Notas de Aulas de Mecânica

Manuel V. P. Garcia
Pedro A. Tonelli

Sumário

1. Introdução e histórico

Estas notas têm como objetivo dar aos alunos os elementos básicos da matemática usada para modelar problemas de mecânica, o enfoque será mais geométrico em contraposição ao enfoque analítico, podendo-se dizer que se trata de uma introdução aplicada à geometria diferencial. Penso que isto servirá também para motivar o espírito geométrico dos alunos do curso de bacharelado em matemática aplicada, que é para quem estas notas foram elaboradas.
O livro inspirador é de Vladimir I. Arnold, " Métodos matemáticos da mecânica clássica" [**2**] que é, sem dúvidas, um dos clássicos da matemática contemporânea. Trata-se de um livro difícil para ser adotado como livro texto para a graduação, mas acho que é o primeiro livro a nível intermediário que aponta claramente as estruturas matemáticas que aparecem na mecânica clássica, construindo uma ponte da mecânica com os problemas da matemática mais atual. Procuramos nestas notas reprojetar os primeiros capítulos do Arnold, sobre mecânica Newtoniana e Mecânica de um corpo rígido para um curso básico do segundo ano do bacharelado em matemática aplicada.
Relutamos em incluir notas históricas, em parte por causa da dificuldade que tal empreendimento demandaria e em parte por que é mais fácil consultar uma literatura específica. Mas devido a algumas críticas recebidas em aulas, resolvemos incluir umas notas tendenciosas para justificar nossa abordagem.
Mecânica pode ser definida como o estudo do movimento dos corpos na natureza. Em sua formulação mais geral eu diria portanto tratar-se de uma disciplina da física, mas dependendo do que sejam esses " corpos" ou do que sejam os tipos de " movimentos", mecânica torna-se uma área de engenharia, física, astronomia ou até biologia. Da forma como a trataremos aqui, mecânica será uma coleção de definições que delimitarão um contexto específico que nos permitirão demonstrar alguns teoremas, quero dizer: MATEMÁTICA.
O fundamental na mecânica é prever resultados, ou seja, enunciar leis de movimento que nos permitam fazer asserções sobre o futuro de um corpo. Para tanto utiliza-se de quantificações e modelos matemáticos. Durante esses séculos muitos modelos e equações foram utilizadas, exigindo por vezes soluções bastantes sofisticadas, e não raro, requerendo o desenvolvimento de uma teoria totalmente nova, originando novas áreas de pesquisas em matemática.
A mecânica enquanto formulação de leis e modelos pode ser uma parte da física, mas o estudo das resoluções destes modelos é uma das mais bonitas partes da matemática. Esta observação, aliás, não é nova; Leonardo da Vinci (1431-1519) já observara em um de seus manuscritos que " ... mecânica é o paraíso das ciências matemáticas, pois com ela chega-se aos frutos da matemática" (*Manuscrito*) e aconselhava: " portanto, O estudante, estude matemática, e não construa nada sem fundamento" (*Quaderni d'anatomia*).
Ainda na antiguidade, surgiram as primeiras contribuições para a formulação de leis em mecânica, Aristóteles desenvolveu o princípio do trabalho virtual, e Arquimedes usando um método axiomático demonstrou o princípio da alavanca.
Mesmo na idade média tivemos um relativo avanço da mecânica, citaremos apenas a criação do conceito de potencial do peso, por Jordanus Nemore por volta de 1300 e trabalhos de Leonardo, que formulou vários princípios tentando inventar o que hoje chamamos de avião.

Posteriormente os grandes nomes são Kepler (1571-1630) e Galileu (1564-1642), o primeiro formula a lei do movimento planetário e o segundo a lei da queda livre dos corpos, Galileu reconhece também a importância da aceleração em mecânica.
Mas definitivamente, o começo da mecânica enquanto matemática deve ser creditado à obra de Newton (1643-1727) : " Philosophie naturalis principia mathematica". Huygens (1629-1695) e Leibniz (1646-1716) introduzem as idéias dos princípios da mínima ação e o princípio de energia, ou seja o cálculo variacional.
No estudo de corpos rígidos Euler (1707 - 1785) escreveu " Mechanica sive motus scientia" (1736) e " Theoria motus corporum solidorum" (1765).
O século XXVIII ainda tem D' Alembert (1717-1783) que dá um princípio geral relacionando cinemática e estática, e por fim Lagrange (1736 - 1813) publica o consagrado " Mecanique analitique" que pode ser considerada a primeira obra com apresentação sistemática da mecânica e que contém já muitos problemas do cálculo variacional e equações diferenciais parciais.
Depois deste trabalho de Lagrange, houve uma separação dos estudos da mecânica entre os métodos analíticos (usando cálculo variacional e análise) que poderíamos identificar mais com as escolas alemãs, e uma outra linha mais geométrica predominante nas escolas técnicas e École Polytechnique de Paris, outra vez um grande matemático, Felix Klein, promove uma reunificação de técnicas. Felix Klein, Poincaré, Élie Cartan introduzem vários outros métodos que acabaram originando várias outras áreas de pesquisa em matemática como a geometria simplética, a topologia diferencial, sistemas dinâmicos e teoria érgodica que se constituem ainda hoje áreas bastante ativas da pesquisa matemática.
Um livro bastante completo sobre a história da mecânica e o livro de René Duras " Histoire de la Mecanique" , que contudo, não inclui a mecânica moderna iniciada neste século. Outra boa referência sobre a história da mecânica é o livro do Truesdell [**21**].
O projeto da obra tem as seguintes partes: No capítulo um veremos a cinemática de um ponto livre no espaço euclidiano, no capítulo dois estamos a dinâmica de um sistema de partículas, o capítulo quatro é dedicado à cinemática de um corpo rígido e o último capítulo trata da dinâmica de um corpo rígido.

CAPíTULO 1

Cinemática de um ponto.

A cinemática estuda essencialmente as propriedades geométricas dos movimentos dos corpos. Em primeiro lugar é necessário tratar da abstração matemática dos conceitos de corpos, espaço e movimentos. Como veremos tudo isto terá um sentido preciso para nós, não desvinculado da realidade física mas ainda definições formais. Vamos fazer primero uma revisão dos conceitos geométricos necessários.

1. Uma revisão de Álgebra Linear e Geometria Afim

A mecânica estuda os movimentos dos corpos no espaço, ou seja, a mudança de estado numa estrutura determinada chamada de espaço-tempo. Desde a eleboração da teoria relatividade sentiu-se a necessidade de se estudar mais profundamente as estruturas matemáticas do espaço-tempo e sua geometria própria. Para tornarmos estes conceitos matematicamente precisos é necessário dizer que estruturas matemáticas estâo associadas ao que intuitivamente chamamos de espaço e de tempo. Nos ocuparemos, portanto, de uma série de definições que apenas traduzem para uma forma matemática alguns conceitos físicos intuitivos como o conceito de homogeneidade do espaço, observamos que exatamente este axioma da homogeneidade é que torna mais conveniente a descrição dos movimentos num espaço afim do que num espaço vetorial. Em resumo: nosso espaço será um espaço afim, o tempo será um espaço vetorial de dimensão um, (claro, os números reais) movimentos serâo curvas no espaço afim e corpos, por enquanto, serão os pontos do espaço.
Iniciaremos lembrando alguns conceitos fundamentais dos espaços vetoriais e posteriormente daremos uma noção da geometria afim. Apesar de parecer muito formal e até certo ponto banal considero importante o aluno se exercitar na diferenciação de um espaço afim e um espaço vetorial. O texto apresentado aqui é apenas um resumo, para uma abordagem didática mais cuidadosa eu recomendaria o livro do Donnedu [**6**]

1.1. Bases e mudança de bases. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão n finita, e sejam $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{\mathbf{f}_1, \cdots, \mathbf{f}_n\}$ duas bases de V, um vetor $\mathbf{v} \in V$ se escreve então de modo único

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{e_1} + \cdots + x_n\mathbf{e_n}$$

neste caso chamaremos a matriz coluna $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de matriz das coordenadas de $\mathbf{v}$ na base $\mathcal{B}$. Obviamente na base $\mathcal{B}'$ o mesmo vetor $\mathbf{v} \in V$ tem uma outra matriz de coordenadas $\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ a relação entre essas duas coordenadas é dada pela matriz de mudança de base (da base $\mathcal{B}'$ para a base $\mathcal{B}$).

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

A matriz que aparece no lado direito chamaremos de *matriz de mudança da base $\mathcal{B}'$ para a base $\mathcal{B}$* e a denotaremos por $A_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$. Nesta matriz, cada coluna $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$ é a matriz coordenada de $\mathbf{f}'_i$ na base $\mathcal{B}$.
Consideremos agora um produto interno $<,>$ definido em V. Uma base $\mathbf{e_1}, \cdots, \mathbf{e_n}$ é ortonormal quando satisfaz

$$< \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j >= \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ duas bases ortonormais, então a matriz de mudança de base satisfaz algumas propriedades importantes:

(1) $A^t_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = A_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$
(2) $A_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} A^t_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = I$
(3) $\det A_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \pm 1$
(4) $\mathrm{cof}(A_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}) = A_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$

1. Verifique que neste caso temos também a relação:

$$A_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = (a_{ij}) = (< e_i, f_j >)$$

Diremos que duas bases ortonormais $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ determinam uma mesma orientação se $\det A_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = 1$. Esta é uma relação de equivalência no conjunto de todas as base ortonormais de V.
O conjunto das matrizes $n \times n$ que satisfazem: $\det A = 1$ e $AA^t = I$ denotaremos por $SO(n, R)$, verificamos facilmente que este conjunto forma um subgrupo do grupo das matrizes com determinante diferente de zero, com o produto de matrizes ususal.
Fixada uma base $\mathcal{B}$ existe uma bijeçâo entre o conjunto $SO(n, R)$ e o conjunto das bases equivalentes a $\mathcal{B}$ (que determina a mesma orientação de $\mathcal{B}$).
Apesar de até aqui estarmos considerando um espaço vetorial genérico, neste curso nos ocuparemos basicamente de espaços tridimensionais. Por dois motivos. Porque nosso epaço físico é tridimensional e por causa de uma particularidade destes espaços que veremos a seguir.

1.2. Um isomorfismo importante. Mais algumas considerações teóricas e estaremos na mecânica propriamente dita. Veremos um isomorfismo do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e um subespaço de matrizes que nos permite escrever o produto vetorial em $\mathbb{R}^3$ como um operador linear.
Em R^3 consideremos a base canônica: **i**, **j**, **k** (poedríamos considerar qualquer base ortonormal). Esta base fixa de uma vez por todas a orientação do espaço.

Temos neste espaço o produto vetorial que será aqui denotado por $\wedge$ e definido nestas coordenadas como

$$(x_1, x_2, x_3) \wedge (y_1, y_2, y_3) = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$$

Em particular temos $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k} = -\mathbf{j} \wedge \mathbf{i}$, $\mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i} = -\mathbf{k} \wedge \mathbf{j}$ e $\mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} = -\mathbf{i} \wedge \mathbf{k}$.
Consideremos agora o conjunto $so(3, R)$ das matrizes 3×3 antisimétricas. É simples verificar que $so(3, R)$ é um espaço vetorial de dimensão 3. Uma base deste espaço pode ser

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; \hat{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; \hat{K} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos estabelecer agora um isomorfismo (ou melhor uma família de isomorfismos) de espaços vetoriais entre um espaço de dimensão 3 qualquer e o $so(3, R)$.
Em primeiro lugar fixemos uma base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. definimos $D_{\mathcal{B}} : V \to so(3, R)$ como:

$$D_{\mathcal{B}}(\sum x_i \mathbf{e}_i) = x_1 \hat{I} + x_2 \hat{J} + x_3 \hat{K}$$

ou seja:

$$D_{\mathcal{B}}(\sum x_i \mathbf{e}_i) = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Posteriormente usaremos bastante este resultado, basicamente por causa da seguinte propriedade de verificação imediata:

Lema 1. *Se* $\mathbf{v} = \sum x_i \mathbf{e}_i$ *e* $\mathbf{w} = \sum y_i \mathbf{e}_i$ *então*

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = D_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}).\mathbf{w} = D_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Observe que este isomorfismo depende da base que escolhi em V. Então se $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ for uma outra base teremos uma relação entre as matrizes $D_{\mathcal{B}}(\mathbf{v})$ e $D_{\mathcal{B}_1}(\mathbf{v})$

Lema 2. $D_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) = A_{\mathcal{B}\mathcal{B}_1} D_{\mathcal{B}_1}(\mathbf{v}) A^t_{\mathcal{B}\mathcal{B}_1}$

Prova: Novamente o aluno está convidado a fazer a demonstração deste lema. Como sugestão eu recomendaria fazer os cálculos primeiramente para os elementos $\mathbf{f}_i$ da base, no lugar do vetor $\mathbf{v}$

Exercício: Mostre que se definirmos $[A, B] = AB - BA$ no conjunto $so(3, R)$, então o isomorfismo acima também satisfaz $D_{\mathcal{B}}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = [D_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}), D_{\mathcal{B}}(\mathbf{w})]$.

1.3. Geometria Afim. Nosso objetivo aqui é chamar a atenção para as diferenças entre um espaço vetorial e um espaço afim. O espaço físico nos permite definir direção e sentido de movimento, mas também deve ser "homogêneo no sentido de que não poderá haver nenhum ponto privilegiado. No espaço vetorial temos direção e sentido definidos para cada vetor mas a origem claramente é um ponto privilegiado (elemento neutro) no espaço vetorial, não se adequando, portanto ao modelo de espaço físico. Usaremos em seu lugar os conceitos de espaços afim e euclidianos. A esta altura o leitor poderá interessar-se em olhar o livro de Hermann Weyl *" Space, Time and Matter"* [**23**], para complementar suas indagações matemáticas a respeito do Espaço-Tempo.

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita (quase sempre a dimensão de V será 3, e seria bom que o aluno até se fixasse neste exemplo, ou seja $V = (\mathbb{R}^3, +)$).
Seja E um conjunto qualquer. Uma **ação** do espaço vetorial V em E é uma aplicação:

$$\sigma : E \times V \longrightarrow E$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $\forall P \in E$ e $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ temos $\sigma(P, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = \sigma(\sigma(P, \mathbf{v}), \mathbf{w})$.
(2) $\forall P \in E$ então $\sigma(P, 0) = P$.
(3) $\forall P, Q \in E$ existe um único $\mathbf{v} \in V$ tal que $\sigma(P, \mathbf{v}) = Q$

Chamaremos o conjunto $E \neq \emptyset$ no qual atua um espaço vetorial como acima de um **espaço afim** sobre V.
Exemplo: O conjunto $\mathbb{R}^3$ possui uma estrutura de espaço afim sobre $(\mathbb{R}^3, +)$ definindo:

$$\sigma((a_1, a_2, a_2), (x_1, x_2, x_3)) = (a_1 + x_1, a_2 + x_2, a_3 + x_3)$$

É seu dever verificar as propriedades (1), (2) e (3) acima.
Além disso pode-se verificar que um espaço vetorial V sempre será um exemplo de espaço afim sobre V, (na verdade este é o exemplo mais geral de espaço afim, ou seja quando olhamos para a soma vetorial com uma translação em V).
Este exemplo nos sugere ainda uma notação bem mais simples e sugestiva para a ação denotada por σ:

$$\sigma(P, \mathbf{v}) = P + \mathbf{v}$$

claro que este símbolo + não deve ser confundido com a operação de adição do espaço vetorial V (formalmente nem é operador binário). É conveniente o estudante ter a a imagem da figura 1 em mente.

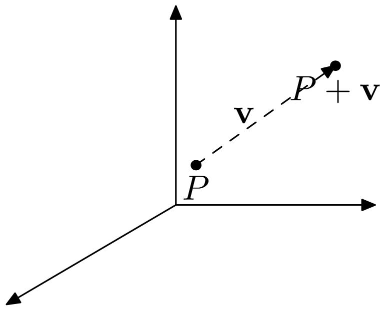


FIGURA 1. $P + \mathbf{v}$

Também para simplificar as notações, escreveremos o único vetor $\mathbf{v}$ satisfazendo a propriedade 3) da definição de ação como:

$$\mathbf{v} = Q - P$$

Novamente atenção para o fato de $Q - P$ ser um vetor de V e não um ponto do espaço euclidiano.
Vamos agora definir o conceito de distância em E, esta virá de uma norma definida no espaço vetorial V.
Suponha que em V temos dada uma forma bilinear definida positiva.

$$\mathbf{B} : V \times V \mapsto \mathbb{R}$$

Lembramos que se o nosso modelo de espaço vetorial é ($\mathbb{R}^3$,+) tome por exemplo a forma

$$\mathbf{B}((u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3)) = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i$$

Definimos

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{\mathbf{B}(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$$

que é uma norma no espaço vetorial, com auxílio desta norma definimos a distancia em E como

$$d(P, Q) = ||P - Q||$$

O espaço afim E munido desta distância chama-se *espaço afim euclidiano*, e este será o nosso modelo de "espaço físico". O tempo será representado pelo conjunto dos números reais. Mais sobre a geometria dos espaços euclidianos pode ser encontrado no livro [**6**].

O *movimento de uma partícula* para nós será uma aplicação de uma intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ no espaço euclidiano E

$$x : I \to E$$

Se fixarmos um ponto $O \in E$ então o movimento de uma partícula x origina uma curva definida no espaço vetorial V.

$$\mathbf{x}_O(t) = x(t) - O$$

É fácil verificar usando os axiomas do espaço afim que se um outro ponto de referência O' for escolhido então existe um vetor constante $\mathbf{v} = O' - O$ tal que

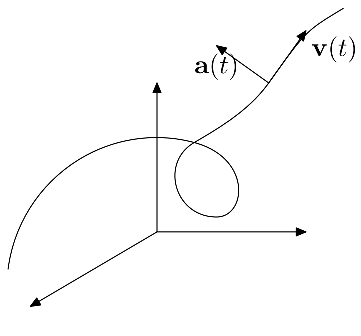
$$\mathbf{x}_O(t) - \mathbf{x}_{O'}(t) = \mathbf{v}$$

Diremos que o movimento de uma partícula x é diferenciável quando o for a curva $\mathbf{x}_O$ para qualquer ponto de origem $O \in E$. Neste caso definimos a *velocidade instantânea* do movimento como sendo o vetor

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{x}_O(t)$$

Note que este vetor não depende do particular ponto $O \in E$ escolhido devido à propriedade anterior. Sendo ainda a velocidade instantânea diferenciável podemos definir também a *aceleração* como a derivada da velocidade

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}_O(t)$$



A aceleração também não depende do ponto de origem escolhido.
As duas próximas seções são basicamente de exercícios na forma de uma estudo dirigido que complementam as informações anteriores. Estes exercícios serão usados nas próximas seções.

