MAT 0220 - CÁLCULO 4 - IAG

2° SEMESTRE DE 2017 LISTA 3

1) Para cada $t \in \mathbb{R}$, $|t| < 1$, faça a mudança de variável $z = e^{i\theta}$ e transforme cada integral definida em uma integral de contorno.

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + t\cos\theta}\, d\theta$ (b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2t\cos\theta + t^2}\, d\theta$

2) Use a fórmula integral de Cauchy para calcular as integrais do Problema 1.

3) Para cada $R > 0$, seja C_R o caminho fechado positivamente orientado que consiste da união do segmento $[-R, R]$ com o semicírculo $H_R = \{Re^{i\theta};\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$.
Seja f a função definida por $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$, $z \neq i$ e $z \neq -i$.

(a) Para cada $R > 1$, use a fórmula integral de Cauchy para calcular $\displaystyle\int_{C_R} f(z)\, dz$.

(b) Mostre que, para cada $R > 1$, $\left|\displaystyle\int_{H_R} f(z)\, dz\right| \leq \dfrac{\pi R}{R^2 - 1}$

(c) Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\, dx$.

4) (a) Mostre que $\sin\theta \geq \dfrac{2}{\pi}\theta$, se $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

(b) Mostre que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta}\, d\theta \leq \frac{\pi(1-e)}{2R}$, para todo $R > 0$.

(c) Mostre que $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta}\, d\theta = 0$.

5) Para cada $R > 0$ considere C_R e H_R como definidos no Problema 3 e $f(z) = \dfrac{ze^{iz}}{z^2+1}$, $z^2 \neq -1$.

(a) Para cada $R > 1$, use a fórmula integral de Cauchy para calcular $\displaystyle\int_{C_R} f(z)\, dz$.

(b) Mostre que, para cada $R > 1$, $\left|\int_{H_R} f(z)\,dz\right| \leq \dfrac{R^2}{R^2-1}\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta}\,d\theta$.

(c) Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+1}\,dx$.

6) Para cada $a > 0$, considere H_a como definido no Problema 3 e $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$, $z \neq 0$. Dados $0 < r < R$, seja $C_{r,R}$ o contorno fechado positivamente orientado que consiste dos intervalos $[-R,-r]$ e $[r,R]$ unidos aos semicírculos de raio r e R e centro em 0 contidos no semiplano superior.

(a) Mostre que $\displaystyle\int_{C_{r,R}} f(z)\,dz = 0$, para todos r, R tais que $0 < r < R$.

(b) Mostre que $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{H_R} f(z)\,dz = 0$.

(c) Mostre que $\displaystyle\lim_{r\to 0}\int_{H_r} f(z)\,dz = \pi i$. `Sugestão`: use a Proposição no começo da próxima página.

(d) Calcule $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$. `Sugestão`: use o 4c.

7) Para $0 < a < 1$, considere $f(z) = \dfrac{e^{az}}{e^z+1}$, $z \neq (2k+1)\pi\, i$, $k \in \mathbb{Z}$. Para $R > 0$, seja C_R o retângulo positivamente orientado com vértices em R, $R+2\pi i$, $-R+2\pi i$ e $-R$. Sejam L_1 e L_3 os dois segmentos horizontais e L_2 e L_4 os dois segmentos verticais do caminho C_R. Defina $I_R = \displaystyle\int_{C_R} f(z)\,dz$.

(a) Mostre que I_R é independente de $R > 0$.

(b) Mostre que $\displaystyle\int_{L_1} f(z)\,dz + \int_{L_3} f(z)\,dz = (1 - e^{2\pi a\, i})\int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx$.

(c) Mostre que $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{L_2} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty}\int_{L_4} f(z)\,dz = 0$.

(d) Calcule I_R. `Atenção`: ainda não vimos a teoria necessária para resolver este item.

(e) Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx$.

8) (a) Encontre os 3 primeiros termos não-nulos da série de Taylor de $f(z) = z - \operatorname{Ln}(1+z)$ em torno de $z = 0$.
(b) Encontre os 3 primeiros termos não-nulos da série de Laurent de $g(z) = \dfrac{1}{z - \operatorname{Ln}(1+z)}$ em torno de $z = 0$.
(c) Qual é a ordem do polo de g em $z = 0$?

(d) Qual é o resíduo de g em $z = 0$?

(e) Quanto vale $\lim_{z \to 0} \dfrac{z^2}{z - \operatorname{Ln}(1+z)}$?

9) Mostre que $f(z) = \dfrac{1}{z - \operatorname{sen} z}$ tem um polo triplo em $z = 0$ e calcule o resíduo de f nesse ponto.

10) Considere $f(z) = \dfrac{1}{(e^z + 1)^2}$ e seja C_R, $R > 0$, o contorno do Problema 7.

(a) Determine o resíduo de f em $z = \pi i$.

(b) Calcule $\int_{C_R} f(z)\, dz$.

Proposição. Seja f uma função analítica definida em um aberto contendo 0. Para $r > 0$, seja C_r o semicírculo orientado no sentido antihorário, $C_r = \{re^{it};\ 0 \leq t \leq \pi\}$. Então $\lim_{r\to 0} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z}\,dz = \pi i f(0)$.

`Demonstração`: Usando que $\int_{C_r} \frac{1}{z}\,dz = \pi i$, vemos que, para todo r suficientemente pequeno,

$$\pi i f(0) - \int_{C_r} \frac{f(z)}{z}\,dz = f(0) \int_{C_r} \frac{1}{z}\,dz - \int_{C_r} \frac{f(z)}{z}\,dz = \int_{C_r} \frac{f(0) - f(z)}{z}\,dz$$

e, portanto,

$$\left|\pi i f(0) - \int_{C_r} \frac{f(z)}{z}\,dz\right| \leq \int_{C_r} \frac{|f(z) - f(0)|}{r}\,|dz|.$$

Dado $\epsilon > 0$, seja $\delta > 0$ tal que, para todo $|z| \leq \delta$, $|f(z) - f(0)| < \frac{\epsilon}{\pi}$ (existe tal δ porque f, sendo analítica, é contínua em 0. Daí, para todo $r < \delta$, temos

$$\left|\pi i f(0) - \int_{C_r} \frac{f(z)}{z}\,dz\right| \leq \frac{1}{r} \int_{C_r} |f(z) - f(0)|\,|dz| < \frac{1}{r}\frac{\epsilon}{\pi} \int_{C_r} |dz| = \frac{\epsilon}{\pi r}\pi r = \epsilon.$$

Isto prova o que queríamos.

`Respostas`: 2a) $\frac{2\pi}{\sqrt{1-t^2}}$. 2b) $\frac{2\pi}{1-t^2}$. 3c) $\frac{\pi}{e}$. 5c) $\frac{\pi}{e}$. 6d) $\frac{\pi}{2}$. 7d) $\frac{\pi}{\sin a\pi}$.