

A POESIA DE SIR MICHAEL ATIYAH

Entrevista concedida a

Michael Forger e Severino Toscano Melo

IME/USP

Tradução: Eduardo Colli e Severino Toscano Melo¹

Sir Michael Atiyah esteve no IME/USP em dezembro de 2010 e concedeu a seguinte entrevista, após proferir palestra para um auditório lotado.

Michael Forger — *É um grande prazer tê-lo aqui para esta pequena conversa. Antes de tudo gostaria de aproveitar para destacar alguns pontos com o intuito de garantir que alguns aspectos de sua carreira e de sua vida sejam conhecidos pelas pessoas aqui presentes. Você está no Brasil pela terceira vez, ao que me consta, e esta é sua primeira visita a São Paulo. Espero que não seja a última!*

Michael Atiyah — Bem, eu sou jovem!



MF — *Eu também chamei o professor Toscano para participar e formular algumas questões. Sua área de pesquisa é um pouco mais próxima de alguns dos assuntos em que o professor Atiyah trabalhou.*

Sobre a vida do professor Atiyah, eu gostaria de passar primeiro algumas informações. Sir Michael Atiyah nasceu em 1929, em Londres, filho de um pai libanês, que era um funcionário do Império Britânico no Sudão, e de uma mãe escocesa, e cresceu no Sudão, em Khartoum, a capital do Sudão, até 1941, se não estou enganado. Então foi para o Cairo e para Alexandria, no Egito, para cursar o ensino secundário. Eu tenho uma pergunta aqui. Esses eram tempos violentos, no Cairo e em Alexandria até 1945. Até que ponto a Segunda Guerra Mundial afetou sua vida nesse período?

MA — Creio que eu tive muita sorte. Quando a guerra começou, nós de fato estávamos na Inglaterra. Meu pai tinha que voltar imediatamente para o Sudão, mas eu permaneci com minha mãe, meus irmãos e irmãs na Inglaterra, até que pudéssemos nos juntar a ele. Nós tomamos um trem e depois cruzamos o Mediterrâneo de barco, em abril de 1940, apenas alguns meses antes da queda da França; senão nunca teríamos voltado. Então foi assim que escapamos. E, é claro, quando estávamos lá no Cairo podíamos ouvir os tiros de canhão à distância, nas grandes batalhas de El Alamein, quando os alemães chegaram muito próximos do Cairo. Eu não fui seriamente afetado, isso ocorria em locais distantes.

Eu era um estudante e costumava ir ao Líbano durante a guerra, mas naquele tempo o Líbano estava sob domínio britânico, portanto não era um problema. No sul do Sudão, na fronteira com a Etiópia, havia a guerra contra os italianos, mas isso também não me afetou. Depois da guerra nós voltamos à Inglaterra e aí sim eu sofri as consequências da guerra: racionamento de água e comida etc. Eu fiz meu serviço militar no exército mas

¹ N. do E. Um agradecimento a Peter Hazard e Michael Forger pelo auxílio na transcrição, bem como ao próprio entrevistado, que a revisou.

felizmente eu não fui muito afetado pela guerra.

MF — *Em 1945, segundo eu li, você se mudou definitivamente para a Inglaterra. Você entrou na Manchester Grammar School, uma escola especializada em matemática e ciências, de 1945 a 1947. Então, como você mencionou, você fez o serviço militar para em seguida ingressar em Cambridge, no Trinity College, primeiro como estudante de graduação e depois de pós-graduação. Ali você fez seu PhD sob a orientação de William Hodge, com a tese “Algumas aplicações de métodos topológicos em geometria algébrica”. Ou seja, pode-se dizer que você começou sua carreira na geometria algébrica?*

MA — Sim! Quer dizer, quando eu estava em Cambridge, a geometria algébrica, aquela do tipo tradicional, era realmente uma tradição. Hodge era um geômetra algébrico, embora usasse métodos modernos de análise. E havia outros geômetras. Eu gostava de geometria e decidi trabalhar em geometria, e escolhi Hodge como orientador porque ele representava uma vertente moderna. Acabou sendo uma boa escolha, pois muita coisa estava acontecendo em geometria algébrica naquele tempo, novas ideias de cohomologia de feixes vinham da França e dos Estados Unidos, era um bom momento para entrar na área. Depois eu fui aos Estados Unidos e conheci Bott. Sim, foi uma boa escolha, e eu tive sorte.

Durante sua vida, na sua carreira, você tem que fazer várias escolhas. Muito frequentemente é uma questão de sorte se você faz uma boa ou uma má escolha. Você tem que escolher um orientador: bem, sua escolha é limitada. Depende de quem está ali, em que área eles atuam, de forma que você pode ou não ter sorte. Eu tive sorte, eu tinha um bom orientador, ele era um bom matemático, ajudou-me bastante. Claro que também depende da escolha da universidade, em primeiro lugar, e da escolha da área. Você pode ir para uma área que está em pleno desenvolvimento de várias coisas novas ou você pode ir para uma área que está acabada, quero dizer, feita, com apenas alguns poucos problemas difíceis por resolver. Então essas são questões de sorte. É claro que depois disso você faz seu próprio caminho. No co-

meço, você está muito à mercê do entorno, das pessoas ao seu redor. Você faz algumas escolhas, que ajudam, mas boa parte é sorte.