1.4. Transformações afins. Essencialmente três coisas determinam o espaço afim: um conjunto de pontos E, um espaço vetorial V e uma ação σ. Vamos estudar agora o que seriam os *morfismos* entre espaços afins.
Consideremos dois espaços afins (E_1, V_1, σ_1) e (E_2, V_2, σ_2). Diremos que uma aplicação $\Phi : E_1 \to E_2$ é uma *transformação afim* se existir uma aplicação linear $A : V_1 \to V_2$ que satisfaz, para quaisquer $P, Q \in E_1$ temos:

$$\Phi(P) - \Phi(Q) = A(P - Q).$$

Note que com esta definição e as notações originais podemos reescrever a fómula acima como

$$\Phi(\sigma_1(Q, P - Q)) = \sigma_2(\Phi(Q), A(P - Q)).$$

2. Mostre que se (E_1, V, σ_1) e (E_2, V, σ_2) são espaços afins sobre o mesmo espaço vetorial V então existe uma transformação afim $\Phi : E_1 \to E_2$ que é uma bijeção.
Considere o espaço afim $\mathcal{E}^3$ associado ao espaço vetorial $\mathcal{V}^3$. Seja $\Phi : \mathcal{E}^3 \to \mathcal{E}^3$ uma transformação afim. Demonstre o seguinte:

3. Se Φ é injetora então Φ é bijetora.
4. No caso acima Φ^{-1} é uma transformação afim.
5. Seja $\vec{v} \in \mathcal{V}^3$ então $\Phi(x) = x + \vec{v}$ é uma transformação afim.
6. Uma transformação afim que preserva distância num espaço euclidiano é chamada de movimento rígido. Mostre que Φ é um movimento rígido se e somente se A for uma transformação ortogonal.
7. O conjunto dos movimentos rígidos formam um grupo.

1.5. Tranformações Galileanas: Sejam $\mathcal{E}^4$ um espaço afim sobre $\mathcal{V}^4$, e $\tau : \mathcal{V}^4 \to \mathbb{R}$ uma forma linear não nula. Denotaremos por $\mathcal{S}$ o subespaço anulador da forma τ e suporemos que neste subespaço esteja definida uma forma bilinear positiva definida. A esta estrutura $\{\mathcal{E}^4, \tau, <, >\}$ chamamos de espaço-tempo galileano. Dois pontos x, y do espaço afim $\mathcal{E}^4$ chamam-se eventos simultâneos caso o vetor $x - y \in \mathcal{S}$, caso contrário $\tau(x - y) \neq 0$ e chamado de intervalo de tempo entre os eventos.
Uma *transformação galileana* é uma transformação afim Φ de $\mathcal{E}^4$ que satisfaz:

G1 $\tau(\Phi(x) - \Phi(y)) = \tau(x - y)$
G2 Se x e y são simultâneos então $||\Phi(x) - \Phi(y)|| = ||x - y||$

Mostre que:

8. O conjunto das transformações galileanas formam um subgrupo das transformações afins
9. A aplicação A associada a uma transformação galileana tem $\mathcal{S}$ como espaço invariante.
10. $A_{|\mathcal{S}}$ é ortogonal pelo produto interno $<, >$

Seja $\{\mathcal{E}^4, \tau, <, >\}$ um espaço galileano, então mostre que as seguintes transformações são galileanas.

11. Seja $\vec{v}$ um vetor fixo de $\mathcal{S}$ e $\mathbf{O}$ uma origem de $\mathcal{E}^4$ defino $\Phi_1(x) = x + \tau(x - \mathbf{O})\vec{v}$
12. Seja $\vec{s} \in \mathcal{V}^4$ fixo, defino $\Phi_2(x) = x + \vec{s}$

13. Seja $A : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ uma aplicação linear ortogonal então existe uma extensão $\tilde{A} : \mathcal{V}^4 \to \mathcal{V}^4$ de A tal que $\tau(\tilde{A}(\vec{v})) = \tau(\vec{v})$

14. Sendo A e $\tilde{A}$ como o ítem acima defino $\Phi_3(x) = \mathbf{O} + \tilde{A}(x - \mathbf{O})$

15. **Teorema de representação:** Qualquer elemento do grupo de transformações galileanas pode ser expresso como produto dos três tipos de transformações acima descritos.

16. Seja o movimento em $\mathbb{R}^3$, $x(t) = (\cos\omega t, \sin\omega t, \exp\lambda t)$ Calcule a velocidade e aceleração do movimento.
17. Sejam $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}$ duas bases ortonormais de $\mathbb{R}^3$ com o produto interno canônico. Prove que a matriz de mudança de base $A_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ é ortogonal (a inversa é a transposta).
18. Seja a relação entre bases ortogonais definidas por

$$\mathcal{B}' \sim \mathcal{B} \iff \det A_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = 1,$$

prove que esta relação é de equivalência.
19. Um trem com velocidade $v_0 = 54$ Km/h, pára após dois minutos de ter começado a frear. Supondo que durante a freagem a desaceleração é constante, calcular a distância que o trem percorreu nestes dois minutos até parar.

2. Cinemática de um ponto

Estabelecemos que $\mathcal{E}$ será o espaço afim euclidiano sobre $\mathbb{R}^3$. Também deixaremos fixa uma base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ortonormal, que definirá a orientação de nosso espaço.
Um *Referencial Móvel* é uma função do intervalo I no conjunto dos referenciais positivos, ou seja, para cada instante de tempo t temos um referencial positivo de $\mathcal{E}$ $\mathcal{R}_t = (A(t), \mathcal{B}_t)$, onde $\mathcal{B}_t$ é uma base ortonormal positiva. A um referencial móvel está associado uma função $A : I \to \mathcal{E}$ e uma aplicação $R : I \to SO(3, R)$ que identificaremos como a matriz de mudança de base $R(t) = A_{\mathcal{B}(t)\mathcal{B}}$. O referencial será dito diferenciável se estas duas aplicações o forem. Uma matriz $R(t) = (a_{ij}(t))$ é diferenciável quando cada elemento a_{ij} for diferenciável.
Se $P : I \to \mathcal{E}$ é um movimento de um ponto então $P(t) - A(t)$ é um elemento do espaço vetorial cujas coordenadas na base $\mathcal{B}(t)$ chamaremos de *coordenadas do movimento de ponto em relação ao referencial* $\mathcal{R}(t)$.

Exemplo: Seja $A(t) = (\cos\omega t,\ \sin\omega t,\ 1)$ e $\mathcal{R}(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t, & \sin\omega t & 0 \\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

O par $(A(t), \mathcal{R}(t))$ define um referencial móvel. A matriz $\mathcal{R}(t)$ determina univocamente os vetores $\mathbf{i}(t) = \cos\omega t\mathbf{i} - \sin\omega t\mathbf{j}$, $\mathbf{j}(t) = \sin\omega t\mathbf{i} + \cos\omega t\mathbf{j}$, $\mathbf{k}(t) = \mathbf{k}$
A cinemática estuda o movimento, as velocidades e acelerações de uma partícula e suas propriedades com relação às mudanças de referenciais.
Note que se $A(t)$ representa o movimento de uma partícula em movimento circular uniforme, então suas coordenadas em relação a um referencial fixo $(\mathcal{O}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ são $(\cos\omega t,\ \sin\omega t,\ 1)$, enquanto no referencial móvel $(A(t), \mathcal{R}(t))$ as coordenadas são constantes.
Notemos também que, como a matriz $\mathcal{R}(t)$ determina univocamente os vetores $\mathbf{i}(t), \mathbf{j}(t), \mathbf{k}(t)$ então podemos escrever

$$P(t) - A(t) = x_1(t)\mathbf{i}(t) + x_2(t)\mathbf{j}(t) + x_3(t)\mathbf{k}(t)$$

Diremos que o ponto $x(t)$ está em *ligado ao referencial* $\mathcal{R}(t)$ quando as coordenadas $x_i(t)$ acima forem constantes.

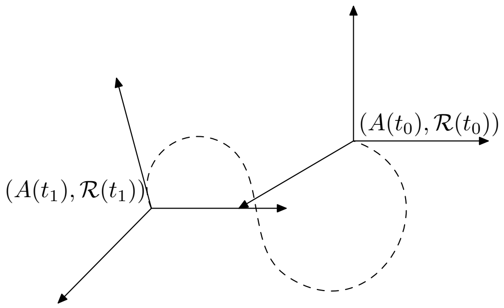


FIGURA 2. Referencial Móvel

2.1. Velocidade do movimento de um ponto. Seja $P : I \to \mathcal{E}$ um movimento de classe $\mathcal{C}^2$ e $\mathcal{R}(t) = (A(t), \mathcal{B}(t))$ um referencial móvel diferenciável. Então $\mathbf{y}(t) = P(t) - A(t)$ será um vetor diferenciável e denotaremos a sua velocidade como sendo o vetor

$$V_{\mathcal{R}}(t) = \frac{d}{dt}(P(t) - A(t)) = \dot{\mathbf{y}}(t)$$

Observemos que se $\mathcal{R}_1(t) = (A_1(t), \mathcal{B}_1(t))$ e $\mathcal{R}_2(t) = (A_2(t), \mathcal{B}_2(t))$ forem dois referenciais temos $\mathbf{y}_1(t) = P(t) - A_1(t)$ e $\mathbf{y}_2(t) = P(t) - A_2(t)$ seguindo que $\mathbf{y}_1(t) = A_2(t) - A_1(t) + \mathbf{y}_2(t)$, e derivando tem-se

$$V_{\mathcal{R}_1} = V_{\mathcal{R}_2} + V_{21}$$

onde este último termo V_{21} é a velocidade relativa entre os referenciais.

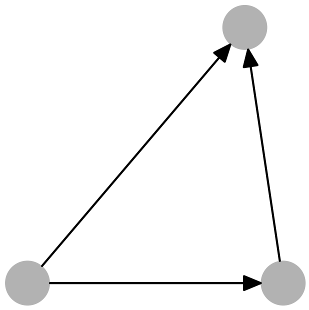


FIGURA 3. Movimento relativo

Vamos agora considerar a seguinte questão. Seja $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ um referencial fixo, digamos aquele que já haviamos fixado; e $\mathcal{R}(t) = (A(t), \mathcal{B}(t))$ um referencial móvel. Qual seria a relação entre as velocidades relativas aos referenciais.
Considerando que $P(t)$ seja uma movimento dado, temos:

$$\mathbf{x}(t) = P(t) - O = x_1(t)\mathbf{i} + x_2(t)\mathbf{j} + x_3(t)\mathbf{k} \tag{1}$$

$$\mathbf{y}(t) = P(t) - A(t) = y_1(t)\mathbf{e}_1(t) + y_2(t)\mathbf{e}_2(t) + y_3(t)\mathbf{e}_3(t) \tag{2}$$

Para determinarmos a velocidade seguimos as regras habituais de derivação.

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \dot{y}_1(t)\mathbf{e}_1(t) + \dot{y}_2(t)\mathbf{e}_2(t) + \dot{y}_3(t)\mathbf{e}_3(t) + x_1(t)\dot{\mathbf{e}}_1(t) + x_2(t)\dot{\mathbf{e}}_2(t) + x_3(t)\dot{\mathbf{e}}_3(t)$$

Agora temos os seguintes resultados:

PROPOSIÇÃO 1. *Se o referencial $\mathcal{R}(t)$ é diferenciável existem funções diferenciáveis $a(t), b(t)ec(t)$ no intervalo I que satisfazem:*

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = c(t)\mathbf{e}_2 - b(t)\mathbf{e}_3 \tag{3}$$
$$\dot{\mathbf{e}}_2 = -c(t)\mathbf{e}_1 + a(t)\mathbf{e}_3 \tag{4}$$
$$\dot{\mathbf{e}}_3 = b(t)\mathbf{e}_1 - a(t)\mathbf{e}_2 \tag{5}$$

Prova: Defina as seguintes funções

(1) $a(t) =< \dot{\mathbf{e}}_2, \mathbf{e}_3 >$
(2) $b(t) =< \dot{\mathbf{e}}_3, \mathbf{e}_1 >$
(3) $c(t) =< \dot{\mathbf{e}}_1, \mathbf{e}_2 >$

Agora derive as relações de ortonormalidade entre os vetores $\mathbf{e}_i$ para obter o resultado. CQD.

PROPOSIÇÃO 2. *Seja $\omega(t) = a(t)\mathbf{e}_1 + b(t)\mathbf{e}_2 + c(t)\mathbf{e}_3$ então temos a relação:*

$$\dot{e}_i = \omega(\mathbf{t}) \wedge \mathbf{e}_i$$

Prova: Faremos a prova para o caso $i = 1$ e certamente o leitor deduzirá o restante da prova.

Escrevemos $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$ e $-\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1$.

A primeira equação da proposição anterior fica:

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = c(t)\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 + b(t)\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \tag{6}$$
$$= (c(t)\mathbf{e}_3 + b(t)\mathbf{e}_2) \wedge \mathbf{e}_1 \tag{7}$$
$$= \omega(t) \wedge \mathbf{e}_1 \tag{8}$$

Analogamente seguem as outras igualdades CQD.

Conclusão:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \dot{y}_1(t)\mathbf{e}_1(t) + \dot{y}_2(t)\mathbf{e}_2(t) + \dot{y}_3(t)\mathbf{e}_3(t) + \omega(t) \wedge \mathbf{y}(t)$$

Para o cálculo da aceleração devemos derivar mais uma vez a fórmula acima.

$$\mathbf{A}(t) = \ddot{x}_1(t)\mathbf{e}_1(t) + \ddot{x}_2(t)\mathbf{e}_2(t) + \ddot{x}_3(t)\mathbf{e}_3(t) + \dot{\omega}(t) \wedge (\mathbf{y}(t)) \tag{9}$$
$$+2\omega(t) \wedge \dot{\mathbf{y}}(t) - \omega(t) \wedge (\omega(t) \wedge \mathbf{y}(t)) \tag{10}$$

O lado direito da igualdade acima tem três componentes: a primeira é simplesmente a aceleração no referencial móvel, ou aceleração própria, a segunda chamamos de aceleração inercial de rotação, note que este termo só aparece no caso da velocidade angular não ser constante, e a terceira parte é a chamada aceleração centrípeta. Quando, em dinâmica falarmos de referencial inercial, aparecerá também um termo chamado de aceleração de Coriolis que por enquanto está escondido na aceleração centrípeta.

Escrevendo $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) + \mathbf{r}(t)$ sendo $\mathbf{r}(t) = A(t) - O$ obtemos imediatamente a fómula da relação entre as velocidades

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}_r + \omega(t) \wedge \mathbf{y}(t) + \dot{\mathbf{r}}(t)$$

sendo $\mathbf{v}_r = \dot{y}_1(t)\mathbf{e}_1(t) + \dot{y}_2(t)\mathbf{e}_2(t) + \dot{y}_3(t)\mathbf{e}_3(t)$.

O vetor $\omega(t)$ é chamado de velocidade angular. Observe a natureza geométrica deste vetor que é dada pela proposição acima. Além disso observamos que é um vetor que depende exclusivamente do movimeto de rotação do referencial móvel, sendo independente do movimento original.
Claro que poderíamos ter feito toda esta análise num espaço afim de dimensão n e a única coisa que não teríamos seria exatamente este vetor velocidade angular. De fato, a proposição 1 ficaria:

Proposição 3. *Se o referencial $\mathcal{R}(t)$ de $\mathcal{E}^n$ é diferenciável então existem $n(n-1)/2$ funções α_{ij} com $j > i$ e $i \in \{1, \dots, n-1\}$ tal que:*

$$\dot{\mathbf{e}}_k = \sum_{i=1}^{k-1} -\alpha_{ik}\mathbf{e}_i + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_{ki}\mathbf{e}_i$$

Podemos associar a matriz (α_{ij}) a uma matriz antisimétrica. A relação desta proposição com as matrizes antisimétricas fica mais clara quando fazemos as contas usando as matrizes de coordenadas nos referenciais.
Permanecemos $\mathcal{E}^n$. Seja $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ um referencial fixo; e $\mathcal{R}(t) = (A(t), \mathcal{B}(t))$ um referencial móvel. Digamos que $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ e $\mathcal{B}(t) = \{\mathbf{e}_1(t), \dots, \mathbf{e}_n(t)\}$. Seja $P(t) \in \mathcal{E}^n$ um movimento diferenciável. Então as matrizes coordenadas deste movimento nos dois referenciais são dadas respectivamente por

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

A relação entre estas coordenadas é dada usando a matriz de mudança de base $R(t) = A_{\mathcal{B}\mathcal{B}(t)}$ da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = R(t) \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1(t) \\ \vdots \\ r_n(t) \end{pmatrix}$$

Derivando em relação ao tempo:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \dot{R}(t) \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} + R(t) \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{r}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{r}_n(t) \end{pmatrix}$$

ou usando a ortogonalidade de $R(t)$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \dot{R}(t)R^t(t)R(t) \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} + R(t) \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{r}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{r}_n(t) \end{pmatrix}$$

Proposição 4. *A matriz $\Omega(t) = \dot{R}(t)R^t(t)$ é uma matriz antisimétrica.*

Desta forma obtemos a equação das velocidades relativas em $\mathcal{E}^n$ da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \Omega(t) \begin{pmatrix} x_1(t) - r_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) - r_n(t) \end{pmatrix} + R(t) \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{r}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{r}_n(t) \end{pmatrix}$$

$\Omega(t) \in so(n)$ é a matriz velocidade angular. Novamente observamos que esta matriz depende somente da matriz de mudança de base $R(t)$. A seguinte equação diferencial será importante para o estudo dos movimentos dos corpos rígidos. Lembremos ainda que no caso $n = 3$ poderemos recuperar o vetor velocidade angular a partir de $\Omega(t)$ usando a inversa da aplicação $D_{\mathcal{B}}$ da seção anterior.

3. Movimentos regulares

Como vimos os movimentos são curvas em $\mathcal{E}^3$, é interessante então olhar um pouco o estudo geométrico das curvas neste espaço euclidiano. Para os detalhes dos resultados aqui recomendamos o livro do Struik [**18**]

Um movimento parametrizado $P : I \to \mathcal{E}^3$ é regular quando para todo $t \in I$ vale $||\dot{P}(t)|| = ||v(t)|| \neq 0$. Note que esta definição depende da parametrização do movimento. Não basta saber qual é o traço da curva.

Uma função $s : J \to I$ é uma reparametrização positiva de I se s for diferenciável, $s'(t) > 0 \forall t \in J$ e for sobrejetora.

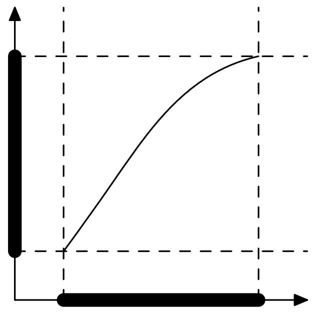


FIGURA 4. parametrização

Decorre desta definição que $s(c) = a$, $s(d) = b$ e s é injetora.

