

$$i^k = \exp \frac{-(4k+1)\pi}{2}, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

4. Mostre que $\operatorname{sen}^{-1} z = -i \ln (iz + \sqrt{1-z^2})$, $\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \ln \frac{i+z}{i-z}$, e obtenha as derivadas $D \operatorname{sen}^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$, $D \tan^{-1} z = \frac{1}{1+z^2}$.

5. Mostre que $\operatorname{senh}^{-1} z = \ln (z + \sqrt{z^2+1})$, $\operatorname{cosh}^{-1} z = \ln (z + \sqrt{z^2-1})$ e $\operatorname{tanh}^{-1} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$. Calcule as derivadas dessas funções.

3

Teoria da Integral

3.1. Arcos e Contornos

Definimos *arco contínuo* como sendo um conjunto C de pontos do tipo

$$C = \{z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b\}, \quad (3.1)$$

onde $z(t)$ é uma função contínua de t — ou, o que é equivalente, $x(t)$ e $y(t)$ são funções contínuas de t , para t no intervalo $[a, b]$.

A *representação paramétrica* $z = z(t)$ ordena os pontos de C de acordo com os valores crescentes de t , de forma que C é um conjunto ordenado ou orientado. O mesmo conjunto com orientação oposta é o arco que designamos por $-C$ e que possui representação paramétrica

$$z_1(t) = z(-t), \quad -b \leq t \leq -a.$$

Chama-se *arco de Jordan* ou *arco simples* aquele em que cada ponto $z(t)$ corresponde a um único valor de t . Intuitivamente isto significa que, à medida que t varia de a até b , o ponto $z(t)$ percorre a curva C , passando uma só vez por cada um de seus pontos. Quando o arco não é simples, ele contém ao menos um *ponto múltiplo*, assim designado todo ponto proveniente de dois ou mais valores distintos do parâmetro t : $z(t_1) = z(t_2)$ com $t_1 \neq t_2$. Chama-se *curva fechada* a todo arco cujas extremidades $z(a)$ e $z(b)$ coincidem; e *curva fechada simples* ou *curva de Jordan* a toda curva fechada cujos pontos, a exceção das extremidades, sejam todos simples (Fig. 3.1).

A equação $z = 1 - it$, para $0 \leq t \leq 2$, por exemplo, representa um arco simples, que é o segmento $[1, 1 - 2i]$, orientado de 1 para $1 - 2i$, como mostra a Fig. 3.2.

A equação $z = t^2 + it$, $-\infty < t < \infty$ representa a parábola

$$x = t^2, \quad y = t,$$

ou seja, $x = y^2$, orientada como indica a Fig. 3.3.

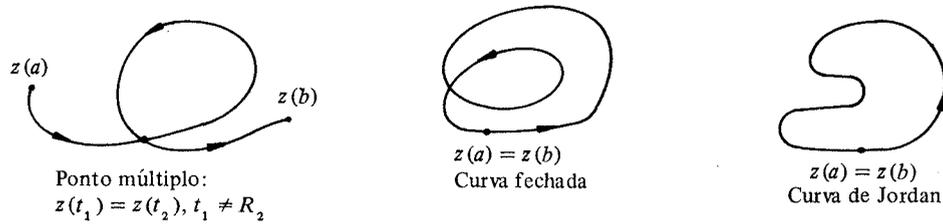


Fig. 3.1.

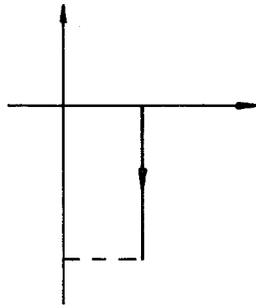


Fig. 3.2.

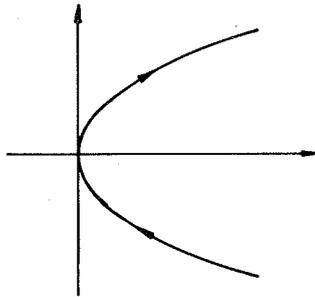


Fig. 3.3.

De acordo com um famoso teorema, devido a Jordan, toda curva fechada simples C divide o plano em duas regiões, tendo C como fronteira comum, uma das quais, chamada o interior de C , é limitada. O teorema afirma também que o interior de C possui uma propriedade adicional, chamada *conectividade simples*. Intuitivamente isto significa que é possível deformar a curva C até reduzi-la a um ponto sem sair dessa região interior. A Fig. 3.4 ilustra duas regiões conexas A e B , das quais A é simplesmente conexa, mas não B . Esta possui um “buraco” que destrói a conectividade simples.

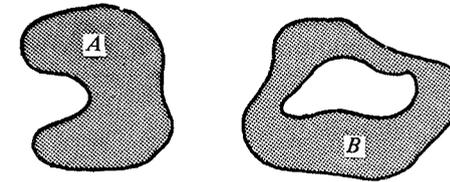


Fig. 3.4.

O Teorema de Jordan é de fácil compreensão, mas seu tratamento rigoroso é delicado e está fora de nosso objetivo.

O conceito de arco contínuo é muito geral e inclui objetos complicados, que em nada se parecem com figuras geométricas simples, como um arco de círculo, uma parábola, uma senóide etc. Em nossas considerações não necessitamos senão da idéia de *arco regular*, assim entendido o arco cuja representação (3.1) é tal que a derivada $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ existe, é contínua e não se anula. Tal arco possui tangente em cada ponto, cujo ângulo com o eixo dos x é dado por $\arg z'(t)$, o qual varia continuamente com t . Mesmo um arco regular pode exibir comportamento surpreendente; consideremos, como exemplo, o arco regular dado por

$$z(0) = 0; \quad z(t) = t + it^3 \operatorname{sen} \frac{1}{t}, \quad 0 < t \leq 1.$$

Este arco intercepta o eixo dos x numa infinidade de pontos tendo $x = 0$ como ponto de acumulação (Fig. 3.5).

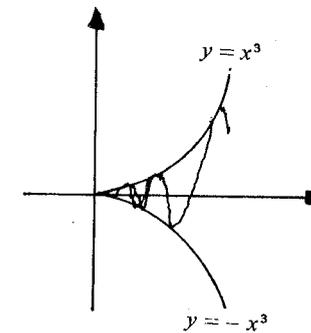


Fig. 3.5

Chamaremos *contorno* ou *caminho* a todo arco contínuo que consiste de um número finito de arcos regulares. Um contorno C tem então representação paramétrica do tipo $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, onde $z(t)$ é uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Este, por sua

vez, consiste num número finito de subintervalos $[a_j, b_j]$, em cada um dos quais a derivada $z'(t)$ é contínua e diferente de zero e tais que $b_1 = a_2, b_2 = a_3$ etc. (Fig. 3.6).



Fig. 3.6.

Exercícios

Identifique as curvas ou arcos de equações dadas a seguir, faça os gráficos e indique as orientações em cada caso.

