty$. Podemos, então, dizer que g é regular no infinito se ela for desenvolvível em série de potências de $1/z$ numa vizinhança do infinito, $|z| > R$.

Com essa definição fica claro o significado da série de Laurent: ela é a soma de duas séries: uma em potências de $z - z_0$, que caracteriza uma função regular no disco $|z - z_0| < R$, o primeiro termo de (4.22); outra em potências de $(z - z_0)^{-1}$, que define uma função regular em $|z - z_0| > r$, o segundo termo de (4.22). A soma dessas duas funções coincide com a função f na região anular $r < |z - z_0| < R$.

Zeros de funções analíticas

Seja f uma função regular num ponto z_0. Então,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad (4.24)$$

numa vizinhança $|z - z_0| < r$.

Pode acontecer que a_0 seja zero, em cujo caso f se anula no ponto z_0, pois $f(z_0) = a_0$. Dizemos então que z_0 é um *zero* da função f.

Se todos os coeficientes a_n se anulam, então f se anula em toda a vizinhança $|z - z_0| < r$. Excluído este caso, deve existir $m > 0$ tal que a_m seja o primeiro coeficiente não-nulo em (4.24), isto é,

$$a_0 = \ldots = a_{m-1} = 0 \quad \text{e} \quad a_m \neq 0.$$

Dizemos, então, que z_0 é um *zero de ordem m* da função f. Fatorando $(z - z_0)^m$ no desenvolvimento anterior, obtemos:

$$f(z) = (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n}(z - z_0)^n.$$

Pondo

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n}(z - z_0)^n, \quad \cdot \quad \cdot \tag{4.25}$$

concluímos que se z_0 é um zero de ordem m da função f, então, numa vizinhança de z_0,

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \quad \text{e} \quad g(z_0) \neq 0. \tag{4.26}$$

Reciprocamente, suponhamos que exista uma função g satisfazendo a relação (4.26) numa vizinhança $|z - z_0| < r$ de z_0. A função g possui, nessa vizinhança, desenvolvimento de Taylor do tipo (4.25), que, substituído em (4.26), nos dá o desenvolvimento (4.24) com $a_0 = \ldots = a_{m-1} = 0$, $a_m \neq 0$. Fica assim demonstrado o seguinte teorema.

4.24. Teorema. *Uma condição necessária e suficiente para que z_0 seja um zero de ordem m da função f é que exista g satisfazendo a relação (4.26); ou ainda, que $(z - z_0)^{-m} f(z)$ tenha limite finito e diferente de zero com $z \to z_0$.*

Se uma função f é regular no ponto $z = \infty$, este ponto é chamado um *zero de ordem m* de $f(z)$ se $\zeta = 0$ é um zero de ordem m de $f(1/\zeta)$. É fácil ver que isto é equivalente a dizer que f possui desenvolvimento

$$f(z) = \frac{a_m}{z^m} + \frac{a_{m+1}}{z^{m+1}} + \ldots, \quad a_m \neq 0.$$

válido numa vizinhança $|z| > K$ do infinito.

EXERCÍCIOS

1. A série de Laurent costuma ser escrita na forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad r < |z - z_0| < R. \tag{4.27}$$

(Deve-se entender então que temos aqui duas séries separadamente convergentes, uma que é a soma de $n = 0$ a $n = \infty$ e a outra a soma de $n = -1$ a $n = -\infty$.) Demonstre que, se essa série converge na região indicada, então a convergência é uniforme para $a \leq |z - z_0| \leq b$, quaisquer que sejam a e b, com $r < a < b < R$.

2. Demonstre que a série de Laurent é única, desde que fixados o ponto z_0 e a região onde ela é considerada. *Sugestão:* Multiplique (4.27) por $(z - z_0)^{-k-1}$ e integre termo a termo ao longo de um contorno C conveniente.

Nos Exercs. 3 a 8, obtenha as séries de Laurent das funções dadas, nas situações indicadas.

3. $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, $z_0 = 1$, $0 < |z - 1| < 1$.
4. $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, $z_0 = 1$, $|z - 1| > 1$.
5. $f(z) = \dfrac{1}{(z-i)(z-2)}$, $z_0 = 2$, $0 < |z - 2| < \sqrt{5}$.
6. $f(z) = \dfrac{z^5}{z-1}$, $z_0 = 0$, $|z| > 1$.
7. $f(z) = z^5 e^{1/z}$, $z_0 = 0$, $|z| > 0$.
8. $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{(z-\pi)^3}$, $z_0 = \pi$, $z \neq \pi$.
9. Seja f uma função regular no ponto z_0. Mostre que z_0 é um zero de ordem m de f se e somente se

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Determine a ordem do zero $z = 0$ das funções dadas nos Exercs. 10 a 15.

10. $(\cos z - 1)^3 \operatorname{sen} z$.
11. $\dfrac{(1 - \cos z)\operatorname{sen}^2 z}{1 - e^z}$.
12. $(e^z - 1 - z)^3 \operatorname{sen}^2 z$.
13. $e^{\operatorname{sen} z} - e^z$.
14. $(e^{z^2} - 1)(\operatorname{sen} z^2 - z^2)$.
15. $e^{\operatorname{sen} z} - e^{\operatorname{tg} z}$.

Determine os zeros e as respectivas ordens das funções dadas nos Exercs. 16 a 18.

16. $z^2 \operatorname{sen} z$.
17. $(\cos z - 1)\log(1 + z)$.
18. $(z^2 - 4)^2(e^z - 1)$.

19. Se $z = z_0$ é zero das funções f e g, de ordens r e s, respectivamente, prove que ele é zero de ordem $r + s$ de fg. De que ordem é esse zero para a função $f + g$?

20. Demonstre que o inverso de um polinômio de grau m,

$$f(z) = \frac{1}{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \ldots + a_1 z + a_0}, \quad a_m \neq 0,$$

é uma função regular no infinito e este ponto é um zero de ordem m dessa função.

21. Mostre que uma função racional

$$f(z) = \frac{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \ldots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0},$$

onde $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$ e $m \leq n$, é regular no infinito, e este ponto é um zero de ordem $n - m$ da função, caso seja $n > m$.

22. Demonstre que uma função analítica no plano estendido (isto é, incluindo $z = \infty$) é necessariamente constante. (Este é outro modo de formular o teorema de Liouville da p. 106)

Capítulo 5

SINGULARIDADES E RESÍDUOS

SINGULARIDADES ISOLADAS

Diz-se que um ponto z_0 é *singularidade isolada* de uma função f se existe uma vizinhança de z_0 na qual f é univalente e regular, exceto no próprio ponto z_0. Por exemplo, a função

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{\operatorname{sen} z}$$

possui singularidades isoladas nos zeros do denominador, que são os pontos $z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ Já a função

$$g(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(1/z)}$$

tem singularidades isoladas em cada um dos zeros do denominador, que são os pontos $z = z_n = 1/n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Observe que esses pontos formam uma seqüência convergente. O limite $z = 0$ é, então, um ponto de acumulação de singularidades isoladas. Como veremos mais tarde, um ponto como esse também recebe o nome de "singularidade", mas é uma singularidade não-isolada.