Um movimento $Q : J \to \mathcal{E}^3$ estará *parametrizado por comprimento de arco* (ppca) quando $||Q'(s)|| = 1 \forall s \in J$

TEOREMA 1. *Seja $P : I \to \mathcal{E}^3$ um movimento regular, então existe uma reparametrização positiva $\varphi : J \to I$ tal que o movimento $Q(s) = P(\varphi(s))$ esteja parametrizado por comprimento de arco*

Demonstração: Como $P(t)$ é regular temos $||\dot{P}(t)|| > 0$. Definimos $\sigma : I \to J$ por $\sigma(t) = \int_a^t ||\dot{P}(r)||dr$ onde $J = (0, l)$ e $l = \int_a^b ||\dot{P}(r)||dr$.

É fácil ver que $\dot{\sigma}(t) = ||\dot{P}(t)|| \forall t \in I$ e portanto σ é uma reparametrização, sendo portanto bijetora. Chamemos de φ a inversa de σ. Pelo teorema da função inversa temos $\varphi'(s) = \frac{1}{\dot{\sigma}(\varphi(s))} > 0$ sendo portanto φ uma reparametrização. Esta será a que queremos pois definindo $Q(s) = P(\varphi(s))$ temos pela regra da cadeia

$$Q'(s) = \dot{P}(\varphi(s)).\varphi'(s) = \frac{\dot{P}(\varphi(s))}{||\dot{P}(\varphi(s))||}$$

O que completa a demonstração deste teorema.

3.1. O referencial de Frenet-Serret. Verificaremos agora que a um movimento regular ppca podemos associar um referencial especial, chamado de Frenet-Serret.
Seja $Q : J \to \mathcal{E}^3$ um movimento ppca. Para cada $s \in J$ o vetor $Q'(s)$ é um vetor tangente à trajetória do movimento. Além do mais $||Q'(s)|| = 1$. Desta última igualdade obtemos

$$< Q'(s), Q'(s) >= 1$$

e derivando-se com relação a s temos

$$2 < Q''(s), Q'(s) >= 0$$

Assim temos duas possibilidades:
i- Ou $Q''(s) = 0$ para s num intervalo de J, e neste caso é fácil deduzir que o movimento é uma reta neste intervalo e não há triedro de Frenet-Serret.
ii- Ou $Q''(s) \neq 0$ que garante que esta derivada será diferente de zero numa vizinhança de s e ainda ortogonal a $Q'(s)$. Vamos por simplificação deixar por enquanto de lado o caso em que $Q''(s) = 0$ em pontos isolados s pois neste caso teremos que nos preocupar com a orintação do refencial de Frenet que vamos construir. Para uma abordagem diferente ver o Struik [**18**].
Definimos, nos dois casos, a curvatura do movimento como

$$k(s) = ||Q''(s)||$$

No primeiro caso temos a curvatura sempre zero. Vejamos um exemplo simples:

$$Q(s) = R\cos\frac{s}{R}\mathbf{i} + R\sin\frac{s}{R}\mathbf{j}$$

neste caso

$$Q''(s) = -\frac{1}{R}\cos\frac{s}{R}\mathbf{i} - \frac{1}{R}\sin\frac{s}{R}\mathbf{j} \implies k(s) = \frac{1}{R}$$

Nos pontos em que a curvatura for diferente de zero iremos definir

$$\mathbf{t}(s) = Q'(s)$$

$$\mathbf{n}(s) = \frac{Q''(s)}{k(s)}$$

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$$

O referencial formado por estes tres vetores será chamado de referencial de Frenet-Serret.
O plano formado por $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$ é chamado de plano osculador em $Q(s)$. O plano formado por $\mathbf{n}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$ é chamado de plano normal e o determinado por $\mathbf{b}(s)$ e $\mathbf{t}(s)$ é o plano retificante. O interessante deste referencial é que a sua evolução, ou cinemática, determina de certa maneira a curva $Q(s)$. Isto está expresso no seguinte Proposição:

PROPOSIÇÃO 5. *Os vetores do referencial de Frenet-serret satisfazem a seguinte equação diferencial.*

$$\begin{array}{rcllll} \mathbf{t}'(s) & = & & k(s)\mathbf{n}(s) & \\ \mathbf{n}'(s) & = & -k(s)\mathbf{t}(s) & & -\tau(s)\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}'(s) & = & & \tau(s)\mathbf{n}(s) & \end{array}$$

onde $\tau(s)$ é a torsão do movimento.

Prova: A primeira igualdade vem direto da definição pois $\mathbf{t}'(s) = y''(s) = k(s)\mathbf{n}(s)$. Da relação $< \mathbf{b}(s), \mathbf{t}(s) >= 0$, derivando com relação a s vem

$$< \mathbf{b}'(s), \mathbf{t}(s) > + < \mathbf{b}(s), \mathbf{t}'(s) >= 0$$

daí

$$< \mathbf{b}'(s), \mathbf{t}(s) > + < \mathbf{b}(s), k(s)\mathbf{n}(s) >= 0 \implies < \mathbf{b}'(s), \mathbf{t}(s) >= 0$$

Além disso como $< \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) >= 1$ temos que $< \mathbf{b}'(s), \mathbf{b}(s) >= 0$ e por isso o vetor $\mathbf{b}'(s)$ tem componente só na direção de $\mathbf{n}(s)$, definindo assim a torsão e estabelecendo a última equação.
Derivando as equações $< \mathbf{n}(s), \mathbf{t}(s) >= 0$, $< \mathbf{b}(s), \mathbf{n}(s) >= 0$, $< \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) >= 0$ e usando as relações já deduzidas obteremos a segunda equação completamos a prova.
Compare este resultado com a Proposição 1. É o mesmo resultado. Em particular a versão da Proposição 2 para este caso fica:

PROPOSIÇÃO 6. *Seja o vetor* $\mathbf{R}(s) = \tau(s)\mathbf{t}(s) + k(s)\mathbf{b}(s)$ *então as equaçõe de Frenet-Serret são equivalentes à:*

$$\mathbf{t}\prime(s) = \mathbf{R}(s) \wedge \mathbf{t}(s) \tag{11}$$
$$\mathbf{n}\prime(s) = \mathbf{R}(s) \wedge \mathbf{n}(s) \tag{12}$$
$$\mathbf{b}\prime(s) = \mathbf{R}(s) \wedge \mathbf{b}(s) \tag{13}$$
(14)

3.2. Velocidade e Aceleração no referencial de Frenet-Serret. Seja $P : I \to \mathcal{E}$ um movimento diferenciável. Fixemos o referencial $\mathcal{R} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ e denotamos por $x(t) = P(t) - O$. Observamos que $x(t)$ não está necessariamente parametrizado por comprimento de arco, mas se $x(t)$ for regular então existe uma parametrização $y(s)$ por comprimento de arco. Ou seja, podemos escrever

$$x(t) = y(s(t))$$

onde $s : I \to J$ é uma reparametrização do intervalo I.
Vamos agora calcular a velocidade a aceleração e velocidade em relação ao referencial móvel $\mathcal{F} = (O, \mathbf{t},\ \mathbf{n},\ \mathbf{b})$.
Então

$$\mathbf{V}(t) = \dot{x}(t) = y'(s(t))\dot{s}(t)$$

e lembrando que $\dot{s}(t) = ||\dot{x}(t)|| = vt$ temos

$$\mathbf{V}(t) = v(t)\mathbf{t}(s(t)).$$

Para obter a aceleração derivamos novamente a fórmula acima e usamos as relações do triedro de Frenet,

$$\mathbf{A}(t) = \ddot{x}(t) = \ddot{s}(t)\mathbf{t}(s(t)) + \dot{s}^2(t)\mathbf{t}'(s(t)).$$

Assim

$$\mathbf{A}(t) = \ddot{x}(t) = \ddot{s}(t)\mathbf{t}(s(t)) + \dot{s}^2(t)k(s(t))\mathbf{n}(s(t)),$$

usando a fórmula de Frenet-Serret.

4. Movimento Plano em Coordenadas Polares

Um movimento $P : I \to \mathcal{E}$ é um movimento plano se existe um plano afim $\alpha \in \mathcal{E}$ tal que $P(t) \in \alpha$ para todo $t \in I$. Ou, de outra forma, existem dois vetores linearmente independentes, $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ e um ponto $O \in \mathcal{E}$ tal que

$$P(t) - O = x(t) = x_1(t)\mathbf{f}_1 + x_2(t)\mathbf{f}_2.$$

É claro que podemos supor sem perder a generalidade que os dois vetores escolhidos são ortonormais, isso nos facilitará, evidentemente, os cálculos.

Podemos ainda supor que este movimento não passa pelo ponto O escolhido. Neste caso podemos determimar o vetor $x(t)$ pelo seu ângulo formado com o vetor $\mathbf{f}_1$, por exemplo, que chamaremos de $\theta(t)$ e pela norma do vetor $r(t) = ||x(t)||$.
Podemos escrever:

$$x(t) = r(t)\mathbf{u}(t),$$

onde $\mathbf{u}(t) = \cos\theta(t)\mathbf{f}_1 + \sin\theta(t)\mathbf{f}_2$. É simples verificar que o vetor $\mathbf{w}(t) = \cos\theta(t)\mathbf{f}_2 - \sin\theta(t)\mathbf{f}_1$ é ortogonal a $\mathbf{u}(t)$ e o par $\mathbf{u}(t), \mathbf{w}(t)$ tem a mesma orientação de $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$.
As coordenadas do movimento neste referencial são chamadas de coordenadas polares. Calculando a velocidade nesta coordenadas temos

$$\mathbf{V}(t) = \dot{x}(t) = \dot{r}(t)\mathbf{u}(t) + r(t)\dot{\mathbf{u}}t = \dot{r}(t)\mathbf{u}(t) + r(t)\dot{\theta}(t)\mathbf{w}(t).$$

Podemos, da mesma forma calcular a aceleração nestas coordenadas, que depois de alguns cálculos nos conduzirá a

$$\mathbf{A}(t) = (\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\theta}^2(t))\mathbf{u}(t) + (2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t) + r(t)\ddot{\theta}(t))\mathbf{w}(t)$$

ou

$$\mathbf{A}(t) = (\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\theta}^2(t))\mathbf{u}(t) + (\frac{1}{r(t)}\frac{d}{dt}r^2(t)\dot{\theta}(t))\mathbf{w}(t)$$

Exemplo:

4.1. Movimento Central. Seja $P : I \to \mathcal{E}$ um movimento regular, diremos que $P(t)$ executa um movimento central com centro em $O \in \mathcal{E}$ se o vetor $x(t) = P(t) - O$ e $A(t) = \ddot{x}(t)$ forem colineares, ou seja $\forall t \in I$, existe $a(t) \in R$ tal que $A(t) = a(t)x(t)$.

FIGURA 5. Movimento central

PROPOSIÇÃO 7. *Um movimento central é uma movimento plano.*

Prova: Calculando $\frac{d}{dt}(V(t) \wedge x(t)) = A(t) \wedge x(t) + V(t) \wedge V(t) = 0$ já que pela hipótese $A(t) \wedge x(t) = 0$. Então $V(t) \wedge x(t) = \mathbf{h}$ é um vetor constante. Verificamos que se $\mathbf{h} = 0$ então $x(t)$ descreve uma reta, sendo portanto plano.
Se $\mathbf{h} \neq 0$ então $< x(t), \mathbf{h} >=< x(t), V(t) \wedge x(t) >= 0$ o que implica que $x(t)$ estará sempre no plano perpendicular a $\mathbf{h}$. CQD.
Esta proposição permite tomar coordenadas polares para o movimento central. Vamos tomar um referencial com origem no centro do movimento (aquele ponto

O) e os vetores $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ e $\mathbf{f}_3$, uma base positiva ortonormal tal que $\mathbf{f}_3$ tenha mesma direção e sentido de $\mathbf{h}$. Usando a notação do secção anterior podemos escrever

$$\mathbf{A}(t) = (\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\theta}^2(t))\mathbf{u}(t) + (\frac{1}{r(t)}\frac{d}{dt}r^2(t)\dot{\theta}(t))\mathbf{w}(t)$$

como o movimento é central obtemos duas equações:

$$\mathbf{A}(t) = (\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\theta}^2(t)) = a(t)$$

e

$$(\frac{1}{r(t)}\frac{d}{dt}r^2(t)\dot{\theta}(t)) = 0$$

comparando as componentes de $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{w}(t)$.
Como $r(t) \neq 0$ a segunda equação implica que

$$r^2(t)\dot{\theta}(t) = K = cte.$$

Esta equação é chamada de lei da variação das áreas ou segunda lei de Kepler. A explicação para o primeiro nome é que a área da figura hachurada abaixo

Figura 6. lei das áreas

$A = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} r^2(t)\dot{\theta}(t)dt = \frac{K(t_1-t_0)}{2}$, ou seja o movimento "varre" áreas iguais em tempos iguais. Veremos mais tarde uma outra dedução deste princípio usando os momentos angulares.

5. Movimento central com aceleração proporcional à distância.

Um movimento central $x(t)$ tem aceleração proporcional à distaância quando $a(t) = a$ for uma constante na definição do movimemento central, ou seja:

$$\ddot{x}(t) = ax(t)$$

Vamos considerar agora os dois casos interessantes
(1) quando $a < 0$ - aceleração atratora.
(2) quando $a > 0$ - aceleração repulsora.
Exercício: O que acontece quando $a = 0$?
Caso (1): Definimos $a = -\omega^2$. A equação do movimento toma a forma:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

A solução geral desta equação diferencial é:

$$x(t) = \cos(\omega t)\mathbf{A} + \sin(\omega t)\mathbf{B}$$

Onde $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são constantes que dependem das condições iniciais $x(0)$ e $\dot{x}(t)$ (posição inicial e velocidade inicial). Fazendo $x(0) = \mathbf{X}_0$ e $\dot{x}(0) = \mathbf{V}_0$ obtemos a solução geral

$$x(t) = \cos(\omega t)\mathbf{X}_0 + \sin(\omega t)\frac{\mathbf{V}_0}{\omega}$$

Desta fórmula concluimos que o movimento é periódico com período $\frac{2\pi}{\omega}$.
Se $\mathbf{X}_0$ e $\mathbf{V}_0$ forem colineares então o movimento permanece num segmento de reta, senão a trajetória do movimento será uma elipse no plano determinado por estas condições iniciais (fig. 5)

FIGURA 7. Aceleração atratora

FIGURA 8. Aceleração repulsora.

Caso (2): Se $a > 0$ podemos redefinir $a = \omega^2$ e a equação diferencial que temos é:

$$\ddot{x}(t) - \omega^2 x(t) = 0$$

cuja solução geral é: $x(t) = \mathrm{e}^{\omega t}\mathbf{A} + \mathrm{e}^{-\omega t}\mathbf{B}$ Novamente se $\mathbf{X}_0$ e $\mathbf{V}_0$ forem as condições iniciais podemos então escrever a solução como:

$$x(t) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\omega t} + \mathrm{e}^{-\omega t})\mathbf{X}_0 + \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\omega t} - \mathrm{e}^{-\omega t})\frac{\mathbf{V}_0}{\omega}$$

Quando a posição e velocidade inicial forem linearmente independentes a trajetória deste movimento será uma hipérbole (fig. 5).

6. Movimento central com $a(t) = -M/r^3(t)$

Já vimos que quando temos um movimento central então ele deve ser plano. Temos portanto em coordenadas polares a fórmula para a aceleração:

$$A(t) = (\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\theta}^2)\vec{u}(t) + \frac{1}{r(t)}\frac{d}{dt}(r^2(t)\dot{\theta}(t))\vec{v}(t) \tag{15}$$

Como $A(t) e x(t)$ são colineares, vale a lei das áreas, ou seja:

$$A(t) = a(t)r(t)\vec{u}(t) = a(t)x(t) \tag{16}$$

Igualando as equações 15 e 16 obtemos

$$\begin{aligned} \ddot{r}(t) - r(t)\dot{\theta}^2 &= a(t)r(t) && (17)\\ r^2(t)\dot{\theta}(t) &= C && (18) \end{aligned}$$

Note que sendo $r(t) > 0$ fica garantido que $\dot{\theta} \neq 0$, o que garante a existência de uma inversa $t(\theta)$ e portanto a curva $(r(t), \theta(t))$ tem localmente uma forma polar

$$R(\theta) = r(t(\theta))$$

que a define. Notemos também que nesta vizinhança teremos

$$r(t) = R(\theta(t))$$

e que

$$\dot{r}(t) = \frac{dR}{d\theta}\frac{C}{r^2(t)} = \frac{dR}{d\theta}\frac{C}{R^2(\theta)} = -C\frac{d}{d\theta}(\frac{1}{R(\theta)}) \tag{19}$$

chamando $W(\theta) = \frac{1}{R(\theta)}$ temos

$$\dot{r}(t) = -C\frac{dW(\theta)}{d\theta} \tag{20}$$

Agora derivando novamente a relação 20

$$\ddot{r}(t) = \frac{d}{d\theta}(-C\frac{dW(\theta)}{d\theta})\dot{\theta} = -C^2\frac{d^2W(\theta)}{d\theta^2}\frac{1}{R^2(\theta)} = -C^2W^2(\theta)\frac{d^2W(\theta)}{d\theta^2} \tag{21}$$

Substituindo na equação diferencial 16 obtemos a chamada *Fórmula de Binet*

$$-C^2\left(W^2\frac{d^2W}{d\theta^2}+W^3\right)=\gamma(W,\theta) \tag{22}$$

Dependendo da função γ podemos resolver esta equação, é isto que faremos para o caso em que temos uma atração Newtoniana

$$\gamma(W,\theta) = -M/R^2(\theta) = -MW^2$$

Então, simplificando a fórmula de Binet 22 temos:

$$\frac{d^2W}{d\theta^2}+W=\frac{M}{C^2} \tag{23}$$

Uma solução particular desta equação é $W(\theta) = M/C^2$ (constante).
A solução geral do sistema homogênio

$$\frac{d^2W}{d\theta^2}+W=0$$

é da forma

$$W(\theta) = A\sin(\theta) + B\cos(\theta)$$

Assim a solução geral de 23 pode ser escrita como

$$W(\theta)=\frac{M}{C^2}(1-e\cos(\theta-\alpha)) \tag{24}$$

onde $e = C^2/M\sqrt{A^2+b^2}$ e $\tan(\alpha) = B/A$.
Lembrando que $W(\theta) = \frac{1}{R(\theta)}$ podemos escrever:

$$R(\theta)=\frac{C^2/M}{1-e\cos(\theta-\alpha)} \tag{25}$$

Esta é a forma polar de uma cônica com excentricidade e. Quando $e < 1$ esta cônica é uma elipse, se $e = 1$ uma parábola e se $e > 1$ temos uma hipérbole.
Concluimos então que o movimento central com atração newtoniana descreve uma cônica determinada pela excentricidade. Esta excentricidade podemos calcular em função da velocidade inicial V_0 e posição inicial R_0. É o que faremos a seguir:
Da fórmula :

$$\vec{V}(t) = \dot{r}(t)\vec{u}(t) + r\dot{\theta}\vec{v}(t) \tag{26}$$

e

$$\vec{A}(t)=\frac{-M}{r^2(t)}\vec{u}(t) \tag{27}$$

obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d\vec{V}^2(t)}{dt}=\frac{-M}{r^2(t)}\dot{r}(t) \tag{28}$$

donde, se $\dot{r} \neq 0$ (se $\dot{r} = 0$ teríamos um movimento circular uniforme)

$$\frac{d\vec{V}^2(t)}{dt}/\dot{r}(t)=\frac{-2M}{r^2(t)} \tag{29}$$

Agora usamos o teorema das funções implícitas:

$$\frac{d\vec{V}^2(r)}{dr} = \frac{-M}{r^2} \tag{30}$$

integrando:

$$\vec{V}^2(r) = \frac{2M}{r} + h \tag{31}$$

Desta relação podemos concluir em particular que

$$h = {V_0}^2 - \frac{2M}{R_0} \tag{32}$$

Por outro lado as relações já conhecidas:

$$\dot{r}(t) = -C\frac{dW}{d\theta} \tag{33}$$

e

$$\dot{\theta}(t) = cW^2(t(\theta)) \tag{34}$$

nos dão as seguinte relação para a velocidade:

$$\vec{V}^2(\theta) = C^2(\frac{dW}{d\theta})^2 + c^2W^2(\theta) \tag{35}$$

Igualando as fórmulas 31 e 35 temos a equação:

$$C^2(\frac{dW}{d\theta})^2 + c^2W^2(\theta) = 2MW + h \tag{36}$$

Donde obtemos h como $h = \frac{M^2}{C^2}(e^2 - 1)$.
Resumindo:

$e < 1$	$\iff$	$h < 0$	$\iff$	${V_0}^2 < 2M/R_0$	$\iff$	Trajetória Elíptica
$e = 1$	$\iff$	$h = 0$	$\iff$	${V_0}^2 = 2M/R_0$	$\iff$	Trajetória Parabólica
$e > 1$	$\iff$	$h > 0$	$\iff$	${V_0}^2 > 2M/R_0$	$\iff$	Trajetória Hiperbólica

Exercícios:

20. Um ponto P descreve uma elipse de centro O de forma que a aceleração aponta sempre para o centro O. Mostre que a norma da aceleração é proporcional a $||M - O||$.