MF — *Falando sobre pessoas ao seu redor: logo depois de sua tese você foi para o Institute of Advanced Studies, em Princeton, e lá conheceu muita gente.*

MA — É verdade. Quando eu fui para Princeton era 1955, um período em que muitos matemáticos cujas carreiras haviam sido interrompidas pela guerra estavam terminando seus estudos ou retomando. Então, naquele momento, havia no Instituto muitas pessoas que normalmente teriam aparecido distribuídas por muitos anos, mas todas estavam ali ao mesmo tempo. Eu encontrei Hirzebruch, Serre e várias pessoas pela primeira vez, e também Bott. As pessoas que você conhece bem quando é jovem são as pessoas com quem você fica em contato ao longo da vida e, de fato, eu mantive contato com essas pessoas durante a maior parte de minha carreira. Com alguns deles eu colaborei, e eles me influenciaram bastante. Então, de novo, eu tive sorte indo para o IAS num período em que havia tanta gente boa por lá. Nós interagimos bem, nós cultivamos nossas amizades e colaborações, mesmo que estivéssemos em países diferentes. Eu estava na Grã-Bretanha, Hirzebruch estava na Alemanha, Bott estava em Harvard...

É claro que viajar naquele tempo não era tão fácil quanto agora. Não havia tantos aviões. Quando eu fui pela primeira vez aos Estados Unidos eu fui de navio, porque navios eram mais baratos, aviões existiam mas eram caros. Agora, é claro, é o contrário. Não se viajava tanto quanto agora, ir a Princeton era uma oportunidade única. Depois disso eu ia todos os anos a Bonn, para os grandes e famosos encontros que Hirzebruch organizava. Lá eu também encontrei muita gente. Também não tínhamos e-mail e computadores, a comunicação era muito mais lenta. Dependíamos bastante do contato pessoal, de conhecer as pessoas, e era nas conferências que as encontrávamos. Em Oxford, eu me lembro de tentar convidar Serre para vir de Paris. Eu tinha que conseguir 10 libras, que era bastante dinheiro na

época. Foi muito difícil conseguir 10 libras para trazer Serre a Oxford. Eu consegui, mas foi difícil. Isto mostra como as coisas mudaram, não o valor do dinheiro, mas a facilidade de hoje em se conseguir dinheiro para certas coisas. Antes era muito difícil.



Severino Toscano Melo — *Você concordaria que a K-teoria nasceu com a prova de Grothendieck do Teorema de Riemann-Roch? Ou foi depois? Ele definiu os grupos?*

MA — Bem, Grothendieck introduziu a K-teoria em geometria algébrica para dar uma nova prova do Teorema de Riemann-Roch. De fato eu estava lá quando ele foi a Bonn e falou por horas e horas e horas – estilo Grothendieck, sabe como é – quase uma semana. Ele falava cinco ou seis horas por dia, nós o escutamos bastante. Mas o desenvolvimento da K-teoria em topologia que se seguiu foi parcialmente motivado por isso e também parcialmente motivado pelo trabalho de Bott sobre os grupos de homotopia dos grupos clássicos. As pessoas pensam, em geral, que alguém desenvolve uma teoria e depois acha algumas aplicações dessa teoria. Não foi isso que aconteceu, de forma alguma. Havia alguns problemas particulares que eu me interessei em estudar que vinham da topologia, e eu descobri que era possível obter novos bons resultados sobre eles usando algumas das ideias de Grothendieck. Então eu percebi que era preciso desenvolver a teoria sistematicamente. Nós já tínhamos as aplicações em mente antes de desenvolver a teoria, e nós sabíamos que os resultados que

obteríamos da teoria seriam muito poderosos, ou seja, nós sabíamos que valeria a pena desenvolvê-la. Não era um caso de “desenvolva a teoria e então ache uma aplicação”, era justamente o contrário, a aplicação vinha antes. A aplicação o força a sistematizar seus métodos e então você desenvolve a teoria para esse propósito, mas sabendo de antemão que aquilo vai resolver o problema. É uma lição útil: as coisas não acontecem do jeito que as pessoas pensam, na ordem lógica. Não funciona na ordem lógica, mas sim indiretamente.

STM — *Com respeito a essas aplicações previstas: quando você começou a desenvolver sua teoria do índice, você já podia prever as conexões profundas que ela revelaria entre diferentes áreas da matemática? E a aplicação à física? Provavelmente isso foi completamente surpreendente.*

MA — Sim, a aplicação em física foi completamente surpreendente. Em matemática nós já sabíamos, é claro, vinha da geometria algébrica. Nós sabíamos, pelo trabalho de Hirzebruch, que poderíamos obter resultados sobre variedades diferenciáveis e topologia. Nós conhecíamos toda aquela área: topologia, geometria diferencial, geometria algébrica. Já aplicações em física, nós desconhecíamos essa possibilidade. Quando trabalhamos com os teoremas de índice nós achamos uma relação com a análise, e isto nos deu uma direção, mas a coisa com a física... Na verdade eu não sabia nada de física. Quer dizer, eu fui às palestras de Dirac, mas apenas porque ele era uma pessoa famosa. De fato, nós redescobrimos o operador de Dirac, Singer e eu: eu mal me lembrava que Dirac tivesse inventado esse operador. Quando me contaram, mais tarde, que o que Singer e eu estávamos fazendo estava muito próximo a questões em física, isso foi uma grande surpresa. Então tive que estudar um pouco de física para falar aos físicos e entender isso melhor.

No entanto, eu sou da opinião que se você faz alguma coisa natural em matemática então isso terá aplicações em todas as direções. Por exemplo, nós trouxemos a geometria diferencial e o operador de Dirac, e o que veio da geometria algébrica foram as equações de Cauchy-

Riemann, a cohomologia de feixes, a teoria de variáveis complexas. Então, para o aproveitamento das fórmulas, vimos que era natural introduzir alguma geometria diferencial, *spinors* e o operador de Dirac, este era o jeito natural de se obterem boas respostas. Uma vez que você vai tão longe assim você está no meio do caminho em direção à física. Então não era totalmente surpreendente: nós não fomos da geometria algébrica para a física; nós fomos da geometria algébrica para a geometria diferencial e para a topologia, e daí para a física. A geometria algébrica era uma ponta, e nós tínhamos que converter a geometria algébrica em análise e geometria diferencial antes de chegar perto da física.