Seja z_0 uma singularidade isolada de uma função f, de forma que o desenvolvimento de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{5.1}$$

é válido numa certa vizinhança perfurada $0 < |z - z_0| < r$ de z_0.

Singularidades removíveis

Pode acontecer que todos os coeficientes da parte principal sejam nulos, isto é, $a_{-n} = 0$ para $n = 1, 2, \ldots$: neste caso

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r.$$

Como esta série de potências define uma função analítica em $|z - z_0| < r$, com o valor a_0 no ponto $z = z_0$, é natural definir f no ponto z_0 pondo $f(z_0) = a_0$. Vemos assim que uma tal singularidade é apenas aparente e pode ser removida, bastando definir f de maneira apropriada no ponto z_0. Daí o nome *singularidade removível* que se dá a tais pontos.

Já vimos um exemplo de singularidade removível no Exemplo 4.20 (p. 140), no caso da função $z(e^z - 1)^{-1}$. As funções $(\cos z - 1)/z$ e $z^{-1}\log(1+z)$ também têm singularidades removíveis em $z = 0$, pois

$$\frac{\cos z - 1}{z} = \frac{1}{z}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} - 1\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n-1} \quad \text{para todo} \quad z:$$

e

$$\frac{\log(1+z)}{z} = \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^n \quad \text{para} \quad |z| < 1.$$

5.1. Teorema. *Uma singularidade isolada z_0 de $f(z)$ é removível se e somente se $f(z)$ for limitada numa vizinhança de z_0, ou tiver limite finito com $z \to z_0$.*

Demonstração. Suponhamos que f seja limitada, digamos, por uma constante M, numa vizinhança de z_0. Então, de acordo com a fórmula (4.21) (p. 145) que dá os coeficientes da série de Laurent relativa ao ponto z_0, teremos, para r suficientemente pequeno,

$$|a_n| \leq \frac{Mr^{-n-1}}{2\pi} \int_{|\zeta - z_0| = r} d|\zeta| = Mr^{-n}.$$

Como r é arbitrariamente pequeno, concluimos que $a_n = 0$ para $n < 0$. Isto mostra que a série de Laurent se reduz a uma série de Taylor, provando, portanto, que a singularidade é removível. O restante da demonstração é mais fácil e fica a cargo do leitor.

Singularidades do tipo pólo

Vamos considerar, em seguida, o caso em que no desenvolvimento (5.1) só aparece um número finito de potências negativas, isto é, existe $m > 0$ tal que $a_{-m} \neq 0$ e $a_{-n} = 0$ para $n > m$. Então (5.1) se reduz a

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_{-m} \neq 0. \tag{5.2}$$

Neste caso, z_0 é chamado *pólo de ordem m* da função f. Um pólo de primeira ordem é também chamado *pólo simples*. No caso de um pólo de ordem m, o polinômio em $(z - z_0)^{-1}$ que precede a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ em (5.2) é chamado a *parte singular* ou *parte principal* de f no ponto z_0. Observe o leitor que, se subtrairmos de f sua parte principal no ponto z_0, o resultado será uma função com singularidade removível, portanto, regular nesse ponto. Deixamos ao leitor a tarefa de demonstrar que *uma singularidade isolada z_0 de f é um pólo de ordem m se e somente se $(z - z_0)^m f(z)$ tiver limite finito e diferente de zero com $z \to z_0$.* (Compare com o Teorema 4.24 da p. 148, que é a proposição análoga no caso de zeros.)

5.2. Exemplo. Vamos considerar a função

$$f(z) = \frac{e^z \log(1+z)}{z^4(z-2)},$$

primeiro numa vizinhança de $z = 0$, digamos $|z| < 1$. Escolhemos a determinação principal do logaritmo, caracterizada por $\log 1 = 0$. Para vermos que $z = 0$ é pólo de ordem 3, basta notar que $z^3 f(z)$ tem limite finito e diferente de zero com $z \to 0$. Para achar a parte principal da série de Laurent na origem, procedemos da seguinte maneira, usando multiplicação de séries:

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \cdot e^z \cdot \frac{\log(1+z)}{z} \cdot \frac{-1/2}{1 - z/2}$$

$$= \frac{-1/2}{z^3}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots\right)\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3}-\ldots\right)\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\ldots\right)$$
$$= \frac{-1/2}{z^3}\left[1+\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)z+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)z^2+\ldots\right]$$
$$= \frac{-1/2}{z^3}-\frac{1/2}{z^2}-\frac{5/12}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n.$$

Os primeiros três termos aí explicitados formam a parte principal da série de Laurent.

A mesma função tem pólo simples em $z=2$, cuja série de Laurent correspondente tem parte principal dada por

$$\frac{e^2(\log 3)/2^4}{z-2}.$$

Neste caso, efetuamos um corte ao longo do semi-eixo real negativo (incluindo a origem), de sorte que o domínio da função seja dado por $|\arg z| < \pi$.

Singularidades essenciais

Além das possibilidades já analisadas, a série (5.1) pode conter uma infinidade de termos com potências negativas de $z-z_0$. Dizemos então que z_0 é uma *singularidade essencial* da função f. Exemplo disso é o ponto $z=0$ no caso da função $e^{1/z}$, pois

$$e^{1/z}=\sum_{n+0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1/n!}{z^n}+1, \quad 0<|z|.$$

Diz-se que o ponto $z=\infty$ é um *pólo* ou uma *singularidade essencial* da função $f(z)$ se o ponto $\zeta=0$ for um pólo ou singularidade essencial da função $f(1/\zeta)$, respectivamente.

Qualquer polinômio de grau n,

$$P(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_0, \quad a_n\neq 0,$$

tem pólo de ordem n no infinito, pois

$$f(\zeta)=P\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\frac{a_n}{\zeta^n}+\frac{a_{n-1}}{\zeta^{n-1}}+\ldots+a_0$$

tem pólo de ordem n na origem.

Já a função e^z tem singularidade essencial no infinito, visto que, pondo $z=1/\zeta$, obtemos:

$$e^{1/\zeta}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1/n!}{\zeta^n}+\ldots$$

o que mostra que esta função de ζ tem singularidade essencial na origem.

Aliás, esta situação é típica das funções inteiras: a única singularidade delas é o ponto $z=\infty$; e esta singularidade é essencial, a não ser que a função inteira se reduza a um polinômio de grau n, em cujo caso $z=\infty$ é um pólo de ordem n. De fato, dada uma função inteira f, como é regular em todo o plano, temos, para todo z,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n.$$

donde

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\zeta^n}+a_0$$

e daqui segue o resultado enunciado.

Um resultado interessante sobre singularidades essenciais é dado pelo teorema que consideramos a seguir.