21. Determinar a função $\varphi(t)$ de forma que o movimento

$$x = a\cos(\varphi)\cos(t), \quad y = a\sin(\varphi)\cos(t), \quad z = a\sin(t) \tag{37}$$

tenha em cada instante t uma velocidade escalar $v(t)$ que satisfaz

$$|v|^2 = a^2 \tag{38}$$

22. a) Um cilindro de raio R gira em torno de um eixo r paralelo ao seu eixo de rotação, com velocidade angular constante ω_0. (ver figura). Um ponto P(t) desce o cilindro com velocidade constante v_0. Dar as coordenadas da velocidade e aceleração de $P(t)$ em relação a um referencial de um observador parado em um ponto O de r. b) Considere agora um eixo s passando por O e perpendicular a r

Figura 9. Item a

Figura 10. item b

e suponha que além do movimento anterior o cilindro também gire com velocidade

constante ω_1 em torno deste eixo. Qual seria agora a velocidade do ponto $P(t)$ em relação a um referencial fixo em O.
23. Estudar os movimentos com aceleração central com centro O, cujas trajetórias sejam:
a) Uma parábola de foco O.
b) Uma cardioide ($\rho = a(1 + \cos\theta)$.
24. O movimento de um ponto M em coordenadas polares é descrito pela curva

$$\rho = \frac{a \sin^2\theta}{\cos\theta}$$

seguindo a lei das áreas. Determinar a aceleração e a velocidade.
25. Um ponto P se movimenta sobre um cilindro de revolução Σ de raio r, com aceleração normal ao cilindro em cada instante, determinar a trajetoria do movimento.
26. Sejam $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}$ duas bases ortonormais de $\mathbb{R}^3$ com o produto interno canônico. Prove que a matriz de mudança de base $A_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ é ortogonal (a inversa é a transposta).
27. Um trem com velocidade $v_0 = 54$ Km/h, pára após dois minutos de ter começado a frear. Supondo que durante a freagem a desaceleração é constante, calcular a distância que o trem percorreu nestes dois minutos até parar.
28. Um homem de altura h se afasta, em linha reta, de uma lanterna colocada a uma altura H. Sabe-se que o homem move-se segundo a lei $x(t) = t^2 \cos t$. Pergunta-se qual a velocidade da ponta de sua sombra produzida pela luz da lanterna.
29. Determinar os pontos de equilíbrio e as órbitas periódicas dos exemplos da secção anterior.
Outras propriedades interessantes das órbitas periódicas do sistema (3c) estão explicitadas no exercǿcio seguinte.
30. Suponha que $\mathcal{O}$ é uma órbita periódica de (3c), mostre que:

- (i) $\mathcal{O}$ é percorrida no espaço de fase no sentido horário.
- (ii) $\mathcal{O}$ corta o eixo $p = 0$ em exatamente dois pontos.
- (iii) Se $A = (a, 0)$ e $B = (b, 0)$ são os pontos em que $\mathcal{O}$ corta o eixo $p = 0$ então $\mathcal{O}$ fica contida na faixa determinada pelas retas $x = a$ e $x = b$. Além disso os únicos pontos de $\mathcal{O}$ que ficam nessas retas são exatamente A e B.

Um resultado interessante acerca de órbitas periódicas de sistemas com um grau de liberdade é o seguinte.

Lema 3. *Suponha que $\mathcal{O}$ é uma órbita periódica de (3c) e que $A = (a, 0)$ e $B = (b, 0)$ são os pontos em que $\mathcal{O}$ corta o eixo $p = 0$, admita que $a < b$. Então $U(a) = U(b)$, $U'(a)U'(b) \neq 0$ e $U(x) < U(a)$, para $a < x < b$.*

Prova: Como A e B não são pontos de equilíbrio de (3c) é claro que $U'(a)$ e $U'(b)$ são diferentes de zero.
O resto é conseqüência do teorema da conservação da energia. Por esse resultado $E(A) = E(B)$ e como nesses pontos $p = 0$, resulta $U(a) = U(b) = E(A)$.
Seja agora $x \in (a, b)$. Como a órbita $\mathcal{O}$ é conexa existe $p \in \mathbb{R}$ tal que $(x, p) \in \mathcal{O}$. Pelo ítem (ii) do exercício 5, vem que $p \neq 0$.
Do teorema da conservação da energia $U(a) = E(A) = E(x, p) = U(x) + \frac{p^2}{2} > U(x)$.
CQD
A existência de pontos de equilíbrio no interior de uma órbita periódica de (3c) pode ser obtida usando o Teorema de Pincaré–Bendixon e o Lema de Zorn (veja

por exemplo, o capítulo VII de [Sotomayor]), apresentamos aqui uma demonstração "alternativa" que evita o uso do Lema de Zorn.

PROPOSIÇÃO 8. *No interior de toda órbita periódica $\mathcal{O}$ existe pelo menos um ponto de equilíbrio $(x_0, 0)$ que é um ponto de mínimo local (estrito) da energia do sistema.*

Prova: Sejam $A = (a, 0)$ e $B = (b, 0)$ os pontos em que $\mathcal{O}$ corta o eixo $p = 0$ (determinados pelo ítem (ii) do exercício 5) e suponhamos que $a < b$.
Para estabelecer o resultado basta mostrar que existe um ponto x_0 que é ponto de mínimo estrito local da energia potencial, pois é claro que então $(x_0, 0)$ será um ponto de equilíbrio do sistema e um ponto de mínimo estrito local da energia.
Isto segue–se imediatamente do lema anterior, pois como $U(a) = U(b)$ e $U(x) < U(a)$, para $x \in (a, b)$ vem que o(s) ponto(s) de mínimo de U em $[a, b]$ estão todos no interior desse intervalo.
Basta tomar x_0 um desses pontos. CQD
O lema anterior nos mostra que se tomarmos uma órbita periódica e considerarmos os pontos $(a, 0)$ e $(b, 0$ em que essa órbita cruza o eixo $p = 0$ então:

(I) Os pontos a e b são pontos regulares da energia potencial U;
(II) Os pontos $(a, U(a))$ e $(b, U(b))$ determinam uma corda horizontal no gráfico da energia potencial;
(III) O gráfico da energia potencial em $[a, b]$ fica abaixo dessa corda.

Veremos agora que a "recíproca" desse resultado também é verdadeira.

PROPOSIÇÃO 9. *Suponha que $a < b$ e que no intervalo $[a, b]$ a energia potencial U stisfaz as propriedades (I), (II) e (III) encunciadas acima. Então a órbita de (3c) que passa por $(a, 0)$ é periódica e passa também por $(b, 0)$.*

Prova:A demonstração consistirá em provar–se que a componente conexa da curva de nível $E(x, p) = U(a)$ que passa por $(a, 0)$ é compacta, contém o ponto $(b, 0)$ e não pertence a ela nenhum ponto de equilí brio de (3c). Então pelo resultado previamente citado (e demonstrado no apêndice) segue–se imediatamente a proposição.
Seja $\mathcal{K}$ essa componente conexa.
Como $U(x) > U(a)$, para $x \in (a, b)$ é evidente que a curva γ dada por

$$p = \pm\sqrt{2\,(U(x) - U(a))},\ a \leq x \leq b,$$

faz parte de $\mathcal{K}$ e, como $U(b) = U(a)$ segue–se que $(b, 0)$ está nessa curva e, portanto, em $\mathcal{K}$.
Também é imediato que a intersecção de $\mathcal{K}$ com a faixa $\mathcal{F} = \{(x, p)\colon a \leq x \leq b\}$ é a curva γ.
Observemos ainda que os únicos pontos dessa curva que interceptam o eixo $p = 0$ são exatamente $(a, 0)$ e $(b, 0)$, pois $U(x) > U(a)$ no interior de $[a, b]$. Assim não existem pontos de equilíbrio de (3c) em γ.
Para terminar a demonstração basta provar que $\mathcal{K}$ fica contida na faixa $\mathcal{F}$.
Para estabelecer isto comecemos notando que, por (I), $U'(a) \neq 0$ e como $U(x) < U(a)$, se $x \in (a, b)$, vem que $U'(a) < 0$.
Isto mostra que exite $\varepsilon_1 > 0$ tal que $U(x) > U(a)$ se $x \in I_1 = (a - \varepsilon_1, a)$. Portanto se $x \in I_1$ e $p \in \mathbb{R}$ temos $E(x, p) \geq U(x) > U(a)$.
Logo, se $x \in I_1$ e $p \in \mathbb{R}$, $(x, p) \notin \mathcal{K}$.
De modo totalmente análogo mostra–se que existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que $U(x) > U(b) = U(a)$, se $x \in I_2 = (b, b + \varepsilon_2)$.
Assim, vemos que para $x \in I_2$ e $p \in \mathbb{R}$, temos $E(x, p) > U(a)$ e portanto $(x, p) \notin \mathcal{K}$.

Isto mostra que $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$ e encerra a prova. CQD

Com estes resultados podemos a partir do gráfico da energia potencial determinar exatamente as órbitas periódicas de (3c), os exemplos a seguir mostram aplicações concretas disto.

CAPíTULO 2

Dinâmica do Ponto

Neste capítulo estudaremos o movimento $P(t)$ de um ponto material, ou de um conjunto finito de pontos materiais $P_1(t), \ldots, P_n(t)$, em $\mathcal{E}^3$ sob um aspecto diverso daquele visto no capítulo anterior.
Enquanto naquela parte procuramos destacar o aspecto descritivo do movimento aqui procuraremos determinar o movimento desse(s) ponto(s) a partir do conhecimento das forças que agem sobre ele(s), ou seja, o motivo do movimento.
A favor da precisão, deveríamos dizer que os sistemas que aqui serão considerados estão sob a ação de um campo de forças F e *movem–se livremente no espaço*, isto é, os sistemas considerados aqui não estão sujeitos a vínculos. Há apenas uma (ou duas) exceções a esta consideração e elas estão tratadas em um apêndice ao final do capítulo. Consideramos ser esta a melhor postura em um primeiro curso formal de mecânica, evitando uma discussão aprofundada do princípio dos trabalhos virtuais de D'Alembert, podendo assim basear todo o estudo na segunda lei de Newton. Para o tratamento da mecânica com vínculos veja o livro [**3**].
Não é difícil perceber a ausência de uma discussão sobre *referenciais inerciais* e temas relacionados, poderíamos apresentar muitas explicações ou abordagem sobre o assunto que tomariam talvez um volume igual ao deste texto, infelizmente nehuma delas convincente, em nossa opinião. Este é, talvez, um ponto nevrálgico da chamada *mecânica racional* e não possui, ao menos até agora, uma solução satisfatória. Aqui adotaremos o ponto de vista ingênuo, a segunda lei de Newton vale quando aplicada a um referencial “convenientemente escolhido” (e jamais será mencionado o problema de como escolher este misterioso ente). Afinal, sempre é preciso tomar um marco para iniciar.

1. A Segunda Lei de Newton e o Princípio do Determinismo

Seja Ω um aberto não vazio de $\mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}$. Um campo de forças em Ω agindo no sistema de pontos $P_1, \ldots, P_n$ é uma aplicação de classe $\mathcal{C}^1$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^{3n}$.
Em termos de componentes escreveremos $F = (F_1, \ldots, F_n)$, onde $F_j : \Omega \to \mathbb{R}^3$ representa a força que age no ponto P_j do sistema, $1 \ldots j \ldots n$.
Suporemos que cada ponto material possui uma capacidade intrínseca, ou própria, de resistir a uma força. Esta capacidade será expressa por um número que será chamado de massa (mais precisamente, massa inercial) do ponto.
Consideraremos um referencial fixo em $\mathcal{E}^3$ e denotaremos $x_j(t) = P_j(t) - O$ o movimento de P_j nesse referencial (logo $x_j(t) \in \mathbb{R}^3$), para $1 \ldots j \ldots n$.
A *segunda lei de Newton* afirma que para o sistema de pontos $P_1, \ldots, P_n$, o movimento do ponto P_j, $x_j(t)$, $1 \leq j \leq n$, satisfaz a equação diferencial ordinária

$$(39) \qquad m_j \ddot{x}_j(t) = F_j(x_1(t), \ldots, x_n(t), \dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_n(t), t), \ 1 \leq j \leq n,$$

onde m_j é a massa do ponto P_j.
Observe que (39) é um sistema de n equações diferenciais vetoriais de segunda ordem que, como estamos supondo ser F de classe $\mathcal{C}^1$, satisfaz o teorema de existência e unicidade de equações diferenciais ordinárias. Desse modo, concluimos a partir desta observação a validade do chamado *princípio do determinismo* da mecânica Newtoniana, que afirma:
Princípio do determinismo: *Uma vez conhecida a força F que atua no sistema em Ω, a posição e a velocidade de todos os pontos P_j, $1 \leq j \leq n$, em um mesmo instante t_0, fica determinado de modo único o movimento de cada ponto $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ em um intervalo de tempo I, aberto, ao qual t_0 pertence.*
Observação: Destaquemos mais uma vez que no contexto adotado, este princípio *decorre* imediatamente da segunda lei de Newton e da hipótese feita de que as forças envolvidas são de classe $\mathcal{C}^1$. Isto por que a segunda lei transforma o problema de determinar o movimento do sistema de pontos em um problema de equações diferenciais ordinárias, permitindo aplicar a esta questão todos os resultados destas. Eis também o motivo do estudo da mecânica estar tão ligado à teoria das equações diferenciais em geral.
Antes de estudar em detalhe alguns exemplos de sistemas de pontos, enunciaremos a segunda lei de uma forma um pouco diferente.
Denotamos por $p_j(t) = m_j\dot{x}_j(t)$ o *momento linear* do ponto P_j e por $P(t) = \sum_{j=1}^n m_j\dot{x}_j(t)$ o *momento linear total* do sistema.
Com esta notação, podemos escrever $\dot{x}_j = \frac{p_j}{m_j}$ e a segunda lei de Newton evidentemente é equivalente a

$$\begin{cases} \dot{x}_j & = \frac{p_j}{m_j} \qquad \text{para } 1 \leq j \leq n \\ \dot{p}_j & = F(x_1, \ldots, x_n, \frac{p_1}{m_1}, \ldots, \frac{p_n}{m_n}, t) \qquad \text{para } 1 \leq j \leq n. \end{cases} \tag{40}$$

Resulta de (40)[1] que $P(t)$ satisfaz

$$\dot{P}(t) = \sum_{j=1}^{n} F_j(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, t). \tag{41}$$

Assim, colocando $G(t)$ como o centro de massa do sistema, isto é,

$$G(t) = \frac{\sum_{j=1}^n m_j x_j(t)}{\sum_{j=1}^n m_j},$$

obtemos, fazendo $M = \sum_{j=1}^n m_j$, que $MG(t) = \sum_{j=1}^n m_j x_j(t)$ e portanto,

$$M\ddot{G}(t) = \sum_{j=1}^{n} F_j(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, t). \tag{42}$$

Esta propriededade que dá a equação do movimento do centro de massa de um sistema de pontos merece ser destacada em uma proposição.

[1] É curioso que Netwon tenha escolhido esta forma, e não a consagrada (39), para enunciar a segunda lei. Por uma dessas coincidências estranhas, se escrevermos a segunda destas equações simplesmente como $\frac{d}{dt}p_j(t) = F_j(x(t), \dot{x}(t), t)$, esta continua sendo a equação do movimento dentro da mecânica relativistica, mas nesse escopo m_j não é constante.

