Primeira prova de MAP0125 P1

Cada questão vale dois pontos.

1. Execute três iterações do método da bisecção, e três iterações do método da falsa posição para encontrar o zero de

$$f(x) = \frac{-1}{x+1} + x \tag{1}$$

no intervalo $I = [0, 1]$.

Solução:

a	b	$x_0 = (a+b)/2$	$f(a)f(x_0)$
0	1	0.5	$+$
0.5	1	0.75	$-$
0.5	0.75	0.625	$-$

e

a	b	$x_0 = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$	$f(a)f(x_0)$
0	1	0.6666667	$-$
0	0.6666667	0.625	$-$
0	0.625	0.6190476	$-$

2. Ache uma solução aproximada da equação abaixo:

$$x^2 - 4 = \frac{-1}{x+1} \tag{2}$$

Solução: Tem vários jeitos de fazer. Pelo gráfico abaixo há uma solução no intervalo $[-3, -2]$.

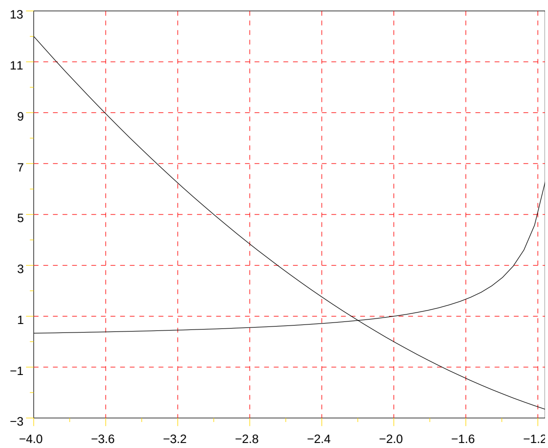

Figura 1: Parte do gráfico da equação

Transformamos a equação em $x^3 + x^2 - 4x - 3 = 0$ e usando o método de Newton com o chute $x_0 = -2$. achei $x = -2.1986912$. As outras soluções são $x = 1.9122292$ e $x = -0.7135378$

3. Em cada uma das funções abaixo verifique se ela possui um **único** zero no intervalo

$I = [0, 2]$. Justifique.

$$f_1(x) = \frac{-1}{x} + x \tag{3}$$
$$f_2(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3 \tag{4}$$
$$f_3(x) = (\log(x) + x)(x - 1) \tag{5}$$
$$f_4(x) = 4x^3 - 12x^2 + 11x - 3 \tag{6}$$

Solução: f_1 e f_2 têm um único zero no intervalo. f_3 tem duas raizes e f_4 tem três zeros.

4. A função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ possui as raizes 1 e 3. Se fôssemos calcular as raizes usando o método de Newton, que chute inicial x_0 poderíamos escolher para que a sequência produzida pelo método de Newton convirja para a raiz 1. Dê uma justificativa.
Solução: f tem um ponto de mínimo em $x = 2$ para todo $x < 2$ o método converge para 1

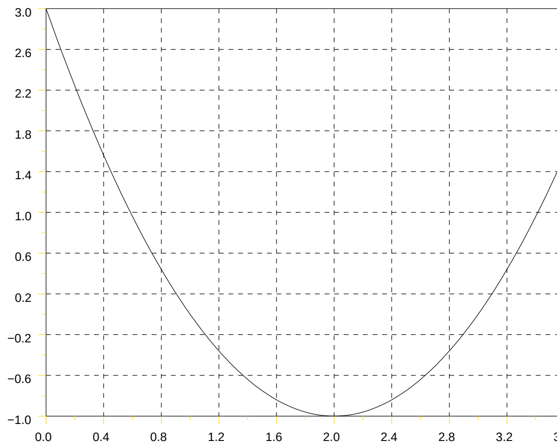

Figura 2: Gráfico de f

5. Escreva a matriz extendida do sistema linear abaixo e ache a solução usando o método da eliminação de Gauss com pivotação.

$$x_1 + x_3 = 4 \tag{7}$$
$$2x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \tag{8}$$
$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1 \tag{9}$$

Solução:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2. & 2. & -1. & 5. \\ 1. & 0. & 1. & 4. \\ 1. & -2. & 2. & -1. \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 1.5 & 1.5 \\ 0 & -3 & 2.5 & -3.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 2.5 & -3.5 \\ 0 & -1 & 1.5 & 1.5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 2.5 & -3.5 \\ 0 & 0 & 0.6666667 & 2.6666667 \end{pmatrix}$$

Daí temos $x_3 = 4$, $x_2 = 4.5$ $x_1 = 0$