CÁLCULO PROPOSICIONAL ASSOCIADO AOS RETICULADOS

PEDRO A. TONELLI

1. As fórmulas

Seja R um reticulado completo com uma negação. Uma negação é uma função decrescente $' : R \to R$ tal que $\perp' = \top$ e $\top' = \perp$.

Vamos definir formalmente os elementos do cálculo proposicional.

O conjunto de variáveis é um conjunto no máximo enumerável $V = \{a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots\}$. Este conjunto pode, se desejarmos, ser finito.

Usando os conectivos $\wedge, \vee, '$ e os símbolos (e) podemos definir recursivamente as fórmulas:

- Toda variável a_n é uma fórmula.
- Se F e G são fórmulas então $(F \wedge G), (F \vee G), F'$ são fórmulas.

Esta definição recursiva determina o conjunto $\mathbb{F}$ das fórmulas. Assim, or exemplo, $(a_1 \vee a_3') \wedge a_2$ é uma fórmula e $a_1 \wedge (a_2 \vee \vee ' a_3)$ não é fórmula.

No cálculo proposicional fazemos a avaliação da verdade usando como conjunto de avaliação um reticulado R. Em primeiro lugar consideramos o conjunto $L(R) = \{t : V \to R\}$. Dada uma função $t \in L(R)$ ela pode ser estendida de forma única a uma função $\tilde{t} : \mathbb{F} \to R$ tal que para todas as fórmulas $F, G \in \mathbb{F}$ tenhamos:

- $\tilde{t}(F \wedge G) = \tilde{t}(F) \wedge \tilde{t}(G)$
- $\tilde{t}(F \vee G) = \tilde{t}(F) \vee \tilde{t}(G)$
- $\tilde{t}(F') = \tilde{t}(F)'$
- $\tilde{t}(a_n) = t(a_n)$

O conjunto dessas funções estendidas chamaremos de valorações em R e também denotaremos por $L(R)$. Também não usaremos mais o $\tilde{t}$ mas t para denotar a extensão, ficando claro do contexto que se trata da função estendida.

Como exemplo, se o conjunto V só tiver dois elementos e o reticulado for a álgebra de boole $R = \{0, 1\}$ então $L(R)$ tem só quatro elementos.

2. Fórmulas equivalentes

Vamos definir uma estrutura de reticulado no conjunto das fórmulas, lembrando que duas fórmulas podem não ser diferenciadas do ponto de vista das valorações. Então partimos as fórmulas em classes de equivalências.

Dizemos que duas fórmulas F e G são R-equivalentes se para toda valoração $t \in L(R)$ temos $t(F) = t(G)$. É claro que esta é uma relação de equivalência. Denotaremos a classe de equivalência de uma fórmula F por $[F]_R$ ou simplesmente $[F]$ quando estiver claro de qual reticulado se trata.

O conjunto das classes de equivalências denotaremos por $\mathbb{F}/R$, e neste conjunto definimos as operações:

- $[F] \wedge [G] = [F \wedge G]$
- $[F] \vee [G] = [F \vee G]$
- $[F]' = [F']$

É um exercício canônico mostrar que isto define realmente uma esrutura de reticulado na classe de equivalência das fórmulas.

No caso do reticulado ser $R = \{0, 1\}$ temos o cálculo proposicional clássico, mas o que nos interessa é a lógica fuzzy e sua relação com a lógica de Lukasiewicz.

3. Exemplos

Tomemos o reticulado $R_1 = [0, 1]$ com as operações de mínimo, máximo e negação conhecidas ($x' = 1 - x$) e $R_2 = \{0, 0.5, 1\}$ o reticulado a três valores de Lukasiewicz (as operações são as mesmas: mínimo, máximo e $x' = 1 - x$).

Então temos o seguinte resultado

Teorema: $\mathbb{F}/R_1 = \mathbb{F}/R_2$

prova: Vamos provar que para toda fórmula F de $\mathbb{F}$ temos que $[F]_{R_1} = [F]_{R_2}$.

Como é fácil de verificar que $R_2 \subset R_1$ então temos que $L(R_2) \subset L(R_1)$. Assim se G é equivalente a F com as valorações de $L(R_1)$ então G também é equivalente a F pelas valorações de $L(R_2)$. Isto mostra que se $G \in [F]_{R_1}$ então $G \in [F]_{R_2}$ ou seja $[F]_{R_1} \subset [F]_{R_2}$.