PROPOSIÇÃO 10. *O movimento do centro de massa de um sistema de n pontos materiais de massas $m_1, \ldots, m_n$ sob a ação do campo de forças $F : \Omega \to \mathbb{R}^{3n}$ obedece a equação diferencial ordinária de segunda ordem (4).*

Prova: Feita acima. CQD

2. Dinâmica de uma partícula sujeita a um campo de forças potencial

Neste parágrafo estudaremos o movimento de um ponto material de massa m, sujeito à ação de uma força de tipo *posicional* F, isto é, F não depende nem da velocidade nem do tempo. Expressaremos esta propriedade escrevendo $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$, onde Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^3$.
Nesta situação a equação do movimento do ponto toma a forma

$$m\ddot{x}(t) = F(x(t)). \tag{43}$$

Definição : *O campo de forças posicional F será dito* **potencial** *se existir uma função $U : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ tal que*

$$F(x) = -\nabla U(x).$$

Observação : Neste caso U é chamada energia potencial de F e dizemos que f deriva do potencial U.
Uma função $E : \Omega \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é dita uma *integral primeira* de (43) se, para toda a solução $x : I \to \Omega$ dessa equação, temos que

$$f(t) = E(x(t), \dot{x}(t)) = cte.$$

31. Denote os pontos de $\Omega \times \mathbb{R}^3$ por (x, y) e prove que:

(i) A função $E : \Omega \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ é uma integral primeira de (43) se, e somente se,

$$< \frac{\partial E}{\partial x}(x, y), y > + < \frac{\partial E}{\partial y}(x, y), F(x) >= 0, \forall (x, y) \in \Omega \times \mathbb{R}^3.$$

(ii) O conjunto de todas as integrais primeiras de (1a) formam um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Um primeiro resultado importante sobre campos potenciais é que para eles é fácil determinar uma integral primeira.

TEOREMA 2 (Teorema da Conservação da Energia). *Se o campo de forças F que atua na partícula de massa m deriva do potencial U então a função $E : \Omega \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por*

$$E(x, \dot{x}) = U(x) + \frac{m\dot{x}^2}{2}$$

é uma integral primeira de (43).

Prova: Observe que no caso de forças potenciais (43) toma a forma

$$m\ddot{x} = -\nabla U(x), \ x \in \Omega$$

O resultado segue–se agora com uma aplicação imediata do item (i) do exercíio acima. CQD

Exemplo 1 : Ponto material em uma reta.

Consideraremos aqui o problema de estudar o movimento de um ponto que se move em $\mathbb{R}$ (ou em um aberto de $\mathbb{R}$).
Apesar de termos estudado antes o movimento de um ponto em um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, podemos refazer toda a discussão tomando $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, o leitor não terá nenhuma dificuldade em verificar que tudo o que foi enunciado continua sendo verdadeiro, tomando–se as adaptações necessárias, totalmente evidentes.
Assim, a equação (43) em vez de ser uma equação de segunda ordem em $\mathbb{R}^3$ (ou um sistema de tres equações escalares de segunda ordem) passa a ser uma simples equação de segunda ordem em $\mathbb{R}$ (i.e., uma equação escalar) e toma a forma

$$m\ddot{x}(t) = f(x(t)), \tag{44}$$

onde $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função $\mathcal{C}^1$ definida no intervalo aberto Ω de $\mathbb{R}$.
Considere $x_0 \in \Omega$ e a função

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi.$$

Pelo teorema fundamental do cálculo U é de classe $\mathcal{C}^2$ e $U'(x) = -f(x)$, o que mostra que no caso de movimentos unidimensionais todo campo de forças deriva de potencial.
Então podemos aplicar o teorema da conservação da energia e obter a integral primeira $E : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $E(x,y) = U(x) + \frac{my^2}{2}$.
Veremos a seguir exemplos desta situação.
Exemplo 2 : Sistema massa–mola.
Um ponto de massa m move–se em uma reta acoplado a uma mola (esta com extremidade fixa) de constante de restauração $k > 0$ e comprimento natural ℓ, conforme o esquema abaixo.

Supondo que colocamos a origem na posição do ponto quando a mola se encontra em seu comprimento natural a euqação do movimento é dada pela lei de Hook,

$$m\ddot{x} = -kx$$

Então de acordo com o que se viu no exemplo 1, a energia potencial, neste caso, é $U(x) = -\int_0^x -k\xi d\xi = \frac{kx^2}{2}$, conhecida como potencial da mola e portanto a integral da energia fica

$$E(x,y) = \frac{my^2 + kx^2}{2}.$$

Ou seja, se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um movimento, temos $m\dot{x}^2(t) + kx^2(t) = 2\alpha = cte.$
A constante α pode ser determinada a partir da posição e da velocidade do ponto no instante inicial t_0 e, com isso, pode–se representar no espaço de fase $(x, \dot{x})$ a órbita do movimento do ponto considerado, isto é, o sub-conjunto $\mathcal{O}$ desse plano, formado pelos pares $(x(t), \dot{x}(t))$, quando $t \in \mathbb{R}$, obtendo apenas dois tipos de situações.

- (a)Quando $\alpha = 0$, então $\mathcal{O}$ reduz–se à origem. Veja que esta situação correponde ao caso em que o ponto é colocado com velocidade nula na posição da mola em repouso.

- (b)Em qualquer outra situação tem–se $\alpha > 0$ e é claro que $\mathcal{O}$ fica contido na elipse de semi–eixos maior e menor sobre os eixos coordenados conforme a figura abaixo.

Um pouco de equações diferenciais ordinárias mostrará ao leitor que, de fato, $\mathcal{O}$ é *toda* a elipse acima.
Basta integrar a equação $m\ddot{x} = -kx$ para verificar esta assertiva. De fato, como todas as soluções da equação em questão são do tipo $A\cos\omega t + B\sin\omega t$, onde $\omega = \frac{k}{m}$, e A e B são relativamente a posição e a velocidade do ponto no instante $t_0 = 0$, vem que $\mathcal{O}$ é toda a elipse (outra maneira de ver isto, por exemplo, é aplicar o Teorema de Poincare–Bendixon).
Exemplo 3 : Potencial Newtoniano em uma dimensão.
Suponha que um ponto material de massa m está em uma semi–reta aberta de origem O sujeito a uma força gravitacional de tipo Newtoniano, $F(x) = -\frac{k}{x^2}$, onde x representa a distancia de um ponto da semi–reta a O.
Então a equação do movimento é $m\ddot{x} = -\frac{k}{x^2}, x > 0$.
Neste caso, o potencial é dado por

$$\widetilde{U}(x) = -\int_1^x -\frac{k}{\xi^2}d\xi = 1 - \frac{k}{x}.$$

Como, evidentemente, ao somar qualquer constante a uma integral primeira obtemos outra integral primeira, podemos considerar $U(x) = \widetilde{U}(x) - 1 = -\frac{k}{x}$ e obter a integral da energia

$$E(x,y) = \frac{my^2}{2} - \frac{k}{x},\ x > 0,\ y \in \mathbb{R}$$

Deste modo, vemos que, se $x : I \to \mathbb{R}^{++}$ é uma solução da equação do movimento, temos

$$\frac{m\dot{x}^2(t)}{2} - \frac{k}{x(t)} = \alpha = cte.$$

Fazendo uma análise similar à do exemplo anterior (mas desta vez, sem "roubar" pois não sabemos integrar esta equação...) pode–se chegar a algumas conclusões.

- (i)Não existe, neste caso, nenhuma solução $x(t) = cte$ (verifique isto como um exercício).
- (ii)A órbita $\mathcal{O}$ (os pares $(x(t), \dot{x}(t)),\ t \in I$) do movimento do ponto fica contida na curva $\frac{m\dot{x}^2(t)}{2} - \frac{k}{x(t)} = \alpha$ que está representada abaixo, dependendo do valor de α.

- (iii)Como $\ddot{x}(t) = -\frac{k}{x^2(t)} < 0$ os sentidos colocados nas órbitas na figura acima fica totamente justificado.
- (iv)Uma análise da equação diferencial envolvida mostra que, de fato, $\mathcal{O}$ é toda a curva de nível da função $E(x, \dot{x})$. Daqui resultam as conclusões seguintes.
- (v)Se $\alpha > 0$, então $\dot{x}(t) \neq 0$, para todo $t \in I$ e, caso $\dot{x}(t_0) > 0$ então $[t_0, +\infty[\subset I$ e $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$ enquanto $\lim\limits_{t\to+\infty} \dot{x}(t) = +\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}$ (usando estes resultados, o que você consegue afirmar quando $\alpha > 0$ e $\dot{x}(t_0) < 0$?)
- (vi) Se $\alpha < 0$, então exite um instante $t_1 \in I$ tal que $\dot{x}(t_1) = 0$ e, colocando $I = (\beta, \omega)$ tem–se que $\lim\limits_{t\to\beta} x(t) = \lim\limits_{t\to\omega} x(t) = 0$ enquanto $\lim\limits_{t\to\beta} \dot{x}(t) = +\infty$ e $\lim\limits_{t\to\omega} \dot{x}(t) = -\infty$.

Exercício 1 : Analise o que acontece com os movimentos em que $\alpha = 0$.
Exemplo 3 : Queda livre.
Uma pedra de massa m solta de uma distância h do solo conforme o diagrama abaixo,

sujeita apenas à força peso $\vec{P} = -(0, 0, mg)$.
Observe que aqui deve–se tomar $\Omega = \{(x, y, z) \colon z > 0\}$.
Neste caso, as equações do movimento são

$$\ddot{x} = 0,\ \ddot{y} = 0,\ m\ddot{z} = -mg.$$

Neste caso, a força deriva do potencial $U(x, y, z) = mgz$, como pode ser verificado diretamente.
A integral primeira da energia é, portanto,

$$E(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = mgz + \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2}$$

Perceba que o problema acima pode ser decomposto em três problemas do tipo unidimensional, um relativo a cada coordenada, com energias potenciais U^x, U^y e U^z dadas por $U^x = U^y \equiv 0$ e $U^z(z) = mgz$. É fácil ver que, se $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ são, respectivamente, soluções dos problemas relativos às coordenadas x, y e z, definidas então $(x(t), y(t), z(t))$ é solução das equações do movimento da pedra.
Este tipo de decomposição pode ser feita sempre que a força envolvida puder ser decomposta como $F_1(x) + F_2(y) + F_3(z)$.
O leitor fica convidado a, como exercício, representar nos planos $(x, \dot{x})$ e $(z, \dot{z})$ as órbitas de cada u, dos problemas considerados.
É claro que, neste exemplo, pode–se fazer uma integração direta das equações do movimento.
Estes exemplos podem ser generalizados para o caso de sistemas ("abstratos") definidos em $\mathbb{R}^m$ (ou para exemplos, menos "abstratos", de n pontos). Faremos isto a seguir.

3. Sistemas Potenciais

O modelo original para este tipo de sistema de equações de segunda ordem é o de n pontos materiais sob a ação de um campo de forças F posicional (i.e., $F : \Omega \to \mathbb{R}^{3n}$) que deriva da enrgia potencial U, onde $U : \Omega \to \mathbb{R}$ (i.e., $F = -\nabla U$). Como nada se cria em complicações, vai se apresentar estes campos com uma forma um pouco mais geral.

Seja Ω um aberto não vazio de $\mathbb{R}^m$ e $U : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função de calsse $\mathcal{C}^2$ e denote por $\nabla U(x)$ o gradiente de U no ponto $x \in \Omega$.

Dizemos que o campo de vetores $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ deriva do potencial U quando

$$F(x) = -\nabla U(x), \ \forall x \in \Omega.$$

Neste caso o sistema

$$m\ddot{x} = F(x), \ x \in \Omega$$

também é dito potencial (ou que deriva de potencial) e a função U é a energia potencial do sistema.

Vale, para este tipo de sistemas, um teorema de conservação da energia análogo ao estabelecido antes.

Teorema 3 (Teorema da conservação da Energia). *Seja $m\ddot{x} = F(x)$ um sistema potencial no aberto Ω de $\mathbb{R}^m$, com energia potencial U. Então a função $E : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, definida por*

$$E(x_1, \ldots, x_m, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_m) = \frac{m\sum_{j=1}^m \dot{x}_j^2}{2} + U(x)$$

é uma intgral primeira do sistema.

Prova: Exercício. CQD

4. Espaço de fase de sistemas com um grau de liberdade

Vamos introduzir o conceito de espaço de fase para sistemas com um grau de liberdade, ou seja, para aqueles sistemas em que a posição de um ponto pode ser determinada por apenas uma coordenada.

Já se viram dois sistemas desse tipo (os exemplos 1 e 2 da secção 2).

Em primeiro lugar faremos uma exposição de caráter geral. O leitor pode acompanhar esta exposição revendo os exemplos pré–citados onde, na verdade, os conceitos aqui apresentados formalmente já se encontram.

Como vimos a equação do movimento para sistemas de um ponto material de massa m pode ser escrita, quer como uma equação de segunda ordem em $\mathbb{R}^3$, (a equação (1), reproduzida abaixo)

$$m\ddot{x} = F(x), \tag{45}$$

ou, introduzindo a varável $p = m\dot{x}$, como um sistema de equações de primeira ordem em $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ (o sistema (2), também reproduzido aqui, para este caso)

$$\begin{cases} \dot{x} & = \frac{p}{m}, \\ \dot{p} & = F(x). \end{cases} \tag{46}$$

Uma solução do sistema (46) é uma função $\varphi : I \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \ \varphi(t) = (x(t), p(t))$, com $p(t) = m\dot{x}(t)$ e a função $x(t)$ é solução de (1c).

O espaço produto (x, p) das posições pelos momentos lineares chama–se *espaço de fase* de (46).
Nesta situação o espaço de fase é $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{R}^6$.
No caso particular de sistemas com uma grau de liberdade a posição do ponto pode ser determinada através de uma única coordenada e a equação (1c) torna–se uma equação de segunda ordem escalar. Portanto para estes sistemas o espaço de fase será $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^2$.
Neste ponto convém voltar ao exemplo 1 da secção anterior (que pode ser considerado como modelo para este tipo de sistema) e "ampliar" as considerações feitas naquela altura do texto.
Exemplo 1 - Parte II : Ponto material em uma reta - Espaço de fase.
A equação que descreve o movimento é $m\ddot{x} = f(x)$ a qual, introduzindo a variável $p = m\dot{x}$ (o momento linear) produz o sistema linear em $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} \dot{x} & = \frac{p}{m}, \\ \dot{p} & = f(x). \end{cases} \tag{47}$$

O espaço de fase desse sistema, no caso chamado plano de fase, é o plano (x, p).
Se $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ é uma solução de (47), a imagem dessa função,

$$\{\varphi(t) = (x(t), p(t)) \colon t \in I\}$$

é chamada **curva de fase** ou **órbita** do sistema (47).
Viu–se na secção anterior que este é um sistema que deriva de potencial e portanto a energia $E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = \frac{p^2}{2} + U(x)$ é uma integral primeira do sistema.
Assim as órbitas de (47) ficam contida nas curvas de nível da função E acima.
Mais ainda, usando o Teorema de existência e unicidade de equações diferenciais ordinárias e o fato de (3c) ser um sistema *autônomo* vamos mostrar que a relação

$$(x_1, p_1) \sim (x_2, p_2) \iff \text{esses pontos pertencem a uma mesma órbita}$$

define uma relação de equivalência no plano de fase.
As propriedades reflexiva e simétrica são de verificação imediata e a propriedade transitiva é conseqüência imediata da seguinte propriedade de equações diferenciais autônomas.

Proposição 11. *Sejam Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e considere a equação diferencial autônoma*

$$\dot{x} = F(x) \tag{48}$$

Suponha que $\psi : I \to \Omega$ é a solução de (48) que satisfaz $x(t_0) = x_0$. Então, se $t_1 \in I$, a solução de (48 que satisfaz a condição inicial $x(t_1) = \psi(t_1)$ é $\psi_1 : I + (t_0 - t_1) \to \Omega$ definida por $\psi_1(t) = \psi(t - (t_0 - t_1))$.

Prova:É claro que $\psi_1(t_0) = \psi(t_1)$ e portanto satisfaz a condição inicial desejada.
Ademais, usando a regra da cadeia e o fato de ψ ser solução de (48) resulta que

$$\dot{\psi}_1(t) = \dot{\psi}(t - (t_0 - t_1)) = F(\psi(t - (t_0 - t_1)) = F(\psi_1(t),$$

o que estabelece o resultado. CQD
Exercício 2 : Prove que a relação $\sim$ definida anteriormente é uma relação de equivalência no plano de fase de (3c).
Isso mostra que duas órbitas de (3c) ou coincidem ou tem intercecção vazia.
Pode–se resumir a discussão anterior na proposição seguinte.

Proposição 12. *Considere o sistema (3c). Temos que:*

- *(i)As órbitas estão contidas nas curvas de nível da função energia* $E(x,p) = \frac{p^2}{2} + U(x)$.
- *(ii) Duas órbitas distintas de (3c) tem intersecção vazia.*

A proposição anterior é bastante útil na tarefa de representar no plano de fase as órbitas de (3c). Os comentários seguintes tem a mesma finalidade.
Eventualmente o sistema (3c) pode admitir soluções constantes, isto é,

$$\varphi(t) = (x(t), p(t)) = (x_0, p_0), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Se isto acontece segue–se da primeira equação de (3c) que $p(t) = m\dot{x}(t) = 0$, isto é, $p_0 = 0$.
Neste caso chamamos o $(x_0, 0)$ de **ponto de equilíbrio** do sistema.
A interpretação disto é óbvia, *um ponto sujeito à força f, colocado na posição x_0 com velocidade nula, permanece para sempre nesse ponto.*
Evidentemente, a órbita do ponto de equilíbrio $(x_0, 0)$ reduz–se ao próprio ponto.

PROPOSIÇÃO 13. *O ponto $(x_0, 0)$ é um ponto de equilí brio de (3c) se, e somente se, $f(x_0) = 0$.*

Prova: De fato, se $(x_0, 0)$ é um ponto de equilíbrio, então da segunda equação de (3c) vem $0 = \dot{p}(t) = f(x(t)) = f(x_0)$.
Por outro lado, se $f(x_0) = 0$ é claro que $\varphi(t) = (x_0, 0)$ é solução de (3c). CQD
Exemplo : Considere o sistema $\ddot{x} = -\sin x$ (este sistema descreve o pêndulo físico, veja a secção ...).
Os pontos de equilíbrio são $(x_k, 0)$, onde $x_k = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$.
Como $f(x) = -U'(x)$ a proposição anterior estabelece a correspondência entre os pontos de equilíbrio $(x_0, 0)$ e os pontos cíticos da energia potencial. Esta tipo de relação entre propriedades de órbitas do sistema (3c) e a energia potencial do sistema será aprofundada mais adiante.
Outro tipo de órbita importante em sistemas mecânicos são as correspontes às soluções periódicas de (3c), naturalmente ests órbitas são chamadas **órbitas periódicas**.
Exercício 3 : Uma órbita periódica de (3c) coincide (como subconjunto de $\mathbb{R}^2$ com uma componente conexa compacta K de alguma curva de nível da função energia, E.
Observação : Na verdade, vale uma espécie de "recíproca" do exercício acima, precisamente é possível provar–se que se K é uma componente conexa compacta de uma curva de nível de E *e não há nenhum ponto de equilíbrio de (3c) em* K então K representa uma órbita periódica (veja o Apêndice ...).
Uma propriedade interessante do retrato de fase do sistema (3c) é a simetria das órbitas periódicas que estabeleceremos na proposição a seguir.
Proposição : *Se $\mathcal{O}$ é uma órbita periódica de (3c) então $\mathcal{O}$ é simétrica com respeito ao eixo dos x.*
A demosntração desta proposição usará um resultado conhecido como princípio da reversibilidade.
Princípio da Reversibilidade : *Suponha que $\varphi : I \to \mathbb{R}^2, \varphi(t) = (x(t), p(t))$, seja uma solução de (3c). Então $\psi : -I \to \mathbb{R}^2$, definida por $\psi(t) = (x(-t), -p(-t))$ também é solução de (3c).*
Prova: Basta derivar $\psi(t)$. Faça os detalhes como exercício. CQD
Prova:(da Proposição) Devemos provar que se $(x,p) \in \mathcal{O}$ então $(x, -p) \in \mathcal{O}$.

