

Escalonamento de sistemas lineares:

Um sistema linear:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \quad (1)$$

$$\vdots \quad (2)$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \quad (3)$$

é um sistema *na forma triangular* quando os pesos a_{ij} satisfazem: $a_{ij} = 0$ sempre que $i > j$.

Por exemplo, qual destes dois sistemas está na forma triangular: Este

$$3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \quad (4)$$

$$2x_2 - x_3 = 0 \quad (5)$$

$$x_2 + x_3 = 6 \quad (6)$$

ou este

$$3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \quad (7)$$

$$2x_2 - x_3 = 0 \quad (8)$$

$$x_3 = 4 \quad (9)$$

Agora ache a solução do sistema triangular. O sistema triangular é fácil de resolver. Podemos agora pensar em transformar um dado sistema linear num sistema linear equivalente mas que esteja na forma triangular. Faremos isso usando aquelas duas operações básicas que falamos nas aulas anteriores. Este método é o que chamamos de escalonamento de um sistema linear.

Ilustramos com um exemplo: O sistema linear é

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \quad (10)$$

$$2x_1 - x_3 = 2 \quad (11)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -3 \quad (12)$$

$$(13)$$

Obviamente o sistema não está na forma triangular pois ... (complete)

Vamos então aplicar aquelas transformações de mudanças de equações e substituições de equações seguindo a seguinte estratégia, primeiro vamos achar um sistema equivalente na qual os pesos da variável x_1 sejam zero a partir da segunda equação. Depois um sistema equivalente cujos pesos da variável x_2 sejam zero a partir da terceira equação.

No primeiro passo. No sistema acima substituímos a segunda equação pela segunda equação mesmo multiplicada por $-3/2$ somada à primeira equação. ($E_2^{nova} \leftarrow -3/2 * E_1 + E_2$)

$E_2^{velha} + E_1^{velha}$). E também trocamos a terceira equação por ela mesma multiplicada por -3 mais a primeira equação. ($E_3^{nova} \leftarrow -3 * E_3^{velha} + E_1^{velha}$). Obtemos então o sistema:

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \quad (14)$$

$$2x_2 + 0.5x_3 = -2 \quad (15)$$

$$-x_2 - 4x_3 = 10 \quad (16)$$

Este sistema ainda não é triangular mas com mais um passo podemos achar um sistema triangular equivalente mudando apenas a terceira equação. Como podemos fazer isso? O sistema triangular fica:

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \quad (17)$$

$$2x_2 + 0.5x_3 = -2 \quad (18)$$

$$?x_1 + ?x_2 + ?x_3 = ? \quad (19)$$

Agora resolva esta equação e para cada sistema linear ache a matriz de pesos e o vetor dos termos independentes.