5.3. Teorema (de Casorati-Weierstrass). *Seja f uma função com singularidade essencial num ponto z_0. Então, em qualquer vizinhança de z_0, f se aproxima arbitrariamente de qualquer número que se prescreva. Dito de outra maneira, qualquer que seja o número α que se prescreva, dados $\varepsilon>0$ e $\delta>0$, existe $z\in V'_\delta(z_0)$ tal que $|f(z)-\alpha|<\varepsilon$.*

Demonstração. Raciocinando por absurdo, suponhamos que existam $\varepsilon>0$ e $\delta>0$ tais que $|f(z)-\alpha|\geq\varepsilon$ para todo $z\in V'_\delta(z_0)$. Então a função

$$g(z)=\frac{1}{f(z)-\alpha}$$

é limitada em $z\in V'_\delta(z_0)$; e pelo Teorema 5.1, z_0 é singularidade removível de $g(z)$. Definida convenientemente, $g(z)$ é analítica em z_0. Se $g(z_0)\neq 0$,

sua inversa $g^{-1}(z) = f(z) - \alpha$ seria analítica em z_0, contradizendo a hipótese do teorema. Se $g(z_0) = 0$, z_0 seria zero de certa ordem m da função g, significando isto que z_0 seria pólo de ordem m da função $f(z) - \alpha$. Mas isto também contradiz a hipótese do teorema e completa a demonstração.

EXERCÍCIOS

Mostre que $z = 0$ é singularidade removível de cada uma das funções dadas nos Exercs. 1 a 5. Determine o valor que se deve atribuir à função em $z = 0$ para que ela fique regular nesse ponto.

1. $\dfrac{z}{e^z - 1}$.
2. $\dfrac{e^z - 1}{\operatorname{sen} 2z}$.
3. $\dfrac{\cosh 2z - 1}{\operatorname{sen}^2 z}$.
4. $\dfrac{1}{e^z - 1} - \dfrac{1}{z}$.
5. $\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$.

Determine os pólos, com suas respectivas ordens, no caso de cada uma das funções dadas nos Exercs. 6 a 13.

6. $\dfrac{z+4}{z(z^2+1)^2}$.
7. $\dfrac{\operatorname{sen} z}{z^3(z-\pi)}$.
8. $\dfrac{1}{z \operatorname{sen}^2 \pi z}$.
9. $\dfrac{1 - e^z}{z^4 \operatorname{sen}(1+z)}$.
10. $\dfrac{e^z}{z(1 - e^{-z})}$.
11. $\dfrac{1}{(e^{iz} - 1)^2}$.
12. $\dfrac{\cosh z}{z(1 - \cos z)}$.
13. $\dfrac{\operatorname{senh} z}{z \operatorname{sen}^2(z + \pi/2)}$.

14. Seja z_0 um zero das funções f e g. Supondo ainda que $g'(z_0) \neq 0$, mostre que z_0 é singularidade removível de f/g e
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$
15. Demonstre que uma singularidade isolada z_0 de uma função f é um pólo de ordem m se e somente se $(z - z_0)^m f(z)$ tiver limite finito e diferente de zero com $z \to z_0$.
16. Demonstre que z_0 é pólo de ordem m de uma função f se e somente se z_0 for zero de ordem m de $1/f$.
17. Demonstre que uma singularidade isolada z_0 de uma função f é pólo se e somente se $|f(z)|$ tende a infinito com $z \to z_0$.
18. Determine a parte principal da função
$$f(z) = \frac{1}{z(z-i)^2}$$
relativa ao pólo $z = i$.
19. Determine a parte principal da função
$$f(z) = \frac{1}{(z - n\pi)^2 \operatorname{sen} z}$$
relativa ao pólo $z = n\pi$ (n inteiro).

RESPOSTAS

6. $z = 0$, i e $-i$, de ordens 1, 2 e 2, respectivamente.
8. $z = 0$, de ordem 3; $z = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ de ordens 2.
10. $z = 0$, de ordem 2; $z = 2k\pi i$ (k inteiro $\neq 0$), de ordens 1.
12. $z = 0$, de ordem 3; $z = 2k\pi$ (k inteiro $\neq 0$), de ordens 2.
18. $\dfrac{-i}{(z-i)^2} + \dfrac{1}{z-i}$.

TEOREMA DO RESÍDUO

Seja f uma função regular e univalente numa região R, exceto numa singularidade isolada $z_0 \in R$. Então, numa vizinhança de z_0 vale o desenvolvimento de Laurent,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

os coeficientes a_n sendo dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \tag{5.3}$$

onde C é um contorno fechado de R, envolvendo z_0 uma vez no sentido positivo.

O coeficiente a_{-1} acima é chamado o *resíduo de* f no ponto z_0, e denotado (res. $f)(z_0)$. Sua importância reside no teorema que daremos a seguir.

5.4. Teorema (do resíduo). *Se f é regular e univalente numa região simplesmente conexa R, exceto em um número finito de singularidades isoladas, $z_1, \ldots, z_k$, então*

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} (\text{res. } f)(z_j). \tag{5.4}$$

onde C é um contorno fechado de R, envolvendo $z_1, \ldots, z_k$ uma vez no sentido positivo.

Demonstração. No caso em que C encerra uma única singularidade z_0, a fórmula (5.4) se reduz a

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i(\text{res. } f)(z_0), \tag{5.5}$$

que é equivalente à expressão de a_{-1}=(res. f)(z_0) dada em (5.3).

No caso de várias singularidades $z_1, \ldots, z_k$, utilizamos o Teorema 3.10 (p. 95), segundo o qual a integral sobre C é igual à soma de k integrais

$$I_j = \int_{C_j} f(z)dz, \quad j = 1, \ldots, k,$$

onde C_j é um contorno fechado que envolve apenas a singularidade z_j, uma vez no sentido positivo (Fig. 5.1). Basta observar agora que cada uma destas integrais é dada por uma expressão análoga a (5.5), donde a fórmula (5.4).

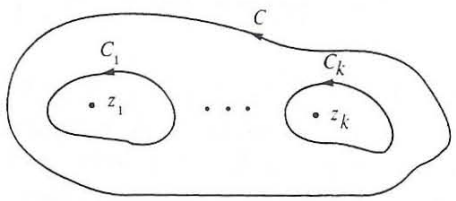

Fig. 5.1

Nas seções seguintes, vamos considerar várias aplicações do teorema do resíduo no cálculo de certas integrais. Isto é feito, como sugere a fórmula (5.4), reduzindo a integração a uma soma de resíduos: estes devem, então, ser obtidos dos desenvolvimentos de Laurent apropriados ou por processos que deles decorrem. No caso de um pólo simples z_0, por exemplo, temos

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots$$

numa vizinhança de z_0, donde

$$(z - z_0)f(z) = a_{-1} + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + \ldots$$

Logo, neste caso o resíduo a_{-1} é dado pela fórmula

$$(\text{res. } f)(z_0) = \lim_{z \to z_0} [(z - z_0)f(z)]. \tag{5.6}$$

Seja agora z_0 um pólo duplo da função f, de forma que

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots$$

numa vizinhança de z_0. Daqui obtemos:

$$(z - z_0)^2 f(z) = a_{-2} + a_{-1}(z - z_0) + a_0(z - z_0)^2 + \ldots;$$

logo,

$$\frac{d}{dz}[(z - z_0)^2 f(z)] = a_{-1} + 2a_0(z - z_0) + 3a_1(z - z_0)^2 + \ldots$$

Vemos, então, que se z_0 é pólo duplo de f, o resíduo correspondente é dado pela seguinte fórmula:

$$(\text{res. } f)(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz}[(z - z_0)^2 f(z)]. \tag{5.7}$$

5.5. Exemplo. Consideremos a função

$$f(z) = \frac{1}{\log^2 z}.$$

que tem pólo duplo no ponto $z = 1$. (Estamos considerando o ramo principal do logaritmo, determinado pela condição $\log 1 = 0$; ou ainda, $|\arg z| < \pi$.) De acordo com (5.7), seu resíduo neste ponto é

$$\begin{aligned} \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz} \frac{(z-1)^2}{(\log^2 z)} &= \lim_{z \to 1} \frac{2(z-1)\log^2 z - 2(z-1)^2 \log z/z}{\log^4 z} \\ &= \lim_{z \to 1} \frac{2(z-1)}{\log z} \cdot \lim_{z \to 1} \frac{\log z - 1 + 1/z}{\log^2 z} \end{aligned}$$

Calculando estes limites pela regra de l'Hôpital, encontramos (res. f)(1) = 1.