Seja $\varphi(t) = (x(t), p(t))$ a solução de (3c) que determina $\mathcal{O}$, por hipótese, φ é periódica, seja $T > 0$ seu período.
Pela periodicidade de φ resulta que $x(0) = x(T)$, logo pelo teorema de Rolle, existe $\tau \in [0, T]$ tal que $\dot{x}(\tau) = 0$. Da primeira equação de (3c) resulta que $p(\tau) = 0$.
Pelo princípio da reversibilidade $\psi(t) = (x(-t), -p(-t))$ também resolve (3c).
Agora, veja que $\psi(-\tau) = (x(\tau), -p(\tau)) = x(\tau, 0) \in \mathcal{O}$.
Logo as órbitas definidas por ψ e φ tem um ponto em comum e portanto coicidem.
Assim, se $(x, p) \in \mathcal{O}$, temos que existe $\bar{t}$ tal que $(x, p) = \psi(\bar{t}) = (x(-\bar{t}), -p(-\bar{t}))$.
Portanto $\varphi(-\bar{t}) = (x(-\bar{t}), p(-\bar{t})) = (x, -p) \in \mathcal{O}$. CQD
... (a seguir) fazer a observação sobre o espaço de fase de um sistema de um grau de um sistema mecânico autônomo poder também ser considerado $(x, \dot{x})$; observar também que $\sim$ é uma relaçãon de equivalência no caso geral de (1c) (isso fica como exercício?).
32. Determinar os pontos de equilíbrio e as órbitas periódicas dos exemplos da secção anterior.
Outras propriedades interessantes das órbitas periódicas do sistema (3c) estão explicitadas no exercøcio seguinte.
33. Suponha que $\mathcal{O}$ é uma órbita periódica de (3c), mostre que:

- (i) $\mathcal{O}$ é percorrida no espaço de fase no sentido horário.
- (ii) $\mathcal{O}$ corta o eixo $p = 0$ em exatamente dois pontos.
- (iii) Se $A = (a, 0)$ e $B = (b, 0)$ são os pontos em que $\mathcal{O}$ corta o eixo $p = 0$ então $\mathcal{O}$ fica contida na faixa determinada pelas retas $x = a$ e $x = b$. Além disso os únicos pontos de $\mathcal{O}$ que ficam nessas retas são exatamente A e B.

Um resultado interessante acerca de órbitas periódicas de sistemas com um grau de liberdade é o seguinte.

Lema 4. *Suponha que $\mathcal{O}$ é uma órbita periódica de (3c) e que $A = (a, 0)$ e $B = (b, 0)$ são os pontos em que $\mathcal{O}$ corta o eixo $p = 0$, admita que $a < b$. Então $U(a) = U(b)$, $U'(a)U'(b) \neq 0$ e $U(x) < U(a)$, para $a < x < b$.*

Prova: Como A e B não são pontos de equilíbrio de (3c) é claro que $U'(a)$ e $U'(b)$ são diferentes de zero.
O resto é conseqüência do teorema da conservação da energia. Por esse resultado $E(A) = E(B)$ e como nesses pontos $p = 0$, resulta $U(a) = U(b) = E(A)$.
Seja agora $x \in (a, b)$. Como a órbita $\mathcal{O}$ é conexa existe $p \in \mathbb{R}$ tal que $(x, p) \in \mathcal{O}$. Pelo ítem (ii) do exercício 5, vem que $p \neq 0$.
Do teorema da conservação da energia $U(a) = E(A) = E(x, p) = U(x) + \frac{p^2}{2} > U(x)$. CQD
A existência de pontos de equilíbrio no interior de uma órbita periódica de (3c) pode ser obtida usando o Teorema de Pincaré–Bendixon e o Lema de Zorn (veja por exemplo, o capítulo VII de [Sotomayor]), apresentamos aqui uma demonstração “alternativa” que evita o uso do Lema de Zorn.

Proposição 14. *No interior de toda órbita periódica $\mathcal{O}$ existe pelo menos um ponto de equilíbrio $(x_0, 0)$ que é um ponto de mínimo local (estrito) da energia do sistema.*

Prova: Sejam $A = (a, 0)$ e $B = (b, 0)$ os pontos em que $\mathcal{O}$ corta o eixo $p = 0$ (determinados pelo ítem (ii) do exercício 5) e suponhamos que $a < b$.
Para estabelecer o resultado basta mostrar que existe um ponto x_0 que é ponto de mínimo estrito local da energia potencial, pois é claro que então $(x_0, 0)$ será um ponto de equilíbrio do sistema e um ponto de mínimo estrito local da energia.

Isto segue–se imediatamente do lema anterior, pois como $U(a) = U(b)$ e $U(x) < U(a)$, para $x \in (a, b)$ vem que o(s) ponto(s) de mí nimo de U em $[a, b]$ estão todos no interior desse intervalo.
Basta tomar x_0 um desses pontos. CQD
O lema anterior nos mostra que se tomarmos uma órbita periódica e considerarmos os pontos $(a, 0)$ e $(b, 0$ em que essa órbita cruza o eixo $p = 0$ então:
(I) Os pontos a e b são pontos regulares da energia potencial U;
(II) Os pontos $(a, U(a))$ e $(b, U(b))$ determinam uma corda horizontal no gráfico da energia potencial;
(III) O gráfico da energia potencial em $[a, b]$ fica abaixo dessa corda.
Veremos agora que a "recíproca" desse resultado também é verdadeira.

Proposição 15. *Suponha que $a < b$ e que no intervalo $[a, b]$ a energia potencial U stisfaz as propriedades (I), (II) e (III) encunciadas acima. Então a órbita de (3c) que passa por $(a, 0)$ é periódica e passa também por $(b, 0)$.*

Prova:A demonstração consistirá em provar–se que a componente conexa da curva de nível $E(x, p) = U(a)$ que passa por $(a, 0)$ é compacta, contém o ponto $(b, 0)$ e não pertence a ela nenhum ponto de equilí brio de (3c). Então pelo resultado previamente citado (e demonstrado no apêndice) segue–se imediatamente a proposição.
Seja $\mathcal{K}$ essa componente conexa.
Como $U(x) > U(a)$, para $x \in (a, b)$ é evidente que a curva γ dada por

$$p = \pm\sqrt{2\,(U(x) - U(a))},\ a \leq x \leq b,$$

faz parte de $\mathcal{K}$ e, como $U(b) = U(a)$ segue–se que $(b, 0)$ está nessa curva e, portanto, em $\mathcal{K}$.
Também é imediato que a intersecção de $\mathcal{K}$ com a faixa $\mathcal{F} = \{(x, p)\colon a \leq x \leq b\}$ é a curva γ.
Observemos ainda que os únicos pontos dessa curva que interceptam o eixo $p = 0$ são exatamente $(a, 0)$ e $(b, 0)$, pois $U(x) > U(a)$ no interior de $[a, b]$. Assim não existem pontos de equilíbrio de (3c) em γ.
Para terminar a demonstração basta provar que $\mathcal{K}$ fica contida na faixa $\mathcal{F}$.
Para estabelecer isto comecemos notando que, por (I), $U'(a) \neq 0$ e como $U(x) < U(a)$, se $x \in (a, b)$, vem que $U'(a) < 0$.
Isto mostra que exite $\varepsilon_1 > 0$ tal que $U(x) > U(a)$ se $x \in I_1 = (a - \varepsilon_1, a)$. Portanto se $x \in I_1$ e $p \in \mathbb{R}$ temos $E(x, p) \geq U(x) > U(a)$.
Logo, se $x \in I_1$ e $p \in \mathbb{R}$, $(x, p) \notin \mathcal{K}$.
De modo totalmente análogo mostra–se que existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que $U(x) > U(b) = U(a)$, se $x \in I_2 = (b, b + \varepsilon_2)$.
Assim, vemos que para $x \in I_2$ e $p \in \mathbb{R}$, temos $E(x, p) > U(a)$ e portanto $(x, p) \notin \mathcal{K}$.
Isto mostra que $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$ e encerra a prova. CQD
Com estes resultados podemos a partir do gráfico da energia potencial determinar exatamente as órbitas periódicas de (3c).

5. O Trabalho de uma Força

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e conexo por caminhos e $F : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua, ou seja, um campo de forças contínuo em U. Dada uma curva $\alpha : [a, b] \to U$ diferenciável or partes definimos o **trabalho** da força F ao longo do caminho α como sendo o número

$$\tau(F,\alpha)=\int_a^b < F(\alpha(t)),\alpha'(t) > dt. \tag{49}$$

Exemplo: $F(x)=\vec{f}$ uma força constante, e $\alpha(t)=\vec{a}+t\vec{v}$ no intervalo $[0,1]$. Então verificamos rapidamente que $\tau(F,\alpha)=<\vec{f},\vec{v}>$.

PROPOSIÇÃO 16. *$\tau(F,\alpha)$ não depende da parametrização da curva α*

Prova: Seja $\beta:[c,d]\to U$ uma outra curva tal que exista uma reparametrização $h:[c,d]\to[a,b]$ de tal forma que $\beta(s)=\alpha(h(s))$. Então temos

$$\tau(F,\beta)=\int_c^d < F(\beta(s)),\beta'(s) > ds$$

fazendo a mudança de variável $t=h(s)$ e calculando a integral do segundo membro temos que

$$\tau(F,\beta)=\int_c^d < F(\alpha(h(s))),\alpha'(h(s)) > h'(s)ds=\int_a^b < F(\alpha(t)),\alpha'(t) > dt$$

que é o trabalho $\tau(F,\alpha)$. CQD.

Esta proposição não garante contudo que o trabalho independa dos caminhos escolhidos. De uma forma geral, caminhos que iniciam e terminam nos mesmos pontos tem trabalho diferentes.

Vamos dizer que um campo $F:U\to\mathbb{R}^n$ é **conservativo** se para todo par de curvas $\alpha:[a,b]\to U$ e $\beta:[c,d]\to U$ tais que $\alpha(a)=\beta(c)$ e $\alpha(b)=\beta(d)$ então $\tau(F,\alpha)=\tau(F,\beta)$.

Exercício: Mostre que $F:U\to\mathbb{R}^n$ é **conservativo** se e somente se $\tau(F,\alpha)=0$ para toda curva fechada $\alpha:[a,b]\to U$.

TEOREMA 4. *Um campo $F:U\to\mathbb{R}^n$ é conservativo se e somente se é potencial.*

Prova: (a) Conservativo $\Longrightarrow$ Potencial. A estratégia é construir a energia potencial cujo gradiente gera F. Fixamos um $x_0\in U$. Para cada $x\in U$ considero uma curva $\alpha_x[0,1]\to U$ que liga x_0 a x. Defino então

$$U(x)=-\tau(F,\alpha_x)=\int_0^1 < F(\alpha_x(t)),\alpha_x'(t) > dt$$

pelo fato de F ser conservativa então U está bem definida para todo x de U.
Vamos agora mostrar que

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(x)=-F_i(x)$$

onde $-F_i(x)$ é a i-ésima coordenada do campo F.
Lembramos que:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{U(x+he_i)-U(x)}{h}$$

Considero então uma curva $\beta:[0,1+h]\to U$ diferenciavel por partes, dada por

$$\beta(s)=\begin{cases}\alpha(s) & \text{se } s\in[0,1]\\ x+(s-1)e_i & \text{se } s\in[1,1+h]\end{cases}$$

Usando a definição e o fato do campo ser conservativo podemos calcular:

$$U(x+he_i)=\tau(F,\beta)=U(x)-\int_0^h F_i(x+te_i)dt. \tag{50}$$

Calculando a derivada parcial temos:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h F_i(x+te_i)dt = -F_i(x) \tag{51}$$

pelo teorema fundamental do cálculo. Ou seja F é potencial.
Vejamos agora o outro lado da implicação. Se F é potencial então é conservativo. Seja $U : U \to \mathbb{R}$ um potencial de F, e seja $\alpha : [0,1] \to U$ uma curva fechada e diferenciável por partes. Então

$$\tau(F,\alpha) = \int_0^1 < F(\alpha(t)), \alpha'(t) > dt = -\int_0^1 \nabla U(\alpha(t)).\alpha'(t)dt$$

Como $\nabla U(\alpha(t)).\alpha'(t) = \frac{d}{dt}U(\alpha(t))$, então temos

$$\tau(F,\alpha) = -\int_0^1 \frac{d}{dt}U(\alpha(t))dt = 0$$

pois $\alpha(0) = \alpha(1)$. Então pelo exercício acima provamos que F é conservativo. CQD.
Exemplo: $F(x,y) = (y,-x)$ não é conservativo e portanto não é potencial.

6. Força Central

Seja $O(n) = \{A \in M_{nxn} : AA^t = I\}$ o grupo das matrizes ortogonais, e $F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ um campo de forças. Diremos que F é um campo **central**, ou é $O(n)$-invariante quando para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e todo $G \in O(n)$ tivermos que

$$G.F(x) = F(G.x)$$

Vejamos uma sequência de resultados que têm como objetivo dar uma caracterização mais analítica dos campos centrais.

LEMA 5. *Se $x, y \in \mathbb{R}^n$ são tais que $|x| = |y|$, então existe um $G \in O(n)$ tal que $G.x = y$*

prova: Seja $f_1 = \frac{x}{|x|}$ e $e_1 = \frac{y}{|y|}$ e escolhemos bases ortonormais positivas $\{f_1, \cdots, f_n\}$ e $\{e_1, \cdots, e_n\}$ então a matriz de mudança de base da base $\{f_i\}$ para a base $\{e_i\}$ satisfaz a condição do lema. (verificar como exercício) CQD

LEMA 6. *Seja $F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ um campo de forças central e $x, y \in \mathbb{R}^n$ tais que $|x| = |y|$ então $|F(x)| = |F(y)|$.*

prova: Tome $G \in O(n)$ tal que $Gx = y$ como no lema anterior. Então temos:

$$F(y) = F(Gx) = G.F(x)$$

e

$$< F(y), F(y) > = < G.F(x), G.F(x) > = < F(x), F(x) >$$

basta lembrar da definição das normas para ver que o lema está provado. CQD

PROPOSIÇÃO 17. *Se $F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ é um campo de forças central então*

$$F(x) = \pm |F(x)| \frac{x}{|x|}$$

prova: Fixo um $x \in \mathbb{R}^n$ como posso escrever $\mathbb{R}^n$ como a soma direta $\mathbb{R}^n = [x] \oplus [x]^\perp$, onde $[x]$ é o espaço vetorial gerado por x e $[x]^\perp$ o espaço ortogonal.
Então existem a escalar e $\vec{v} \in [x]^\perp$ tal que

$$F(x) = ax + \vec{v}$$

Agora tomemos um elemento $G \in O(n)$ de tal forma que $Gx = x$ e $G\vec{v} = -\vec{v}$. E usamos o fato de F ser central obtendo:

$$G.F(x) = F(Gx) = F(x)$$

de onde concluimos que

$$ax + \vec{v} = ax - \vec{v}$$

e daí$\vec{v} = 0$ e portanto $F(x) = ax$. Calculando os módulos de ambos os lados sai que $a = \frac{|F(x)|}{|x|}$ CQD

Exercício: Se $F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ é um campo de forças central então e definimos $r = |x|$ então existe uma função $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que $F(x) = f(|x|).\vec{u}$. Mostre que se um campo é desta forma então ele é central. Conclusão esta função escalar f caracteriza o campo central.

Exemplo: Campo gravitacional: $F(x) = \frac{-Kx}{|x|^3} = \frac{-K\vec{u}}{r^2}$.

TEOREMA 5. *Todo campo central é potencial.*

prova: Seja $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ uma curva fechada. Então pelos resultados anteriores temos

$$F(\alpha(t)) = f(|\alpha(t)|).\frac{\alpha(t)}{|\alpha(t)|}$$

e portanto

$$\tau(F, \alpha) = \int_0^1 f(|\alpha(t)|).\frac{< \alpha(t), \alpha'(t)}{|\alpha(t)|}dt$$

fazendo a mudança de variáveis $r = |\alpha(t)|$ então $dr = |\alpha(t)|'dt = \frac{<\alpha(t),\alpha'(t)}{|\alpha(t)|}dt$ então

$$\tau(F, \alpha) = \int_{\alpha(0)}^{\alpha(1)} f(r)dr = 0$$

pois a curva é fechada. Isto mostra que F é conservativo e portanto potencial. CQD

Exercício: Mostre que a energia potencial depende apenas da distância do ponto x à origem, isto é:

$$U(x) = \mathcal{U}(|x|) = -\int_a^{|x|} f(s)ds$$

7. Campo Central em $\mathbb{R}^3$

Seja $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ um campo central, então como já vimos:

$$F(x) = f(|x|)\frac{x}{|x|} = f(r)\vec{(}u)$$

Pela segunda lei de Newton a equação de movimento de uma partícula sob a ação deste campo será

$$m\ddot{x} = F(x) = f(|x|)\frac{x}{|x|} \tag{52}$$

Definindo o momento cinético como $\vec{M} = x(t) \wedge \dot{x}(t)$, vemos rapidamente que

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \dot{x} \wedge \dot{x} + x \wedge \ddot{x} = 0 \tag{53}$$

Assim o movimento de uma partícula em $\mathbb{R}^3$sujeita a uma força central tem momento cinético constante, ou seja, $\vec{M} = (c_1, c_2, c_3)$. Isto também implica que o movimento desta partícula está num plano perpendicular a $\vec{M}$.
De fato, $< x, \vec{M} >=< x, x \wedge \dot{x} >= 0$.
Note que deste resultado podemos obter novamente a lei das áreas, pois escrevendo em coordenadas polares

$$x(t) = r.\vec{u} \text{ e } \dot{x}(t) = \dot{r}\vec{u} + r\dot{\theta}\vec{v}$$

temos

$$\vec{M} = r^2\dot{\theta}(\vec{u} \wedge \vec{v})$$

e daí$r^2\dot{\theta} = |\vec{M}|$.
Se, por outro lado escrevermos:

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

A conservação do momento cinético nos dá:

$$M_1(x, \dot{x}) = x_2\dot{x}_3 - x_3\dot{x}_2 = c_1 \tag{54}$$

$$M_2(x, \dot{x}) = x_3\dot{x}_1 - x_1\dot{x}_3 = c_2 \tag{55}$$

$$M_3(x, \dot{x}) = x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1 = c_3 \tag{56}$$

Estas funções são integrais primeiras do sistema mecânico equivalentes à lei das áreas.
Vejamos como fica a energia total deste sistema em coordenadas polares:

$$E(x, \dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) \tag{57}$$

Já vimos que em coordenadas polares temos $U(x) = \mathcal{U}(|x|) = \mathcal{U}(r)$ então:

$$E(x, \dot{x}) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mM^2}{2r^2} + \mathcal{U}(r) \tag{58}$$

onde $M = |\vec{M}|$.
Se escrevermos a nova função:

$$V(r) = \frac{mM^2}{2r^2} + \mathcal{U}(r) \tag{59}$$

então a equação 58 é a energia total do sistema mecânico

$$\ddot{(t)} = -\frac{\partial V}{\partial r} \tag{60}$$

Sistema de um grau de liberdade.
Será que a solução $r(t)$ satisfaz a equação acima?
Para responder esta questão lembremos que para o movimento central

$$\ddot{x}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u} \tag{61}$$

A lei de Newton então nos dá

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r}$$

ou seja:

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r} + r\dot{\theta}^2 = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

e a resposta é, portanto, sim.