Resta mostrar que $[F]_{R_2} \subset [F]_{R_1}$. Suponha que tenhamos um $G \notin [F]_{R_1}$. Então existe uma valoração $t \in L(R_1)$ tal que $t(G) \neq t(F)$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $t(F) = \alpha$ seja maior do que $t(G) = \beta$.

Seja agora $\delta = \min\{|\beta - 0.5|, |\alpha - 0.5|\}$.

Definiremos um homomorfismo de reticulados com negação $f : R_1 \rightarrow R_2$ da seguinte forma:

(A) se $0.5 \in [\beta, \alpha]$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \leq 0.5 - \delta \\ 0.5 & \text{se} \quad 0.5 - \delta < x < \delta + 0.5 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq \delta + 0.5 \end{cases}$$

(B) se $0.5 \notin [\beta, \alpha]$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0.5 - \delta \\ 0.5 & \text{se} \quad 0.5 - \delta \leq x \leq \delta + 0.5 \\ 1 & \text{se} \quad x > \delta + 0.5 \end{cases}$$

Para entender a construção de f veja a figura 1

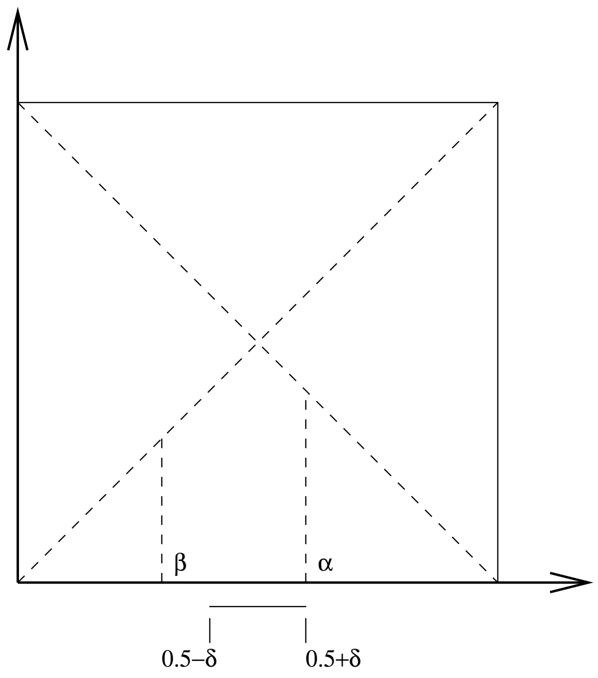

FIGURA 1. Exemplo da construção de f

Verifique que em cada caso f é de fato um homomorfismo tal que $f(\beta) \neq f(\alpha)$ e então $f \circ t$ é uma valoração de $L(R_2)$ tal que atribui valores diferentes às fórmulas G e F, ou seja $G \notin [F]_{R_2}$. Assim se $G \in [F]_{R_2}$ temos que necessariamente $G \in [F]_{R_1}$ e daí $[F]_{R_2} \subset [F]_{R_1}$. $\square$

Observe que o fato da função f construida acima ser um homomorfismo depende apenas de um fato mais geral. Seja $B(0.5, \delta)$ um intervalo (aberto ou fechado) de centro em 0.5 e raio δ e defina

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin B(0.5, \delta) \text{ e } x < 0.5 \\ 0.5 & \text{se } x \in B(0.5, \delta) \\ 1 & \text{se } x \notin B(0.5, \delta) \text{ e } x > 0.5 \end{cases}$$

Como f é crescente então se $x \leq y$ temos que $f(x) \leq f(y)$ e $f(x \wedge y) = f(x) = f(x) \wedge f(y)$ e $f(x \vee y) = f(y) = f(x) \vee f(y)$. Como $[0,1]$ é totalmente ordenado o outra possibilidade é $x \geq y$ o que analogamente nos leva a mesma conclusão.

Se $x \in B(0.5, \delta)$ pela simetria do intervalo temos que $1-x \in B(0.5, \delta)$ e $f(x) = f(1-x) = 0.5$ ou $f(1-x) = 1 - f(x) = (f(x))'$.

Se $x \notin B(0.5, \delta)$ e $x < 0.5$ então $1 - x > 0.5$ e $1 - x \notin B(0.5, \delta)$. Temos então $f(x) = 0$ e $f(1-x) = 1$, ou seja $f(1-x) = 1 - f(x)$.

Obs. Podemos adaptar esta prova usando o reticulado $R = [-1, 1]$ com os conectivos min e max e a negação dada por $x' = -x$. Fica como exercício.