- a) $z = 3t + it^2; \quad -\infty < t < \infty;$
 b) $z = r(\cos t + i \operatorname{sen} t) \quad -\frac{\pi}{4} \leq t \leq \pi, \quad r > 0;$
 c) $z = \frac{1}{t} + it, \quad 1 \leq t < \infty;$
 d) $z = t + \frac{2i}{t}, \quad -\infty < t < 0;$
 e) $z = t + i\sqrt{1-t^2}, \quad -1 \leq t \leq 1;$
 f) $z = t - i\sqrt{1-t^2}, \quad -1 \leq t \leq 1;$
 g) $z = \sqrt{1-t^2} + it \quad -1 \leq t \leq 1.$

3.2. Integral de Contorno

Seja $F(t) = U(t) + iV(t)$ uma função contínua da variável real t num intervalo $[a, b]$. Sua integral é definida facilmente em termos das integrais das funções reais U e V , mediante a expressão

$$\int_a^b F(t) dt = \int_a^b U(t) dt + i \int_a^b V(t) dt. \quad (3.2)$$

Desta definição seguem imediatamente as seguintes propriedades:

$$\operatorname{Re} \int_a^b F(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re} F(t) dt, \quad \operatorname{Im} \int_a^b F(t) dt = \int_a^b \operatorname{Im} F(t) dt. \quad (3.3)$$

As propriedades de linearidade,

$$\int_a^b [F(t) + G(t)] dt = \int_a^b F(t) dt + \int_a^b G(t) dt \quad (3.4)$$

e

$$\int_a^b c F(t) dt = c \int_a^b F(t) dt, \quad (3.5)$$

onde c é uma constante, são também de fácil verificação. Para provar esta última, por exemplo, seja $c = c_1 + ic_2$, logo

$$\begin{aligned} \int_a^b c F(t) dt &= \int_a^b [c_1 U(t) - c_2 V(t)] dt + i \int_a^b [c_1 V(t) + c_2 U(t)] dt \\ &= (c_1 + ic_2) \left[\int_a^b U(t) dt + i \int_a^b V(t) dt \right] = c \int_a^b F(t) dt. \end{aligned}$$

A demonstração de (3.4) é mais simples e fica a cargo do leitor.

A integral (3.2) goza também da propriedade (onde $a < b$)

$$\left| \int_a^b F(t) dt \right| \leq \int_a^b |F(t)| dt, \quad (3.6)$$

que é imediata se a integral que aparece no primeiro membro for nula. Caso contrário, seja

$$\int_a^b F(t) dt = re^{i\theta} \quad (r > 0)$$

sua representação polar. Daqui e de (3.5), obtemos

$$r = e^{-i\theta} \int_a^b F(t) dt = \int_a^b e^{-i\theta} F(t) dt;$$

ou ainda, usando (3.3),

$$r = \operatorname{Re} \int_a^b e^{-i\theta} F(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re} [e^{-i\theta} F(t)] dt.$$

Portanto, tendo em conta que $|e^{-i\theta}| = 1$,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b F(t) dt \right| &= r = \int_a^b \operatorname{Re} [e^{-i\theta} F(t)] dt \leq \int_a^b | \operatorname{Re} [e^{-i\theta} F(t)] | dt \leq \\ &\leq \int_a^b | e^{-i\theta} F(t) | dt = \int_a^b | F(t) | dt, \end{aligned}$$

donde a desigualdade (3.6).

Estamos agora em condições de definir a *integral curvilínea* ou *integral de contorno*

$$\int_C f(z) dz,$$

onde C é um contorno qualquer e $f = u + iv$ é uma função contínua em C . Usando a representação do contorno C , $z = z(t)$; $a \leq t \leq b$, definimos

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt, \quad (3.7)$$

onde o segundo membro é uma integral do tipo (3.2) com

$$\begin{aligned} U(t) &= u[x(t), y(t)]x'(t) - v[x(t), y(t)]y'(t), \\ V(t) &= u[x(t), y(t)]y'(t) + v[x(t), y(t)]x'(t). \end{aligned}$$

O integrando em (3.7), $f(z(t))z'(t) = U(t) + iV(t)$, pode não ser uma função contínua em todo o intervalo $[a, b]$ devido ao fator $z'(t)$. Mas como vimos na seção anterior, esse intervalo consiste num número finito de subintervalos $I_j = [a_j, b_j]$, em cada um dos quais $z'(t)$ é contínua; e a integral (3.7) deve ser interpretada como a soma das integrais nesses subintervalos I_j .

A integral (3.7) é invariante com uma mudança de parâmetro dada por uma função crescente $t = t(\tau)$, que transforme um intervalo $\alpha \leq \tau \leq \beta$ no intervalo $a \leq t \leq b$ e cuja derivada $t'(\tau)$ seja seccionalmente contínua. De fato, ponto $z_1(\tau) = z(t(\tau))$, e usando a regra de mudança de variável de integração nas integrais reais, obtemos

$$\begin{aligned} \int_a^b f(z(t))z'(t) dt &= \int_\alpha^\beta f(z(t(\tau)))z'(t(\tau))t'(\tau) d\tau \\ &= \int_\alpha^\beta f(z_1(\tau))z'_1(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.8)$$

É devido a essa invariância que se torna desnecessário explicitar a representação paramétrica do contorno C : a notação do primeiro membro de (3.7) tem significado único e preciso.

Convém observar também que as integrais curvilíneas tratadas na teoria das funções reais das variáveis reais x e y podem ser definidas de modo análogo a (3.8). Assim temos

$$\begin{aligned} \int_C P(x, y) dx &= \int_a^b P(x(t), y(t))x'(t) dt, \\ \int_C Q(x, y) dy &= \int_a^b Q(x(t), y(t))y'(t) dt, \end{aligned}$$

e, em geral,

$$\int_C P dx + Q dy = \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt.$$

Vemos então que a integral definida em (3.7) pode ser escrita na forma

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy.$$

É conveniente introduzir também a integral curvilínea em relação a \bar{z} , o que pode ser feito de várias maneiras equivalentes. Uma delas consiste em dar a seguinte definição, em termos da integral de contorno definida em (3.7):

$$\int_C f(z) d\bar{z} = \int_C \overline{f(\bar{z})} dz.$$

É fácil verificar que

$$\int_C f(z) d\bar{z} = \int_C u dx + v dy + i \int_C v dx - u dy,$$

onde $f = u + iv$.

3.3. Propriedades da Integral

A linearidade da integral, expressa por

$$\int_C [f_1(z) + f_2(z)] dz = \int_C f_1(z) dz + \int_C f_2(z) dz,$$

$$\int_C cf(z) dz = c \int_C f(z) dz,$$

onde c é uma constante, é de verificação quase imediata e fica a cargo do leitor. A segunda propriedade, por exemplo, segue facilmente da propriedade (3.5).

É fácil verificar também que se um contorno C consiste em um contorno C_1 seguido de um contorno C_2 — escrevemos $C = C_1 \cup C_2$ — então a integral sobre C é a soma

das integrais sobre C_1 e C_2 . Esta propriedade se generaliza facilmente para um número finito de contornos:

$$\int_{C_1 \cup \dots \cup C_r} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \dots + \int_{C_r} f(z) dz.$$

Daqui segue-se que a integral ao longo de um contorno fechado é invariante com uma translação do parâmetro. De fato, uma tal translação apenas muda o ponto inicial e final de uma posição z_1 para uma posição z_2 , como mostra a Fig. 3.7; designando por C_1 o trecho de C que vai de z_1 a z_2 e por C_2 o trecho restante, teremos

$$\int_{C_1 \cup C_2} f(z) dz = \int_C f(z) dz = \int_{C_1 \cup C_2} f(z) dz,$$

que prova a invariância da integral.

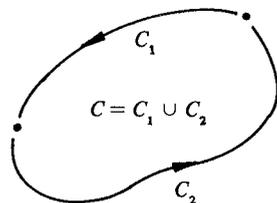


Fig. 3.7.

A propriedade

$$\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz$$

é demonstrada do seguinte modo como:

$$-C = \{z = z_1(t) = z(-t) : -b < t \leq -a\},$$

obtemos

$$z_1'(t) = -z'(-t);$$

portanto,

$$\begin{aligned} \int_{-C} f(z) dz &= \int_{-b}^{-a} f(z_1(t)) z_1'(t) dt \\ &= - \int_{-b}^{-a} f(z(-t)) z'(-t) dt. \end{aligned}$$

Pondo $\tau = -t$, resulta em

$$\begin{aligned} \int_{-C} f(z) dz &= \int_b^a f(z(\tau)) z'(\tau) d\tau = - \int_a^b f(z(\tau)) z'(\tau) d\tau \\ &= - \int_C f(z) dz, \end{aligned}$$

que é o resultado desejado.