$V(r)$ é chamado de potencial essencial, e com ele aplicamos as técnicas conhecidas dos sistemas de um grau de liberdade.
Por exemplo posso encontrar r implicitamente:

$$t - t_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{d\rho}{\sqrt{2/m(E - V(\rho))}}$$

e

$$\theta(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{c/r^2 dr}{\sqrt{2/m(E - V(\rho))}} \tag{62}$$

Exercício: Como achar as órbitas limitadas de um movimento central?
Exercício: No caso acima, uma órbita limitada é fechada se e somente se o ângulo $\Phi = \int_{r_0}^{r_1} \frac{c/r^2 dr}{\sqrt{2/m(E-V(\rho))}}$ é racionalmente comensurável com 2π. Ou seja, existem $p, q \in \mathbb{Z}$ tal que $\Phi = \frac{p}{q} 2\pi$

8. Dinâmica de um sistema de partículas

Antes de estudarmos a dinâmica de um corpo rígido, vamos rapidamente formular alguns conceitos relativos à mecânica de um sistema de pontos materiais, que inpirará os métodos do corpo rígido.
Um sistema de pontos materiais é um conjunto finito de pares ordenados (m_i, P_i) onde $P_i \in \mathcal{E}^3$ e $m_i \in \mathbb{R}^+$. Fixemos $\mathcal{O} \in \mathcal{E}^3$ uma origem e colocamos $x_i = P_i - \mathcal{O}$.
O *Centro de Massa* $C \in \mathcal{E}^3$ do sistema é o ponto

$$C = O + x_c$$

onde

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

O ponto C não depende da origem escolhida.
Vamos aqui admitir a hipótese da terceira lei de Newton " forte" .
Sejam P_i e P_j duas partículas quaisquer do sistema, então existe uma interação entre estas partículas através de um par de forças F_{ij} e F_{ji} que satisfazem a seguinte relação:
1) $F_{ij} = -F_{ji}$.
2) $F_{ij} = f_i j(P_i - P_j)$
Obs. A formulação clássica da terceira lei de Newton assume só a hipótese 1), e de fato, as interações eletromagnéticas não satisfazem 2).
Estas forças serão chamadas de forças internas do sistema. Se sobre cada partícula do sistema atuam apenas as forças internas, o sistema é chamado de sistema fechado. Se sobre alguma partícula P_i atua alguma força que não seja interna, esta força será chamada externa e o sistema é aberto.
Para cada partícula podemos aplicar a lei de Newton e portanto num sistema finito de pontos temos um sistema de equações diferenciais do seguinte tipo

$$m_i \ddot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} F_{ji} + F_i' \tag{63}$$

onde este último termo representa a força externa do sistema.

A seguir deduziremos as equações do centro de massa em sistemas abertos e fechados. Seja $M = \sum_i m_i$ então

$$Mx_c = \sum_{j=1}^{n} m_i x_i(t) \tag{64}$$

daí

$$M\ddot{x}_c = \sum_{j=1}^{n} m_i \ddot{x}_i(t) \tag{65}$$

e assim segue que

$$M\ddot{x}_c = \sum_{j=1}^{n} F_i' \tag{66}$$

Pois a soma das forças internas de um sistema é zero. Em particular quando o sistema é fechado temos $M\ddot{x}_c = 0$ e o centro de massa executa um movimento retilíneo uniforme ou permanece em repouso.
Definindo o momento linear do sistema como

$$P = \sum_{j=1}^{n} m_i \dot{x}_i \tag{67}$$

então

$$\frac{dP}{dt} = \sum_{j=1}^{n} F_i' = M\ddot{x}_c \tag{68}$$

e novamente no caso particular de um sistema fechado temos a conservação do momento linear

$$\frac{dP}{dt} = 0 \tag{69}$$

A definição do momento angular do sistema é a soma dos momentos angulares de cada partícula componente do sistema

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \wedge \dot{x}_i \tag{70}$$

Calculando a derivada em relação a t obtemos:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} x_i \wedge F_i' \tag{71}$$

e novamente no caso de um sistema fechado temos a conservação do momento angular.
Olhamos agora a **Energia Cinética** total do sistema que é definida como:

$$T(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i(t) \tag{72}$$

Então temos para o sistema:

$$\frac{dT}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{n} < m_i \dot{x}_i, \ddot{x}_i > = \sum_{i=1}^{n} < \dot{x}_i, F_i > \tag{73}$$

daí também temos

$$T(t) - T(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} < \dot{x}_i, F_i >= \sum_{i=1}^{n} \tau(F_i, x_i(t)) \tag{74}$$

Para definirmos um sistema potencial procedemos da seguinte forma: se Σ denota um sistema com n partículas denotamos por $x(t)$ o vetor de $\mathbb{R}^{3n}$ dado por $x(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$. Lembre que cada $x_i(t)$ tem três coordenadas. Agora definimos um campo em $\mathbb{R}^{3n}$

$$F(x) = (F_1(x), \cdots, F_n(x))$$

onde cada $F_i(x)$ é o campo de forças atuando na partícula x_i, dessa forma diremos que o sistema é potencial se o campo de forças F for um campo potencial em $\mathbb{R}^{3n}$, ou seja existe uma função $\mathcal{U} : \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}$ cujo gradiente é o oposto do campo de forças. Esta notação também permite escrever a energia cinética da forma

$$T(t) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t} < \dot{x}(t), F(x(t)) > dt \tag{75}$$

E podemos aplicar por exemplo o teorema da conservação de energia se o sistema for potencial.

9. Exemplo: O Problema dos dois corpos

Consideremos o sistema que consiste só de duas partículas com massas $m_1 e m_2$ respectivamente, e um potencial do sistema dado por uma função

$$U : \mathbb{R}^3 \ \times \mathbb{R}^3 \ \to \mathbb{R}$$

que dependa só da distância entre as partículas, ou seja, depende só do módulo $||x_1 - x_2||$. Isto quer dizer que existe uma função $\mathcal{U} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ que satisfaz:

$$U(x_1, x_2) = \mathcal{U}(||x_1 - x_2||) \tag{76}$$

FIGURA 1. Problema dos dois corpos

A equação do movimento fica:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_1} \tag{77}$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_2} \tag{78}$$

onde adotamos a seguinte notação:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = (\frac{\partial U}{\partial x_i^1}, \frac{\partial U}{\partial x_i^2}, \frac{\partial U}{\partial x_i^3})$$

LEMA 7.

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{d\mathcal{U}}{dr} \frac{(x_1 - x_2)}{||x_1 - x_2||}$$

e

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = -\frac{d\mathcal{U}}{dr} \frac{(x_1 - x_2)}{||x_1 - x_2||}$$

Substituindo este resultado na fórmula (77) obtemos:

$$m_1\ddot{x}_1 = -\frac{d\mathcal{U}}{dr}\frac{(x_1-x_2)}{||x_1-x_2||} \tag{79}$$

$$m_2\ddot{x}_2 = \frac{d\mathcal{U}}{dr}\frac{(x_1-x_2)}{||x_1-x_2||} \tag{80}$$

Agora chamando $y = x_1 - x_2$ temos finalmente que as duas equações acima podem ser escritas como:

$$\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\ddot{y}(t) = -\frac{d\mathcal{U}(|y|)}{dr}\frac{(y)}{||y||}$$

Esta é a equação de um movimento com campo de forças central. Em particular se $\mathcal{U}(r) = \frac{-k}{r}$ (potencial Newtoniano), P_1 e P_2 terão trajetórias elíticas em torno do centro de massa. (exercício).

34. Um túnel atravessa a Terra segundo uma corda **AB**. Se um objeto de massa m "cai"no buraco em **A**, quanto tempo ele levará para atingir o buraco em **B**?

35. Determine a lei de movimento de uma partícula em $\mathbb{R}$ com energia potencial $U(x) = A(\exp -2\alpha x - 2\exp -\alpha x)$.

36. Encontre a lei de movimento de uma partícula com potencial $U(x) = -Ax^4$ e energia total igual a zero.

37. Encontre a lei de movimento de uma partícula em $\mathbb{R}^3$ cuja equação é

$$\ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}$$

onde **B** é um campo constante.

38. Esboçar no plano xy a trajetória de uma partícula em $\mathbb{R}^2$, cuja equação do movimento é:

$$\begin{cases} \ddot{x} &= -x \\ \ddot{y} &= -\frac{2}{3}y \end{cases}$$

39. Seja $\Sigma = \{P_1, \ldots, P_n, m_1, \ldots, m_n\}$ um sistema de pontos materiais fechado (i. e. as únicas forças atuantes são as forças internas), mostre que o Centro de Massa realiza um movimento retilíneo uniforme.

40. Suponha que tenhamos um sistema com apenas dois pontos materiais de massa m_1 e m_2 respectivamente e que sobre P_1 além da força interna devido a P_2 atue uma força de módulo constante numa direção fixa. Então qual é a lei de movimento do centro de massa?

41. Suponha que tenhamos um sistema de n pontos materiais fechado onde as forças internas são tais que cada F_{ij} dependa apenas da distância $|P_i - P_j|$, então mostre que este sistema é conservativo.

42. Considere o campo de forças em $\mathbb{R}^2$: $F(x, y) = (2x + y, x - y)$. Mostre que este é um campo potencial exibindo a função potencial e exiba uma integral primeira do sistema

$$m\ddot{x} = 2x + y$$
$$m\ddot{y} = x - y$$

provando que, de fato, a função exibida é uma integral primeira.

43. Um campo potencial tem sua função potencial $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada pelo gráfico
Estudar as curvas de fase identificando claramente os pontos de equilíbrio do sistema. (Não é preciso dizer se são estáveis ou instáveis).

CAPíTULO 3

Cinemática de um corpo rígido

Basicamente queremos neste capítulo mostrar o que é necessário para se descrever o movimento de um corpo rígido, além de tentar dar uma definição matematicamente plausível de um corpo rígido. Na verdade o conceito matemático que vamos definir é *movimento de um corpo rígido.*
Fisicamente (do ponto de vista da física) poderíamos dizer que um corpo rígido é um subconjunto $\Sigma \in \mathcal{E}^3$ que não altera a relação geométrica entre os pontos com o passar do tempo. Matematicamente esta definição não está boa, porque vários conceitos precisam ser rigorasamente definidos, mas o mais intrigante é que para se decidir se um objeto é ou não um corpo rígido, precisamos esperar o tempo passar para fazer uma comparação. Assim de um ponto de vista matemático é mais natural definir o movimento de um corpo rígido do que o corpo rígido em si.

1. Movimento de um corpo rígido

Vamos dar algumas definições de caráter um tanto gerais que paulatinamente nos fornecerão os elementos de um movimento rígido.
O *Movimento De Um Sistema* é uma coleção de transformações diferenciáveis $\varphi_{st} : \mathcal{E}^3 \to \mathcal{E}^3$ com $s \leq t \in I \subset \mathbb{R}$ satisfazendo:

(1) $\varphi_{tt} = Id$
(2) $\varphi_{tu}\varphi_{st} = \varphi_{su}$

Note que esta definição é bastante geral e pode até incluir o movimento de fluídos e corpos elásticos. Estas funções nem precisam ser inversíveis. Para o caso específico de movimentos rígidos faremos hipóteses adicionais sobre estas famílias de funções.
Seja $R(t) = \{O(t), \vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t)$ um referencial móvel diferenciável de $\mathcal{E}^3$. Dizemos que um movimento $P(t)$ é *ligado ao referencial* $R(t)$ quando as coordenadas do ponto $P(t)$ no referencial $R(t)$ são constantes, ou seja $P(t) = O(t) + a\vec{e}_1(t) + b\vec{e}_2(t) + c\vec{e}_3(t)$, a, b e c constantes.
O movimento de um sistema é chamado de movimento rígido quando:

(1) φ_{st} são difeomorfismos globais.
(2) Existe um referencial móvel $R(t)$ tal que para todo ponto $P \in \mathcal{E}^3$ o movimento $P(t) = \varphi_{0t}(P)$ é um movimento ligado a $R(t)$.

Proposição 18. *Num movimento rígido as funções $\varphi_{0t} : \mathcal{E}^3 \to \mathcal{E}^3$ são aplicações afins que preservam a distância euclidiana*

Prova: Lembramos que para que φ_{0t} seja uma aplicação afim deve existir uma aplicação linear A_t tal que

$$\varphi_{0t}(P + \vec{v}) = \varphi_{0t}(P) + A_t\vec{v} \tag{81}$$

Então escolho um ponto P fixo e defino:

$$A_t\vec{v} = \varphi_{0t}(P + \vec{v}) - \varphi_{0t}(P)$$

vamos agora mostrar que esta aplicação é linear ortogonal e não depende de P. seja $R(t)$ um referencial móvel que satisfaz a segunda propriedade da definição de movimento rígido, temos que se $\vec{v} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$ então

$$A_t\vec{v} = a\vec{e}_1(t) + b\vec{e}_2(t) + c\vec{e}_3(t)$$

de onde decorre rapidamente que A_t é linear, e não depende do particular ponto P escolhido. Além do mais também e fácil ver, ja' que todos $R(t)$ é um referencial ortonormal que:

$$< A_t\vec{v}, A_t\vec{w} >=< \vec{v}, \vec{w} >$$

Assim a matriz A_t é ortogonal. QED.
Conclusão: Um movimento rígido fica caracterizado pelo referencial móvel $R(t)$, então para todos os efeitos o movimento de um corpo rígido será uma aplicação $R : I \to \mathcal{E}^3 \times SO(3)$, onde a matriz ortogonal representa a matriz de mudança de base de uma base ligada ao sólido para uma base fixa (constante com o tempo).

2. velocidade de um ponto ligado ao movimento rígido

Consideremos um movimento rígido $R(t) = (O(t), A_t)$ e $P(t)$ um movimento ligado ao movimento rígido. Tomando $R(0)$ como um referencial fixo podemos escrever:

$$P(t) - O = x_i(t)e_i$$

e

$$P(t) - O(t) = x_ie_i(t) = P(t) - O + O - O(t)$$

ou em notação matricial:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix} = \dot{A}_t\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\dot{r}_1\\ \dot{r}_2\\ \dot{r}_3\end{pmatrix}$$

daí

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix} = \dot{A}_tA_t'A_t\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\dot{r}_1\\ \dot{r}_2\\ \dot{r}_3\end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix} = \Omega(t)A_t\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\dot{r}_1\\ \dot{r}_2\\ \dot{r}_3\end{pmatrix}$$

onde já sabemos que $\Omega(t)$ é uma matriz antisimétrica determinada pelo movimento rígido chamada de matriz velocidade angular do movimento rígido.

3. Movimento de um corpo rígido com um eixo de simetria

Consideremos uma reta r de equação $\vec{a} + \alpha\vec{e}_3,\ \alpha \in \mathbb{R}$.
Definição : Seja $S(t) = (P(t), R(t)),\ t \in I$ o movimento de um corpo rígido Σ. Diremos que r é um *eixo de rotação* de S se:

- (i) $P(t) \in r$, para todo $t \in I$;
- (ii)As cordenadas de $\vec{e}_3$ na base $R(t)$ ficam constantes na base $R(t)$.

Suponhamos que r é um eixo de rotação de S e escolhamos uma base ortonormal positiva $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ para base canônica de $\mathbb{R}^3$.
Exercí cio : Mostre que nestas condições, se $M(t)$ é a matriz mudança de base entre $\mathcal{B}$ e $R(t)$ então $m_{i3}(t) = a_i$ (constante), para $i = 1, 2, 3$.
Se suposermos que $R(0) = \{e_1(0),e_2(0),e_3\}$ segue–se então que

$$M(t) = \begin{pmatrix} m_{11}(t) & m_{12}(t) & 0 \\ m_{21}(t) & m_{22}(t) & 0 \\ m_{31}(t) & m_{32}(t) & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercí cio : Prove que existe uma função $\theta : I \to \mathbb{R}$ tal que

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sugestão: Lembre que $\mathcal{B}$ e $R(t)$ são bases ortonormais positivas e que ...
Neste caso podemos calcular $\Omega(t) = \dot{M}(t)M^t(t)$ e obter

$$\Omega(t) = \dot{\theta}(t) \begin{pmatrix} -\sin\theta(t) & -\cos\theta(t) & 0 \\ \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & \sin\theta(t) & 0 \\ -\sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \tag{82}$$

$$= \dot{\theta}(t) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{83}$$

Se usarmos o operador D, vem

$$D(\Omega(t)) = \vec{\omega}(t) = \dot{\theta}(t)\vec{e}_3,$$

o que mostra que no movimento de rotação em torno de um eixo a velocidade angular é $\dot{\theta}(t)\vec{e}_3$ e justifica chamar–se $\dot{\theta}(t)$ por velocidade de rotação de S em torno do eixo de rotação.
Exercí cio: : Seja $S(t) = (P(t), R(t))$ um um movimento de rotação em torno do eixo $r = P(0) + \alpha\vec{e}_3$ como visto antes e considere $Q : I \to \mathcal{E}^3$ um movimento ligado a $S(t)$. Mostre que a distância de $Q(t)$ ao eixo r é constante.

