1. Como nascem os reticulados

Vimos no outro texto que a estrutura algébrica que aparece mais ou menos naturalmente na lógica é a estrutura de reticulado. No primeiro caso, na álgebra de Boole da lógica clássica o reticulado aparece por causa das propriedades dos conectivos lógicos "e" e "ou"; depois obtivemos uma estrutura de reticulada na lógica de Brower estudando as propriedades da relação de implicação. Veremos que um reticulado pode aparecer dessas duas formas.

1.1. Conjuntos parcialmente ordenados.

Um conjunto parcialmente ordenado é um conjunto M juntamente com uma relação $\leq$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- Propriedade reflexiva; $\forall x \in M x \leq x$
- Propriedade simétrica; se $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$.
- Propriedade transitiva; se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$

Algumas observações antes de ver os exemplos:

A Dizemos que o conjunto M com a relação é uma pré-ordem quando a propriedade simétrica não for exigida.

B Fixado um ponto x de M podemos denotar por $O(x)$ (órbita de x) o subconjunto de M com todos os pontos y que se relacionam com x, isto é, $x \leq y$ ou $y \leq x$, este conjunto é, em geral, apenas uma parte de M. Quando $O(x) = M$, para todo x dizemos que a ordem é total, e M é um conjunto totalmente ordenado.

C Compare as propriedades acima com as propriedades da implicação no texto anterior.

Exemplos:

1 $M = \{0, 1\}$ com a relação $0 \leq 1$.

2 $M = [0, 1]$ com a ordem herdada dos números reais.

3 $M = \mathcal{P}(U)$ conjunto das partes de um conjunto U com a ordem $A \subset B$ se A é um subconjunto de B.

4 $M = \mathcal{F}(U) = \{A : U \to [0, 1]\}$ com a ordem definida como $A \leq B$ quando $A(x) \leq B(x)$ para todo x de M. Este é o espaço dos subconjuntos fuzzy sobre U.

Existem outros exemplos mais interessantes, mas fiquemos com estes básicos que vão nos interessar imediatamente. Mais algumas observações:

D Se o conjunto M é finito então podemos representar o conjunto parcialmente ordenado graficamente. Os conjunto parcialmente ordenados com quatro elementos podem ser representados como na figura 1

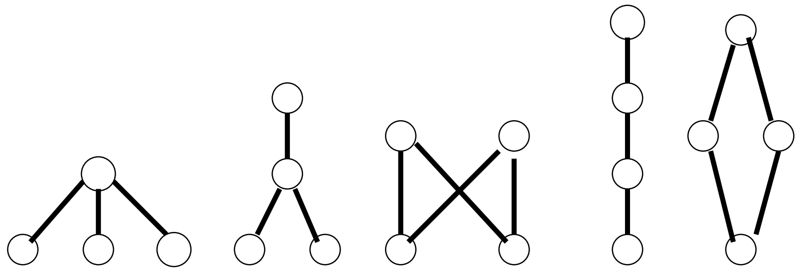

FIGURA 1. Conjuntos parcialmete ordenados com 4 elementos

E O exemplo **4** pode ser facilmente generalizado tomando um outro conjunto parcialmente ordenado qualquer no lugar de $[0,1]$.

1.2. **Os reticulados.** Seja M um conjunto parcialmente ordenado, e digamos que a relação de ordem seja $\leq$. Tomemos S uma parte de M e vamos definir algumas notações:

$\uparrow S = \{z \in M : \forall x \in S, x \leq z\}$ é o conjunto dos majorantes de S.

$\downarrow S = \{z \in M : \forall x \in S, z \leq x\}$ é o conjunto dos minorantes de S.

Por causa da propriedade de simetria os conjuntos

$$\bigvee S = \uparrow S \cap \downarrow (\uparrow S)$$

e

$$\bigwedge S = \downarrow S \cap \uparrow (\downarrow S)$$

têm, no máximo, um elemento (podem ser vazios, veja os exemplos na figura 1). Estes serão o supremo e o ínfimo, respectivamente, de S quando existirem.