Outra propriedade de importância fundamental é dada por

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz|, \quad (3.9)$$

onde a integral do segundo membro significa

$$\int_a^b |f(z(t))| |z'(t)| dt.$$

(Note que $a < b$). Essa propriedade segue de (3.6), pois

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(z(t)) z'(t)| dt \\ &= \int_a^b |f(z(t))| |z'(t)| dt = \int_a^b |f(z)| |dz|. \end{aligned}$$

Pode-se demonstrar que se f é uma função contínua sobre um arco C , então existe uma constante M tal que $|f(z)| \leq M$ para todo z em C . Daqui e de (3.9) obtemos a importante desigualdade

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq M \int |dz| = ML,$$

onde L é o comprimento do contorno C :

$$L = \int_C |dz| = \int_a^b |z'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt. \quad (3.10)$$

Exemplo 1. Vamos calcular a integral de $f(z) = z$ ao longo dos três contornos indicados na Fig. 3.8:

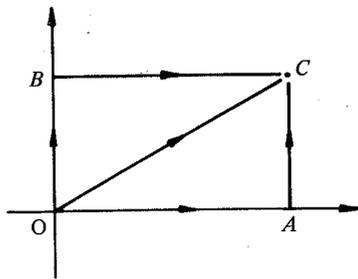


Fig. 3.8.

OC , OAC e OBC , onde $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$, $B = (0, m)$ e $C = (1, m)$, e m é um número real qualquer, digamos $m > 0$. O contorno OC é dado por $z(t) = t + imt$, $0 \leq t \leq 1$, de forma que

$$\int_{OC} z dz = \int_0^1 (t - imt)(1 + im) dt = \frac{1 + m^2}{2}$$

O contorno OAC pode ser representado por $z(t) = t$ para $0 \leq t \leq 1$ e $z(t) = 1 + im(t - 1)$ para $1 \leq t \leq 2$; ou ainda, podemos considerar OAC como consistindo em dois contornos: OA dado por $z(t) = t$ e AC dado por $z(t) = 1 + imt$, $0 \leq t \leq 1$. Num caso ou no outro a integral tem o mesmo valor, dado por

$$\int_{OAC} z dz = \int_0^1 t dt + \int_0^1 (1 - imt) im dt = \frac{1 + m^2 + 2im}{2}$$

De maneira análoga, temos

$$\int_{OBC} z dz = \int_0^1 (-imt) im dt + \int_0^1 (t - im) dt = \frac{1 + m^2 - 2im}{2}$$

Nesse exemplo obtemos um valor diferente para cada um dos três casos considerados; a integral depende não somente das extremidades do contorno, mas também do contorno que se considera em cada caso.

Exemplo 2. Em contraste com esse fenômeno, vamos mostrar agora que a integral curvilínea da função $f(z) = z$ só depende das extremidades do contorno e não do contorno particular que se considere. Para isso seja C um contorno qualquer, ligando o ponto z_1 ao ponto z_2 , de forma que em qualquer representação paramétrica de C : $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, valem as relações $z(a) = z_1$ e $z(b) = z_2$ (Fig. 3.9).



Fig. 3.9.

Temos, então,

$$\int_C z dz = \int_a^b z(t) z'(t) dt = \int_a^b \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [z(t)]^2 dt = \frac{1}{2} z(t)^2 \Big|_a^b = \frac{z_2^2 - z_1^2}{2}$$

e esta expressão mostra claramente que a integral considerada só depende mesmo dos pontos extremos z_1 e z_2 e não do contorno particular que se considere. Em particular, sendo C um contorno fechado, teremos $z_1 = z_2$, portanto

$$\int_C z dz = 0 \quad (C \text{ um contorno fechado}).$$

Esta propriedade é verdadeira não somente para a função $f(z) = z$, mas para toda função analítica; conhecido como o Teorema de Cauchy esse resultado é, como veremos, a chave de toda a teoria das funções analíticas.

Exemplo 3. Como no exemplo anterior, é fácil verificar que a integral de $f(z) = 1$ só depende dos pontos inicial e final e não do contorno particular empregado. Deixamos ao leitor a tarefa de verificar este resultado, donde segue, como no caso acima,

$$\int_C dz = 0, \quad (C \text{ um contorno fechado}).$$

Exemplo 4. Vamos calcular a integral de $|z|$ ao longo do segmento de reta que une a origem ao ponto $-2 + 3i$. Temos, então,

$$C = \left\{ z = -t + \frac{3i}{2} t, \quad 0 \leq t \leq 2 \right\};$$

logo,

$$\begin{aligned} \int_C |z| dz &= \int_C \sqrt{x^2 + y^2} (dx + idy) = \\ &= \int_0^{-2} |x| \sqrt{1 + \frac{9}{4}} \left(dx - \frac{3i}{2} dx \right) = \frac{-\sqrt{13}(2 - 3i)}{2} \int_0^{-2} x dx = \\ &= \frac{-\sqrt{13}(2 - 3i)}{2} \end{aligned}$$

Exercícios

1. Calcule a integral de $|z|$ nos seguintes casos:

a) Ao longo do semicírculo $z = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$;

b) Ao longo do semicírculo $z = re^{i\theta}$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$.

Resps. a) $-2r^2$; b) $-2ir^2$.

2. Calcule a integral $\int_C \sqrt{z} dz$ nos seguintes casos:

a) Ao longo do semicírculo $z = re^{i\theta}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$;

b) Ao longo do círculo $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$;

c) Ao longo do círculo $z = e^{i\theta}$, $\pi \leq \theta \leq 3\pi$.

Resps. a) $\frac{2r\sqrt{2r}i}{3}$; b) $-4/3$; c) $4i/3$.

3. Calcule a integral de $x^2 - y^2 + i(x - y^2)$ ao longo do segmento que une a origem ao ponto $3 + 2i$.

Resp. $(28 + 23i)/6$.

4. Calcule a integral $\int_0^{2+i} (y - x^2) dz$:

a) Ao longo do eixo $y = 0$ e da reta $x = 2$;

b) Ao longo do eixo $x = 0$ e da reta $y = 1$ (veja Fig. 3.10).

Resps. a) $-(16 + 21i)/6$; b) $(-4 + 3i)/6$.

5. Calcule a integral

$$\int_C \ln z dz, \quad \text{Partes}$$

onde $C = \{z = re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

Resp. $2\pi i$.

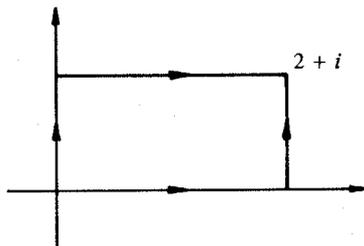


Fig. 3.10.

6. Sem calcular a integral, mostre que

$$\left| \int_1^{1+i} \frac{dz}{z} \right| \leq 1,$$

onde a integração é ao longo do segmento $[1, 1+i]$.

Sugestão. Use (3.9).

7. Mesma questão para

$$\left| \int_1^{1+i} \frac{z+2}{z} dz \right| \leq 3,$$

onde a integração é ao longo do segmento $[1, 1+i]$.

8. Demonstre que $\int_{C_\epsilon} (\ln z)^c dz \rightarrow 0$ com $\epsilon \rightarrow 0$, onde C_ϵ é o contorno $z = \epsilon e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e c é um número real qualquer.