3.1. Movimento com um ponto fixo. Como vimos um movimento de um corpo rígido $S(t) = (A(t), B(t)$ é caracterizado por uma *translação* ($x(t) = A(t) - A(0)$) e uma *"rotação"* que fica caracterizada pela matriz mudança de base $M(t)$ da base canônica $\mathcal{B} = \left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$ para $B(t)$.
Definição : O movimento $S(t)$ de Σ será chamado *movimento com um ponto fixo* se existe $P \in \mathcal{E}^3$ tal que $P(t) = P$, para todo $t \in I$.
Neste caso seja $Q(t)$ o movimento de um ponto ligado a $S(t)$ e consideremos $y(t) = Q(t) - P$.
Ao aplicar a fórmula vista antes para $\dot{y}$ lembrando que $x(t) = \mathbf{O}$, obtem–se

$$\dot{y}(t) = \vec{\omega}(t) \wedge y(t).$$

No parágrafo anterior, quando do estudo do movimento de rotação em torno de um eixo, expressamos a velocidade angular $\vec{\omega}(t)$ em termos da velocidade de rotação $\dot{\theta}(t)$. Vamos fazer aqui algo semelhante mas levando em conta que não temos eixo de rotação.
Para isso usaremos os chamados *ângulos de Euler*

4. Ângulos de Euler

Suponha que o movimento rígido tenha um ponto fixo O. Neste caso o movimento fica determinado conhencendo-se o comportamento da matriz A_t da transformação afim que dá a matriz de mudança de base da base $\{\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t)\}$ para a base $\{\vec{e}_1(0), \vec{e}_2(0), \vec{e}_3(0)\} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ por exemplo. Como A_t é um elemento de $SO(3)$ vamos usar uma parametrização para indentificarmos uma parte deste conjunto com $\mathbb{R}^3$. Vamos supor que $\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_3(t) \neq 0$ e definimos os seguintes ângulos:
1) Ângulo de nutação $\theta \in (0, \pi)$ é o ângulo entre $\vec{e}_3$ e $\vec{e}_3(t)$.
2) Ângulo de Precessão $\varphi \in (0, 2\pi)$ é o ângulo entre $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_3(t)$. O versor deste último vetor chamaremos de *vetor nodal* $\vec{n}(t)$.
3) ângulo de rotação própria $\psi \in (0, 2\pi)$ é o ângulo entre $\vec{n}(t)$ e $\vec{e}_1(t)$

FIGURA 1. Angulos de Euler

Claro que todos estes ângulos variam diferenciavelmente com o tempo t. A expressão de A_t em função dos ângulos de Euler é a seguinte:

$$A_t = A_\varphi A_\theta A_\psi \tag{84}$$

onde

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$A_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

são as matrizes que correspondem à mudança de variável entre os referenciais $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, $\{\vec{n}(t), \vec{v}(t), \vec{e}_3\}$, $\{\vec{n}(t), \vec{v}_1(t), \vec{e}_3(t)\}$ e $\{\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t)\}$.
Podemos assim também calcular a matriz de velocidade angular pela fórmula:

$$\Omega(t) = \dot{A}_t A_t'$$

obtendo:

$$\Omega(t) = \Omega_\varphi(t) + A_\varphi \Omega_\theta(t) A_\varphi' + A_\varphi A_\theta \Omega_\psi(t) A_\theta' A_\varphi' \tag{85}$$

onde

$$\Omega_\varphi(t) = \dot{\varphi}(t) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_\psi(t) = \dot{\psi}(t) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_\theta(t) = \dot{\theta}(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Usando o operador D visto no início do curso vemos que esta fórmula está associada a expressão vetorial da velocidade angular (exercício)

$$\vec{\omega}(t) = \dot{\theta}\vec{n}(t) + \dot{\varphi}\vec{e}_3 + \dot{\psi}\vec{e}_3(t)$$

CAPíTULO 4

Dinâmica de um corpo rígido

1. Introdução:

O objetivo deste capítulo é estudar as equações do movimento de um corpo rígido e estabelecer algumas propriedades para alguns típos de movimento rígido. Vamos usar neste capítulo a notação introduzida no capítulo anterior, lembrando que para todos os efeitos um movimento rígido para nós é uma curva diferenciavél no espaço dos referenciais móveis. Associado ao conceito de movimento rígido temos portanto os conceitos de *Referencial ligado ao espaço* e *Referencial ligado ao sólido.*
O paradígma para o estudo da dinâmica dos corpos rígidos é a dinâmica do sistema de partículas, usando a terceira lei de Newton forte para as forças internas. Usaremos portanto uma generalização dos resultados para o momento linear e momento angular para o nosso caso específico.

2. Função distribuição de massas

Para a definição de um sistema de partículas a cada ponto do sistema associamos uma massa de forma que pudessemos a cada ponto aplicar a segunda lei de Newton. No caso de um corpo rígido esta distribuição de massa está associada com uma função distribuição de massa (ou função de densidade de massa).

Definição 1. Uma função $\delta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^+$ será chamada de *função distribuição de massas*, quando seu suporte for um conjunto compacto de $\mathbb{R}^3$. E além disso este suporte tem massa positiva.

O *suporte* de uma função $\delta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^+$ é o conjunto

$$S_\delta = \mathrm{cl}\{x \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \delta(x) \neq 0\}$$

A segunda exigência é um pouco mais técnica, e mais restritiva, pois exige que

$$\int_{S_\delta} \delta(x,y,z)dxdydz \neq 0$$

Se usarmos então funções no sentido usual, notamos que estamos excluindo funções cujo suporte seja enumerável (em particular finito), e suportes com volume zero. Do ponto de vista prático podemos dizer que não perdemos muito, pois podemos sempre argumentar que no mundo real nada tem dimensão zero, mas do ponto de vista matemática nos falta um conceito que é exatamente o conceito de distribuição, que por sinal está fora do escopo deste curso.

3. Massa e Centro de Massa de um corpo rígido

Em primeiro lugar atentemos para o fato de que ainda não definimos o corpo rígido, mas apenas movimento de um corpo rígido. Vamos então definir formalmente um

corpo rígido como o movimento de um corpo rígido mais uma função distribuição de massas δ satisfazendo as hipóteses acima.
Seja $R(t) = (O(t), \{\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t)\})$ um referencial móvel ligado ao movimento de um corpo rígido, então identificaremos nosso corpo rígido "físico" com o conjunto

$$\mathcal{S}_t = \{O(t) + x\vec{e}_1(t) + y\vec{e}_2(t) + z\vec{e}_3(t) \text{ onde } (x,y,z) \in S_\delta\}$$

Chamaremos de *massa total* do corpo rígido o número:

$$M = \int_{S_\delta} \delta(x,y,z)dxdydz$$

As coordenadas do *centro de massa* serão dadas por

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{1}{M}\int_{S_\delta} x\delta(x,y,z)dxdydz \\ y_{cm} &= \frac{1}{M}\int_{S_\delta} y\delta(x,y,z)dxdydz \\ z_{cm} &= \frac{1}{M}\int_{S_\delta} z\delta(x,y,z)dxdydz \end{aligned}$$

4. Momento angular de um corpo rígido

Vamos interpretar o corpo rígido como um sistema infinito de partículas satisfazendo a terceira lei de Newton forte. Neste caso lembremos que para um sistema de partículas o momento angular do sistema era calculado como:

$$\vec{M}(t) = \sum_i m_i \vec{x}_i(t) \wedge \dot{\vec{x}}_i(t)$$

Sendo $R = (O, \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\})$ um referencial preso ao espaço euclidiano e $\vec{x}(t)$ os vetores tais que $P(t) = O + \vec{x}(t) \in \mathcal{S}_t$ Podemos então definir o momento angular como:

$$\vec{M}(t) = \int_{S_\delta} \delta(x,y,z)\vec{x}(t) \wedge \dot{\vec{x}}(t)dxdydz$$

Mas esta fórmula não deixa explícito o que realmente depende de (x,y,z), vamos então escrever

$$\vec{y}(t) = x\vec{e}_1(t) + y\vec{e}_2(t) + z\vec{e}_3(t)$$

de modo que temos:

$$\vec{x}(t) = \vec{y}(t) + \vec{r}(t)$$

sendo $\vec{r}(t) = O(t) - O$, desta forma

$$\vec{M}(t) = \int_{S_\delta} \delta(x,y,z)(\vec{y}(t) + \vec{r}(t)) \wedge (\dot{\vec{y}}(t) + \dot{\vec{r}}(t))dxdydz$$

expandindo esta fórmula obtemos

$$\begin{aligned} \vec{M}(t) = & \underset{A}{\int_{S_\delta} \delta(x,y,z)\vec{y}(t) \wedge \dot{\vec{y}}(t)dxdydz} + \underset{B}{\int_{S_\delta} \delta(x,y,z)\vec{y}(t) \wedge \dot{\vec{r}}(t)dxdydz} \\ & + \underset{C}{\int_{S_\delta} \delta(x,y,z)\vec{r}(t) \wedge \dot{\vec{y}}(t)dxdydz} + \underset{D}{\int_{S_\delta} \delta(x,y,z)\vec{r}(t) \wedge \dot{\vec{r}}(t)dxdydz} \end{aligned}$$

Agora observamos que apenas $\vec{y}(t)$ depende de (x,y,z) e efetuamos os cálculos para as diversas partes. Obtemos

$$\begin{aligned}
D &= M\vec{r}(t) \wedge \dot{\vec{r}}(t) \\
C &= M\vec{CM} \wedge \dot{\vec{r}}(t) \\
B &= M\vec{r}(t) \wedge (\vec{\omega}(t) \wedge \vec{CM}) \\
A &= \int_{S_\delta} \delta(x,y,z)x^2 + y^2 + z^2 dxdydz\vec{\omega}(t) - \int_{S_\delta} \delta(x,y,z) < \vec{y}(t), \vec{\omega}(t) > \vec{y}(t)dxdydz
\end{aligned}$$

Vamos definir *operador de momento* como sendo o operador linear:

$$J_t(\vec{v}) = \int_{S_\delta} \delta(x,y,z)x^2 + y^2 + z^2 dxdydz\vec{v} - \int_{S_\delta} \delta(x,y,z) < \vec{y}(t), \vec{v} > \vec{y}(t)dxdydz$$

assim vemos que $A = J_t(\vec{\omega}(t))$

PROPOSIÇÃO 19. *J_t é uma aplicação linear simétrica definida positiva*

Temos que mostrar que (a) $< J_t(\vec{v}), \vec{w} > = < \vec{v}, J_t(\vec{w}) >$

(b) $< J_t(\vec{v}), \vec{v} > \geq 0$ e $< J_t(\vec{v}), \vec{v} > = 0 \iff \vec{v} = 0$

Note que quando o movimento do corpo rígido tem um ponto fixo O então podemos tomar $O(t) = O$ e B, C e D se anulam sendo que neste caso temos:

$$\vec{M}(t) = J_t(\vec{\omega}(t)) \tag{86}$$

Observação: Usamos o fato de geometria analítica: $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = < \vec{a}, \vec{c} > \vec{b} - < \vec{a}, \vec{b} > \vec{c}$.

44. Achar a matriz de J_t na base $\{\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t)\}$

Resposta:

$$[J_t] = \begin{pmatrix} \int_{S_\delta} \delta(y^2+z^2)dV & -\int_{S_\delta} \delta(xy)dV & -\int_{S_\delta} \delta(xz)dV \\ -\int_{S_\delta} \delta(xy)dV & \int_{S_\delta} \delta(x^2+z^2)dV & -\int_{S_\delta} \delta(yz)dV \\ -\int_{S_\delta} \delta(xz)dV & -\int_{S_\delta} \delta(yz)dV & \int_{S_\delta} \delta(x^2+y^2)dV \end{pmatrix}$$

A esta matriz chamaremos *Tensor de Inércia* ou *Matriz de Inércia*, veremos a seguir uma justificativa para este nome, antes porém notamos que esta matriz não depende do tempo , só da distribuição de massas.

A seguinte proposição é fácil de provar:

PROPOSIÇÃO 20. *J_t tem três autovalores reais positivos.*

Um autovetor de J_t chamaremos de autovetor principal, a direção chamaremos de *Direção Principal*.

PROPOSIÇÃO 21. *Existe um referencial móvel ortonormal composto somente de vetores principais.*

5. Energia cinética de um movimento rígido com um ponto fixo

Lembramos novamente o caso de um sistema de partículas, onde a energia cinética é calculada como:

$$T(t) = \sum \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2$$

No caso de um corpo rígido a energia cinética total será:

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_{S_\delta} \delta(x,y,z)\dot{\vec{y}}^2(t)dxdydz$$

Lembrando que em nosso caso:

$$\dot{\vec{y}}^2(t) = < \vec{\omega}(t) \wedge \vec{y}(t), \vec{\omega}(t) \wedge \vec{y}(t) >$$

e usando o fato de que:

$$< \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b} > = < \vec{a}, \vec{b}(\vec{a} \wedge \vec{b}) >$$

obteremos que

(87) $$T(t) = < \vec{\omega}(t), J_t(\vec{\omega}(t)) >$$

6. O Elipsóide de Inércia

Fixemos momentaneamente um tempo $t > 0$ e consideremos o seguinte subconjunto do espaço afim:

$$\mathcal{E}_t = \{P \in \mathcal{E}^3 :< P - O, J_t(P - O) > = 1\}$$

Vamos supor que o referencial móvel $\{\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t)\}$ é composto de vetores principais. Neste caso a matriz de inércia $[J_t]$ fica:

$$[J_t] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Neste caso um ponto

$$P = O + x\vec{e}_1(t) + y\vec{e}_2(t) + z\vec{e}_3(t)$$

pertence ao conjunto $\mathcal{E}_t$ se e somente se as coordenadas (x, y, z) satisfazem

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 1$$

ou

$$\frac{x^2}{(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}})^2} + \frac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}})^2} + \frac{z^2}{(\frac{1}{\sqrt{\lambda_3}})^2} = 1$$

Note que esta relação não depende do tempo que fixei e este conjunto define um elipsóide no espaço afim que se movimenta solidariamente ao corpo rígido. Este conjunto será chamado de *Elipsóide de Inércia* do corpo rígido.
Vimos então dois conceitos que levam em seu nome a palavra inércia: a matriz e o elipsóide de Inercia. Vamos tentar associa-los ao conceito de momento de inércia.

7. Momento de Inércia

Em primeiro lugar veremos a definição do momento de inércia de um ponto em relação a uma reta. Seja P um ponto com uma massa m e β uma reta qualquer. Chamemos de d a distância do ponto até a reta o momento de inércia será o numero $J_\beta(P) = md^2$

FIGURA 1. Momento de um ponto em relação a reta

Se escrevemos a reta $\beta = O + \lambda\vec{w}$ então podemos calcular a distânciado ponto à reta analiticamente pela fórmula:

$$d^2 = \frac{< \vec{w}, (P - O) \wedge (\vec{w} \wedge (P - O)) >}{< \vec{w}, \vec{w} >}$$

Assim a fórmula do momento de inércia é:

$$J_\beta(P) = m\frac{< \vec{w}, (P-O) \wedge (\vec{w} \wedge (P-O)) >}{< \vec{w}, \vec{w} >} \tag{88}$$

Para calcular o momento de inércia de um corpo rígido que se movimenta e torno de um ponto fixo O em relação a uma reta que passa por este ponto fixo calculamos:

$$J_\beta(S_\delta) = \int_{S_\delta} \delta(x,y,z)(d(P,\beta))^2 dxdydz = \int_{S_\delta} \delta(x,y,z)(\frac{< \vec{w}, \vec{y}(t) \wedge (\vec{w} \wedge \vec{y}(t)) >}{< \vec{w}, \vec{w} >})dxdydz$$

Como $\vec{w}$ não depende de (x,y,z) temos:

$$J_\beta(S_\delta) = \frac{1}{< \vec{w}, \vec{w} >} < \vec{w}, \int_{S_\delta} \delta(x,y,z)\vec{y}(t) \wedge (\vec{w} \wedge \vec{y}(t))dxdydz >$$

ou

$$J_\beta(S_\delta) = \frac{< \vec{w}, J_t(\vec{w} >)}{< \vec{w}, \vec{w} >} \tag{89}$$

Se tomarmos $\vec{w}$ de tal forma que $O+\vec{w}$ esteja no elipsóide de inércia então $J_\beta(S_\delta) = \frac{1}{<\vec{w},\vec{w}>}$. Também nota-se que se $\vec{w}$ for alguma das direções principais, por exemplo $\vec{e}_1(t)$ então o momento de inércia será o autovalor deste vetor principal (λ_1).

8. O Teorema de Steiner

Referências Bibliográficas

[1] R. Abraham and J. E. Marsden. *Foundations of Mechanics*. The Benjamin/Cummings Publ. Co., Reading, 1978.

[2] V. Arnold. *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique*. Éditions Mir, Moscou, 1976.

[3] I. Q. Barros and M. V. Garcia. *Mecânica Analítica Clássica*. Ed. Edgard Blücher, São Paulo, 1995.

[4] E. Cartan. *Leçons sur les invariants Integraux*. Hermann, Paris, 1971.

[5] N. G. Chetaev. *Theoretical Mechanics*. Mir Publisher, 1978.

[6] A. Donnedu. *Mathématiques Superieur et Spéciales*, volume 2.vol. Dunod, Paris, 3. ed. edition, 1973.

[7] G. R. Fowles. *Analytical Mechanics*. Saunders, Philadelphia, 4th edition, 1986.

[8] F. Gantmacher. *Lectures in Analytical Mechanics*. Mir Publishers, Moscou, 1970.

[9] C. Godbillon. *Geométrie différentielle et Mécanique Analytique*. Hermann, Paris, 1969.

[10] H. Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 2nd edition, 1980.

[11] G. Hamel. *Theoretische Mechanik*. Number 57 in Grundlehren der mathematischen Wissenschaft. Springer Verlag, Berlin, 1949.

[12] G. L. Kotkin and V. G. Serbo. *Problemas de Mecánica Clásica*. Editorial Mir, Moscou, 1980.

[13] L. Landau and E. Lifchitz. *Mécanique*. Number I in Physique Theorique. Editions Mir, Moscou, 1966.

[14] J. B. Marion and S. T. Thornton. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Saundres, Philadelphia, 4th edition, 1995.

[15] W. M. Oliva. Geometric mechanics. Technical Report RT-MAP-0005, Dpt of Applied Mathematics - USP, São Paulo, Brazil, June 2000.

[16] F. A. Scheck. *Mechanics, from Newton Laws to Deterministic Chaos*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1994.

[17] C. L. Siegel and J. K. Moser. *Lectures on Celestial mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[18] D. J. Struik. *Lectures on Classical Differential Geometry*. Dover, New York, second edition, 1988.

[19] K. R. Symon. *Mechanics*. Addison-Wesley, 3rd edition, 1971.

[20] J. L. Synge and B. A. Griffith. *Mecânica Racional*. Editora Globo, Porto Alegre, segunda ed. edition, 1969.

[21] C. Truesdell. *Essays in history of Mechanics*. Springer-Verlag, 1968.

[22] G. Vivanti. *Nuovi Esercizi di analisi infinitesimale*. Mattei & C. editori, Pavia, 1916.

[23] H. Weyl. *Raum-Zeit-Materie: Vorlesungen über Allgemeine Relativitätstheorie* . Heildelberger Taschenbucher. Springer Verlag, Berlin, 7. ed. edition, 1988.