A fórmula (5.7) se generaliza para o caso de um pólo de ordem m qualquer. Deixamos ao leitor a tarefa de estabelecer o seguinte resultado geral:

Se z_0 é pólo de ordem m de uma função f, então

$$(\text{res. } f)(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]. \qquad (5.8)$$

EXERCÍCIOS

1. Seja $f(z)$ uma função analítica e diferente de zero no ponto $z = z_0$. Mostre que a função $g(z) = f(z)/(z - z_0)$ tem pólo simples nesse ponto, com resíduo igual a $f(z_0)$.
2. Sejam $p(z)$ e $q(z)$ funções regulares no ponto z_0, $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = 0$ e $q'(z_0) \neq 0$. Mostre que z_0 é pólo simples da função $f(z) = p(z)/q(z)$, com resíduo igual a $p(z_0)/q'(z_0)$.
3. Use a regra (5.8) para determinar o resíduo de

$$f(z) = \frac{e^{\pi i z}}{(z-\pi)^4}$$

no seu pólo $z = \pi$. Obtenha o mesmo resultado desenvolvendo $e^{\pi i z} = e^{i\pi^2} e^{i\pi(z-\pi)}$ em série de potências de $z - \pi$.

Determine os pólos, as ordens e os resíduos correspondentes de cada uma das funções dadas nos Exercs. 4 a 11.

4. $\dfrac{z - \operatorname{sen} z}{z^4}$.
5. $\dfrac{z - \operatorname{sen} z}{z^6}$.
6. $\coth z$.
7. $\dfrac{e^z}{4z^2 + \pi^2}$.
8. $\dfrac{e^{3z}}{z(z-1)^2}$.
9. $\dfrac{1}{z \operatorname{sen} z}$.
10. $\dfrac{e^z}{z \operatorname{sen} z}$.
11. $\dfrac{\log(1+z)}{z^2 \operatorname{sen} z}$.

Neste último exercício, considere o plano cortado ao longo do semi-eixo $(-\infty, -1]$.

12. Calcule a integral

$$\oint_C \frac{e^z}{(z-i)(z^2+4)} dz,$$

tomando para C, sucessivamente, os seguintes círculos, todos orientados positivamente:
a) de raio 3, centrado na origem;
b) de raio 3, centrado em $z = -3i$;
c) de raio 1/3, centrado em $z = 2i$;
d) de raio 2, centrado no ponto $z = 1$.

Calcule as integrais dadas nos Exercs. 13 a 15.

13. $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{\operatorname{sen} z} dz$.
14. $\displaystyle\oint_{|z-1|=1} \operatorname{tg} 3z \, dz$.
15. $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\cot z}{z} dz$.

RESPOSTAS E SUGESTÕES

6. Pólos simples em $z = k\pi i$, k inteiro.
7. Pólos simples em $z = \pm i\pi/2$.

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DE FUNÇÕES RACIONAIS

Veremos agora como o teorema do resíduo pode ser utilizado para calcular certas integrais impróprias de funções racionais. Começamos com um exemplo concreto.

5.6. Exemplo. Seja calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{dz}{z^2+1}.$$

O integrando, $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1} = \dfrac{1}{(z-i)(z+i)}$, possui pólos simples nos pontos $z = \pm i$. Seja C_R o semicírculo do semiplano $\operatorname{Im} z \geq 0$, de raio R e centro na origem. Supondo $R > 1$, o contorno formado pelo segmento $[-R, R]$, seguido de C_R (Fig. 5.2), contém o pólo $z = i$, onde o resíduo de f é $1/2i$. Pelo teorema do resíduo,

$$\int_{-R}^{R} \frac{dz}{z^2+1} + \int_{C_R} \frac{dz}{z^2+1} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi. \qquad (5.9)$$

Por outro lado, $|f(z)| \leq 1/(|z|^2 - 1)$, donde

$$\left| \int_{C_R} \frac{dz}{z^2+1} \right| \leq \frac{1}{R^2-1} \int_{C_R} |dz| = \frac{\pi R}{R^2-1}.$$

Isto mostra que

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} \frac{dz}{z^2+1} = 0;$$

logo, passando ao limite com $R \to \infty$ em (5.9), obtemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi,$$

que é o resultado procurado.

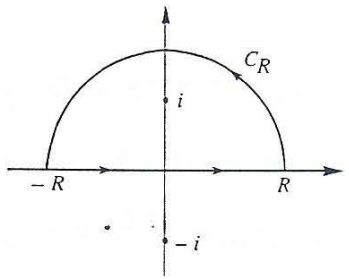

Fig. 5.2

Embora esse exemplo seja dos mais simples que se possa imaginar, ele apresenta um procedimento que é aplicável ao cálculo de toda integral de $-\infty$ a $+\infty$ de funções racionais $f(z) = P(z)/Q(z)$, onde $Q(z)$ não se anula para z real e

$$\text{grau}\, Q - \text{grau}\, P = m \geq 2$$

De fato, como $z^m P(z)$ e $Q(z)$ são polinômios de mesmo grau, $z^m f(z)$ tem limite finito e diferente de zero com $z \to \infty$; portanto, existem N e K positivos tais que

$$|z| = R > N \Rightarrow |f(z)| \leq \frac{K}{R^m}.$$

Em conseqüência,

$$\left| \int_{C_R} f(z)dz \right| \leq \int_{C_R} |f(z)||dz| \leq \frac{K}{R^m} \int_{C_R} |dz| = \frac{K\pi}{R^{m-1}};$$

como $m \geq 2$, a integral sobre C_R tende a zero com $R \to \infty$.

Por outro lado, para R bastante grande,

$$\int_{-R}^{R} \frac{P(z)}{Q(z)}dz + \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)}dz = 2\pi i \sum_i (\text{res. } f)(z_i),$$

onde a soma se estende a todos os pólos z_i da função $P(z)/Q(z)$ que jazem no semiplano $\text{Im}\, z > 0$. Fazendo então $R \to \infty$, obtemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(z)}{Q(z)}dz = 2\pi i \sum_i (\text{res. } f).$$

5.7. Observação. Devemos notar que o contorno C_R pode ser tomado no semiplano inferior $\text{Im}\, z < 0$. Neste caso, o caminho de $-R$ a R, seguido do semicírculo C_R, constitui um contorno fechado e com orientação negativa, como ilustra a Fig. 5.3. Logo, na fórmula anterior, o membro da direita leva um sinal negativo e a soma se estende aos pólos z_i do semiplano $\text{Im}\, z < 0$.