Sugestão. Use (3.9) e lembre-se de que $\epsilon(\ln \epsilon)^c \rightarrow 0$ com $\epsilon \rightarrow 0$.

9. Seja $z_0 = re^{i\theta_0}$ e C o contorno $z = re^{i\theta}$, $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$. Mostre que

$$\int_C z^c dz = \frac{z_0^{c+1}}{c+1} [e^{(c+1)2\pi i} - 1].$$

10. Prove que se $f(z)$ é contínua na origem $z = 0$, então

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} f(\epsilon e^{i\theta}) d\theta = 2\pi f(0).$$

11. Demonstre que $\int_C z^n dz = 0$, onde n é um inteiro positivo e C é qualquer contorno fechado.

12. Seja C o círculo $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Mostre que $\int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$ e $\int_C \frac{dz}{z^n} = 0$, onde n é um inteiro ≥ 2 .

3.4. Teorema de Green

Vamos lembrar aqui o Teorema da Divergência no Plano, também conhecido como Teorema de Green, relativo a certas integrais sobre contornos fechados. Para a demonstração desse teorema, remetemos o leitor à Sec. 6.5 do nosso livro "Cálculo 3" [2].

Na consideração de integrais sobre contornos fechados, é preciso distinguir entre as duas orientações possíveis de um contorno fechado, uma das quais é escolhida como a

orientação positiva. Não vamos nos ocupar de como a noção de orientação positiva pode ser introduzida rigorosamente, sem apelo à intuição geométrica. O importante aqui é acentuar que isto pode ser feito, e que, em consequência, dado um contorno fechado simples C , de representação paramétrica $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, a idéia de que C está orientado positivamente corresponde exatamente ao fato intuitivo de que, para z_0 interior a C , o argumento de $z(t) - z_0$ cresce de 2π com t variando de $t = a$ a $t = b$. Em linguagem sugestiva, um observador localizado em $z(t)$ percorrerá o contorno C de maneira a deixar o interior de C sempre à sua esquerda (Fig. 3.11).

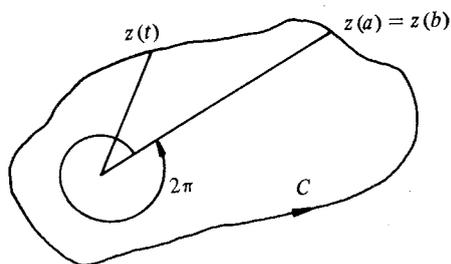


Fig. 3.11.

O Teorema de Green, no caso de uma região simplesmente conexa R , assim se enuncia:

Sejam $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ funções definidas em R , com derivadas primeiras contínuas. Então para qualquer contorno fechado simples C em R ,

$$\iint_{R'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C P dx + Q dy,$$

onde R' é a região interior a C .

O símbolo de integração no segundo membro indica, como se vê, o sentido positivo de percurso sobre C .

Designando por $t = (t_x, t_y)$ o vetor unitário tangente a C num ponto (x, y) , por $n = (n_x, n_y)$ o vetor unitário normal exterior e por ds o elemento de arco, então, como explicamos em [], Seção 6.5, $(dx, dy) = t ds$ e $(dy, -dx) = n ds$ (Fig. 3.12). Pondo então $F = (Q, -P)$, a fórmula anterior se escreve

$$\iint_{R'} \operatorname{div} F dx dy = \int_C F \cdot n ds,$$

que é uma forma familiar do Teorema da Divergência.

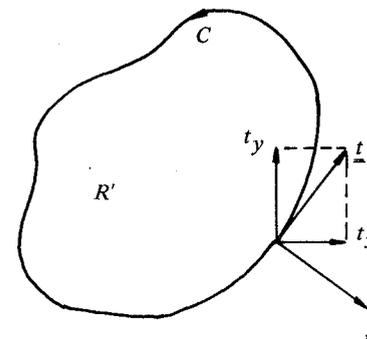


Fig. 3.12.

3.5. Teorema de Cauchy

Como vimos nos exemplos da Seção 3.3, a integral de uma função complexa entre dois pontos z_0 e z pode ou não depender do contorno usado na integração. Se o integrando é uma função analítica, a integral não depende do contorno, mas apenas dos pontos inicial e final z_0 e z . Este é o Teorema de Cauchy, que apresentamos sob as seguintes formulações equivalentes:

Teorema 1. *Seja f uma função analítica numa região simplesmente conexa R . Então*

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

para todo contorno fechado C contido em R .

Teorema 2. *Seja f uma função analítica numa região simplesmente conexa R . Então a integral de f ao longo de um contorno ligando z_0 a z só depende destes pontos e não do contorno de integração.*

É fácil verificar a equivalência destes dois teoremas. Suponhamos que o Teorema 1 seja verdadeiro e sejam C_1 e C_2 dois contornos arbitrários em R , ligando z_0 a z (Fig. 3.13).

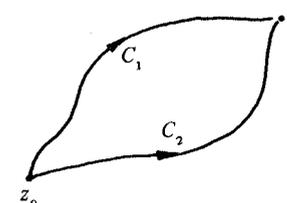


Fig. 3.13.

Então $C_1 + (-C_2)$ é um contorno fechado em R , logo

$$0 = \int_{C_1 \cup (-C_2)} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz - \int_{C_2} f(z) dz,$$

ou seja,

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz.$$

Isto prova o Teorema 2.

Suponhamos agora que o Teorema 2 seja verdadeiro e seja C um contorno fechado em R (Fig. 3.14). Tomando dois pontos z_0 e z_1 em C , obtemos os contornos C_1 de z_0 a z_1 e C_2 de z_1 a z_0 . Pelo Teorema 2, temos

$$\int_{C_1} f(z) dz = - \int_{C_2} f(z) dz,$$

donde

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz = 0.$$

Isto prova o Teorema 1.

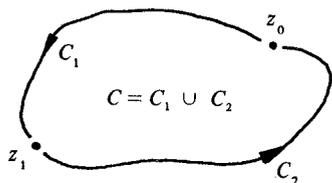


Fig. 3.14.

O Teorema de Cauchy, na primeira formulação, pode ser facilmente demonstrado com a ajuda do Teorema de Green, supondo que a derivada f' seja contínua em R . De fato, com a notação $z = x + iy$, $f = u + iv$, obtemos

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \oint_C u dx - v dy + i \oint_C v dx + u dy = \\ &= - \iint_{R'} (v_x + u_y) dx dy + i \iint_{R'} (u_x - v_y) dx dy. \end{aligned}$$

Mas $v_x + u_y = u_x - v_y = 0$ pelas Equações de Cauchy-Riemann, donde o Teorema 1.

Foi Goursat quem descobriu que o teorema acima pode ser demonstrado sem a hipótese de que f' seja contínua. Neste caso a demonstração é bem mais delicada e não será tratada aqui, (veja [1] ou [5]).

3.6. Integrais de Contorno e Primitivas

Como já tivemos oportunidade de assinalar, o Teorema de Cauchy-Goursat é o teorema fundamental da teoria das funções analíticas. Os resultados mais relevantes que obteremos daqui por diante são consequência direta ou indireta desse teorema. Como primeiro passo nessa direção, vamos estudar agora a forma geral da primitiva de uma função analítica.

Dizemos que $F(z)$ é uma primitiva de $f(z)$ se $F'(z) = f(z)$.

Teorema 1. *Seja f uma função analítica numa região simplesmente conexa R . Então a forma geral da primitiva de f é dada por*

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi + C, \quad (3.11)$$

onde z_0 é um ponto qualquer de R , porém fixo, C é uma constante arbitrária e a integração é feita ao longo de qualquer contorno de R , ligando z_0 a z .