STM — *Você acha que foi uma grande surpresa para Gelfand e outros analistas que trabalharam no problema do índice que tantas outras conexões com álgebra e topologia estariam envolvidas na questão do cálculo do índice?*

MA — Sim, veja, os russos e outros abordavam a questão sob o ponto de vista geral da análise. Eles sabiam que o índice de alguns operadores locais era um invariante topológico e podiam fazer alguns cálculos simples para um ou dois exemplos simples em dimensões baixas. Mas eles não tinham nenhuma ideia das complicações que adviriam da geometria algébrica, com dimensões muito mais altas e todas aquelas fórmulas. Então nós começamos com a vantagem de conhecer todas aquelas fórmulas. Nosso problema era achar a pergunta, e quem deu a resposta foi o operador de Dirac. Nós conhecíamos as respostas de antemão, da topologia, das fórmulas com as quais Hirzebruch trabalhou. Os analistas conheciam a análise básica, alguns exemplos simples, mas a dificuldade para eles não era a análise, era o ferramental da topologia algébrica, que permite lidar com as complicações de variedades gerais, fibrados gerais, e por aí vai. Isto já havia sido desenvolvido por Hirzebruch e Borel depois da guerra, uma bela teoria usando grupos de Lie, que eu aprendi indo a todos esses encontros. Então nós conhecíamos esse ferramental, que os analistas não conheciam, eles só conheciam a análise. Nós tivemos que aprender análise,

mas isso era mais fácil do que aprender toda a topologia algébrica. Isso mesmo, eu acho que eles ficaram bem surpresos. Eles ficaram surpresos pela velocidade com que fizemos isso. Pode-se dizer que após as primeiras ideias a teoria caminhou muito rapidamente e teve ramificações em geometria algébrica. A física veio depois. Sim, eu acho que foi uma surpresa!

MF — *Ainda a respeito do teorema do índice, quem olha a literatura nota que a primeira versão é de 1963, se não me engano, mas a série de artigos em que as provas são publicadas começa em torno de 1968. Eu entendo que eram várias e diferentes demonstrações. A primeira usava teoria de cobordismo, depois, mais adiante, vocês usaram K-teoria e cohomologia. E também li que vocês tiveram que adaptar a prova para cobrir outras situações, como o teorema do índice equivariante, o teorema do índice para famílias, e assim por diante. Isso explica o período relativamente longo para as demonstrações aparecerem completamente?*

MA — Sim, porque as primeiras demonstrações eram aquelas mais rápidas que poderíamos obter, usando ideias de teoria de cobordismo que estavam à disposição graças ao trabalho de René Thom. Mas também estava claro desde cedo que essa não era a melhor prova, porque ela não se prestava às várias generalizações, incluindo a teoria equivariante. Além disso, o trabalho de Grothendieck em geometria algébrica foi mais além. Ele não só inventou a K-teoria, mas generalizou a característica de Euler para aplicações entre duas variedades algébricas²: somente quando a segunda variedade é um ponto você obtém o Teorema de Riemann-Roch original. Então isso se tornou um teorema de uma aplicação de uma variedade algébrica em outra. Eu sempre tentei achar uma generalização disso no contexto da análise e, muitos anos depois, nós conseguimos, no que ficou conhecido como K-homologia, que foi encampada mais pelos analistas funcionais; mas isso veio depois. Num primeiro estágio, bem, uma aplicação a um ponto é trivial, mas entre isso e uma aplicação geral havia o caso de um fibrado. Para o caso de fibrados nós provamos

² N. do T. No sentido de um conjunto algébrico irredutível.

o teorema do índice para famílias, a forma de Grothendieck para a aplicação do espaço todo na base, o que é equivalente a fazer o teorema do índice em cada fibra, separadamente, mas fazendo famílias disso. Então isso foi parcialmente motivado pelo que Grothendieck havia feito, porque para ele uma aplicação geral é uma aplicação geral, não é uma aplicação fibrada. Mas uma aplicação geral em geometria diferencial... é muito complicado fazer geometria com isso, embora, no fim das contas, indo para as ideias de homologia e análise, o ferramental tenha sido desenvolvido. Portanto, sim, houve várias melhorias do teorema, que apareceram durante vários anos. Acho que eu trabalhei nesse teorema por uns vinte anos, em cada estágio tentando obter uma prova diferente, ou uma prova melhor, ou uma prova que se generalizasse. E você pode generalizar o teorema de muitas formas: caso equivariante, caso de fibrados, operadores reais, e finalmente variedades com fronteira e com tipos diferentes de condições de contorno. Por isso levou um longo tempo. E todas essas generalizações são importantes.

E, de fato, mais tarde, quando descobrimos que tudo isso era usado pelos físicos, nós ficamos surpresos que os físicos usassem todas essas generalizações, e até algumas sobre as quais não havíamos pensado. Então certamente elas são naturais, de várias maneiras. Eu gosto de pensar nisso não como um teorema, mas uma teoria, que evoluiu por longas etapas. E demonstrações diferentes são importantes, porque em parte havia uma interligação entre a prova do teorema do índice, que era, digamos, análise, e a teoria da periodicidade de Bott, que era a fundamentação topológica da K-teoria. Mas após um certo tempo nós percebemos que essas duas coisas estavam tão intimamente ligadas que nós poderíamos usar a teoria do índice para dar novas provas do teorema de Bott. Periodicidade, topologia e análise estão tão intimamente relacionadas que podemos usar uma para ajudar a outra. De algum modo isso é um reflexo da geometria algébrica. Há duas coisas que entram na geometria algébrica: cohomologia de feixes e característica de Euler, mas de fato há também os feixes

por si só e os fibrados vetoriais por si só. Em análise e geometria diferencial essas coisas estão longe uma da outra, mas em geometria algébrica elas são a mesma coisa. Mas no contexto real há mais diferença entre a teoria de operadores e a geometria diferencial para se fazer a ponte.