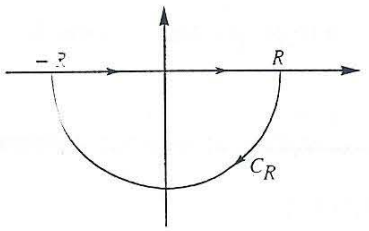

Fig. 5.3

5.8. Observação. O procedimento usado acima, que consistiu em incluir o caminho de integração C_R ao intervalo $[-R, R]$, costuma ser chamado de "dobrar o caminho de integração". Assim, o que fizemos foi dobrar o caminho de integração $[-R, R]$ no semiplano superior, incluindo o contorno C_R. Pela observação anterior, podemos também dobrar o caminho de integração no semiplano inferior.

EXERCÍCIOS

1. Calcule $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$.
2. Sendo a, b, c números reais, com $b^2 < 4ac$, calcule $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{ax^2+bx+c}$.
3. Mostre que

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{2ab(a+b)},$$

onde $a \geq b > 0$. Considere as duas possibilidades: $a \neq b$ e $a = b$.

Calcule cada uma das integrais dadas nos Exercs. 4 a 9.

4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{x^4+9}$.

5. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2-x+1}$.

6. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^6+1}$.

7. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}$.

8. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}$, $a > 0$.

9. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

RESPOSTAS E SUGESTÕES

1. $\pi/\sqrt{2}$.

2. $\dfrac{2\pi}{\sqrt{4ac-b^2}}$.

3. O integrando $f(z)$ é função par, logo a integral de $-\infty$ a zero é igual à integral de zero a ∞.

4. $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}$.

7. $-\pi/27$.

8. $\pi/4a$.

LEMA DE JORDAN

Muitas vezes temos necessidade de calcular integrais impróprias do tipo

$$\int_{-\infty}^\infty e^{irz} f(z)dz.$$

Somos então levados a dobrar o caminho de integração e considerar a integral

$$I_R = \int_{C_R} e^{irz} f(z)dz,$$

onde C_R é um semicírculo de centro na origem e raio R. O lema de Jordan, que consideramos a seguir, estabelece condições suficientes para que esta integral tenda a zero com $R \to \infty$.

5.9. Lema de Jordan. *Sejam $r > 0$, $R > 0$ e C_R o semicírculo $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Suponhamos que f seja uma função regular no semiplano* $\operatorname{Im} z \geq 0$, *à exceção, eventualmente, de um número finito de singularidades isoladas; e que o máximo $G(R)$ de $|f(z)|$ para $z \in C_R$ tenda a zero com $R \to \infty$. Então $I_R \to 0$ com $R \to \infty$.*

Demonstração. Começamos observando que

$$\begin{aligned} I_R &= \int_0^\pi e^{irR(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)} f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta \\ &= iR\int_0^\pi e^{-rR\operatorname{sen}\theta} f(Re^{i\theta}) e^{i(rR\cos\theta+\theta)} d\theta, \end{aligned}$$

donde

$$|I_R| \leq RG(R)\int_0^\pi e^{-rR\operatorname{sen}\theta} d\theta = 2RG(R)\int_0^{\pi/2} e^{-rR\operatorname{sen}\theta} d\theta.$$

Como $\operatorname{sen}\theta \geq 2\theta/\pi$ no intervalo $0 \leq \theta \leq \pi/2$[1], temos:

$$\begin{aligned} |I_R| &\leq 2RG(R)\int_0^{\pi/2} e^{-2rR\theta/\pi} d\theta \\ &= \frac{\pi G(R)}{r}(1-e^{-rR}) \to 0 \text{ com } R \to \infty. \end{aligned}$$

Isto completa a demonstração.

O leitor não terá dificuldade em verificar resultado análogo para $r < 0$ e C_R no semiplano inferior $\operatorname{Im} z \leq 0$.

5.10. Exemplo. Como aplicação do lema de Jordan, seja calcular

$$\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen} x}{a^2+x^2}dx, \quad a > 0.$$

Observando que o integrando é uma função par e que $\operatorname{sen} x = \operatorname{Im} e^{ix}$, teremos:

$$\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen} x}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x\operatorname{sen} x}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^\infty \frac{ze^{iz}}{a^2+z^2}dz. \tag{5.10}$$

[1] Para provar isso, consideramos a função $f(\theta) = \operatorname{sen}\theta - 2\theta/\pi$ no referido intervalo. Sua derivada, $f'(\theta) = \cos\theta - 2/\pi$, se anula para um certo valor a, é positiva para $0 < \theta < a$ e negativa para $a < \theta < \pi/2$. A função f é então crescente no intervalo $0 < \theta < a$ e decrescente em $a < \theta < \pi/2$. Como $f(0) = f(\pi/2) = 0$, concluímos que $f(\theta) \geq 0$ em todo o intervalo $0 \leq \theta \leq \pi/2$: logo, $\operatorname{sen}\theta \geq 2\theta/\pi$ nesse intervalo.

O integrando $g(z) = ze^{iz}/(a^2 + z^2)$ tem pólo simples no ponto $z = ia$, que é sua única singularidade no semiplano superior. Considerando, então, a integral de $-R$ a R $(R > a)$, seguida da integral sobre C_R no semiplano superior, obtemos:

$$\int_{-R}^{R} \frac{ze^{iz}}{a^2+z^2}dz + \int_{C_R} \frac{ze^{iz}}{a^2+z^2}dz = 2\pi i \cdot \frac{e^{-a}}{2}$$

onde $e^{-a}/2$ é resíduo de g no ponto $z = ia$. Passando ao limite e usando o lema de Jordan, vem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{iz}}{a^2+z^2}dz = \pi i e^{-a};$$

substituindo em (5.10) obtemos, finalmente.

$$\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi e^{-a}}{2}.$$

5.11. Exemplo. Vamos agora calcular a integral da função $\operatorname{sen} x/x$ de $-\infty$ a $+\infty$. Gostaríamos de escrever:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z}dz, \tag{5.11}$$

mas observe que enquanto $z = 0$ é singularidade removível de $\operatorname{sen} z/z$, esse ponto é um pólo simples de e^{iz}/z, de forma que a integral do segundo membro não existe. Isto acontece porque esta integral incorpora a integral de $\cos z/z$, que não aparece no primeiro membro. Mas, embora as integrais

$$\int_a^0 \frac{e^{iz}}{z}dz \quad e \quad \int_0^b \frac{e^{iz}}{z}dz$$

não existam separadamente (estamos supondo, é claro, que $a < 0 < b$), existe o *valor principal* segundo Cauchy, assim definido:

$$\text{v.p.} \int_a^b \frac{\cos z}{z}dz = \lim_{\delta \to 0} \left(\int_a^{-\delta} + \int_{\delta}^b \right) \frac{\cos z}{z}dz.$$

Existe igualmente

$$\text{v.p.} \int_a^b \frac{e^{iz}}{z}dz = \lim_{\delta \to 0} \left(\int_a^{-\delta} + \int_{\delta}^b \right) \frac{e^{iz}}{z}dz,$$