Demonstração. Observamos, de início, que a integral em (3.11) está bem definida, pois, de fato, ela não depende do caminho de integração.

Vamos demonstrar que F é analítica em R e que $F'(z) = f(z)$. Temos (Fig. 3.15)

$$F(z+h) - F(z) = \left(\int_{z_0}^{z+h} f(\xi) d\xi - \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi \right) = \int_z^{z+h} f(\xi) d\xi.$$

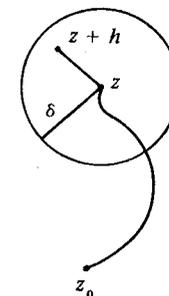


Fig. 3.15.

Pondo $f(\xi) = f(z) + \eta(z, \xi)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \frac{1}{h} \int_z^{z+h} [f(z) + \eta(z, \xi)] d\xi \\ &= f(z) + \frac{1}{h} \int_z^{z+h} \eta(z, \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Como f é contínua, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|\eta(z, \xi)| = |f(\xi) - f(z)| < \epsilon \quad \text{para } |\xi - z| < \delta.$$

Fazendo então $|h| < \delta$ e integrando ao longo do segmento $[z, z+h]$ teremos

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \frac{1}{|h|} \left| \int_z^{z+h} \eta(z, \xi) d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \int_z^{z+h} |\eta(z, \xi)| |d\xi| < \frac{\epsilon}{|h|} \int_z^{z+h} |d\xi| = \epsilon. \end{aligned}$$

Isto prova que $F'(z) = f(z)$, logo F é uma primitiva de f .

Resta mostrar que toda primitiva é da forma (3.11). Para isto seja G uma primitiva qualquer; teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} G(z) - \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi &= G'(z) - \frac{d}{dz} \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi \\ &= f(z) - f(z) = 0, \end{aligned}$$

logo, a função H , dada por

$$H(z) = G(z) - \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi,$$

tem derivada nula, portanto é constante (basta pôr $H = u + iv$ e notar que de $H'(z) = 0$ segue $u_x + iv_x = 0$ e $u_y + iv_y = 0$, donde $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$; daqui se conclui que u e v são constantes, logo H é constante). Sendo H constante, concluímos que (3.11) é a forma de qualquer primitiva G de f .

Deste teorema segue imediatamente que a integral de f ao longo de um caminho ligando z_0 a z_1 é dada por

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0),$$

onde F é uma primitiva qualquer de f . Vemos assim que o cálculo de uma integral curvilínea de uma função analítica é equivalente ao cálculo de uma primitiva da função. Este resultado e o teorema seguinte são de importância fundamental no cálculo das integrais de contorno.

Teorema 2. *Seja f uma função analítica numa região R , a qual contém os contornos-fechados simples C_0, C_1, \dots, C_n , tais que C_1, \dots, C_n jazem no interior de C_0 ; C_i e C_j são exteriores um ao outro para $i \neq j, i, j \geq 1$; a região R contém o interior de C_0 , exceto eventualmente regiões R_1, R_2, \dots, R_n interiores a C_1, \dots, C_n respectivamente. Então*

$$\int_{C_0} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz,$$

assumindo que os contornos tenham todos a mesma orientação.

Justificação. Um tratamento completo deste teorema requer o uso de conceitos topológicos que não estão à nossa disposição. Em casos simples, como mostra a Fig. 3.16, justifica-se o teorema introduzindo certos cortes L_1 e $-L_1, L_2$ e $-L_2, \dots, L_n$ e $-L_n$, ligando C_0 a C_1, C_2, \dots, C_n respectivamente, todos contidos em R .

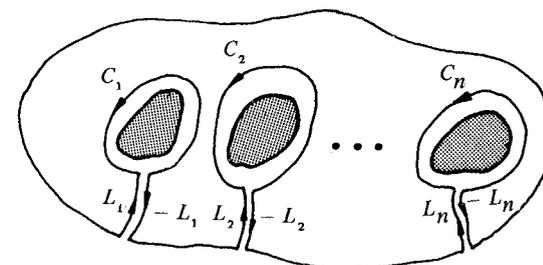


Fig. 3.16.

O contorno que assim obtemos, $C_0 \cup L_1 \cup (-C_1) \cup (-L_1) \cup \dots \cup L_n \cup (-C_n) \cup (-L_n)$, envolve uma região simplesmente conexa, de forma que a integral de f ao longo dele deve ser nula. Observando que as integrais ao longo de L_1 e $-L_1, L_2$ e $-L_2, \dots, L_n$ e $-L_n$ cancelam aos pares, obtemos

$$\int_{C_0} f(z) dz - \int_{C_1} f(z) dz - \int_{C_2} f(z) dz - \dots - \int_{C_n} f(z) dz = 0,$$

ou

$$\int_{C_0} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz.$$

Exemplo 1. A função $f(z) = z^n$, onde n é um inteiro não-negativo, é analítica em todo o plano e tem por primitiva a função $F(z) = z^{n+1}/(n+1)$. Temos, então,

$$\int_{z_0}^{z_1} z^n dz = \frac{1}{n+1} (z_1^{n+1} - z_0^{n+1}),$$

quaisquer que sejam os números complexos z_0 e z_1 e qualquer que seja o contorno de integração ligando z_0 a z_1 .

Exemplo 2. A função $f(z) = (z-a)^{-1}$ é analítica em todo o plano, excetuando o ponto $z = a$, e tem por primitiva a função $F(z) = \ln(z-a)$. Temos então que

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{z-a} = \ln(z_1-a) - \ln(z_0-a), \tag{3.12}$$

desde que a integração seja feita ao longo de qualquer contorno C ligando z_0 a z_1 e todo contido numa região simplesmente conexa que exclua o ponto $z = a$. Em particular, é fácil ver que se o contorno voltar ao ponto inicial sem circundar o ponto $z = a$, então $z_0 - a$ e $z_1 - a$ coincidem em módulo e argumento e o valor da integral acima é zero (Fig. 3.17).

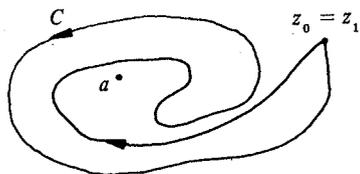


Fig. 3.17.

Suponhamos que C envolva o ponto $z = a$ uma vez no sentido positivo, como mostra a Fig. 3.18.

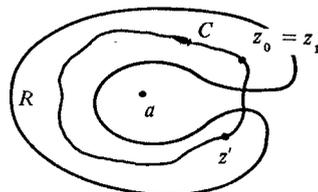


Fig. 3.18.

Então, qualquer região simplesmente conexa que contenha C conterá o ponto $z = a$, onde f não é analítica e não podemos concluir que a integral se anula. Mas mesmo neste caso a Fórmula (3.12) se aplica, desde que propriamente interpretada. Um modo de justificá-la consiste em considerar primeiro a integração ao longo de um contorno parcial C' , unindo z_0 a um ponto z' , como mostra a figura. Tal contorno está todo contido numa região simplesmente conexa R que não contém o ponto $z = a$, de forma que

$$\int_{C'} \frac{dz}{z-a} = \ln(z'-a) - \ln(z_0-a).$$

Passando ao limite com $(z' - a) \rightarrow (z_1 - a) = (z_0 - a)e^{2\pi i}$, obtemos $2\pi i$ como o valor da integral (3.12). Este raciocínio é equivalente a considerar z_0 e z_1 como pontos distintos da superfície de Riemann de $\ln(z-a)$, da qual $z = a$ é ponto de ramificação (Fig. 3.19).

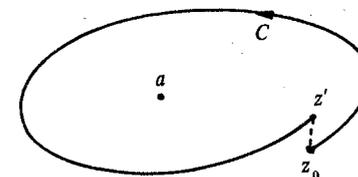


Fig. 3.19.

