Lista de exercícios de MAP2321 $\boxed{5}$

1. Calcular as matrizes $\exp(tA)$ quando A for:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Seja $\mathcal{U} = \{u : [0,T] \to \mathbb{R}^m \text{ ; integráveis.}\}$ e $H(t)$ uma aplicação que assume valores no conjunto das matrizes $n \times m$ definida no intervalo $[0,T]$, integrável. Mostre o seguinte:

1. $\mathcal{U}$ é um espaço vetorial.
2. $\mathcal{T}(u(.)) = \int_0^T H(s)u(s)ds$ é um operador linear com imagem em $\mathbb{R}^n$.
3. $G = \int_0^T H(s)H'(s)ds$ é uma matriz simétrica $n \times n$.
4. $v \in \mathbb{R}^n$ está na imagem de $\mathcal{T}$ se e somente se v está na imagem de G.

3. Defino a translação no espaço $\mathcal{U}$ dos controles admissíveis como

$$\theta_s u(t) = u(t+s)$$

Seja $\Phi(t, t_0, x_0, u(.))$ a aplicação de transferência de estados de um sistema linear $\dot{x} = Ax + Bu(t)$. Mostre que esta aplicação satisfaz:

$$\Phi(t+k, t_0+k, x_0, u(.)) = \Phi(t, t_0, x_0, \theta_k u(.))$$