De fato, tanto $\cos z/z$ como e^{iz}/z têm parte principal $1/z$ em $z = 0$, para a qual a existência da integral no sentido de valor principal é evidente. Isso justifica a identidade (5.11), pelo menos com limites de integração finitos a e b, desde que se interprete a integral do segundo membro no sentido de "valor principal". Adotamos esse procedimento, tomando primeiro $a = -R$ e $b = R$ para, em seguida passar ao limite com $R \to +\infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z}dz = \lim_{R \to \infty} \lim_{\delta \to 0} \left(\int_{-R}^{-\delta} + \int_{\delta}^{R} \right) \frac{e^{iz}}{z}dz.$$

Para fechar o caminho de integração, além do semicírculo C_R no semiplano superior, introduzimos também o semicírculo C_δ no semiplano inferior, de raio δ e centro na origem, como se vê na Fig. 5.4. O contorno fechado assim obtido contém o pólo $z = 0$ da função e^{iz}/z, cujo resíduo aí é 1. Então,

$$\left(\int_{-R}^{-\delta} + \int_{\delta}^{R} \right) \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{C_\delta} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}dz = 2\pi i. \tag{5.12}$$

Como

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + f(z),$$

onde $f(z)$ é regular, portanto, limitada, numa vizinhança de $z = 0$, existe $K > 0$ tal que $|f(z)| \leq K$ para $|z| \leq \delta$. Portanto,

$$\int_{C_\delta} \frac{e^{iz}}{z}dz = \int_{C_\delta} \left[\frac{1}{z} + f(z) \right] dz = \pi i + \int_{C_\delta} f(z)dz$$

e

$$\left| \int_{C_\delta} f(z)dz \right| \leq K \int_{C_\delta} |dz| = K\pi\delta \to 0 \text{ com } \delta \to 0;$$

logo,

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{C_\delta} \frac{e^{iz}}{z}dz = \pi i.$$

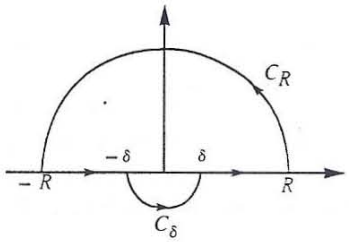

Fig. 5.4

Então, passando ao limite em (5.12) com $\delta \to 0$ e $R \to \infty$, e tendo também em conta que, pelo lema de Jordan, a integral sobre C_R tende a zero, obtemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z} dz = \pi i.$$

Substituindo em (5.11), chegamos ao resultado final:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \pi.$$

EXERCÍCIOS

Calcule as integrais dadas nos Exercs. 1 a 4.

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+4} dx, \quad a > 0.$

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+4x+20} dx.$

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2+a^2)} dx, \quad a > 0.$

4. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx.$

5. Seja $f(z)$ uma função regular no semiplano $\operatorname{Re} z \geq 0$, tal que o máximo $G(R)$ de $|f(z)|$ sobre o arco C_R: $z = Re^{i\theta}$, $|\theta| \leq \pi/2$, tende a zero com $R \to \infty$. Mostre que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z) e^{rz} dz = 0, \quad r < 0.$$

6. Prove que $\int_{C_R} e^{-z^2} dz \to 0$ com $R \to \infty$, onde C_R é o arco $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi/4$.

7. Calcule as chamadas *integrais de Fresnel*,

$$C = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx \quad \text{e} \quad S = \int_0^{\infty} \operatorname{sen} x^2 dx.$$

mostrando que ambas são iguais a $\sqrt{2\pi}/4$.

RESPOSTAS E SUGESTÕES

1. $\pi e^{-2a}/4$.
2. $\pi e^{-4}(2\cos 2 + \operatorname{sen} 2)/2$.
3. $\pi(1 - e^{-a})/a^2$.
4. $\pi/4e$.

7. Lembre-se de que $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$. Use $x = e^{-i\pi/4} z$ e o exercício anterior para mostrar que $I_R = \int_0^R e^{-ix^2} dx = e^{-i\pi/4} \int_0^{Re^{i\pi/4}} e^{-z^2} dz = [(1-i)/\sqrt{2}] \int_0^R e^{-x^2} dx + \varepsilon_R$, onde $\varepsilon_R \to 0$ com $R \to \infty$.

INTEGRANDOS MULTIVALENTES

Vamos calcular a integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{k-1}}{x-1} dx, \quad 0 < k < 1.$$

onde consideramos a determinação real de x^{k-1}.

Seja $C = C_1 \cup C_R \cup C_2 \cup C_r$ o contorno fechado formado do segmento

$$C_1 = [r, R], \quad \arg z = 0,$$

do círculo C_R de centro na origem e raio R, do segmento

$$C_2 = [r, R], \quad \arg z = 2\pi$$

e do círculo C_r de centro na origem e raio r, onde $r < 1 < R$ (Fig. 5.5). Então, a única singularidade da função

$$f(z) = \frac{z^{k-1}}{z+1}$$

no interior de C é o ponto $z = -1$, que é pólo simples, no qual o resíduo de f é

$$(-1)^{k-1} = e^{(k-1)\log(-1)} = e^{(k-1)\pi i}.$$

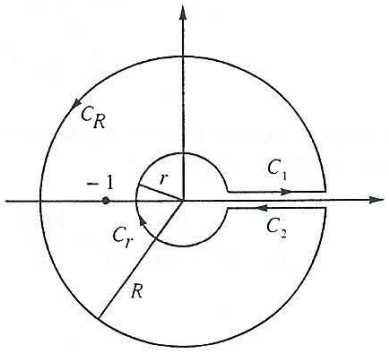

Fig. 5.5

Portanto,

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i e^{(k-1)\pi i}. \tag{5.13}$$

A integral de f ao longo de C_R tende a zero com $R \to \infty$. Com efeito,

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R} \frac{z^{k-1}}{z+1}dz\right| &= \left|\int_0^{2\pi} \frac{e^{(k-1)(\log R+i\theta)}}{Re^{i\theta}+1} iRe^{i\theta}d\theta\right| \\ &\leq R\int_0^{2\pi} \left|\frac{e^{(k-1)\log R}}{Re^{i\theta}+1}\right| d\theta \\ &\leq \frac{RR^{k-1}}{R-1}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi R^k}{R-1}.\end{aligned}$$

expressão esta que tende a zero com $R \to \infty$, pois $k < 1$.