A integral (3.12) tem o mesmo valor $2\pi i$, qualquer que seja o contorno C que envolva $z = a$ uma vez no sentido positivo, isto é,

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i. \tag{3.13}$$

Exercícios

1. Calcule a integral (3.13) diretamente, pondo $z - a = re^{i\theta}$, donde $dz = d(z - a) = rie^{i\theta} d\theta$.
2. Mostre que

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^{n+1}} = 0,$$

onde n é um inteiro positivo e C é qualquer contorno fechado envolvendo o ponto $z = a$ uma vez no sentido positivo.

3. Calcule a integral

$$\int_{-i}^{-1} \frac{dz}{z}$$

ao longo de qualquer contorno C_1 que não passe pelo terceiro quadrante. Calcule a mesma integral usando um contorno C_2 todo contido no terceiro quadrante (Fig. 3.20).

Resp. $3\pi/2$ e $-i\pi/2$.

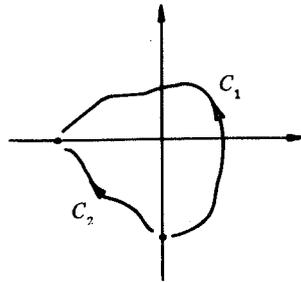


Fig. 3.20.

4. Como no exercício anterior, calcule

$$\int_{C_1} \ln z \, dz \quad \text{e} \quad \int_{C_2} \ln z \, dz,$$

tomando para o ponto inicial $-i$ o argumento $-\pi/2$. [Observe que $(z \ln z - z)' = \ln z$.]

Resp. $1 + \frac{\pi}{2} - i(1 + \pi)$ e $1 + \frac{\pi}{2} + i(\pi - 1)$.

5. Calcule as integrais seguintes, ao longo de contornos quaisquer ligando os pontos limites indicados:

$$\int_3^{i/\pi} \cos \pi z \, dz, \quad \int_{\pi}^{i\pi} ze^{z^2} \, dz.$$

6. Calcule a integral $\int_C \frac{z}{3z^2 + 7} \, dz$, onde C é qualquer contorno ligando $e^{-i\pi/4}$ a $e^{i\pi/4}$ e todo contido no semiplano $\text{Re } z > 0$.

3.7. Fórmula Integral de Cauchy, Derivadas de Ordem Superior e Teorema de Morera

Teorema 1. *Seja f uma função analítica numa região simplesmente conexa R . Então*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi,$$

onde $z \in R$ e C é qualquer contorno fechado simples de R , que envolve z uma vez no sentido positivo e cujo interior está todo contido em R .

Demonstração. Seja $\delta > 0$ tal que o disco $\xi: |\xi - z| \leq \delta$ não contenha pontos de C , como indica a Fig. 3.21.

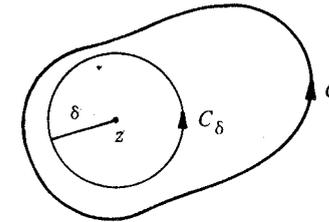


Fig. 3.21.

Designando por C_δ o contorno deste disco, do Teorema 2 da Seção 3.6 segue-se que

$$\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi = \oint_{C_\delta} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi.$$

Vamos decompor esta última integral em duas outras, de acordo com a decomposição

$$f(\xi) = f(z) + [f(\xi) - f(z)];$$

obtemos, assim,

$$\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi = f(z) \int_{C_\delta} \frac{d\xi}{\xi - z} + \int_{C_\delta} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \, d\xi.$$

A primeira integral do segundo membro é $2\pi i$, como vimos no final da Seção 3.6; portanto,

$$2\pi i f(z) = \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi - \int_{C_\delta} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \, d\xi. \tag{3.14}$$

Quanto a esta última integral, ela tende a zero com $\delta \rightarrow 0$. De fato, dado $\epsilon > 0$ arbitrário, da continuidade de f segue-se que podemos tomar δ tão pequeno que $|f(\xi) - f(z)| < \epsilon$, desde que $|\xi - z| \leq \delta$. Nestas condições,

$$\left| \int_{C_\delta} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \, d\xi \right| \leq \int_{C_\delta} \frac{|f(\xi) - f(z)|}{|\xi - z|} |d\xi| \leq \frac{\epsilon}{\delta} \int_{C_\delta} |d\xi| = 2\pi\epsilon.$$

Portanto, fazendo $\delta \rightarrow 0$ em (3.14) obtemos o resultado desejado.

A Fórmula Integral de Cauchy é instrumento básico no estudo das funções analíticas. Ela revela, quase de imediato, alguns resultados verdadeiramente surpreendentes e de importância fundamental. Por exemplo, uma simples inspeção dessa fórmula nos mostra que basta o conhecimento de f nos pontos ξ do contorno C para que possamos calcular f em qualquer ponto z do interior de C . Isto já nos revela que a condição de analiticidade é muito restritiva: os valores da função f estão todos ligados uns aos outros como mostra a Fórmula de Cauchy e não podem ser alterados — seja numa região, ao longo de arcos ou mesmo em pontos isolados — sem que isto viole a condição de analiticidade. Veremos mais tarde que a interdependência dos valores de uma função analítica é ainda mais forte do que a que nos mostra no momento a Fórmula de Cauchy.

Da Fórmula de Cauchy segue-se que uma função analítica possui derivadas de todas as ordens. É este o objetivo do teorema seguinte.

Teorema 2. *Uma função analítica numa região R possui derivadas de todas as ordens, as quais por sua vez são também analíticas em R e são obtidas da Fórmula de Cauchy por derivação sob o sinal de integração.*

Demonstração. Seja z um ponto qualquer de R e C um contorno fechado simples, todo contido em R , cujo interior contenha o ponto z e esteja todo contido em R . Vale então a Fórmula de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Admitindo, por um momento, a derivação sob o sinal de integração, teremos

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi;$$

e derivando sucessivamente, obtemos

$$f''(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3} d\xi, \quad f'''(z) = \frac{3!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^4} d\xi,$$

e, em geral,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi,$$

onde n é um inteiro positivo qualquer.

As fórmulas acima não só estabelecem o resultado desejado, como nos dão ainda expressões para as derivadas de f em termos de seus valores sobre C . Resta-nos justificar as derivações sob os sinais de integração, o que é objeto do teorema seguinte.

Teorema 3. *Sejam C um contorno qualquer (aberto ou fechado), $g(z)$ uma função definida e contínua para z em C , e n um inteiro positivo. Então a função*

$$f(z) = \int_C \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^n} d\xi$$

é regular em todo ponto $z \notin C$ e possui derivada dada por

$$f'(z) = n \int_C \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi.$$

Demonstração.* Devemos mostrar que

$$F = \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - n \int_C \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

tende a zero com $h \rightarrow 0$. Usando a fórmula que define a função f obtemos

$$F = \int_C G g d\xi, \quad (3.15)$$

onde

$$G = \frac{1}{h} \left[\frac{1}{(\xi - z - h)^n} - \frac{1}{(\xi - z)^n} \right] - \frac{n}{(\xi - z)^{n+1}}.$$

Vamos primeiro mostrar que esta função G pode ser feita arbitrariamente pequena, desde que h tenha módulo suficientemente pequeno. Por conveniência pomos $a = \xi - z - h$ e $b = \xi - z$. Temos então (pressupomos $n \geq 2$, deixando a cargo do leitor o caso $n = 1$, que é bem mais simples)

$$G = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{a^n} - \frac{1}{b^n} \right) - \frac{n}{b^{n+1}} = \frac{b^n - a^n}{(b-a)a^n b^n} - \frac{n}{b^{n+1}}$$

$$= \frac{a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + ab^{n-1} + b^n - na^n}{a^n b^{n+1}}$$

$$= \frac{a^{n-1}(b-a) + a^{n-2}(b^2 - a^2) + \dots + a(b^{n-1} - a^{n-1}) + (b^n - a^n)}{a^n b^{n+1}}.$$

* Esta demonstração pode ser omitida numa primeira leitura.