Um conjunto parcialmente ordenado é um reticulado quando existirem o ínfimo e o supremo de todos os subconjuntos S finitos. Em particular quando $S = \{x, y\}$ denotaremos

$$\bigvee \{x, y\} = x \vee y \text{ e } \bigwedge \{x, y\} = x \wedge y$$

Basicamente, para verificarmos que um conjunto parcialmente ordenado é um reticulado basta ver se existem os infimos e supremos de cada dois elementos. isto define portanto duas operações binárias que têm a seguintes propriedades

- Propriedade reflexiva: $x \vee x = x$ e $x \wedge x = x$.
- Propriedade comutativa: $x \vee y = y \vee x$ e $x \wedge y = y \wedge x$.
- Propriedade associativa: $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ e $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.
- Propriedade de absorção: $x \wedge (x \vee y) = x$ e $x \vee (x \wedge y) = x$

Uma outra maneira equivalente de se construir um reticulado é partir das operações binárias $\wedge$ e $\vee$ que satisfaçam as propriedades acima. Neste caso ainda não temos a relação de ordem parcial, mas podemos definir uma ordem parcial da seguinte forma: $x \leq y$ se e somente se $x \wedge y = x$

Voltemos aos exemplos acima:

1 $M = \{0, 1\}$ é um reticulado com as seguintes tabelas

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

2 $M = [0, 1]$ é um reticulado com os mínimos e máximos normais. $x \vee y = \sup\{x, y\}$ e $x \wedge y = \inf\{x, y\}$.

3 $M = \mathcal{P}(U)$ conjunto das partes de um conjunto U. A reunião e intersecção de conjuntos fazem as vezes dos operadores.

4 $M = \mathcal{F}(U) = \{A : U \to [0, 1]\}$ também é um reticulado com as operações dadas por

$$(A \vee B)(x) = \sup\{A(x), B(x)\}$$

$$(A \wedge B)(x) = \inf\{A(x), B(x)\}$$

Agora mais algumas observações:

F Se M_1 e M_2 são dois reticulados, um isomorfismo entre estes reticulados é uma aplicação bijetora $F : M_1 \to M_2$ que ainda preserva as operações dos reticulados, ou seja, para cada par x, y de M_1 temos

$$F(x \vee y) = F(x) \vee F(y) \text{ e } F(x \wedge y) = F(x) \wedge F(y)$$

. Assim, por exemplo, o conjunto $[-1, 1]$ é um conjunto diferente de $[0, 1]$ mas tem a mesma estrutura de reticulado deste. Um isomorfismo é realizado por

$$F(x) = 2(x - 0.5)$$

.

G No caso do supremo e ínfimo existirem para todo subconjunto S de M, não apenas os finitos, diremos que se trata de um reticulado completo. Neste caso denotaremos por $\top = \bigvee M$ e $\bot = \bigwedge M$. Todos os exemplos dados anteriormente são de reticulados completos.

No exemplo **1** $\top = 1$ e $\bot = 0$, no exemplo **2** também. No exemplo **3** $\top = U$ e $\bot = \emptyset$ e no exemplo **4** $\top = T$ com $T(x) = 1$ e $\bot = Z$ com $Z(x) = 0$. Na lógica $\top$ é uma tautologia e $\bot$ uma fórmula sempre falsa.

1.3. **O princípio da extensão.** Vamos ver nessa seção como podemos obter, a partir de uma função $R : U \to V$ uma extensão desta função que chamaremos de $\hat{R} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$. Este modo de construir a função chamaremso de princípio da extensão.

Seja $A : U \to L$ uma aplicação de U num reticulado completo L. Então a imagem de qualquer subconjunto $S \subset U$ é um subconjunto de L ($A(S) \subset L$). Assim $A : U \to L$ induz naturalmente uma aplicação $A : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(L)$. Como L é um reticulado completo a composição:

$$\bigvee \circ A : \mathcal{P}(U) \to L$$

associa a cada subconjunto de U um elemento de L.

Para a última parte de nossa construção precisamos de uma aplicação que para cada $y \in V$ associa um subconjunto de U.

Se $R \subset U \times V$ é uma relação (uma função seria um caso particular) denotamos por

$$R^{-1}(y) = \{x \in U : (x, y) \in R\}$$

como $R^{-1}(y) \subset U$ temos que

$$\bigvee A(R^{-1}(y)) \in L$$

ou seja $\bigvee(A(R^{-1})) : V \to L$. Agora definimos a nossa extensão como

$$\hat{R}(A) = \bigvee A(R^{-1})$$

para todo $A \in \mathcal{F}(U)$