De modo inteiramente análogo, verifica-se que a integral ao longo de C_r tende a zero com $r \to 0$. Então, fazendo $r \to 0$ e $R \to \infty$ em (5.13), obtemos:

$$\lim_{r\to 0}\lim_{R\to\infty}\left(\int_{C_1}+\int_{C_2}\right)\frac{z^{k-1}}{z+1}dz = 2\pi i e^{(k-1)\pi i}. \tag{5.14}$$

O argumento de z é zero ao longo de C_1 e 2π ao longo de C_2, de forma que

$$\begin{aligned}\left(\int_{C_1}+\int_{C_2}\right)\frac{z^{k-1}}{z+1}az &= \int_r^R \frac{e^{(k-1)\log x}}{x+1}dx + \int_R^r \frac{e^{(k-1)(\log x+2\pi i)}}{x+1}dx \\ &= [1-e^{(k-1)2\pi i}]\int_r^R \frac{x^{k-1}}{x+1}dx.\end{aligned}$$

Substituindo esta expressão em (5.14) vem

$$[1-e^{(k-1)2\pi i}]\int_0^\infty \frac{x^{k-1}}{x+1}dx = 2\pi i e^{(k-1)\pi i};$$

logo,

$$\int_0^\infty \frac{x^{k-1}}{x+1}dx = \frac{2\pi i}{e^{(1-k)\pi i}-e^{-(1-k)\pi i}};$$

ou ainda, em forma mais familiar,

$$\int_0^\infty \frac{x^{k-1}}{x+1}dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen}[(1-k)\pi]}.$$

O método que acabamos de utilizar é aplicável a toda integral do tipo

$$\int_0^\infty x^{k-1}R(x)dx,$$

onde k não é inteiro. $R(z)$ é uma função racional sem pólos no intervalo $(0, -\infty)$ e $x^kR(x) \to 0$ com $x \to 0$ e $x \to \infty$. Nestas condições, a integral acima converge e as integrais de $z^{k-1}R(z)$ ao longo de C_r e C_R tendem a zero com $r \to 0$ e $R \to \infty$, respectivamente (o leitor deve verificar isso em detalhe). Em conseqüência, procedendo como no caso particular acima, obtemos:

$$\int_0^\infty x^{k-1}R(x)dx = \frac{2\pi i}{1-e^{(k-1)2\pi i}}\sum_j z_j^{k-1}(\text{res. } R)(z_j). \tag{5.15}$$

onde z_j são os pólos não-nulos de $R(z)$.

O método acima falha se k for inteiro, pois então o denominador em (5.15) se anula. Neste caso, o integrando $x^{k-1}R(x)$ é uma função racional: se ela for par, a integral desejada é metade da integral de $-\infty$ a $+\infty$ do mesmo integrando, e já sabemos como calculá-la.

No caso em que o integrando não é par, a situação pode ser contornada. Seja, por exemplo, calcular a integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+4x+3}.$$

Começamos integrando a função

$$g(z) = \frac{\log z}{z^2+4z+3} = \frac{\log z}{(z+1)(z+3)}$$

ao longo do mesmo contorno $C = C_1 \cup C_R \cup C_2 \cup C_r$ da Fig. 5.5. As singularidades de g no interior de C são os pólos simples $z = -1$ e $z = -3$, onde os resíduos de g são, respectivamente,

$$\frac{\log(-1)}{2} = \frac{\pi i}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\log(-3)}{-2} = -\frac{\log 3 + \pi i}{2}.$$

Então,

$$\int_C \frac{\log z}{z^2+4z+3}dz = -2\pi i\frac{\log 3}{2}. \tag{5.16}$$

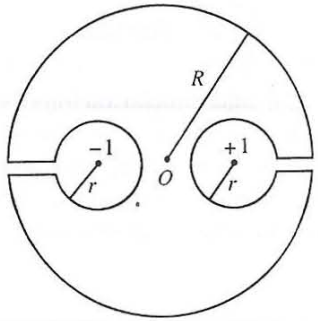

Fig. 5.6

Como no exemplo anterior, as integrais ao longo de C_r e C_R tendem a zero com $r \to 0$ e $R \to \infty$, respectivamente. De fato, $z = re^{i\theta}$ sobre C_r, e tomando $r < 1/4$, obtemos:

$$\left|\int_{C_r} \frac{\log z}{z^2+4z+3}dz\right| \le \int_0^{2\pi} \left|\frac{\log r + i\theta}{z^2+4z+3} ire^{i\theta}\right| d\theta$$

$$\le \frac{r(2\pi - \log r)}{3-4r-r^2}\int_0^{2\pi} d\theta \le 2\pi r(|\log r| + 2\pi) \to 0 \quad \text{com } r \to 0.$$

De modo análogo, prova-se que a integral sobre C_R tende a zero com $R \to \infty$.

Por outro lado,

$$\left(\int_{C_1} + \int_{C_2}\right)\frac{\log z}{z^2+4z-3}dz = \int_r^R \left(\frac{\log x}{x^2+4x+3} - \frac{\log x + 2\pi i}{x^2+4x+3}\right)dx$$

$$= -2\pi i\int_r^R \frac{dx}{x^2+4x+3}.$$

Substituindo esta expressão em (5.16), e passando ao limite com $r \to 0$ e $R \to \infty$, obtemos o resultado desejado:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+4x+3} = \frac{\log 3}{2}.$$

EXERCÍCIOS

1. Calcule as seguintes integrais:

$$\int_0^\infty \frac{x\sqrt{x}}{x^3+1} \quad \text{e} \quad \int_0^\infty \frac{x^2-x+3}{x^4+5x^2+4}dx.$$

2. Mostre que, sendo $\operatorname{Im}\alpha \neq 0$,

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x(x-\alpha)} = \frac{\pi i \operatorname{Im}\alpha}{\alpha|\operatorname{Im}\alpha|}.$$

Sugestão: Integre ao longo do contorno usado no cálculo da integral de $\operatorname{sen} x/x$ (p. 106).

3. Mostre que

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{2}.$$

onde tomamos o valor positivo da raiz quadrada. Sugestão: Use o contorno da Fig. 5.6, faça $r \to 0$ e $R \to \infty$.

INTEGRAIS ENVOLVENDO FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Um outro tipo de integrais que podem ser calculadas por resíduos são integrais da forma

$$\int_0^{2\pi} f(\operatorname{sen}\theta,\ \cos\theta)\,d\theta.$$

Usando a transformação $z = e^{i\theta}$, obtemos:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad dz = ie^{i\theta}d\theta = iz\,d\theta;$$

logo, a integral acima assume a forma:

$$\int_{|z|=1} f\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right)\frac{dz}{iz}.$$

Como exemplo, seja calcular $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos\theta - 2}$. Temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos\theta - 2} &= \int_{|z|=1} \frac{1}{(z + z^{-1})/2 - 2} \cdot \frac{dz}{iz} \\
&= \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 4z + 1} \\
&= \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z - 2 - \sqrt{3})(z - 2 + \sqrt{3})} \\
&= \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{-2\sqrt{3}};
\end{aligned}$$

portanto,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos\theta - 2} = \frac{-2\pi}{\sqrt{3}}.$$

EXERCÍCIOS

Calcule as integrais dadas a seguir: nas de números 2 e 3, tome $|a| < 1$, e na de número 4, tome $a > b > 0$.

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 - \operatorname{sen}^2\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{6}}$.

2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}$.

3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\operatorname{sen}\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}$.

4. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$.

RESÍDUOS LOGARÍTMICOS E PRINCÍPIO DO ARGUMENTO

Entende-se por *resíduo logarítmico* de uma função f num certo ponto a: resíduo de f'/f nesse ponto, isto é, ao resíduo da derivada logarítmica de f. É claro que para isso estamos supondo que f seja regular no referido ponto.