STM — *Sobre a série de artigos no Annals, no quarto deles, há algo que achei engraçado: você escreve no final que “o caso equivariante para famílias fica para o leitor” (risos). Por que vocês ao menos não enunciaram o teorema? Ou vocês estavam superestimando o leitor?*

MA — Bem, esse era o quarto de uma série de artigos, e eu acho que o periódico estava ficando um bocado cansado (risos)! Então nós o fizemos mais curto, e nesse ponto já tinha se tornado rotina: nós fizemos o caso de famílias e o equivariante. Era realmente um exercício combinar os dois, não requeria muito esforço, mas teríamos que escrever mais algumas páginas e estávamos cansados!

STM — *Forger gostaria de respeitar a ordem cronológica, mas talvez este seja o momento de colocar esta questão. Que futuro você vê para a teoria do índice em variedades não compactas? Você acha que a pesquisa atual está indo pelo caminho certo? Que conselhos você daria?*

MA — Eu gosto de dizer que “não compacidade” não é uma propriedade, é a ausência de uma propriedade! Existem milhões e milhões de tipos diferentes de variedades não compactas, e cada uma terá sua própria e interessante teoria. Há uma classe de variedades não compactas com a qual eu trabalhei, que é o recobrimento universal de variedades compactas. É claro que existem muitas pessoas estudando variedades, como meu ex-aluno John Roe, que estuda o que se costuma chamar de *coarse manifolds*, que são variedades em que quando você vai para infinito você mantém controle sobre como a topologia se comporta. Há também variedades não compactas que vêm de grupos de Lie. E muitas outras diferentes. Não há uma única teoria que englobe todas. Mas há muitas que foram estudadas. Cada uma

tem que ser tratada à parte, porque tem propriedades especiais. Por isso eu não acho que haja uma única resposta a essa questão. Há muitos tipos diferentes, e eu não tenho seguido tudo.

STM — *Você ouviu falar dessas pessoas de geometria não comutativa que estão olhando para operadores pseudo-diferenciais em grupoides de Lie? Elas dizem que isso poderia unificar várias abordagens.*

MA — Sou obrigado a dizer que “grupoide” é uma palavra feia! Grupo sim, grupoide não. Mas, por outro lado, isso não é inteiramente verdadeiro. Eu mesmo pensei um pouco sobre teoremas de índice para correspondências em vez de aplicações. Alguns anos atrás eu soube de alguns teoremas que envolvem generalizações na direção de operadores pseudodiferenciais e análise microlocal. Mas eu acho que um teorema deveria ter algumas aplicações importantes. Fazê-lo apenas porque a técnica está ali é chato. Que alguém me dê um bom exemplo, digamos: “Bem, esse teorema... nós precisamos desta extensão porque para provar esse teorema nós queremos aplicar alguma coisa em geometria ou em teoria dos números, essa é nossa motivação.” Fazê-lo sem nenhuma motivação ou bons exemplos é algo que eu, particularmente, não gosto. Bem, eu devo dizer que eu mesmo fiz uma generalização. Eu tinha alguma motivação em fazê-la, mas ela não atraiu muita atenção. É a situação onde você tem uma variedade compacta e um operador, e você tem uma ação de grupo. No caso mais forte você tem uma ação de grupo e um operador elíptico, e você faz teoria equivariante. Mas você pode partir de uma hipótese mais fraca, supondo apenas que tem um operador que é elíptico transversalmente à ação do grupo. Se o grupo age livremente isso é a mesma coisa que ter um operador no espaço quociente. Mas se o grupo tem diferentes tipos de órbitas, então você precisa apenas de elipticidade nas direções transversais porque o grupo pode controlar as funções ao longo das órbitas, você só precisa controlar as direções normais. Então eu desenvolvi uma teoria de índice para operadores transversalmente elípticos. Era um pouco abs-

trato e não parecia ter aplicações. Mas então um ou dois anos atrás eu conversava com Edward Witten, e um de seus estudantes estava lutando com um problema. De repente eu percebi que era um exemplo muito simples dessa teoria e lhes dei o que queriam. Tem vezes em que não dá para prever! A teoria parecia natural de se fazer, ela incluía vários exemplos que eram conhecidos anteriormente e eu tinha outras ideias em mente, mas foi um pouco desapontador quando eu escrevi a teoria porque não havia realmente um bom exemplo do jeito que eu gostaria, e de repente os físicos vieram com um, isso foi muito bacana.

MF — *Isso foi mais no lado matemático do desenvolvimento da teoria do índice (como você diz, uma expressão melhor do que teorema do índice). Eu entendo que foi nos anos 70 que a primeira relação com a física apareceu, pelas anomalias, se não estou enganado. Quando isso aconteceu? Você pode nos contar isso?*

MA — Sim, acho que foi em torno de 1974, não estou muito certo, talvez 1975. Eu me lembro de ir ao MIT para encontrar um grupo de físicos, e um deles era esse então jovem físico Edward Witten, com quem nunca tinha me encontrado antes. Ele era obviamente muito mais brilhante do que os físicos mais velhos ali. Conversando com eles nós percebemos que essas anomalias que eles estavam usando estavam relacionadas com o que tínhamos feito. Então eu tive que aprender um pouco de física para falar para os físicos e ali isso começou, foi realmente uma surpresa. Tem uma história que eu gosto de contar. No MIT eu falei para os físicos: “Vocês estão trabalhando nesses problemas e aí do lado há matemáticos, como Singer, que estão trabalhando em problemas paralelos. Por que vocês não vão lá e falam com eles?” E eles me responderam: “Veja bem, nós temos bons tapetes no nosso departamento, e esses matemáticos feios têm botas sujas, então nós trancamos a porta, e ninguém pode caminhar pelo nosso belo departamento.” Então não havia comunicação entre matemáticos e físicos porque os físicos tinham bonitos tapetes (*risos*)! Moral da história: não dê bons tapetes aos

departamentos!

