Exercícios Resolvidos - Cálculo Numérico

Eduardo Oda

21 de junho de 2005

Lista 5

Exercício 2 Achar a decomposição LU da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3.5 & 2.5 \end{bmatrix}$$

Resolução Para encontrar a decomposição LU de uma matriz basta fazer a eliminação de Guass guardando os multiplicadores de cada linha. Vamos guardar esses multiplicadores nas posição que eles zeraram. Por exemplo, na primeira iteração queremos zerar a primeira coluna da segunda linha, então multiplicamos a primeira linha por 1 e subtraímos ela da segunda:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3.5 & 2.5 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ \mathbf{0} & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3.5 & 2.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sabemos que a posição em negrito vai ser sempre zero, então podemos guardar 1 nessa posição para lembrarmos por qual valor multiplicamos a primeira linha. Procedendo da mesma maneira, sempre usando a primeira linha para zerar e guardando o multiplicador obtemos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3.5 & 2.5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ \mathbf{1} & 1 & 2 & 1 \\ \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0.5} & 0.5 & 2 & 2.5 \end{bmatrix} \tag{0.1}$$

Agora vamos usar a segunda linha para zerar a segunda colunas das linhas 3 e 4:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3.5 & 2.5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ \mathbf{1} & 1 & 2 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1 & 0 \\ \mathbf{0.5} & \mathbf{0.5} & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{0.2}$$

Agora a zeramos a terceira coluna da quarta linha usando a terceira linha:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3.5 & 2.5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ \mathbf{1} & 1 & 2 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1 & 0 \\ \mathbf{0.5} & \mathbf{0.5} & \mathbf{1} & 2 \end{bmatrix} \tag{0.3}$$

Pronto, agora para encontrar a decomposição LU basta usar os valores encontrados:

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{0.4}$$

Note que se quisermos resolver um sistema linear da forma $Ax = b$, onde a matriz A é a dada acima e b é qualquer vetor dado, então podemos substituir A por LU obtendo um novo sistema: $LUx = b$. Se chamarmos Ux de z, ou seja, $Ux = z$, temos: $Lz = b$, esse sistema é fácil resolver pois L é uma matriz triangular. Então, depois de encontrar z, resolvemos o sistema: $Ux = z$, que também é fácil de resolver pois U é triangular.

Você entendeu? Então resolva o exercício 3 da lista 5.

Lista 7

Exercício 2 Sabemos os valores aproximados da exponencial em alguns pontos (Tabela 1). Esses valores podem ter sido obtidos experimentalmente, como a observação (e registro) da densidade de uma população de bactérias no tempo x. Por exemplo, se x for horas, então na primeira hora temos $e^1 = 2.718$ bactérias por milimetro quadrado (isso é só ilustrativo, não conheço nada de bactérias!). Por algum motivo não queremos utilizar a expressão da exponencial, talvez algum motivo técnico o apenas por conveniência. Então podemos utilizar uma técnica de interpolação, nesse caso o Método de Newton.

x	1.0	1.1	1.2
e^x	2.718	3.004	3.320

Tabela 1: Tabela a ser interpolada

Para escrever o polinômio interpolador na forma de Newton, devemos escrever a tabela das diferenças divididas (Tabela 2):

x	y	Δ^1	Δ^2
1.0	2.718		
		2.860	
1.1	3.004		1.5
		3.160	
1.2	3.320		

Tabela 2: Tabela de diferenças divididas

Agora fica simples escrever o polinômio na forma de Newton:

Agora podemos calcular, pelo polinômio interpolador, o valor da exponencial em 1.05: $\exp(1.05) = e^{1.05} = p(1.05) = 2.857$.

Qual o erro que estamos cometendo? Sabemos que nas condições do problema que estamos tratando, o módulo do erro é majorado por (por quê?):

$$|E(x)| \leq \frac{|(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)|}{(n + 1)!} \max_{z \in I} |f^{(n+1)}(z)| \tag{0.5}$$

Sabemos que a exponencial é crescente e que $(e^x)''' = e^x$, então $\max_{z\in[1.0,1.2]} |(e^z)'''| = e^{1.2} = 3.320$.

Então o erro cometido é de no máximo, em módulo, $\frac{|(1.05-1.0)(1.05-1.1)(1.05-1.2)|}{6} e^{1.2} = 0.0002075$.

Lista 8

Exercício 2 São dadas uma tabela (Tabela 3) abaixo e quatro funções (Tabela 4):

x	0	1	2	3
y	1	0	-1	0

Tabela 3: Tabela a ser aproximada

$$f_1(x) = 1 \quad \text{e} \quad f_2(x) = x$$
$$g_1(x) = x \quad \text{e} \quad g_2(x) = x^2$$

Tabela 4: Função para definição das funções aproximadoras

Queremos encontrar a função da família $f(x) = af_1(x) + bf_2(x)$ que melhor aproxima a tabela 3, pelo MMQ. Ou seja, vamos encontrar os parâmetros a e b que minimizam o quadrado do erro.

Para fazer isso basta resolver o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} \langle f_1, f_1 \rangle & \langle f_1, f_2 \rangle \\ \langle f_2, f_1 \rangle & \langle f_2, f_2 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f_1, y \rangle \\ \langle f_2, y \rangle \end{bmatrix}$$

Onde:

$$\begin{aligned} \langle f_i, f_j \rangle &= f_i(0)f_j(0) + f_i(1)f_j(1) + f_i(2)g_j(2) + f_i(3)f_j(3) \\ \langle f_i, y \rangle &= f_i(0)1 + f_i(1)0 + f_i(2)(-1) + f_i(3)0 \end{aligned}$$

Então o sistema fica:

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Resolvendo esse sistema obtemos $a = 0.6$ e $b = -0.4$, logo a função da família $f(x) = af_1(x) + bf_2(x)$ que melhor aproxima a Tabela 3 é $f(x) = 0.6 - 0.4x$

Agora usando esse mesmo processo para as funções g_1 e g_2, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} 14 & 36 \\ 36 & 98 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Resolvendo esse sistema encontramos que $a = -0.6842105$ e $b = 0.2105263$, logo a função da família $g(x) = ag_1(x) + bg_2(x)$ que melhor aproxima a Tabela 3 é $g(x) = -0.6842105x - 0.2105263x^2$