Lista de exercícios de MAP2321 $\boxed{8}$

1. considere o sistema de controle linear

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \tag{1}$$

A- Mostre que o sistema é controlável.
B- O sistema é equivalente a um sistema da forma $\dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}u$ onde

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & x \end{pmatrix} \text{ e } \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Ache a matriz $\tilde{A}$ e a matriz P tal que $\tilde{A} = PAP^{-1}$.
2. considere agora:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \tag{3}$$

A- Mostre que o sistema não é controlável, e portanto não é completamente estabilizável.
B- Para toda matriz $K \in M_{1x2}$ calcule o polinômio característico de $A + BK$ e seu espectro.
C- Exiba um $\omega > 0$ tal que para algum $x_0 \in \mathbb{R}^2$ e para toda matriz K como acima não esteja satisfeita a relação

$$|| \exp t(A + BK)x_0|| \leq M \exp(-\omega t)||x_0|| \tag{4}$$

3. Dado o sistema linear:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u \tag{5}$$

A- Verifique que o sistema é controlável.
B- Encontre uma matriz $L \in M_{2x3}$ e um vetor $v \in \mathbb{R}^2$ tal que o par $(A + BL, Bv)$ seja controlável, onde A e B são as matrizes dos coeficientes do sistema dado na equação (5).
4. Sejam dadas as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

A- A matriz A é estável?
B- Achar uma solução da equação estática de Liapunov

$$A'Q + QA = -R$$

onde $R = C'C$.
C- Tente achar uma matrix $C_1 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ tal que o par (A, C_1) não seja observável. Neste caso a equação de Liapunov acima com $R = C_1'C_1$ pode ter solução Q definida positiva? E definida não negativa?