MF — *Pelo lado matemático, talvez, o que essas pessoas costumam usar quando calculam anomalias é um operador de Dirac de tipo hiperbólico, mas sua teoria era elíptica. Portanto não era claro, de início, como as duas coisas estariam relacionadas.*

MA — Bem, não é bem assim porque os cálculos de anomalia eram usualmente feitos no contexto euclidiano e os físicos – eu aprendi isso somente mais tarde – eles trocam de sinal sem pestanejar, eles dizem: “nós aplicamos uma rotação de Wick”. Não, eles eram bem experientes na arte de ir para equações elípticas. Para mim isso foi uma surpresa. De maneira similar, embora Hodge e Dirac fossem amigos na mesma universidade, no mesmo departamento, por trinta anos, eu não acho que eles discutiam matemática ou física juntos. A teoria de Hodge se baseou nas equações de Maxwell e aquilo tinha que ser modificado da assinatura de Lorentz para a assinatura euclidiana, mas Hodge nunca pensou em aplicar essa teoria para o operador de Dirac. De outra forma eu não teria nada para fazer, felizmente para mim ele não fez. Em certo sentido, creio eu, porque equações hiperbólicas são tão diferentes. *Spinors*, por exemplo, não significavam nada geometricamente, eles não tinham interpretação geométrica, de fato ainda não têm. Então enquanto formas diferenciais eram naturais, eram integrandos, *spinors* não apareciam na geometria. Então essa é a segunda razão pela qual Hodge não pensou em prosseguir com as ideias de Dirac.

MF — *E então, logo após esse primeiro contato, veio a onda das teorias de calibre, que foi uma espécie de “rompimento da represa”...*

MA — Sim, sim. Bem, acho que a conexão ali foi através de Chern e Yang. Yang ganhou o Prêmio Nobel em física, e tinha sido um aluno de Chern vários anos antes. Eles eram velhos amigos, então acho que foi pelo Chern, e pelo Jim Simons, que trabalhou com Chern, e Yang, que essa conexão entre geometria diferencial e teorias de calibre foi percebida pela primeira vez. E, uma

vez que foi percebida, se espalhou rapidamente em ambos os lados, embora eu ache que os matemáticos tenham aprendido a novidade mais rapidamente que os físicos, em certo sentido, porque eles já usavam as mesmas coisas em geometria, elas apenas tinham nomes diferentes: eles chamavam-nas de conexões e curvaturas, em vez de potenciais e campos, e então eles usavam essas coisas sistematicamente no espaço-tempo curvo e por aí vai. Portanto os matemáticos tinham uma pequena vantagem. É claro que eles não conheciam física, teoria quântica de campos e tudo isso, que é mais difícil. Mas a relação direta entre as equações clássicas eles conheciam – e ali apareceram as equações de Yang-Mills, e os instantons – então ali os matemáticos tinham uma vantagem: eles conheciam mais da teoria clássica do que os físicos.



STM — *Eu gostaria de mencionar um debate que ocorreu no começo dos anos 90. Em 1993, Jaffe e Quinn escreveram um artigo no Bulletin of the American Mathematical Society, advertindo sobre o perigo que a interação entre física e geometria traria para os padrões de rigor na matemática, e então você escreveu uma resposta, também publicada no Bulletin, que dizia: “Eu penso que a maioria dos geômetras acha essa atitude um pouco paternalista: nós nos julgamos perfeitamente capazes de defender nossa virtude.” O que você acha desse debate 17 anos depois? A questão foi resolvida? Eles foram cautelosos demais?*

MA — Não, eu acho que Jaffe e eu pensávamos de

modo diferente. Deixe-me colocar isso do seguinte modo. Jaffe pertence à escola de físicos matemáticos que estão tentando estabelecer fundamentos rigorosos na teoria quântica de campos – é análise muito pesada. E esse programa ficou, digamos, ligeiramente emperado: eles podiam fazer coisas em dimensões baixas mas eles não conseguiam fazer coisas realmente interessantes. Então, subitamente, houve essa grande onda de desenvolvimento entre geometria e física que ignorou a questão dos fundamentos. Veja, nós não nos importávamos com os fundamentos, nós éramos como os físicos. Os físicos queriam fazer essas coisas, eles queriam usar as novas ideias topológicas, e nós estávamos prontos para ajudá-los. Acho que Jaffe e seus seguidores sentiram-se desapontados com seus colegas matemáticos que estavam ignorando todo o árduo trabalho que eles haviam feito e estavam tentando, digamos, trapacear, ignorando-o, ao fazer geometria junto com física. Para mim é psicologia o que está por trás desse artigo. Ele não disse isso, sou eu que estou dizendo (*risos*).