Como $z \notin C$ e C é fechado, existe uma vizinhança de z , de raio d , que não contém pontos de C (Fig. 3.22). Em outras palavras, $|\xi - z| \geq d$ para todo $\xi \in C$, e tomando $|h| < d/2$

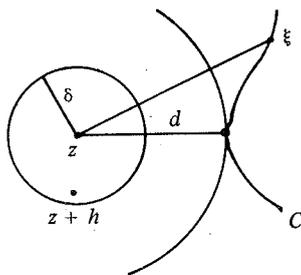


Fig. 3.22.

teremos também $|\xi - z - h| \geq |\xi - z| - |h| > d/2$. Daqui e da expressão acima obtemos

$$|G| \leq \frac{2^n}{d^{2n+1}} [|a^{n-1}(b-a)| + |a^{n-2}(b^2-a^2)| + \dots + |(b^n-a^n)|]. \quad (3.16)$$

Como $|h| \leq d/2$, pode-se provar que existe uma constante M tal que $|a| < M$ e $|b| < M$. Portanto, usando a identidade

$$b^j - a^j = (b-a)(b^{j-1} + b^{j-2}a + \dots + a^{j-1})$$

obtemos

$$|b^j - a^j| \leq |b-a| j M^{j-1} = j |h| M^{j-1}.$$

Daqui e de (3.16) segue-se, então, que

$$\begin{aligned} |G| &\leq \frac{2^n}{d^{2n+1}} |h| (M^{n-1} + 2M^{n-1} + \dots + nM^{n-1}) \\ &= \frac{2^{n-1} n (n+1) M^{n-1} |h|}{d^{2n+1}}. \end{aligned}$$

Esta expressão nos mostra que dado $\epsilon > 0$ arbitrário e pondo

$$\delta = \min \left\{ \frac{d}{2}, \frac{d^{2n+1}}{2^{n-1} n (n+1) M^{n-1}} \right\},$$

teremos $|h| < \delta \Rightarrow |G| < \epsilon$. Daqui e de (3.15) obtemos

$$|F| \leq \int_C |G| |g| |d\xi| \leq \epsilon AL,$$

onde A é máximo de $|g|$ em C e L o comprimento de C . Isto mostra que $F \rightarrow 0$ com $h \rightarrow 0$, como queríamos demonstrar.

Estamos agora em condições de estabelecer a recíproca do Teorema de Cauchy.

Teorema 4 (Morera). *Seja f uma função contínua numa região R , tal que*

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

para todo contorno fechado C em R . Então f é analítica em R .

Demonstração. Seja z_0 um ponto qualquer de R , porém fixo. A expressão

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi$$

independe do caminho de integração. Como na demonstração do Teorema 1 da Seção 3.6, F é uma função analítica em R e sua derivada é a função f : $F'(z) = f(z)$. Pelo Teorema 2 acima, $F'(z)$ também é analítica em R , isto é, $f(z)$ é analítica em R , o que completa a demonstração.

É interessante observar que esta demonstração baseia-se inteiramente no Teorema de Cauchy. Em outras palavras, a recíproca do Teorema de Cauchy é consequência dele mesmo!

3.8. Teorema de Liouville

Uma função inteira (analítica em todo o plano) e limitada f é necessariamente constante.

Demonstração. Seja M uma constante tal que $|f(z)| \leq M$ para todo z . De acordo com a fórmula integral da derivada (p. 88),

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2} d\xi,$$

onde z é um ponto qualquer e C um contorno arbitrário envolvendo z uma vez no sentido positivo. Em particular, tomando para C o círculo $\{\xi : |\xi - z| = r\}$; obtemos

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|\xi-z|=r} \frac{|f(\xi)|}{|\xi-z|^2} d\xi \leq \frac{M}{2\pi r^2} \int_{|\xi-z|=r} |d\xi| = \frac{M}{r}.$$

Como r é arbitrário, fazendo $r \rightarrow \infty$, obtemos $f'(z) = 0$; isto sendo verdade para todo z , concluímos que f é constante.

Com o Teorema de Liouville demonstra-se facilmente o Teorema Fundamental da Álgebra: *todo polinômio de grau $n \geq 1$ possui ao menos uma raiz*. De fato, seja

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

onde $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$. Suponhamos, por absurdo, que P não se anule, de forma que

$$f(z) = \frac{1}{P(z)} = \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}$$

é uma função inteira. Como $f(z) \rightarrow 0$ e com $z \rightarrow \infty$ e f é contínua, portanto limitada em qualquer parte finita do plano, concluímos que f é limitada em todo o plano. Pelo Teorema de Liouville segue-se, então, que f é constante, logo $P(z) = c$ também é constante. Daqui segue-se que $P(z) - c$ se anula identicamente, o que exige, em particular, que a_n se anule. Isto contraria a hipótese inicial, logo o Teorema está demonstrado.

Exercícios

1. Use a Fórmula de Cauchy para calcular as seguintes integrais:

$$a) \oint_{|z|=3} \frac{z^2+1}{z+2} dz; \quad b) \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{2z+i} dz; \quad c) \oint_{|z|=2} \frac{\ln(z+5)}{z^2-2iz+3} dz.$$

Nesta última considere o ramo do algoritmo que corresponde a $\ln x > 0$ para $x > 1$.

Sugestão. Ponha os integrandos na forma $\frac{f(z)}{z-z_0}$.

2. Calcule as seguintes integrais:

$$a) \oint_{|z|=3} \frac{\cos(z^2+3z-1)}{(2z+3)^2} dz; \quad b) \oint_{|z|=1} \frac{z^2+z+i}{(4z-i)^3} dz;$$

$$c) \oint_{|z|=1} \frac{\ln(z^2+2)}{(3z-2)^2} dz.$$

Observe que o valor desta última integral independe do ramo particular de $\ln(z^2+2)$ usado na integração.

3. Calcule as seguintes integrais:

$$a) \oint_C \frac{\sqrt{z^2+4}}{4z^2+4z-3} dz; \quad b) \oint_C \frac{\sqrt{z^2+4}}{4z^2-4iz-1} dz;$$

$$c) \oint_C \frac{\sqrt{z^2+4}}{3z^2-(10+i)z+3(1+i)} dz,$$

onde C é o quadrado de vértices $\pm 1 \pm i$ e a função $f(z) = \sqrt{z^2+4}$ é determinada pela condição $f(0) = -2$.

3.9. Funções Harmônicas

Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ uma função analítica numa região R . Pelo Teorema 2 da Seç. 3.7 f possui derivadas de todas as ordens em R . Essas derivadas, por sua vez, são também analíticas em R e podem ser calculadas derivando f repetidamente em relação a x ou em relação a iy ; ou ainda, em relação a x e em relação a iy , um número conveniente de vezes. É fácil ver então que as funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ possuem derivadas parciais de todas as ordens, as quais são todas contínuas em R . Podemos então derivar as Equações de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y \quad \text{e} \quad u_y = -v_x$$

qualquer número de vezes. Em particular, derivando a primeira destas em relação a x e a segunda em relação a y e somando os resultados membro a membro, obtemos

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (3.17)$$

Analogamente,

$$v_{xx} + v_{yy} = 0. \quad (3.18)$$

Uma função $g(x, y)$ é dita *harmônica* numa região R se ela possui derivadas contínuas até a segunda ordem e satisfaz a Equação de Laplace em R :

$$\Delta g = g_{xx} + g_{yy} = 0.$$

Pelo que vimos acima, as partes real e imaginária de uma função analítica numa região R são funções harmônicas nessa mesma região. Aliás, é fácil ver, por derivações sucessivas

de (3.17) e (3.18), que quaisquer derivadas parciais de u e v — digamos $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$,

$\frac{\partial^p + q v}{\partial x^p \partial y^q}$ — são também harmônicas em R .

