

MAT 0220 - CÁLCULO 4 - IAG

2º SEMESTRE DE 2017

LISTA 2

1) Escreva na forma $a + bi$, a e b reais, os seguintes números complexos.

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \frac{1}{(1+i)^{12}} & \text{(b)} \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{11} & \text{(c)} (-1 + \sqrt{3}i)^5 & \text{(d)} \frac{25}{3+4i} \\ & \text{(e)} e^{\ln 2 + i\pi} & \text{(f)} \operatorname{sen} i \end{array}$$

2) Determine todos os valores de z que satisfaçam as seguintes equações.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} 64z^{12} + 1 = 0 & \text{(b)} z^{11} + i = 0 & \text{(c)} z^5 = 16\bar{z} \\ \text{(d)} e^z = -2 & \text{(e)} \operatorname{sen} z = \operatorname{sen} i & \text{(f)} (\tan z)^2 = -1 \end{array}$$

3) Usando as equações de Cauchy-Riemann, mostre que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, é analítica nos seguintes casos.

$$\text{(a)} u(x, y) = e^{x^2-y^2} \cos(2xy), v(x, y) = e^{x^2-y^2} \operatorname{sen}(2xy).$$

$$\text{(b)} u(x, y) = \operatorname{sen}(\ln \sqrt{x^2 + y^2}) \cosh(\arctan \frac{y}{x}), v(x, y) = \cos(\ln \sqrt{x^2 + y^2}) \sinh(\arctan \frac{y}{x}), x > 0.$$

4) Escreva as funções analíticas do Problema 3 como a composição de duas funções analíticas conhecidas.

5) Mostre que $f(x + iy) = e^y(\cos x + i \operatorname{sen} x)$ não é analítica em ponto algum de $\mathbb{C}$.

6) Sejam $n \geq 2$ um inteiro, $D = \{x + iy \in \mathbb{C}; x > 0 \text{ ou } y \neq 0\}$ e $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \sqrt[n]{r}(\cos \frac{\theta}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{n})$, $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $-\pi < \theta < \pi$.

(a) Mostre que f é analítica em D .

(b) Mostre que $f(z)^n = z$, para todo $z \in D$.

(c) Mostre que, se $w = f(z)$, então $z = w^n$.

(d) Mostre que não existe $z \in D$ tal que $f(z) = i$.

6) Suponha que $f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$ é uma função analítica e que u e v têm derivadas parciais contínuas em um aberto $U \subseteq \mathbb{C}$. Mostre que $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$, $z \in U$, também é analítica.

Observação: Mais tarde veremos que a hipótese de u e v terem derivadas contínuas é supérflua.

7) Suponha que f é uma função analítica não constante definida em $\mathbb{C}$.

(a) Mostre que $g(z) = \overline{f(z)}$, $z \in \mathbb{C}$, não é analítica.

(b) Mostre que $g(z) = |f(z)|^2$, $z \in \mathbb{C}$, não é analítica.

8) Suponha que $f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$ é uma função analítica e que u e v são de classe C^2 em um aberto $U \subseteq \mathbb{C}$. Mostre que u e v são *harmônicas*, isto é, que $u_{xx} + u_{yy} = 0$ e $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

Observação: Mais tarde veremos que a hipótese de u e v serem de classe C^2 é supérflua.

9) Seja C o círculo de raio r e centro z_0 , orientado em sentido anti-horário. Seja Q um quadrado de lado l , centro em z_0 , lados paralelos aos eixos coordenados, orientado em sentido anti-horário.

Considere $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$, $z \neq z_0$. Calcule

$$(a) \int_C f(z) dz \quad (b) \int_Q f(z) dz \quad (c) \int_C \overline{f(z)} dz \quad (d) \int_Q \overline{f(z)} dz.$$

10) Seja C o segmento de reta de 1 a $1 + i$. Calcule $\int_C \frac{z+2}{z} dz$.

11) Seja C o círculo centrado na origem de raio $R > 1$. Mostre que $\left| \int_C \frac{1}{z^2 + 1} dz \right| \leq \frac{2\pi R}{R^2 - 1}$.

Respostas: 1a) $-\frac{1}{64}$. 1b) $-i$. 1c) $-16(1 + \sqrt{3}i)$. 1d) $3 - 4i$. 1e) -2 . 1f) $i \frac{e - e^{-1}}{2}$.

2a) $\frac{1}{1+i} e^{\frac{ik\pi}{6}}$, $k = 0, 1, \dots, 11$. 2b) $\frac{1+i}{1-i} e^{\frac{i2k\pi}{11}}$, $k = 0, 1, \dots, 10$. 2c) 0 e $(-1 + \sqrt{3}i) e^{\frac{ik\pi}{3}}$, $k = 0, 1, \dots, 5$.

2d) $\ln 2 + i(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 2e) $z = i + 2k\pi$ ou $z = -i + (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2f) Não existe z que satisfaça essa equação.

4a) $f(z) = e^{z^2}$, $z \in \mathbb{C}$. 4b) $f(z) = \operatorname{sen}(\operatorname{Ln}(z))$, $\operatorname{Re} z > 0$.

9a) $2\pi i$. 9b) $2\pi i$. 9c) 0. 9d) 0.

10) $\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$.