Minha real defesa era que nós sabíamos, e mesmo os físicos sabiam, quais partes eram rigorosas e quais partes não eram rigorosas na interação entre as ideias de física e de geometria. Não importava: se não é rigoroso você não diz que tem uma prova, você diz que tem algumas ideias. Nós nunca nos enganamos em achar que tínhamos uma prova de um teorema pela teoria quântica de campos, porque não havia fundamentação para ela. Nós simplesmente escrevemos um arcabouço para a matemática, e algumas partes do aparato eram independentes dos fundamentos, você podia fazer cálculos de um certo tipo. Portanto Jaffe ficou um pouco preocupado que os matemáticos passassem a ficar desleixados e não dessem mais as demonstrações, infectados pelo vírus dos físicos. Eu acho que isso era um engano: as pessoas que trabalhavam na interface entre matemática e física sabiam perfeitamente bem o que era uma prova matemática e o que não era, mas eles também sabiam que para discutir com os físicos eles precisavam ter a mente aberta e falar de coisas que eram ou não demonstrações. E nós aprendemos muito com isso: às

vezes você faz sua própria demonstração, às vezes os físicos fazem uma também. Para mim era uma interação muito produtiva entre matemáticos e físicos. Eu sempre disse que se você exigisse que os físicos fossem sempre rigorosos, por exemplo definindo todos os termos explicitamente, a conversa pararia imediatamente, não daria para manter um diálogo. E se você volta atrás na história da matemática, houve períodos em que os matemáticos fizeram um monte de coisas que não tinham fundamentos rigorosos: todo o trabalho mais antigo de Euler e Cauchy não era nada rigoroso pelos padrões atuais. Isso não os impediu de conseguirem bons resultados. Acho que é preciso ter muito cuidado com isso. As pessoas se referem ao “*rigor mortis*”, a mão morta do rigor: se você exige que se dê demonstração rigorosa a tudo o tempo todo, então você para o avanço das ideias. E isso não significa que você não deva saber a diferença entre uma prova que é rigorosa e uma prova que é apenas de tipo esquemático. Era isso o que eu queria dizer. Nós sabíamos a diferença. Não precisávamos que Jaffe nos dissesse. Nós não iríamos parar de falar com os físicos porque ele nos mandou. Fico feliz que não o tenhamos feito.



STM — *Também nessa resposta você escreveu que a fronteira entre geometria e física poderia dominar a matemática do século XXI. Como você vê isso agora e que outras áreas você acha que serão centrais neste século?*

MA — Bem, eu acho que isso até um certo ponto já

aconteceu. Quero dizer, o impacto das ideias desse aspecto geométrico da física se espalhou por grandes porções da matemática, incluindo teoria dos números. Várias ideias avançaram e tiveram um impacto em teoria dos números, e todo esse trabalho sobre a geometria não comutativa de Connes foi influenciado pelas mesmas ideias. Isso está rejuvenescendo muitos trabalhos, porque muitas coisas na matemática estavam emperradas, havia uma teoria ou uma fundamentação, mas não havia ímpeto. Agora há um bocado de novas ideias para fazer avançar, coisas para demonstrar, conjecturas, conexões, especulações, ligações que propiciam bastante entusiasmo, e isso é o que leva a matemática adiante. Então, para mim, isto está acontecendo, eu acho que isso realmente mudou a cara da matemática de muitas maneiras. Apenas pequenas porções da matemática não foram afetadas por isso de um jeito ou de outro.

STM — *Que tipo de conselho você daria a um estudante de pós-graduação que esteja procurando ação e entusiasmo mas ao mesmo tempo tem receio de áreas arriscadas?*

MA — Bom, a primeira coisa – e isso é um conselho a dar a qualquer estudante de pós-graduação – é: trabalhe apenas em uma área que você ache excitante, não faça algo apenas porque alguém disse para fazê-lo. Você deve seguir seu próprio instinto. Se você se entusiasma por alguma coisa, então trabalhe nessa coisa. Em segundo lugar, se lhe parece muito difícil, então enquanto estudante de pós-graduação você não será capaz de achar seu caminho por conta própria, você precisa de orientação. Portanto o que você precisa é da orientação de um supervisor ou de uma pessoa mais experiente que lhe guie, que lhe diga: “Isto é um problema impossível, vai lhe tomar muito tempo; se você quer um doutorado, olhe para este problema menor.” Você não deve ter receio de escolher problemas menores para começar. Mas você não deve evitar matemática excitante porque ela parece muito difícil. Isto é um ponto de vista muito negativo. Você deveria se esforçar para trabalhar nas áreas excitantes onde as coisas estão

acontecendo, mas dentro disso você deve pegar para você os pedaços que são realistas para desenvolver no começo e, para isso, você precisa de alguma orientação, de forma que você consiga seu doutoramento, seu emprego, todas essas coisas que são importantes. Mas eu certamente aconselho as pessoas a trabalhar numa área na qual haja coisas interessantes acontecendo. Você não necessariamente trabalha em tudo, você não pode dar conta de tudo de uma vez, mas você quer estar onde há ação. Senão é melhor ir dormir.

MF — *Numa longa entrevista que você deu em 1997 – o entrevistador era Nigel Hitchin e está disponível na internet, dividido em nada menos do que 92 pequenos videoclipes do tipo “You Tube”, de um a cinco minutos cada um – há algumas observações que eu julgo realmente memoráveis. Talvez as coisas tenham se modificado um pouco ao longo dos anos, não sei, mas sobre algumas delas vale a pena comentar. Uma delas, por exemplo, que tem a ver com o que você comentou na palestra agora há pouco, é o papel da beleza em matemática; outra é sobre o futuro da matemática, a importância de sintetizar o conhecimento matemático. Isto é algo que, creio eu, Hilbert já abordou de maneira enfática. Eu pergunto: como nós temos condição de continuar avançando?*