Vamos supor que f tenha um zero de ordem r num ponto z_0, de sorte que

$$f(z) = (z - z_0)^r g(z),$$

onde g é regular e diferente de zero em z_0. Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{r(z - z_0)^{r-1}g(z) + (z - z_0)^r g'(z)}{(z - z_0)^r g(z)} \\
&= \frac{r}{z - z_0} + h(z),
\end{aligned}$$

onde $h = g'/g$ é regular no ponto z_0. Vemos assim que *o resíduo logarítmico de uma função f num ponto que seja zero de ordem r da função é igual a ordem r desse zero.*

O raciocínio anterior pode ser repetido no caso em que z_0 seja pólo de ordem s, bastando substituir r por s (Exerc. 1 adiante), o que permite afirmar que *o resíduo logarítmico de uma função f num ponto que seja pólo de ordem s da função é igual a $-s$.*

Juntando esses dois resultados, demonstra-se facilmente o teorema que enunciamos a seguir.

5.12. Teorema. *Seja f uma função que, à exceção de pólos, é analítica numa região simplesmente conexa R. Seja $C \subset R$ um contorno fechado simples, orientado positivamente, e cujo interior contenha um número finito de zeros e pólos de f. Então,*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = Z - P,$$

onde Z e P denotam, respectivamente, os números de zeros e pólos de f no interior de C, contadas as multiplicidades.

A demonstração desse teorema é simples e fica a cargo do leitor. Basta substituir o contorno C por contornos envolvendo cada zero e cada pólo isoladamente (Exerc. 2 adiante).

Observe que $f'(z)/f(z) = (\log f(z))'$, onde tomamos qualquer ramo do logaritmo. (Lembramos que diferentes ramos têm a mesma derivada, já que eles diferem entre si por valores constantes.) Em vista disso, podemos escrever:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}[\log f(z)]_C.$$

ou seja, a integral é igual à variação de $\log f(z)$ ao longo do contorno C. Acontece que essa variação só afeta a parte imaginária do logaritmo, pois a parte real $\log|f(z)|$ volta ao valor inicial uma vez completado o percurso C. Em conseqüência, denotando com $\Delta_C \arg f(z)$ a variação sofrida pelo argumento de $f(z)$ ao longo do contorno C, obtemos o chamado *princípio do argumento*:

$$Z - P = \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z).$$

O princípio do argumento tem uma interessante interpretação geométrica. Suponhamos que C só contenha em seu interior um zero z_0 de ordem r e nenhum pólo. Então, quando z percorre o contorno C no sentido positivo, o ponto $w = f(z)$ percorrerá um contorno C' envolvendo r vezes a origem no plano w (Fig. 5.7). E se z_0 for um pólo de ordem s em vez de zero, $w = f(z)$ percorrerá o contorno C' envolvendo r vezes a origem do plano w no sentido negativo.

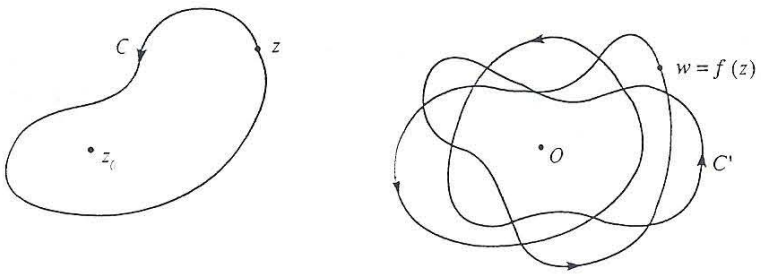

Fig. 5.7

O teorema seguinte é uma aplicação interessante do princípio do argumento.

5.13. Teorema (de Rouché.) *Sejam f e g funções analíticas numa região simplesmente conexa R. Seja $C \subset R$ um contorno fechado simples, orientado positivamente e tal que $|f(z)| > |g(z)|$ nos pontos de C. Então $f(z)$ e $f(z) + g(z)$ têm o mesmo número de zeros no interior de C.*

Demonstração. Por causa da hipótese $|f(z)| > |g(z)|$, $f(z)$ não se anula sobre C. Em conseqüência, podemos escrever:

$$\begin{aligned}\Delta_C \arg[f(z)+g(z)] &= \Delta_C \arg\left[f(z)\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right)\right] \\ &= \Delta_C \arg f(z) + \Delta_C \arg\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right).\end{aligned}$$

Observe agora que o ponto $w = 1 + f(z)/g(z)$ não pode circundar a origem no plano w, pois $|w-1| = |f(z)/g(z)| < 1$. Portanto,

$$\Delta_C \arg\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right) = 0.$$

donde segue-se que,

$$\Delta_C \arg[f(z)+g(z)] = \Delta_C \arg f(z).$$

Daqui e do princípio do argumento segue o resultado desejado.

O teorema de Rouché permite fazer uma demonstração muito elegante do Teorema Fundamental da Álgebra, do qual consideramos uma versão na p. 107.

5.14. Teorema Fundamental da Álgebra. *Todo polinômio de grau $n > 0$ tem exatamente n raízes, contadas as multiplicidades.*

Demonstração. Seja

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

um polinômio qualquer de grau $n > 0$, de sorte que $a_n \neq 0$. Pondo

$$f(z) = a_n z^n, \quad g(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

e $|z| = R$, teremos:

$$\lim_{R\to\infty}\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| \geq \lim_{R\to\infty}\frac{|a_n|R^n}{|a_{n-1}|R^{n-1}+\ldots+|a_1|R+|a_0|} = \infty,$$

donde se vê que existe R tal que $|f(z)| > |g(z)|$ para $|z| = R$. Daqui e do teorema de Rouché concluímos que $f(z)$ e $f(z)+g(z) = P(z)$ têm o mesmo número de zeros, isto é, exatamente n, que é o número de zeros de $f(z)$, como queríamos demonstrar.

EXERCÍCIOS

1. Prove que o resíduo logarítmico de uma função f num ponto que seja pólo de ordem r da função é igual à ordem s desse pólo.
2. Demonstre o Teorema 5.12.

Capítulo 6

CONTINUAÇÃO ANALÍTICA

Sabemos que a série

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

tem raio de convergência 1, e, portanto, define uma função analítica no disco $|z| < 1$. Sabemos também que essa série tem por soma a função $g(z) = 1/(1-z)$, a qual, por sua vez, está definida em todo o plano complexo, exceto em $z = 1$. Então, a função g é uma extensão da função f; mais do que isso, é uma "extensão analítica". Isto é importante, pois, embora uma função possa ter muitas extensões diferentes, essa extensão é única quando preserva a analiticidade, como nos garante o teorema seguinte.

6.1. Teorema (de unicidade da extensão analítica). *Sejam f e g funções analíticas numa mesma região R, que coincidem numa vizinhança de um ponto $z_0 \in R$, ou apenas num conjunto de pontos tendo ponto de acumulação $z_0 \in R$. Então f e g são idênticas, isto é, coincidem em toda a região R.*

Para a demonstração deste teorema, necessitamos do seguinte lema de topologia métrica.

6.2. Lema. *A distância entre dois conjuntos fechados e disjuntos, um dos quais limitado, é positiva.*

Demonstração. Sejam X e Y conjuntos fechados e disjuntos, sendo X limitado. A distância entre eles, $d(X, Y)$, é definida como sendo o ínfimo das distâncias $d(x, y) = |x-y|$, x variando em X e y variando em Y. É claro que $d(X, Y) \geq 0$. Vamos provar que $d(X, Y) > 0$. Se fosse $d(X, Y) = 0$,