A questão que se põe naturalmente é se qualquer função harmônica pode ser considerada como parte real ou parte imaginária de uma função analítica. A resposta a esta questão é afirmativa, como veremos a seguir. Existe então uma ligação íntima entre a teoria das funções analíticas e a teoria das funções harmônicas.

A título de ilustração, seja

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad (3.19)$$

que é harmônica em todo o plano, como é fácil verificar. Vamos determinar a função v usando as Equações de Cauchy-Riemann. Temos

$$v_x = -u_y = 2y;$$

integrando em relação a x obtemos

$$v = 2xy + g,$$

onde g é uma função arbitrária de y — a “constante” (em relação a x) da integração precedente. Derivando esta última equação em relação a y e usando $v_y = u_x = 2x$, obtemos $g'(y) = 0$, logo g é uma constante arbitrária e $v = 2xy + g$. Daqui e de (3.19) segue-se que

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = x^2 + 2ixy - y^2 + \text{const.} = (x + iy)^2 + \text{const.},$$

ou seja,

$$f(z) = z^2 + \text{const.}$$

Vamos agora considerar o problema na sua generalidade. Seja $u(x, y)$ uma função harmônica numa região R , que supomos, por enquanto, ser simplesmente conexa. Vamos determinar $v(x, y)$ de forma que $f = u + iv$ seja analítica em R . A função v assim determinada é chamada a função *harmônica conjugada* da função u . Como no exemplo acima, v é determinada pelas Equações Cauchy-Riemann. Devemos ter então

$$dv = v_x dx + v_y dy = -u_y dx + u_x dy.$$

Isto nos leva a procurar a função v na forma

$$v(x, y) = v_0 + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -u_y dx + u_x dy, \quad (3.20)$$

onde $v_0 = v(x_0, y_0)$ e (x_0, y_0) é um ponto de R fixado arbitrariamente.

Se a integral acima for independente do caminho de integração, a função v que ela define possui derivadas contínuas em R , satisfazendo, juntamente com u , as Equações de

Cauchy-Riemann, logo $f = u + iv$ é analítica em R . O problema se reduz, então, a provar que a expressão

$$-u_y dx + u_x dy$$

é uma diferencial exata; mas isto equivale a verificar que a integral desta expressão ao longo de qualquer contorno fechado C em R é nula. Designando por R' o interior de C e tendo em conta o Teorema de Green (Seç. 3.4), obtemos

$$\oint_C -u_y dx + u_x dy = \iint_{R'} (u_{xx} + u_{yy}) dx dy = 0,$$

onde usamos o fato de que u é harmônica. Isto conclui a demonstração da existência da função v , a qual é determinada pela função u a menos de uma constante aditiva arbitrária v_0 , como mostra a expressão (3.20).

No caso de uma região multiplamente conexa, a função conjugada v pode ser multivalente. Exemplo típico desta situação é dado por $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, que é harmônica em todo o plano, excluída a origem. Substituindo em (3.20), obtemos

$$v(x, y) = v_0 + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

Escolhendo como caminho de integração o contorno formado pelos segmentos retilíneos ligando (x_0, y_0) a (x, y_0) e (x, y_0) a (x, y) , a expressão acima nos dá

$$v(x, y) = v_0 - \arctan \frac{x}{y_0} + \arctan \frac{x_0}{y_0} + \arctan \frac{y}{x} - \arctan \frac{y_0}{x}.$$

Como

$$\arctan \frac{x}{y_0} + \arctan \frac{y_0}{x} = \frac{\pi}{2},$$

obtemos finalmente

$$v(x, y) = \arctan \frac{y}{x} + \text{const.},$$

que é uma função multivalente na região considerada. Em coordenadas polares $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\theta = \arctan(y/x)$ obtemos

$$f = u + iv = \ln r + i\theta + \text{const.},$$

ou ainda, com $z = re^{i\theta} = x + iy$,

$$f(z) = \ln z + \text{const.}$$

O leitor deve notar que casos como este reduzem-se à situação de uma região simplesmente conexa, bastando para isto introduzir um corte conveniente no plano.

Exercícios

1. Sendo $f = u + iv$ uma função analítica numa região R , mostre que u é conjugada harmônica de $-v$.

2. Mostre que $u = x - 5xy$ é harmônica em todo o plano. Determine sua conjugada v e expresse $f = u + iv$ em termos de $z = x + iy$.

$$\text{Resp. } f(z) = z + \frac{5i}{2} z^2 + \text{const.}$$

3. Verifique que $a(x^2 - y^2) + bxy$ é a forma mais geral dos polinômios homogêneos e harmônicos do segundo grau em x e y . Determine sua função harmônica conjugada e a função $f = u + iv$.

$$\text{Resp. } v = 2axy - \frac{b}{2}(x^2 - y^2) + c,$$

$$f(z) = (a - ib/2)z^2 + c.$$

4. Determine a forma geral dos polinômios homogêneos e harmônicos de grau 3 em x e y . Determine também a função harmônica conjugada e a função $f = u + iv$.

$$\text{Resp. } u = ax^3 - 3bx^2y - 3axy^2 + by^3,$$

$$v = bx^3 + 3ax^2y - 3bxy^2 - ay^3 + c,$$

$$f(z) = u + iv = (a + ib)z^3 + c.$$

5. Mostre que as seguintes funções u são harmônicas numa certa região; determine a função harmônica conjugada e a função $f = u + iv$ em cada caso:

$$a) u = x - 4xy; \quad b) u = \sin x \cosh y; \quad c) u = x^3 - 3xy^2.$$

$$\text{Resps. } a) v = 2(x^2 - y^2) + y + c, \quad f(z) = 2iz^2 + z + ic;$$

$$b) v = \cos x \sinh y + c, \quad f(z) = \sin z + ic;$$

$$c) v = 3x^2y - y^3 + c, \quad f(z) = z^3 + ic.$$

4

Séries de Potências

4.1. Séries de Funções – Convergência Uniforme

Vamos estudar neste capítulo o desenvolvimento de funções analíticas em séries de potências. Veremos ser este um modo natural de construir funções analíticas e um dos instrumentos mais importantes no tratamento dessas funções. Iniciamos esse estudo com algumas definições gerais relativas às séries de funções.

Uma *série de funções* é simplesmente uma série

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \dots$$

cujos termos f_n são, em geral, funções de uma variável z , todas com um domínio comum de definição. As expressões $\sum f_n(z)$ e $f_0(z) + f_1(z) + \dots$ são meros símbolos com que designamos uma série. No caso de uma série convergente eles assumem o significado de soma da série, isto é,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \dots = \lim s_n(z),$$

onde $s_n(z)$ é a soma parcial ou reduzida de ordem n :

$$s_n(z) = \sum_{j=0}^n f_j(z). \quad (4.1)$$

Em se tratando de uma série convergente, é claro que sua soma $s(z) = \sum f_n(z)$ é, em geral, uma função de z . Neste caso a expressão

$$r_n(z) = s(z) - s_n(z) = \sum_{j=n+1}^{\infty} f_j(z) = f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \dots$$

é o resto da série a partir do termo $f_{n+1}(z)$.