MA — De certa maneira a matemática tem ficado cada vez mais complexa, cada vez mais avançada. Nós estamos progredindo e ainda esperamos que os estudantes aprendam alguma matemática e escrevam suas teses de doutoramento em três ou quatro anos. Como isso é possível? A resposta é: isso só é possível porque a matemática tem dentro de si a capacidade de se sintetizar e se organizar, de forma que grandes quantidades de material são comprimidas em um pequeno corpo de princípios. Alguns detalhes são esquecidos: ninguém se importa em lembrar dos detalhes trabalhados no século XIX sobre funções especiais. Não estamos interessados nos detalhes, embora tenhamos acesso a eles, mas em princípios mais amplos. Ou seja, você comprime as coisas unificando, produzindo temas, que de alguma forma focalizam as coisas. Então você pode progredir porque você tem um corpo pequeno de material para

carregar. Em cada estágio isso tem que acontecer de novo, em cada estágio os matemáticos como um todo têm que avaliar o cenário e tentar focalizar os aspectos importantes, esquecer os menos importantes, só assim você pode avançar. Este é o modo como você pode avançar e ao mesmo tempo manter uma compacidade razoável do material, de forma que as pessoas possam aprender e levá-lo adiante. É claro que isso é difícil de ser feito, a matemática se diversifica, você não pode dar conta de tudo. Porém, falando de maneira geral, o avanço se dá por essa síntese, que em parte é esquecer, pois você não precisa de todos os detalhes, todas as contas feitas previamente. O que você precisa é das ideias essenciais, e então com elas você avança e desenvolve um pouco mais e faz um pouco mais dessas contas. Isto não significa que essas contas não sejam importantes, elas são importantes em qualquer estágio para justificar a teoria que você está desenvolvendo. Mas uma vez que ela foi desenvolvida, você não precisa de uma infinidade de exemplos: alguns poucos exemplos são suficientes, porque você sabe que aquilo funciona. Aí você pode comprimir a literatura, comprimir os fundamentos.

Deste modo, é notável o quanto a matemática conseguiu avançar. Se podemos continuar dessa forma por outros quinhentos anos, ninguém sabe, é um desafio. Mas tem sido muito bem feito nos últimos duzentos anos. Muita coisa aconteceu em duzentos anos, e ainda encontramos jovens brilhantes surgindo e fazendo avanços fundamentais. Por outro lado, é verdade que avanços fundamentais, muito frequentemente feitos por jovens, surgem porque eles ignoram o passado. Eles fazem algo novo, que não estava na tradição, abrem novas trilhas, descortinando novas ideias. Portanto a matemática renasce por meio de novas ideias geradas por indivíduos, e é unificada de modo que você tenha apenas uma pequena quantidade de material para se lembrar. Você tem também um novo esporo de vida pela injeção das novas ideias. Essas são as duas coisas que permitem progredir: uma simplifica o material obtido, a outra produz novas ideias para o futuro.

MF — *O que eu também achei interessante na entrevista foram seus comentários sobre o conhecimento matemático: ele é criado ou descoberto?*

MA — Ah, sim, isso poderia levar um dia inteiro! Não há dúvida de que a matemática principia com o material bruto do mundo real. Cientistas puros dizem que os números sempre estiveram aí e a geometria sempre esteve aí, apenas esperando. Mas eu acho que isso não é bem verdade. Nós vivemos no mundo real. Mesmo quando aprendemos a contar nós o fazemos porque há coisas como bolos que somos capazes de contar, são coisas reais. Eu escrevi um artigo sobre isso, uma resenha de um livro de Alain Connes. As pessoas dizem: “Os números inteiros sempre estiveram aí”. Mas eu disse, imagine que a primeira forma de vida inteligente não fosse gente como nós, indivíduos, mas fosse uma água-viva gigante, ocupando o Oceano Pacífico inteiro. Não haveria outra água-viva para contar, então ela não faria teoria dos números, mas conheceria tudo sobre pressão, volume, medida, faria dinâmica, equações de Navier-Stokes, faria a física que lhe fosse relevante. Mas números envolvem identidade, envolvem ver outras cópias de alguma coisa, e se não há outra cópia para ver, se você só vê o contínuo, você não tem por que desenvolver números. Portanto mesmo os números naturais dependem do fato de que há indivíduos por aí, ou objetos individuais para vermos, e isso dependeu da maneira como o Universo evoluiu. E uma vez que você admite que o Universo evoluiu de um jeito particular, então é claro que números estão aí, a geometria está aí, e começamos com esse material. É claro que então nós tentamos organizar isso com base no cérebro humano. O cérebro humano pega o material e começa a decidir: isto tem muitos lados e aquilo é circular, e assim desenvolvemos um arcabouço que é reflexo do nosso cérebro. Agora, como o cérebro humano evoluiu? Ele evoluiu para sobreviver no mundo real. Então, em certo sentido, também o cérebro humano tem que refletir o mundo exterior. Fica até muito difícil afirmar que o pensamento matemático seja totalmente independente do mundo exterior. Essas são questões difíceis,

em parte envolvem filosofia, mas também envolvem biologia e evolução. É uma questão complicada. Eu não tenho dúvida de que o cérebro humano acrescenta uma dimensão de lógica e uniformidade que cria a matemática do material que ele tem. É isso o que fazemos todos os dias. Mas isso também não nos dá a resposta completa, porque alguém pode perguntar: por que o cérebro humano faz isso? Por que o cérebro humano pensa matematicamente?

MF — *Mas especialmente esse comentário que você fez sobre o panorama que está aí mas que o caminho é individual. Você disse: “o panorama é algo que é descoberto mas o caminho que você toma dentro disso é criado”, que é uma espécie de compromisso entre as duas visões.*

MA — Não há dúvida, do ponto de vista lógico, que todos os teoremas da matemática são, em certo sentido, tautologias, eles são todos enunciados logicamente consistentes e há, evidentemente, milhões e milhões deles. Mas nós escolhemos um conjunto que achamos interessante. Nós não escrevemos todas as afirmações lógicas concebíveis: isso não é matemática! Então nós selecionamos. Pode-se dizer que toda a matemática existe em algum sentido teórico, mas o ser humano seleciona dela as partes que julga interessantes, e é isso o que chamamos de matemática. A matemática não é o conjunto de todas as verdades matemáticas: isto é apenas o pano de fundo. Nós selecionamos, e o processo de seleção é como a invenção. Você descobre porque está lá, mas você seleciona, e isso é a sua invenção. Você está inventando aquilo que você vai chamar de matemática partindo de todos os enunciados logicamente corretos que existem. Portanto para mim os dois lados estão presentes. A descoberta está ali, no sentido em que pessoas como Connes e Roger Penrose acreditam: a matemática está toda aí, descobrimos os teoremas por acidente, descobrimos o Teorema de Pitágoras, este ou aquele, mas tudo estava aí antes de os descobrirmos. Isto é verdade, mas havia milhares de outros teoremas que estavam também aí. Nós escolhemos este aqui porque nós achamos que ele era importante. Como disse Newton, “sou

como um menino achando um seixo bonito na praia”. Mas ele escolheu este seixo em detrimento daquele outro. Portanto eu acho que selecionar aquilo que você acha interessante é realmente o processo criativo.

MF — *No começo dos anos 90 você se tornou ativo também na administração científica: como presidente da Royal Society, você foi muito ativo na fundação do Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, em Cambridge, e à parte disso, você foi Master do Trinity College. Eu fico curioso em saber como você deu conta de tudo isso de uma vez!*

MA — Bom, eu tenho que admitir que durante esses seis ou sete anos em que eu tive todos esses encargos simultaneamente eu não fiz muita matemática. Quer dizer, eu falava sobre matemática, ocasionalmente eu ia a conferências, mas eu certamente não fiz matemática séria. Eu não peguei nenhum desses cargos antes dos sessenta, em certo sentido eu tinha chegado ao que se costuma chamar de fim da carreira científica. Naquela época eu pensei na minha contribuição, eu tinha que dar a minha contribuição à comunidade. Meu trabalho como matemático quase sempre foi puramente a pesquisa, eu dei poucas aulas, exceto pelos primeiros anos. Eu tive condições muito favoráveis de vida, então senti que eu tinha que retribuir fazendo algo no mundo da educação. Mas, é claro, desde que me aposentei e estou afastado dessas funções, estou voltando a fazer matemática, estou gostando de fazer matemática de novo. É um pouco tarde, mas, como se diz, é a segunda infância!

MF — *Você também foi presidente do Movimento Pugwash, que é um movimento de cientistas pelo desarmamento.*

MA — Sim, as Pugwash Conferences foram fundadas essencialmente logo após a guerra, principalmente pelos físicos nucleares que haviam se envolvido no Projeto Los Alamos. Eles se preocupavam com o que havia acontecido no pós-guerra e trabalharam duro para tentar evitar o uso de bombas atômicas e frear a corrida armamentista. Eles fizeram isso estabelecendo relações, no nível dos cientistas, entre americanos e soviéticos, por meio de encontros privados que, no longo

prazo, foram muito influentes em reverter a corrida armamentista, conquistando o estabelecimento de vários tratados de restrição ao desenvolvimento de armas nucleares. Esta foi uma atividade importante, na minha opinião. Eu apoiava essa atividade de fora e, então, quando eu fui presidente da Royal Society, no meu último discurso, eu me referi a isto, e eles imediatamente me pediram para assumir a presidência do Pugwash. Eu concordei e fiquei por cinco anos no cargo, o que foi muito enriquecedor para mim. Mas o principal motor do Pugwash foi Joseph Rotblat, um físico nuclear polonês que trabalhou no projeto da bomba em Los Alamos até 1944, quando ele percebeu que os alemães não estavam seriamente no caminho de fazer a bomba atômica e então saiu de Los Alamos. Nenhum outro cientista fez isso. Ele voltou à Grã-Bretanha e desenvolveu uma nova carreira baseada em aplicações da radioatividade à medicina. Enquanto isso ele foi o motor principal na formação desse grupo de físicos que se expandiu mais tarde para incluir não só físicos mas também outras pessoas, incluindo ex-primeiros-ministros, ex-generais e almirantes, que se envolveram com a causa e estão ainda trabalhando ativamente. E eu fiz isso por cinco anos. Infelizmente eu o fiz pelos piores cinco anos, quando George W. Bush era presidente: não havia possibilidade de qualquer progresso. Agora as coisas estão muito melhores. De fato, a pessoa que é o principal assessor científico de Obama era o *chairman* do Conselho do Pugwash quando eu estava lá e eu o conheço muito bem; ele era muito bom *chairman*. Portanto a situação está muito melhor agora, mas ainda é um problema sério. Eu devo dizer que no Brasil e na Argentina, como vocês provavelmente sabem, houve uma época em que ambos os países trabalharam no desenvolvimento de armas nucleares. Mas então os físicos resolveram entre si convencer seus governos para não prosseguir com isso, e eles deliberadamente voltaram atrás e saíram disso, de forma que a América do Sul ainda é uma área livre de armas nucleares. Foi um movimento importante: senão vocês teriam bombas nucleares em todos os países da América do Sul, o que

seria um bocado temeroso. Eu conhecia algumas pessoas envolvidas nisso, os físicos: eles faziam parte de nosso Movimento Pugwash. O Pugwash também atua em outras partes do mundo, onde há fontes potenciais de conflito. Eles atuaram na Cashimira, entre a Índia e o Paquistão. Aliás eu estava na Índia quando houve um golpe no Paquistão... houve quase uma guerra entre a Índia e o Paquistão naquele momento. Eles também têm sido ativos no conflito Israel-Palestina, e em várias outras áreas perigosas. É uma organização que vale muito a pena, e fiquei feliz de fazer parte dela. Mas eu sou, é claro, um amador, não um autêntico profissional. Embora agora eu esteja organizando um encontro, em Edimburgo, que ocorrerá no próximo ano, sobre o futuro das armas nucleares britânicas, e se elas são realmente necessárias.

MF — *Sir Michael Atiyah, agradeço-lhe muito por esta entrevista!*

MA — Muito obrigado! Sinto como se tivesse acabado de passar num exame!